LỜI TỰA

Mục đích của Sức bền vật liệu là nhằm trang bị cho kỹ sư và sinh viên những kiến thức cần thiết để giải quyết các bài toán kỹ thuật liên quan tới các khâu từ thi công, thẩm định đến thiết kế. Chính vì thế mà đặc trưng cuối cùng trong quá trình nghiên cứu của khoa học này là việc áp dụng các kết quả nghiên cứu vào thực tiễn và chỉ có thông qua việc ứng dụng vào thực tiễn khoa học này mới có thể đứng vững và phát triển.

Sức bền vật liệu có một vị trí đặc biệt trong cơ học, bởi nó đóng vai trò của một chiếc cầu nối giữa các môn khoa học cơ bản với các môn cơ học chuyên ngành. Hơn nữa, nó lại là viên gạch đầu tiên đặt nền móng cho lĩnh vực cơ học vật rắn biến dạng - Một lĩnh vực chuyên nghiên cứu các quy luật tổng quát về sự hình thành và phát triển các tác dụng cơ học sinh ra trong lòng các vật rắn thực do tác dụng ngoài bất kỳ gây ra.

Kinh nghiệm làm việc với sinh viên trong nước cũng như nước ngoài cho thấy, họ gặp rất nhiều khó khăn khi vận dụng lý thuyết vốn rất trừu tượng và phức tạp của môn học này vào giải các bài tập dưới dạng mô hình dù đã cho sẵn và càng khó khăn hơn khi áp dụng vào các bài toán của thực tế kỹ thuật. Mặt khác, phần lớn trong số những sinh viên say mê nghiên cứu môn khoa học này thường không thoả mãn với các bài tập giải mẫu theo một khuôn mẫu cứng nhắc như vẫn thường làm trong các sách lý thuyết và bài tập hiện nay, mà họ thường muốn có được những hiểu biết đột phá và sâu sắc hơn vượt ra ngoài khuôn khổ các bài giảng đang có của môn học này ở nước ta. Sách được biên soạn thành nhiều tập nhằm phục vụ cho công tác dạy và học trong các trường đại học kỹ thuật, cho nhu cầu ôn thi cuối khóa, ôn thi tuyển vào các hệ cao học, nghiên cứu sinh và phục vụ cho nhu cầu tham khảo nâng cao của cán bộ giảng dạy trẻ, kỹ sư đang trực tiếp thi công, thẩm định và thiết kế trong các lĩnh vực công nghiệp. Với mục đích đó, một mặt ngoài những *bài toán ở mức độ dễ và trung bình với nhiều phương án giải khác nhau phục vụ cho đông đảo sinh viên các chuyên ngành: cơ khí chế tạo máy, cơ khí ôtô, cơ khí đóng tàu, kỹ thuật hàng không, cơ khí hóa chất, cơ khí giao thông vận tải, xây dựng, cầu đường, thuỷ lợi, cảng v.v... Mặt khác nhận thấy rằng ngày nay máy tính đã là một phương tiện làm việc không thể thiếu trong hầu hết các lĩnh vực của đời sống với hầu hết các cán bộ khoa học và sinh viên, tác giả đã đưa vào trong sách này nhiều bài toán được giải trên máy tính bằng chương trình BK45 của tác giả thay cho việc giải bằng tay vốn tốn rất nhiều thời gian và công sức. Ngoài ra sách còn giới thiệu nhiều bài toán khó về ý nghĩa vật lý kỹ thuật vượt ra ngoài khuôn khổ thông thường của sức bền vật liệu, về tính phức tạp cũng như cách đặt bài toán, nhằm giúp các sinh viên giỏi rèn luyện, tích luỹ năng lực hiểu biết để có thể làm chủ được các phương pháp tính toán, tự tin trước những vấn đề mới gặp phải và gợi mở cho họ những phương pháp tư duy mới khác nhau trên cùng một vấn đề mặc dù có thể đã rất cũ, giúp họ tìm hiểu mối liên hệ không thể tách rời giữa những kiến thức hàn lâm và thực tiễn kỹ thuật.*

Với lòng mong mỏi nâng cao trí tuệ khoa học cho thế hệ trẻ, chúng tôi thấy cần giới thiệu cuốn ***Tuyển tập các bài toán giải sẵn môn sức bền vật liệu*** *cùng các bạn. Vẫn biết, giới thiệu là cần thiết nhưng cái chính là hữu xạ tự nhiên hương. Mặc dù cuốn sách được biên soạn nghiêm túc, công phu, chặt chẽ với sự cập nhật chọn lọc các thông tin mới nhất, nhưng chắc chắn không tránh khỏi thiếu sót. Tác giả rất mong và cảm ơn sự đóng góp, trao đổi ý kiến của các chuyên gia, các thầy, cô giáo trực tiếp giảng dạy Sức bền vật liệu, tất cả các bạn sử dụng và đọc cuốn sách này để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong các lần xuất bản sau.*

Tác giả xin chân thành cảm ơn Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, các bạn đồng nghiệp đã khích lệ và giúp đỡ tác giả hoàn thành cuốn sách.

Hà Nội, ngày 15 tháng 2 năm 2006

Tác giả

ĐƠN VỊ ĐO LƯỜNG SỬ DỤNG

Hệ đơn vị đo lường quốc tế: SI

Ký hiệu	Đơn vị đo	Đại lượng đo
kg	Kilogam	Khối lượng
s	Giây	Thời gian
m	Mét	Chiều dài
cm	Centimét	Chiều dài (1 m = 100 cm)
mm	Millmét	Chiều dài (1 m = 1000 mm)
N	Niutơn	Lực (1 N = 0,102 kG)
kN	Kiloniutơn	Lực (1 kN = 10^3 N; 1 MN = 10^6 N)
MN	Meganiutơn	Lực (1 daN = 10 N ≈ 1,02 kG)
daN	Đêcaniutơn	Lực (1 daN = 10^{-5} MN = 10^{-3} kN)
N/m^2		Ứng suất, áp lực (1 N/m^2 ≈ 1,02.10^{-5} kG/cm^2)
MN/m^2		Ứng suất, áp lực (1 MN/m^2 = 10^6 N/m^2 = 10 daN/cm^2 ≈ 10,2 kG/cm^2)
$\frac{daN}{cm^2}$		Ứng suất, áp lực (1 daN/cm^2 = 10^5 N/m^2 = 1 bar ≈ 1,02 kG/cm^2)
$\frac{daN}{mm^2}$		$\left(1\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2} = 10^7\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 102\,\text{kG/cm}^2 \approx 1{,}02\ \text{kG/mm}^2\right)$
J	Jun	Năng lượng (1 J ≈ 0,102 kGm)
W	Oát	Công suất (1 W ≈ 102 kG.m/s = 1,36 CV)
kW	Kilôoát	Công suất (1 kW = 10^3 W)

Hệ đơn vị kỹ thuật (MKS)

Ký hiệu	Đơn vị đo	Đại lượng đo
kG	Kilôgam lực	Lực (1 kG = 9,81 N = 0,981 daN)
s	Giây	Thời gian
m	Mét	Chiều dài
T	Tấn lực	Lực (1 T = 10^3 kG ≈ $9,81.10^3$ N = 9,81 kN)
kG/cm^2		Ứng suất, áp lực (1 kG/cm^2 ≈ 9,81.104 $\frac{N}{m^2}$) ≈ ≈ 0,0981 MN/m^2 ≈ 0,981 daN/cm^2)
bar		Áp lực (1 bar = 10^5 $\frac{N}{cm^2}$ = 1 daN/cm^2 ≈ 1,02 kG/cm^2)
kG.m	Kilôgam mét	Công(1 kGm ≈ 9,81 J)
CV	Mã lực	Công suất (1 CV = 75 $\frac{kGm}{s}$ ≈ 0,736 kW)

Chương 1

NỘI LỰC VÀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm về ngoại lực

Ngoại lực là lực tác dụng từ vật thể khác hoặc từ môi trường xung quanh lên vật thể mà ta xét, bao gồm tải trọng và phản lực.

Tải trọng là lực tác dụng lên vật thể đã biết trị số, phương, chiều và điểm đặt.

Phản lực là lực mà vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát thông qua vùng tiếp xúc giữa vật khảo sát và vật gây liên kết, do tác dụng ngoài gây ra.

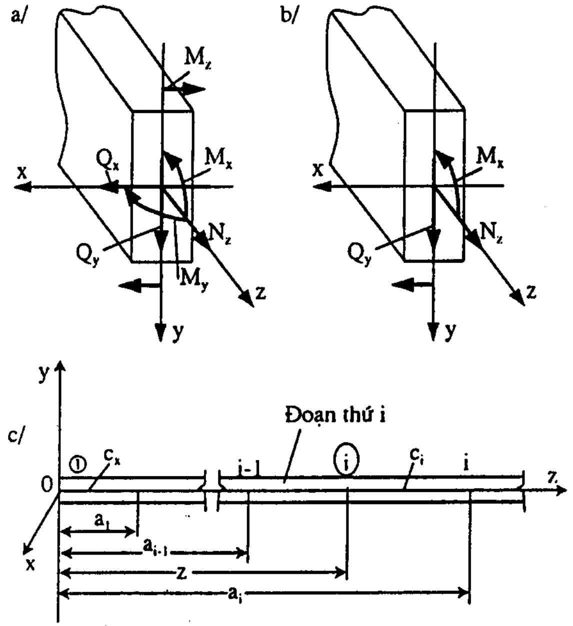
2. Khái niệm nội lực

Nội lực là độ biến thiên của lực liên kết giữa các phần tử của vật thể khi vật thể bị biến dạng do các tác dụng ngoài gây ra. Nội lực được xác định từ các điều kiện cân bằng tĩnh học nhờ tiên đề giải phóng liên kết.

Trong trường hợp tổng quát là hệ không gian, theo tiên đề giải phóng liên kết, trên mặt cắt ngang của thanh có 6 thành phần nội lực (hình 1.1a) là :

N_z – lực dọc ; Q_x, Q_y – lực cắt ; M_x, M_y – mômen uốn ; M_z – mômen xoắn.

Sáu thành phần nội lực trên mặt cắt được xác định bằng sáu phương trình cân bằng tĩnh học đối với một trong hai phần của hệ đã được tưởng tượng cắt ra :



Hình 1.1

$$N_z + \sum_i P_{iz} = 0 \; ; \; Q_x + \sum_i P_{ix} = 0 \; ; \; Q_y + \sum_i P_{iy} = 0 \qquad (1.1)$$

$$M_x + \sum_i m_x(P_i) = 0 \; ; \; M_y + \sum_i m_y(P_i) = 0 \; ; \; M_z + \sum_i m_z(P_i) = 0 \quad (1.2)$$

trong đó :

P_{iz}, P_{ix}, P_{iy} – lần lượt là hình chiếu lên các trục z, x, y của ngoại lực thứ i tác dụng trên phần đang xét;

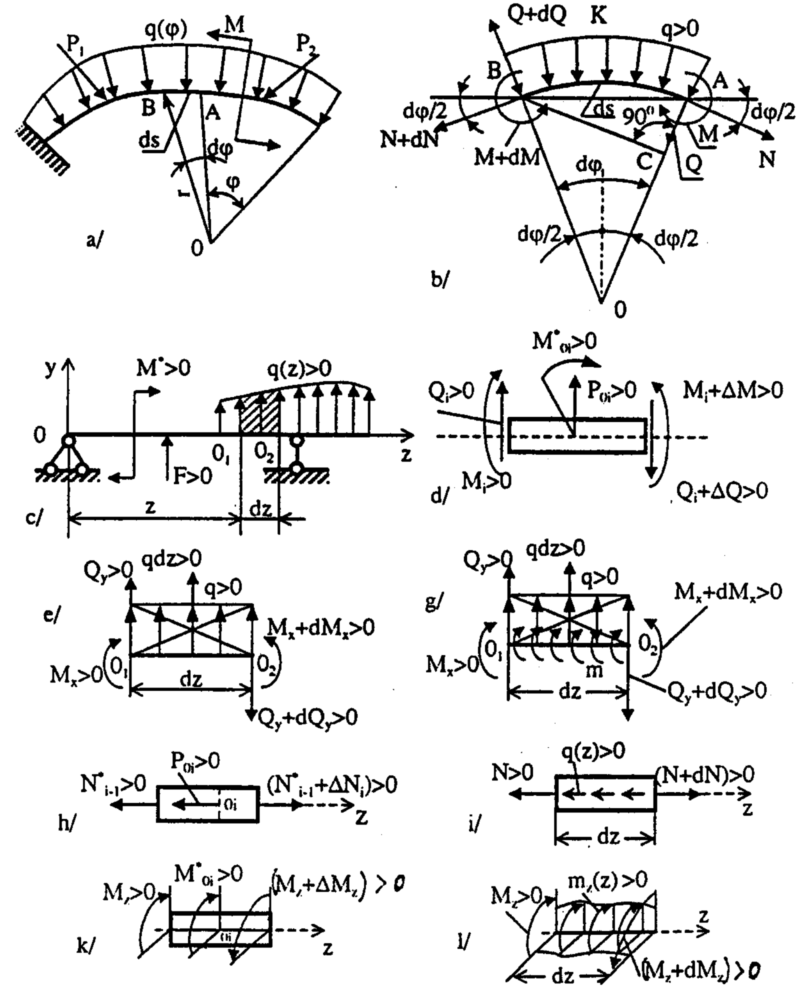
$m_x(P_i)$, $m_y(P_i)$, $m_z(P_i)$ – lần lượt là mômen đối với các trục tọa độ x, y, z của ngoại lực P_i.

3. Liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực

a) Trường hợp thanh cong

Khảo sát thanh cong chịu lực cân bằng như hình 1.2a và một phân tố thanh dS như hình 1.2b.

Khi khảo sát điều kiện cân bằng của phân tố dS với các nội lực và ngoại lực được quy ước là dương như hình 1.2b, ta đi đến :



Hình 1.2

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{d\varphi} &= -\frac{Q}{r}\\ \frac{dQ}{d\varphi} &= N + qr\\ \frac{dM}{d\varphi} &= Q \cdot r\end{aligned}\right\} \qquad (1.2a)$$

Do $rd\varphi = dS$ cho nên có thể viết (1.2a) dưới dạng :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{dS} &= -\frac{Q}{r}\\ \frac{dQ}{dS} &= q + \frac{N}{r}\\ \frac{dM}{dS} &= Q\end{aligned}\right\} \qquad (1.2b)$$

b) Trường hợp thanh thẳng

Khi $r = \infty$ thì trục cong S trùng với trục Z của thanh thẳng (hình 1.2c) và các quan hệ (1.2b) trở thành :

- Uốn phẳng

$$\Delta Q_i = P_{oi}$$
$$\Delta M_i = M^*_{oi}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dQ}{dz} &= q\\ \frac{dM}{dz} &= Q + m\\ \frac{d^2M}{dz^2} &= q + \frac{dm}{dz}\end{aligned}\right\} \qquad (1.2c)$$

Đối với thanh thẳng chịu uốn, kéo (nén) xoắn dấu của nội lực và ngoại lực được quy ước là dương như hình 1.2d,e,g,h,i,k,l.

- Thanh chịu kéo nén

$$\left.\begin{aligned}\Delta N_i &= P_{oi}\\ \frac{dN}{dz} &= q(z)\\ &\;\;\ldots \quad \ldots\\ \frac{d^nN}{dz^n} &= q^{(n-1)}(z)\end{aligned}\right\} \qquad (1.2d)$$

- Thanh chịu xoắn

$$\left.\begin{aligned}\Delta M_{zi} &= M^*_{oi}\\ \frac{dM_z}{dz} &= m_z(z)\\ &\;\;\ldots \quad \ldots\\ \frac{d^nM_z}{dz^n} &= m_z^{(n-1)}(z)\end{aligned}\right\} \qquad (1.2e)$$

Các nội lực tại một mặt cắt có hoành độ z nào đó có thể được xác định bằng phương pháp mặt cắt, phương pháp vạn năng, phương pháp vẽ nhanh và phương pháp cộng tác dụng.

Dưới đây là các bước áp dụng các phương pháp này.

4. Cách xác định nội lực bằng phương pháp mặt cắt

Bước 1. Căn cứ vào quy luật đặt lực dọc theo trục thanh để chia thanh thành n đoạn sao cho trên mỗi đoạn biểu thức của nội lực cần tìm là liên tục.

Bước 2. Trên mỗi đoạn thực hiện một mặt cắt di động được xác định bởi hoành độ z với gốc tọa độ thích hợp và đặt vào mặt cắt đó các nội lực cần tìm theo chiều dương.

Bước 3. Viết các phương trình cân bằng dạng (1.1) và (1.2) của các ngoại lực, kể cả nội lực cần tìm tác dụng lên phần thanh khảo sát. Từ đó rút ra các biểu thức giải tích của nội lực. Cụ thể là: N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z.

Bước 4. Vẽ các biểu đồ nội lực dọc theo trục thanh trên từng đoạn.

5. Phương pháp vạn năng để xác định nội lực

Bước 1. Căn cứ vào quy luật đặt lực dọc theo thanh để lập sơ đồ tính. Cụ thể là, theo phương pháp này, gốc tọa độ đặt cố định ở đầu trái của thanh, các mặt cắt phân chia giữa các đoạn được đánh số là i (i = 1, 2, 3...). Trục Oz (hình 1.1c) trùng với trục thanh và có chiều dương hướng sang phải.

Bước 2. Áp dụng các biểu thức nội lực đã được thiết lập sẵn dưới dạng tổng quát cho mỗi đoạn thứ k đối với mọi bài toán cần giải. Cụ thể là :

a) Bài toán kéo (nén)

$$N_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[P_{oi} + \Delta q_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q'_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \Delta q''_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^3}{3!} + \ldots \right] \quad (1.3)$$

Miền xác định của hàm $N_k(z)$ thuộc đoạn "k" là :

$$a_{i-1} \leqslant z \leqslant a_i \text{ , với } i = k.$$

b) Bài toán xoắn

$$M_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[M^*_{oi} + \Delta m_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta m'_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \Delta m''_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^3}{3!} + \ldots \right] \quad (1.4)$$

Miền xác định của $M_k(z)$ thuộc đoạn thứ "k" là :

$$a_{i-1} \leqslant z \leqslant a_i \text{ , với } i = k.$$

c) Bài toán uốn

$$Q_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[P_{oi} + \Delta q_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q'_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^2}{2!} + \right.$$

$$\left. + \Delta q''_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^3}{3!} + \ldots \right] \quad (1.5)$$

$$M_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[M^*_{oi} + P_{oi}(z - a_{i-1}) + \Delta q_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^2}{2!} + \Delta q' \frac{(z-a_{i-1})^3}{3!} + \right.$$

$$\left. + \Delta q''_{oi} \frac{(z-a_{i-1})^4}{4!} + \ldots \right] \quad (1.6)$$

Miền xác định của $Q_k(z)$, $M_k(z)$ thuộc đoạn thứ "k" là :

$$a_{i-1} \leqslant z \leqslant a_i \text{ , với } i = k$$

Trong (1.3), (1.4), (1.5) và (1.6) tương ứng với từng bài toán M^*_{oi} , P_{oi} lần lượt là các mômen uốn hoặc xoắn ngoại lực tập trung và lực tập trung theo các trục tọa độ ở đầu trái đoạn thứ i. Δq_{oi}, $\Delta q'_{oi}$, $\Delta q''_{oi}$ ... là bước nhảy của tải trọng phân bố theo các trục tọa độ và bước nhảy của các đạo hàm

các cấp của nó tại đầu trái đoạn thứ i. Tương tự như vậy, đối với các ngoại lực phân bố là mômen xoắn $m_z(z)$: Δm_{oi}, $\Delta m'_{oi}$, $\Delta m''_{oi}$, v.v...

6. Phương pháp vẽ nhanh

- Phương pháp vẽ nhanh chủ yếu dựa vào các nhận xét sau đây :

Dựa trên các biểu thức liên hệ giữa ngoại lực và nội lực

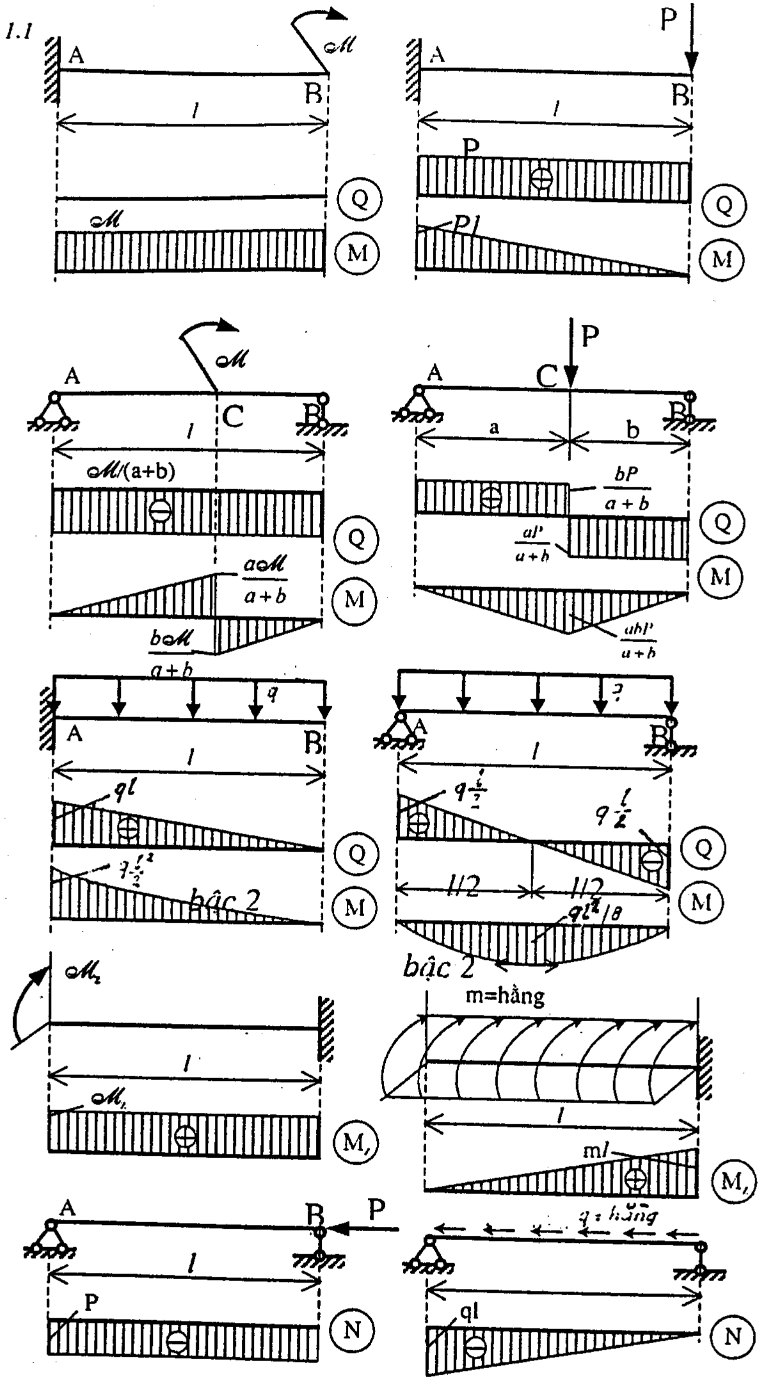
- Tại mặt cắt có đặt lực tập trung, biểu đồ lực cắt và lực dọc tương ứng có bước nhảy, trị số và chiều của bước nhảy bằng trị số và chiều của lực tập trung đó.
- Tại mặt cắt có đặt mômen ngoại lực tập trung, biểu đồ mômen uốn và xoắn tương ứng có bước nhảy, chiều và trị số bước nhảy bằng chiều và trị số của vectơ mômen tập trung đó.
- Nếu trên đoạn trục nào đó chịu mômen xoắn ngoại lực phân bố có dạng một đa thức bậc n thì trên đoạn đó biểu đồ mômen xoắn nội lực $M_z(z)$ là một đường cong bậc (n+1).
- Tương tự như vậy, nếu trên đoạn thanh mà q(z) là một đa thức bậc n thì biểu đồ N_z và biểu đồ Q_y là một đường bậc (n+1) và biểu đồ mômen uốn M_x là đường bậc (n+2).
- Nếu trên đoạn thanh có $q > 0$ (hướng lên) thì Q_y đồng biến; nếu trên đoạn có $q < 0$ (hướng xuống) thì Q_y nghịch biến.
- Nếu trên đoạn thanh có $Q_y > 0$, M_x đồng biến, trên đoạn thanh có $Q_y < 0$, M_x nghịch biến. Tại mặt cắt có $Q_y = 0$ thì M_x đạt cực trị. Nếu $q < 0$ thì biểu đồ M_x là đường cong lồi, còn nếu $q > 0$ thì biểu đồ M_x là đường cong lõm.

- Những nhận xét nêu trên dùng để vẽ nhanh các biểu đồ nội lực nhưng cũng đồng thời là những tiêu chí để kiểm tra tính đúng đắn của các biểu đồ nội lực được vẽ bằng bất kỳ phương pháp nào.

7. Phương pháp cộng tác dụng

Nội dung chủ yếu của phương pháp này là dựa vào nguyên lý độc lập tác dụng để biến bài toán phức tạp thành nhiều bài toán đơn giản. Vẽ biểu đồ nội lực cho từng bài toán đơn giản rồi cộng lại theo nguyên tắc cộng đồ thị. Biểu đồ nội lực trong các bài toán đơn giản thường được vẽ rất nhanh hoặc được cho trước dưới dạng bảng 1.1 như sau :

Bảng 1.1



Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các thành phần nội lực dọc theo trục thanh. Khi vẽ biểu đồ nội lực cần tuân theo một số quy ước sau đây :

- Lực dọc N_z, được xem là dương khi vectơ của nó trùng với vectơ pháp tuyến ngoài của mặt cắt xác định nó (hình 1.2h).

- Lực cắt Q_y được xem là dương khi nó có xu hướng làm quay phần thanh đang xét thuận chiều kim đồng hồ (hình 1.2d,e,g).

- Mômen uốn M_x được xem là dương khi làm căng thớ dưới của thanh tại mặt cắt đang xét (hình 1.2e,g). Các tung độ của biểu đồ mômen uốn được vẽ về các thớ bị căng.

- Mômen xoắn nội lực M_z được xem là dương khi người khảo sát nhìn thẳng vào mặt cắt chứa nó dọc theo pháp tuyến ngoài thấy M_z quay ngược chiều kim đồng hồ (hình 1.2k,l).

II. CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN

BÀI 1

Một cột chịu các lực tập trung $P_1 = P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 2P$ và lực phân bố bậc nhất trong đoạn 2 - 4 từ $q = 0$ đến $q = P/a$ (hình 1.3a).

Hãy viết các biểu thức lực dọc N(z) trong cột bằng phương pháp mặt cắt, vạn năng và vẽ biểu đồ $\left(N(z)\right)$.

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt

Trên mỗi đoạn thứ i cần phải thực hiện các mặt cắt di động, đặt lực dọc $N_i(z)$ vào mặt cắt đó và khảo sát điều kiện cân bằng của một trong hai phần đã cắt ra.

Phương trình cân bằng cho ta hàm $N_i(z)$ trong đoạn i. Cụ thể là :

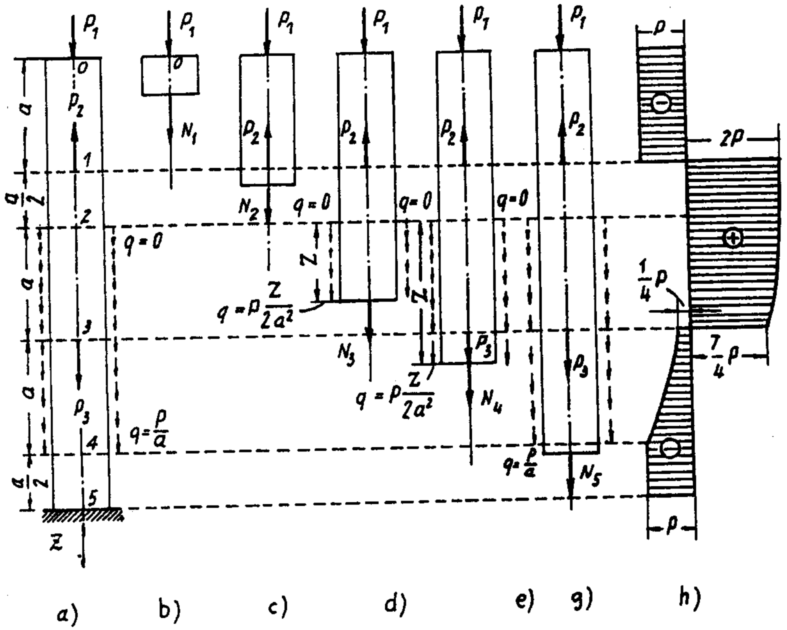
Đoạn 0-1 (hình 1.3b) gốc tọa độ chọn ở "0".

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_1 + P_1 = 0\ ,\ N_1 = -P_1 = -P,\ 0 \le z_1 \le a$$

Đoạn 1-2 (hình 1.3c) gốc tọa độ chọn ở "0".

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_2 + P_1 - P_2 = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = -P_1 + P_2 = -P + 3P = 2P,\ a \le z_2 \le 1{,}5a.$$



Hình 1.3.

Đoạn 2-3 (hình 1.3d) gốc tọa độ chọn ở "2".

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_3 = -P_1 + P_2 - \int_0^z P\frac{z}{2a^2}\,dz =$$

$$= -P + 3P - P\frac{z^2}{4a^2} = P\left(2 - \frac{z^2}{4a^2}\right),$$

$$0 \le z_3 \le a$$

Đoạn 3-4 (hình 1.3e) gốc tọa độ chọn ở "2".

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_4 + P_1 - P_2 + P_3 + \int_a^z P\frac{z}{2a^2}\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$N_4 = -P_1 + P_2 - \int_a^z P\frac{z}{2a^2}\,dz - P_3 = -P\frac{z^2}{4a^2},\ a \le z_4 \le 2a.$$

Đoạn 4-5 (hình 1.3g) gốc tọa độ chọn ở "2".

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_5 + P_1 - P_2 + P_3 + \int_0^{2a} P\frac{z}{2a^2}\,dz = 0 \Rightarrow$$

$$N_5 = -P_1 + P_2 - P_3 - \int_a^{2a} P\frac{z}{2a^2}\,dz = -P,\quad 2a \le z_5 \le 2{,}5a$$

2. Phương pháp vạn năng

Gốc tọa độ chọn ở đầu trái "0", trục z hướng xuống dưới (hình 1.3a) theo công thức (1.3) ta có :

$$N(z) = -P_1\Big|_{i=1} + P_2\Big|_{i=2} - \frac{P}{2a^2}\frac{(z-1{,}5a)^2}{2!}\Big|_{i=3}$$

$$-P_3\Big|_{i=4} + \frac{P}{a}(z-3{,}5a) + \frac{P}{2a^2}\frac{(z-3{,}5a)^2}{2!}\Big|_{i=5}$$

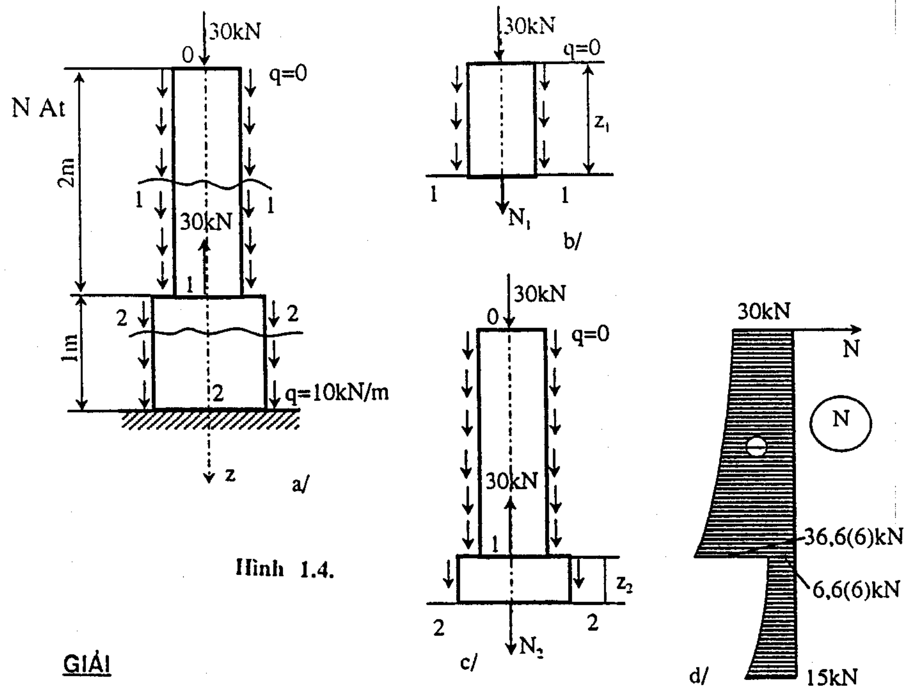
Cách viết công thức (1.3) dưới dạng này theo ý nghĩa của tổng được hiểu như sau : Hàm lực dọc N(z) thuộc đoạn thứ i nào đó là hàm được giới hạn trong khoảng từ dấu bằng (=) cho đến dấu phân cách thứ i $\left(\Big|_i\right)$. Ví dụ, lực dọc thuộc đoạn i = 3 là : $N(z) = -P_1 + P_2 - \frac{P}{2a^2}\frac{(Z-1{,}5a)^2}{2!}\Big|_{i=3}$ và xác định trong khoảng $a_2 \le z \le a_3$.

Trên cơ sở các biểu thức của N(z) nhận được bằng phương pháp mặt cắt và vạn năng, biểu đồ N(z) được biểu diễn trên hình 1.3h .

Kết quả thiết lập N(z) ở trên bằng hai phương pháp cho thấy tính ưu việt của phương pháp vạn năng. Về sau chúng ta sẽ thấy tính ưu việt đặc biệt này trong các bài toán siêu tĩnh, nhất là sử dụng nó để tính các loại chuyển vị.

<u>BÀI 2</u>

Vẽ biểu đồ lực dọc trong thanh chịu lực cân bằng được cho trên hình 1.4a. Tải trọng q phân bố theo quy luật bậc nhất.



Hình 1.4.

GIẢI

1) Phương pháp mặt cắt

Khảo sát cân bằng phần trên của mặt cắt 1-1 (hình 1.4b)

$$\Sigma Z = N_1 + q\,\frac{z_1}{3}\cdot\frac{z_1}{2} + 30 = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = -\frac{qz_1^2}{6} - 30, \quad 0 \leq z_1 \leq 2 \text{ m}$$

Khảo sát cân bằng phần trên mặt cắt 2-2 (hình 1.4c)

$$\Sigma Z = N_2 + (qz_2 + 2q)\,\frac{1}{3}\,(2 + z_2)\,\frac{1}{2} - 30 + 30 = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = -\left(\frac{qz_2^2}{6} + \frac{2qz_2}{3} + \frac{2q}{3}\right), \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \text{ m}$$

Từ các hàm $N_1(z_1)$ và $N_2(z_2)$ ta có biểu đồ lực dọc như trên hình 1.4d).

2) Phương pháp vạn năng

Áp dụng công thức tổng quát (1.3) của N(z) vào bài toán này ta có biểu thức của lực dọc trên các đoạn i = 1 và i = 2.

$$N(z) = -30 - \frac{10}{3}\cdot\frac{z^2}{2!}\Bigg|_{i=1} + 30\Bigg|_{i=2}$$

Về sau để đơn giản cách viết, ta bỏ chỉ số i. Cụ thể là :

$$N(z) = -30 - \frac{10z^2}{2!}\Bigg|_{1} + 30\Bigg|_{2}$$

Theo hàm N(z) ta dựng biểu đồ như hình 1.4d.

BÀI 3

Một dàn chịu lực như hình 1.5a. Hãy xác định lực dọc trong các thanh 2-3, 2-9, 8-9 và 9-4 ?

GIẢI

Thực hiện mặt cắt 1-1 và xét cân bằng phần trái mặt cắt này (hình 1.5b).

$$\Sigma m_9 = N_{2-3}\,.\,d + \frac{P}{2}\,a_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = -\frac{P}{2}\,\frac{a_1}{d}$$

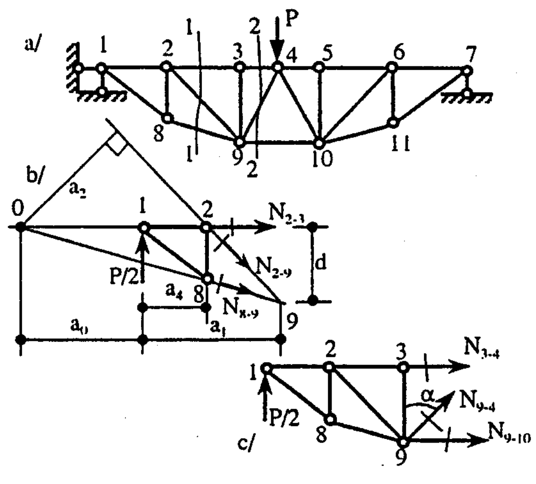
$$\Sigma m_0 = N_{2-9}\,.\,a_2 - \frac{P}{2}\,a_0 = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-9} = \frac{P}{2}\,\frac{a_0}{a_2}$$

$$\Sigma m_2 = N_{8-9}\,.\,a_3 - \frac{P}{2}\cdot a_4 = 0$$

$$\Rightarrow N_{8-9} = \frac{P}{2}\,\frac{a_4}{a_3}$$

Trong đó a_3 là khoảng cách từ điểm nút 2 đến đường tác dụng của lực N_{8-9}.



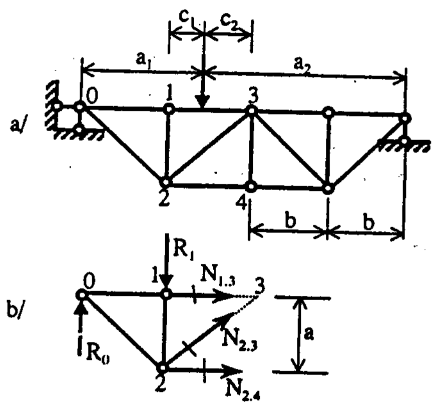
Hình 1.5.

Để xác định lực dọc trong thanh 9-4, ta xét cân bằng phần trái của mặt cắt 2−2 (hình 1.5c). Cụ thể là chiếu tất cả các lực tác dụng trên phần này lên phương thẳng đứng, ta có :

$$N_{9-4} \cdot \cos\alpha + P/2 = 0 \Rightarrow N_{9-4} = -\frac{P}{2\cos\alpha}$$

BÀI 4

Một dàn chịu lực như hình 1.6a. Hãy xác định lực dọc trong thanh 2−4.



Hình 1.6.

GIẢI

Phản lực tại gối "O" là

$$R_0 = \frac{Pa_2}{a_1 + a_2}$$

Gọi R_1 và R_3 là lực mà thanh 1−3 đặt vào các nút 1 và 3 của dàn (hình 1.6b) với

$$R_1 = \frac{Pc_2}{c_1 + c_2}\ ;\ R_3 = \frac{Pc_1}{c_1 + c_2}\ .$$

$$\sum m_3 = R_0 \cdot 2b - R_1 b - N_{2-4} \cdot a = 0 \quad \text{Suy ra} \quad N_{2-4} = \left(2R_0 - R_1\right)\frac{b}{a}\ .$$

Bằng các phương pháp đã chỉ ra trong các bài 3 và 4 bạn đọc có thể dễ dàng tìm được lực dọc ở tất cả các thanh dàn.

BÀI 5

Cho một dàn chịu lực như hình 1.7a. Hãy xác định lực dọc trong các thanh 2−3, 4−5, 1−4 và 1−2.

GIẢI

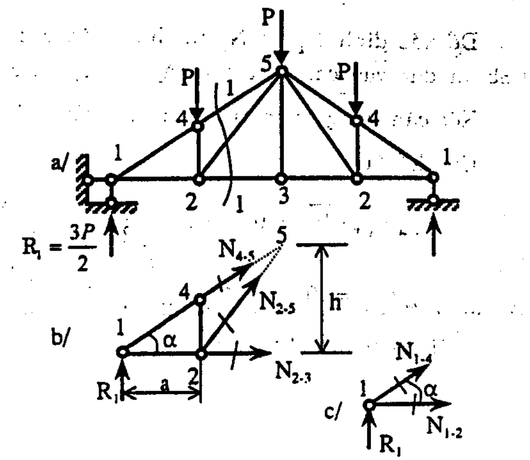
Để tìm các nội lực N_{2-3}, N_{4-5} ta xét cân bằng phần dàn bên trái mặt cắt 1−1 (hình 1.7b).

$$\sum m_5 = N_{2-3} \cdot h - R_1 \cdot 2a = 0 \Rightarrow N_{2-3} = \frac{R_1 2a}{h} = \frac{6Pa}{h}$$

$$\sum m_2 = N_{4-5} \cdot a_4 - R_1 \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow N_{4-5} = \frac{R_1 a}{a_4} = \frac{3Pa}{a_4}$$

a_4 là khoảng cách từ nút 2 đến đường tác dụng của N_{4-5}.



Hình 1.7.

Để xác định lực dọc trong các thanh 1−2, 1−4, ta xét điều kiện cân bằng nút 1, chịu tác dụng của hệ lực đồng quy phẳng. Cụ thể là (hình 1.7c).

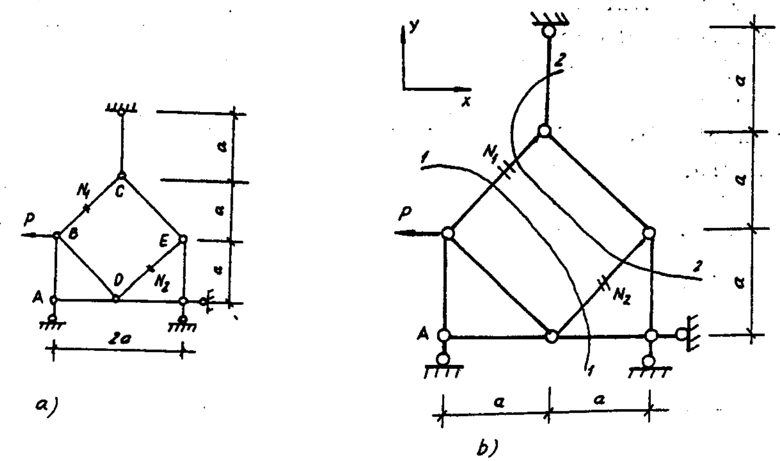
$$\sum Y = N_{1-4} \sin\alpha + R_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-4} = -\frac{R_1}{\sin\alpha} = \frac{-3P}{2\sin\alpha}$$

$$\sum X = N_{1-2} + N_{1-4}\cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -N_{1-4}\cos\alpha = 1{,}5\,P\cot g\alpha\ .$$

BÀI 6

Một hệ khớp chịu lực P được cho trên hình 1.8a. Hãy tính lực dọc N_1, N_2 trong các thanh BC và DE được chỉ định trên hình 1.8a.



Hình 1.8.

GIẢI

Để xác định N_1 và N_2 ta thực hiện các mặt cắt 1–2 và 2–2 như hình 1.8b và đặt vào các mặt cắt này các lực dọc dương.

Xét cân bằng phần trái của mặt cắt 1-1 và phần phải của mặt cắt 2-2. Cụ thể là :

$$\left.\begin{aligned} &\sum m_{A tr}(\vec{P}) = 0 = -N_1\frac{a\sqrt{2}}{2} + N_2\frac{a\sqrt{2}}{2} + Pa = 0 \\ &\sum X_{ph} = 0 = -N_1\frac{a\sqrt{2}}{2} - N_2\frac{a\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Giải hệ (a) ta được

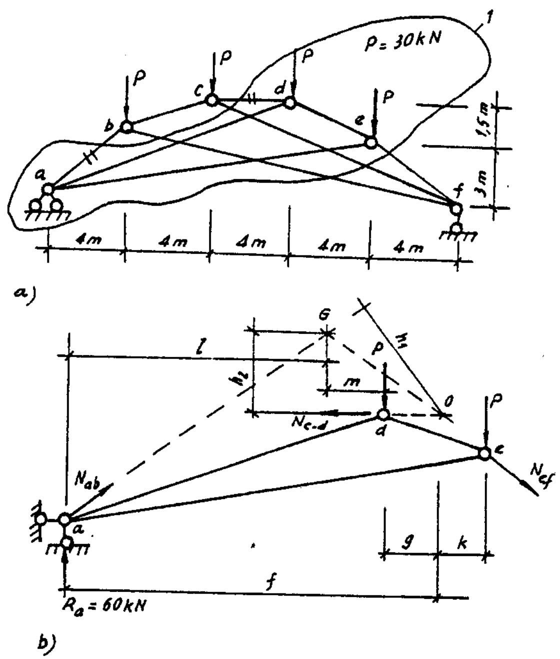
$$N_1 = -N_2 = \frac{P\sqrt{2}}{2}$$

BÀI 7

Một hệ khớp chịu lực như hình 1.9a. Hãy xác định lực dọc trong các thanh a-b và c-d đánh dấu trên hình 1.9a.

GIẢI

Để xác định N_{ab} và N_{cd} ta sẽ sử dụng phương pháp mặt cắt với mặt cắt kín 1 qua các thanh cần tìm N và các thanh ef, cf, bf. Trong đó các thanh cf, bf bị cắt hai lần. Hệ cân bằng nên mỗi phần được tưởng tượng cắt ra cũng phải cân bằng. Ta xét điều kiện cân bằng của phần bị cắt nằm trong đường cong 1. Cụ thể là (hình 1.9b).



Hình 1.9.

$\sum m_0(\vec{P}) = 0 = R_a . f + N_{ab} . h_1 - P . g + P . k = 0 \Rightarrow N_{ab} = -175$ kN

Trong đó : $h_1 = 4,8$ m, $f = 14$ m, $g = 2$ m, $k = 2$ m, $R_a = 60$ kN.

$\sum m_G(\vec{P}) = 0 = R_a . l + N_{cd} . h_2 + P . m + P(m + 4) = 0 \Rightarrow$

$N_{cd} = -280$ kN .

Trong đó : $l = 10$ m, $h_2 = 3$ m, $m = 2$ m.

BÀI 8

Một dàn cầu thép đơn giản chịu lực như hình 1.10a. Hãy xác định lực dọc N trong các thanh của dàn.

GIẢI

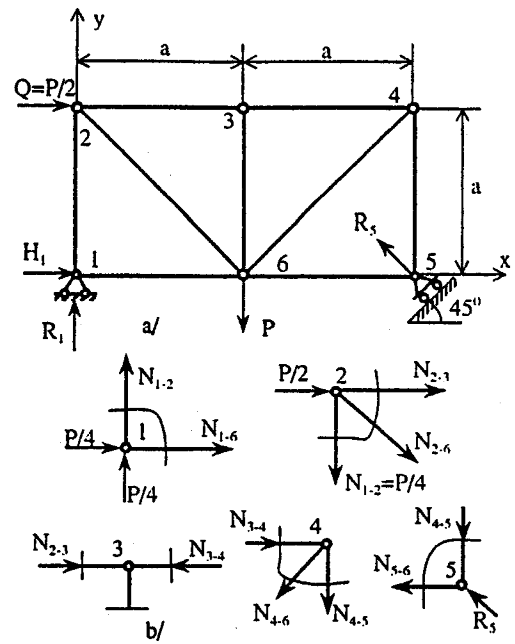
Trước hết phải xác định phản lực tại các gối đỡ "1" và "5".

$$\sum m_5 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{P}{4}$$

$$\sum m_1 = 0 \Rightarrow R_5 = \frac{3P}{2\sqrt{2}}$$

$$\sum m_3 = 0 \Rightarrow H_1 = P/4$$

Lực dọc N trong các thanh được xác định bằng phương pháp cân bằng nút, bắt đầu từ nút "1", rồi nút "2", "3", "4", "5". Cụ thể là xét điều kiện cân bằng của hệ lực phẳng đồng quy đối với mỗi nút.



Hình 1.10

Đối với nút "1" (hình 1.10b), điều kiện cân bằng cho ta :

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{1-6} = -P/4 \ ;$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{1-2} = -P/4.$$

Tương tự đối với nút "2" (hình 1.10b), cụ thể là :

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{2-3} + P/2 + N_{2-6}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{2-6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - P/4 = 0$$

Suy ra :

$$N_{2-6} = P/2\sqrt{2} \; ; \; N_{2-3} = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}P$$

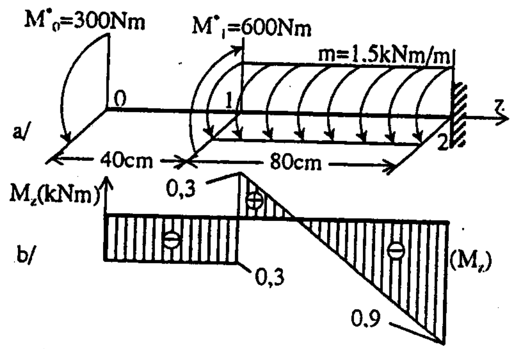
Với cách làm tương tự đối với các nút còn lại, ta có (hình 1.10b) :

$$N_{3-6} = 0 \; , \; N_{3-4} = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}P \; ; \; N_{4-6} = \frac{(\sqrt{2}+1)}{2}P \; ;$$

$$N_{4-5} = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}P \; ; \; N_{5-6} = -\frac{3}{4}P .$$

BÀI 9

Một trục chịu xoắn như hình 1.11a. Hãy viết biểu thức mômen xoắn nội lực và vẽ biểu đồ này.



Hình 1.11.

GIẢI

Theo công thức vạn năng (1.4) ta có :

$$M_z(z) = -M_0^*\Big|_{i=1} + M_1^* - 1{,}5(z-0{,}4)\Big|_{i=2} =$$

$$= 0{,}3\Big|_{i=1} + 0{,}6 - 1{,}5(z-0{,}4)\Big|_{i=2}$$

Biểu đồ của hàm $M_z(z)$ được cho trên hình 1.11b.

BÀI 10

Một trục chịu xoắn như hình 1.12a. Hãy viết biểu thức của mômen xoắn nội lực trong trục và vẽ biểu đồ nội lực này.

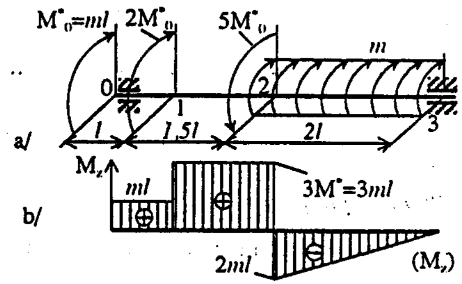
GIẢI

Áp dụng công thức vạn năng (1.4) vào đây ta được :

$$M_z(z) = ml\Big|_{1} + 2ml\Big|_{2}$$

$$- 5ml + m(z - 2{,}5l)\Big|_{3}$$

Theo hàm M(z) đã vẽ được biểu đồ (M_z) như trên hình 1.12b.



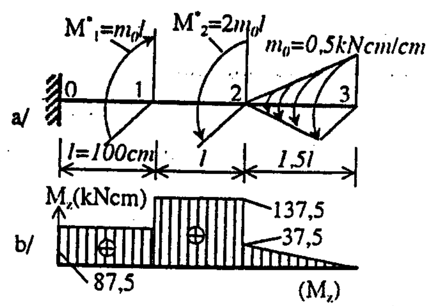
Hình 1.12.

BÀI 11

Một trục chịu xoắn như hình 1.13a. Hãy viết biểu thức mômen xoắn nội lực $M_z(z)$ và vẽ biểu đồ mômen nội lực này cho trục.

GIẢI

Đơn giản và tốn ít sức lao động nhất để tìm câu trả lời cho bài toán, ta sẽ dùng phương pháp vạn năng với công thức (1.4). Cụ thể là :



Hình 1.13.

$$M_z(z) = M_0^*\Big|_1 + m_0 l\Big|_2 - 2m_0 l - \frac{m_0}{1,5l}\,\frac{(z-2l)^2}{2\,!}\Big|_3 \qquad (a)$$

Phản lực M_0^* được tìm từ điều kiện :

$$M_z(z = 3,5\ l) = 0 \Rightarrow M_0^* = 1,75\ m_0 l = 87,5\ \text{kNcm}.$$

Dưới dạng tường minh phương trình (a) là :

$$M_z(z) = 87,5\Big|_1 + 50\Big|_2 - 100 - \frac{1}{300}\,\frac{(z-200)^2}{2}\Big|_3 \qquad (b)$$

Biểu đồ của (b) được cho trên hình 1.13b.

BÀI 12

Viết biểu thức giải tích và vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z đối với chi tiết chịu lực như hình 1.14a.

GIẢI

1) Phương pháp vạn năng

Theo công thức tổng quát (1.4) trong trường hợp này ta có :

$$M_z(z) = +\frac{M}{2a}\cdot z\Big|_{i=1} - \frac{M}{2a}(z-a)\Big|_{i=2} - M\Big|_{i=3} + \frac{M}{2a^2}\,\frac{(z-2,5a)^2}{2\,!}\Big|_{i=4}$$

Biểu đồ M_z được cho trên hình 1.14g.

2) Phương pháp mặt cắt

Trục được chia làm 4 đoạn: 0–1, 1–2, 2–3 và 3–4.

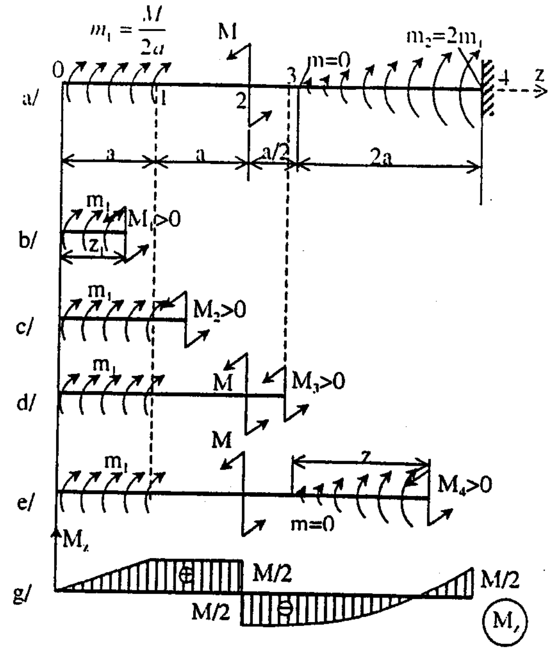
Đoạn 0–1 : Xét điều kiện cân bằng đoạn thanh (hình 1.14b) :

$$-m_1 z + M_1 = 0 \Rightarrow M_1 = +m_1 . z = +\frac{M}{2a}\cdot z\ ;\quad 0 \leq z \leq a$$

(gốc ở 0).

Điều kiện cân bằng mômen đối với trục z của đoạn thanh chịu lực (hình 1.14c) :

$$-m_1 a + M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = +\frac{M}{2}\ ;\quad 0 \leq z \leq a\ (\text{gốc ở } 1).$$



Hình 1.14.

Tương tự như vậy khi khảo sát điều kiện cân bằng của các đoạn thanh chịu lực trên các hình 1.14d,e ta có :

$$-m_1 a + M + M_3 = 0 \Rightarrow M_3 = -M/2\ ,\ 0 \leq z \leq a/2\ (\text{gốc ở } 2)$$

$$-m_1 a + M - \int_0^z \frac{2m_1}{2a}\,z dz + M_4 = 0$$

$$\Rightarrow M_4 = -\frac{M}{2} + \frac{Mz^2}{4a^2}\ ,\qquad 0 \leq z \leq 2a\ (\text{gốc ở } 3)$$

Từ các hàm M_1, M_2, M_3 và M_4 ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn nội lực như trên hình 1.14g.

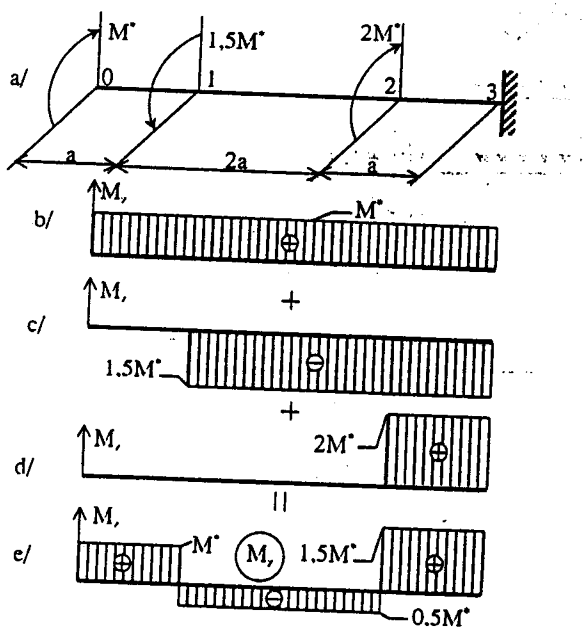
BÀI 13

Một trục chịu xoắn như hình 1.15a. Hãy vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z bằng phương pháp cộng tác dụng.

GIẢI

Theo phương pháp cộng tác dụng, ta lần lượt vẽ ba biểu đồ M_z do riêng M^* (hình 1.15b), $1,5M^*$ (hình 1.15c) và $2M^*$ (hình 1.15d) gây ra, rồi cộng các biểu đồ này lại.

Theo cách đó biểu đồ M_z cuối cùng được cho trên hình 1.15e.



Hình 1.15.

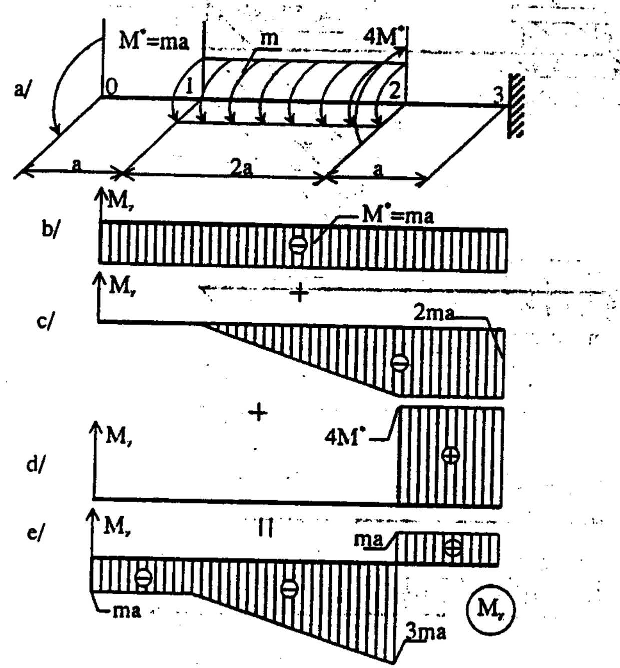
BÀI 14

Bằng phương pháp cộng tác dụng, hãy vẽ biểu đồ (M_z) đối với trục cho trên hình 1.16a.

GIẢI

Ta phải vẽ lần lượt các biểu đồ M_z do M^* (hình 1.16b), do m (hình 1.16c), do $4M^*$ (hình 1.16d) gây ra.

Biểu đồ mômen xoắn cuối cùng (M_z) (hình 1.16e) là tổng ba biểu đồ thành phần trên các hình 1.16b,c,d.



Hình 1.16.

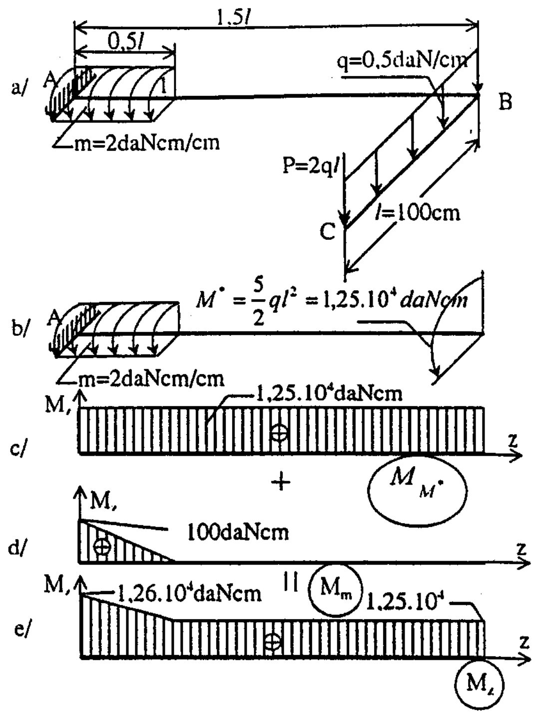
BÀI 15

Một khung phẳng chịu lực không gian như hình 1.17a. Hãy vẽ biểu đồ mômen xoắn trong khung đã cho

GIẢI

Trên khung đã cho chỉ có đoạn AB của khung là chịu xoắn. Để vẽ (M_z) cho đoạn khung này, ta rời lực tác dụng trên đoạn CB về B (hình 1.17b). Khi áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta vẽ các biểu đồ mômen xoắn thành phần (hình 1.17c,d) và biểu đồ mômen xoắn cuối cùng như hình 1.17e, nhận được bằng cách cộng biểu đồ :

$$\left(M_z\right) = \left(M_{M^*}\right) + \left(M_m\right)$$



Hình 1.17.

BÀI 16

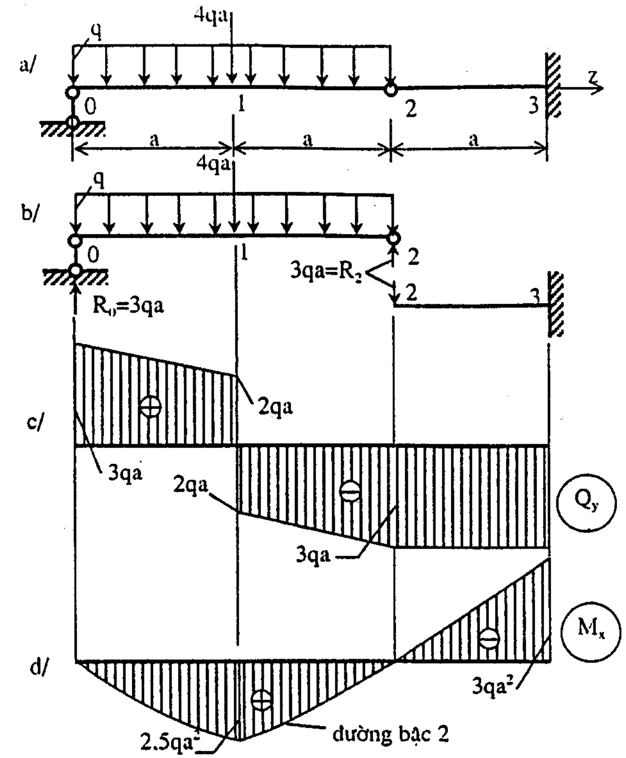
Hãy vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt cho dầm chịu lực như trên hình 1.18a.

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt

Nếu tháo khớp 2 trong dầm tĩnh định nhiều nhịp 0-3 thì dầm 2-3 vẫn cân bằng và không biến hình được gọi là dầm chính, còn dầm 0-2 sẽ bị biến hình, dầm này chỉ bất biến hình khi tựa trên dầm chính, được gọi là dầm phụ. Trước hết phải tính phản lực trên dầm phụ và đặt phản lực của dầm phụ lên dầm chính như trên hình 1.18b.

Trên dầm phụ, phản lực tại các gối tựa là



Hình 1.18.

$$R_0 = 3qa = R_2$$

Phản lực R_2 tại dầm phụ và dầm chính có chiều ngược nhau.

Dùng phương pháp mặt cắt để tính nội lực trong các đoạn 0-1, 1-2, 2-3 như trên đã làm. Biểu đồ nội lực được vẽ trên hình 1.18c,d.

2. Phương pháp vạn năng

Áp dụng công thức vạn năng (1.6) và (1.5) ta có :

$$M_x = R_0 z - q\frac{z^2}{2}\Bigg|_1 - 4qa(z-a)\Bigg|_2 + \frac{q(z-2a)^2}{2}\Bigg|_3$$

$$Q_y = R_0 - q\,z\,\Big|_{1} - 4qa\,\Big|_{2} + q\,(z - 2a)\,\Big|_{3}$$

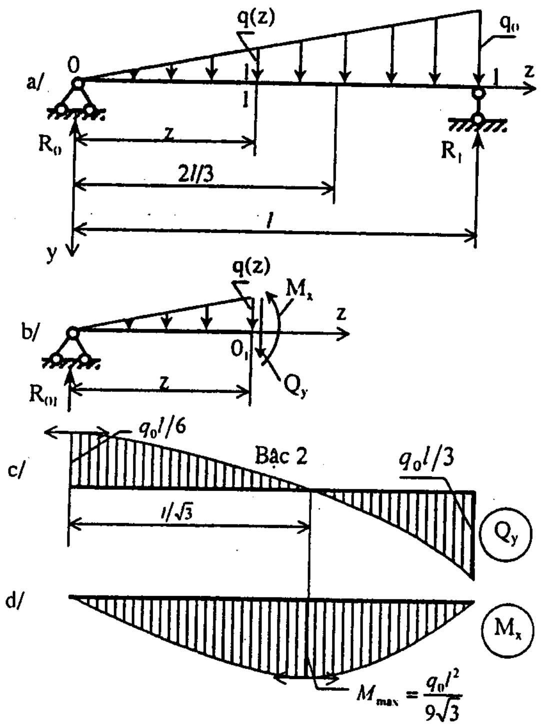
R_0 được tìm trực tiếp từ phương trình vạn năng đối với mômen. Cụ thể là :

$$M_x\ (z = 2a) = 0 \Rightarrow R_0 = 3qa\uparrow.$$

Theo các hàm M_x, Q_y ta vẽ được các biểu đồ (M_x) và (Q_y) như hình 1.18c,d.

BÀI 17

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn của thanh chịu lực tải trọng phân bố theo đường bậc nhất (hình 1.19a).



Hình 1.19.

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt

Tải trọng phân bố tại hoành độ z là $q(z) = \frac{q_0}{l}\cdot z$.

Xác định phản lực R_0 :

$$\sum m_1 = R_0 \,.\, l - \frac{q_0 l}{2}\cdot\frac{l}{3} = 0$$

Suy ra :

$$R_0 = \frac{q_0 l}{6}$$

Cắt thanh bằng mặt cắt 1–1 cách gốc tọa độ "0" một đoạn z, giữ phần bên trái (hình 1.19b). Viết các phương trình cân bằng :

$$\sum Y = Q_y + q_0\frac{z^2}{2l} - q_0\, l/6 = 0$$

$$\sum m_{01} = M_x + \frac{q_0 z^2}{2l}\cdot\frac{z}{3} - q_0\frac{l}{6}\cdot z = 0$$

Ta suy ra :

$$Q_y = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l}\cdot z^2 \quad ; \quad M_x = \frac{q_0 l\,.\,z}{6} - \frac{q_0 z^3}{6l}$$

Theo các hàm $Q_y(z)$ và $M_x(z)$ ta dựng các biểu đồ của chúng như trên các hình 1.19c,d.

2. Phương pháp vạn năng

Áp dụng trực tiếp công thức vạn năng (1.6) và (1.5), ta có:

$$M_x(z) = R_0 z - \frac{q_0}{l}\,\frac{z^3}{3!}$$

$$Q_y(z) = R_0 - \frac{q_0}{l}\,\frac{z^2}{2!}.$$

Trong đó, R_0 được tìm từ chính các phương trình vạn năng này. Cụ thể là :

$$M_x(z = l) = 0 \Rightarrow R_0 = \frac{q_0 l}{6}$$

Biểu đồ Q_y và M_x được cho trên hình 17c, d.

BÀI 18

Vẽ biểu đồ nội lực trong hệ cho trên hình 1.20a.

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt

Các phương trình cân bằng xác định phản lực liên kết :

$$\sum m_1 = 0 \Rightarrow R_3\,.\,4a + qa\,.\,a - qa^2 - 4aq\,.\,a = 0$$

$$\sum m_3 = 0 \Rightarrow R_1\,.\,4a + qa^2 - qa\,.\,5a - 4aq\,.\,3a = 0$$

Từ đó rút ra :

$R_3 = qa\uparrow$

$R_1 = 4qa\uparrow$

Dầm được chia làm n = 3 đoạn.

Viết $Q_1(z)$, $M_1(z)$ cho đoạn 0-1, gốc ở 0 (hình 1.20b) :

$\sum Y = 0 \Rightarrow$

$Q_1 + q.z_1 + P = 0$

$\sum m_{01} = 0 \Rightarrow$

$$M_1 + \frac{qz_1^2}{2} + Pz_1 = 0$$

Do đó :

$$\left.\begin{aligned} Q_1(z_1) &= -qz_1 - qa \\ M_1(z) &= -\frac{qz_1^2}{2} - qaz_1 \end{aligned}\right\} 0 \le z_1 \le a$$

Đoạn 2 : (1–2) gốc ở 0 (hình 1.20c) :

$\sum Y = 0 \Rightarrow$

$Q_2 + qz_2 + qa - 4qa = 0$

$\sum m_{02} = 0 \Rightarrow$

$$M_2 + \frac{qz_2^2}{2} +$$

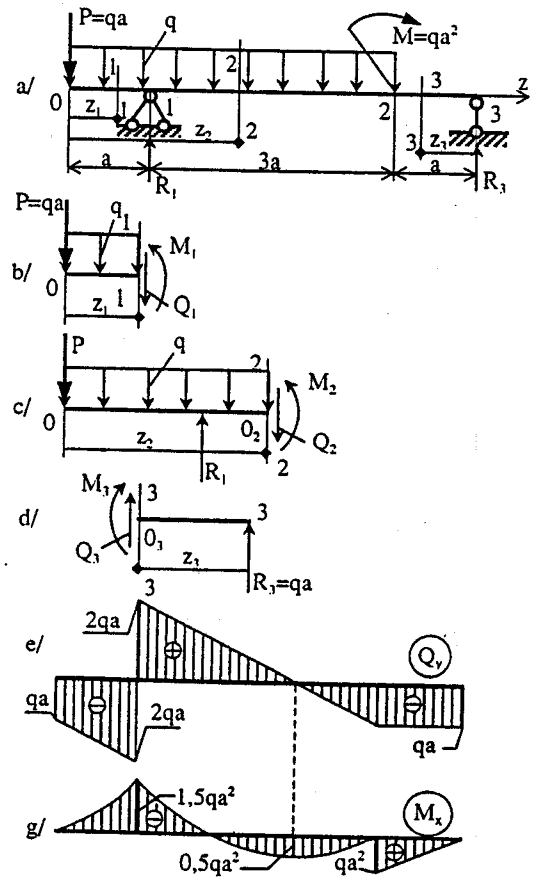
$$+ qa.z_2 - 4qa(z_2 - a) = 0$$

Do đó :

$$\left.\begin{aligned} Q_2(z) &= 4qa - qa - qz_2 \\ M_2(z) &= 4qa(z_2 - a) - qaz_2 - \frac{qz_2^2}{2} \end{aligned}\right\}$$

$a \le z_2 \le 4a$

Đoạn 3 (3-2) gốc ở 3 (hình 1.20d) :



Hình 1.20.

$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_3 + R_3 = 0$

$\sum m_{O_3} = 0 \Rightarrow M_3 - R_3.z_3 = 0$

Do đó :

$$\left.\begin{aligned} Q_3 &= -qa \\ M_3 &= qaz_3 \end{aligned}\right\} 0 \le z_3 \le a$$

2. Phương pháp vạn năng

Từ công thức (1.5) và (1.6) ta có :

$$Q(z) = \underset{i=1}{-qa - qz\Big|} \quad \underset{i=2}{+ R_1\Big|} \quad \underset{i=3}{+ q(z-4a)\Big|}$$

$$M(z) = \underset{i=1}{-qaz - \frac{qz^2}{2}\Big|} \quad \underset{i=2}{+ R_1(z-a)\Big|} \quad \underset{i=3}{+ qa^2 + q\frac{(z-4a)^2}{2}\Big|}$$

Theo các hàm Q(z), M(z) ta vẽ biểu đồ cho từng đoạn i = 1, i = 2, i = 3 với các miền xác định tương ứng $a_{i-1} \le z \le a_i$.

Biểu đồ (Q) và (M) như trên hình 1.20e,g.

Chú ý phương pháp này chỉ cần xác định phản lực R_1 tại gối 1bằng chính phương trình vạn năng $M_3(z = 5a) = 0$, mà không cần thiết phải xác định R_1, R_3 như phương pháp mặt cắt ở trên.

BÀI 19

Một dầm chịu lực như hình 1.21a. Hãy viết biểu thức nội lực M và Q dọc theo chiều dài dầm bằng phương pháp mặt cắt và vạn năng. Vẽ các biểu đồ này.

GIẢI

1. Phương pháp mặt cắt

Trên mỗi một đoạn phải thực hiện một mặt cắt, trên đó các nội lực đặt theo chiều dương. Khảo sát cân bằng của một trong hai phần dầm đã tưởng tượng cắt ra. Trong đoạn 1-2 thực hiện mặt cắt 1-1 gốc tọa độ chọn ở 2. Trong đoạn 0-1 thực hiện mặt cắt 2-2 gốc tọa độ chọn ở 2 (hình 1.21b,c).

Cụ thể là :

Đoạn 1-2 ($0 \le z_1 \le 2a$) gốc ở 2 :

$$q(z_1) = \frac{3qz_1}{3a} = \frac{qz_1}{a} ;$$

$$Q_y = \frac{q(z_1)z_1}{2} = \frac{qz_1^2}{2a} ;$$

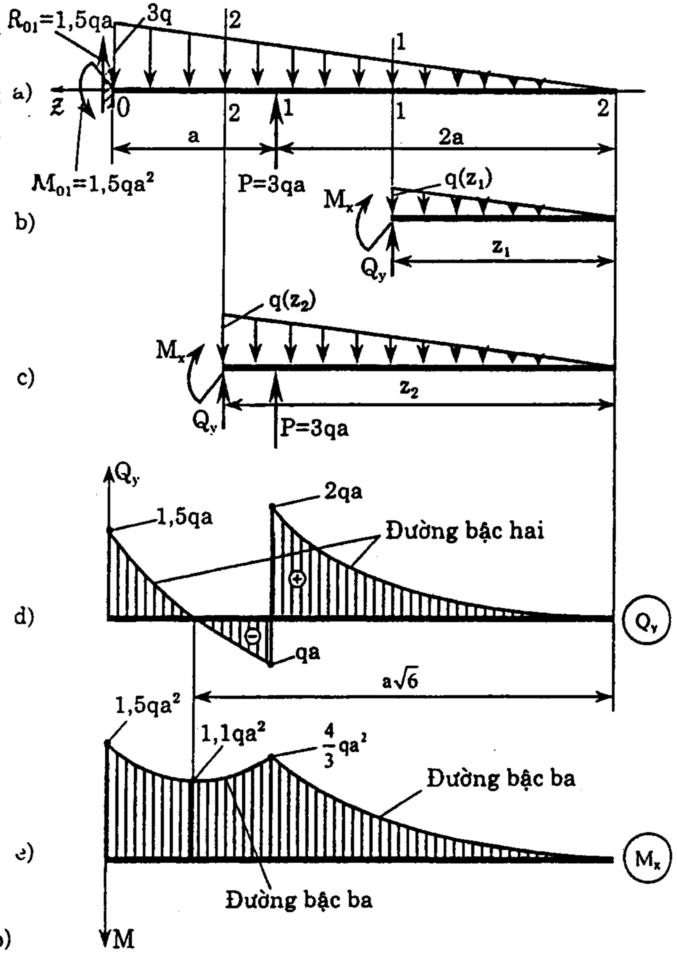
$$M_x = -\frac{q(z_1)}{2}\frac{z_1}{3} = -\frac{qz_1^3}{6a} \quad \text{(a)}$$

Đoạn 0-1 ($2a \le z_2 \le 3a$) gốc ở 2 :

$$q(z_2) = \frac{3qz_2}{3a} = \frac{qz_2}{2} ;$$

$$Q_y = \frac{qz_2^2}{2a} - 3qa ; \quad \text{(b)}$$

$$M_x = -\frac{qz_2^3}{6a} + 3qa(z_2 - 2a)$$



Hình 1.21.

Trước hết, vẽ biểu đồ lực cắt Q_y, ta thấy Q_y có giá trị bằng không trong đoạn 0-1, tại :

$$\frac{qz_2^2}{2a} - 3qa = 0 \; . \Rightarrow z_2 = a\sqrt{6}$$

Tại mặt cắt này, mômen uốn M_x có giá trị cực trị

$$M_{x_2}(Z_2 = a\sqrt{6}) = -\frac{q(a\sqrt{6})^3}{6a} + 2qa(a\sqrt{6} - 2a) = -1,1\,qa^2$$

Biểu đồ lực cắt có bước nhảy tại mặt cắt đặt lực P. Bước nhảy của biểu đồ lực cắt và mômen uốn tại ngàm cho giá trị bằng phản lực tại ngàm, căn cứ vào dấu của biểu đồ, các phản lực R_{01} và M_{01} có chiều như hình 1.21a và có giá trị : $R_{01} = 1,5\,qa$, $M_{01} = 1,5\,qa^2$.

Tại điểm 2, $q(z_1) = 0$, biểu đồ Q_y có tiếp tuyến nằm ngang tại 2. Biểu đồ M_x cũng có tiếp tuyến nằm ngang tại 2.

2. Phương pháp vạn năng cho ngay biểu thức của M_x và Q_y theo (1.6) và (1.5) như sau :

$$M_x(z) - 1,5\,qa^2 + 1,5\,qaz - 3q\frac{z^2}{2} + \frac{3q}{3a}\frac{z^3}{6}\Bigg|_1 + 3qa(z-a)\Bigg|_2 \quad (a^*)$$

$$Q_y(z) = 1,5\,qa - 3qz + \frac{3q}{3a}\frac{z^2}{2}\Bigg|_1 + 3qa\Bigg|_2 \quad (b^*)$$

$$0 \le z \le a \qquad a \le z \le 2a$$

Biểu đồ Q_y và M_x được cho trên hình 1.21d, e từ các phường trình a, a^*; b, b^*.

BÀI 20

Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn đối với dầm chịu lực như hình 1.22a bằng phương pháp cộng tác dụng và phương pháp vạn năng.

GIẢI

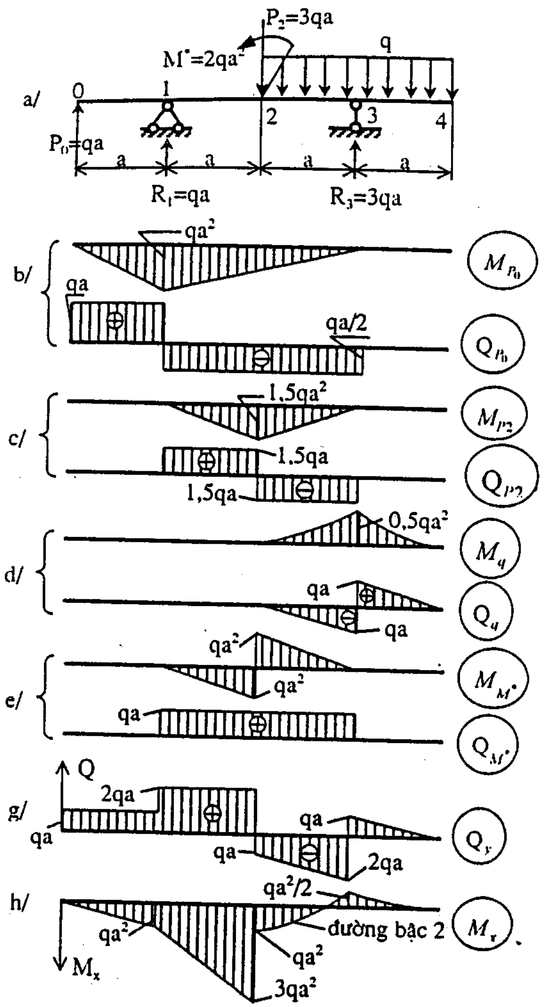
1. Phương pháp cộng tác dụng

Khi sử dụng phương pháp này ta cần vẽ nhanh hoặc dựa vào bảng 1.1 để vẽ các biểu đồ (Q) và (M) do từng tải trọng: P_0, P_2, q và M^* gây ra tương ứng được cho trên các hình 1.22b,c,d,e.

Cộng các biểu đồ tương ứng này lại theo quy tắc cộng đồ thị như sau :

$$(M_x) = (M_{P_0}) + (M_{P_2}) + (M_q) + (M_{M^*})$$

$$(Q_y) = (Q_{P_0}) + (Q_{P_2}) + (Q_q) + (Q_{M^*}) \; .$$



Hình 1.22.

Kết quả các phép cộng này được cho trên hình 1.22g,h.

Một phương pháp khác đặc biệt nhanh, chính xác, tốn rất ít sức lực và giấy, mực – Phương pháp vạn năng được giới thiệu dưới đây.

2. Phương pháp vạn năng

Áp dụng công thức (1.5) và (1.6) ta có các biểu thức của M và Q như sau :

$$M_x(z) = qaz \Big|_1 + qa(z-a) \Big|_2 - 2qa^2 - 3qa(z-2a) - q\frac{(z-2a)^2}{2} \Big|_3 + 3qa(z-3a) \Big|_4$$

$$Q_y(z) = qa \Big|_1 + qa \Big|_2 - 3qa - q(z-2a) \Big|_3 + 3qa \Big|_4$$

$0 \leqslant z \leqslant a \qquad a \leqslant z \leqslant 2a \qquad 2a \leqslant z \leqslant 3a \qquad 3a \leqslant z \leqslant 4a.$

Biểu đồ lực cắt và mômen uốn được mô tả trên hình 1.22g,h.

BÀI 21

Vẽ biểu đồ nội lực trong dầm cho trên hình 1.23a.

GIẢI

Xác định phản lực liên kết :

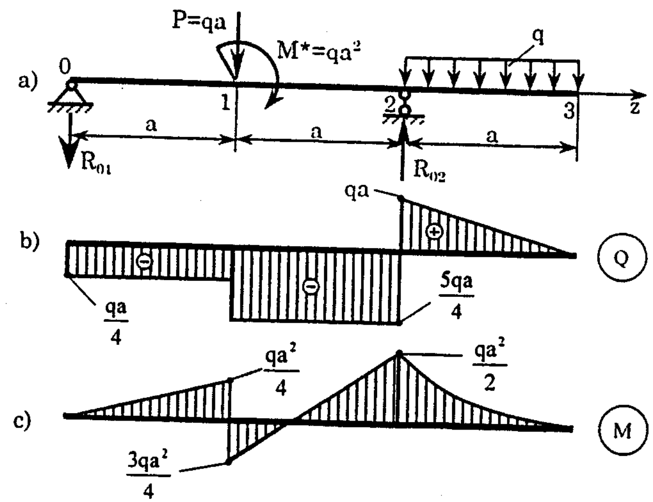
$\sum m_2(\vec{P}) = 0$

$\Rightarrow R_{01} = -\frac{qa}{4}\downarrow$

$\sum m_0(\vec{P}) = 0$

$\Rightarrow R_{02} = \frac{9}{4}qa\uparrow$

Biểu thức của M và Q được viết theo công thức vạn năng (1.6) và (1.5) như sau :



Hình 1.23.

$$M(z) = -R_{01}z\Big|_{1} + qa^2 - qa(z-a)\Big|_{2} + R_{02}(z-2a) - \frac{q(z-2a)^2}{2}\Big|_{3}$$

$$Q(z) = -R_{01}\Big|_{1} - qa\Big|_{2} + R_{02} - q(z-2a)\Big|_{3}$$

Theo các hàm M(z) và Q(z), ta dựng được các biểu đồ (Q) và (M) tương ứng hình 1.23b, c.

Chú ý là các phản lực R_{01} và R_{02} thuận tiện nhất là xác định từ chính các phương trình vạn năng ở trên. Cụ thể là :

$$M(z = 3a) = 0,\ Q(z = 3a) = 0 \Rightarrow R_{01},\ R_{02}.$$

BÀI 22

Vẽ biểu đồ nội lực : Q và M đối với dầm trên hình 1.24a.

GIẢI

Phải xác định phản lực :

$$\sum m_0(\vec{P}) = 0$$

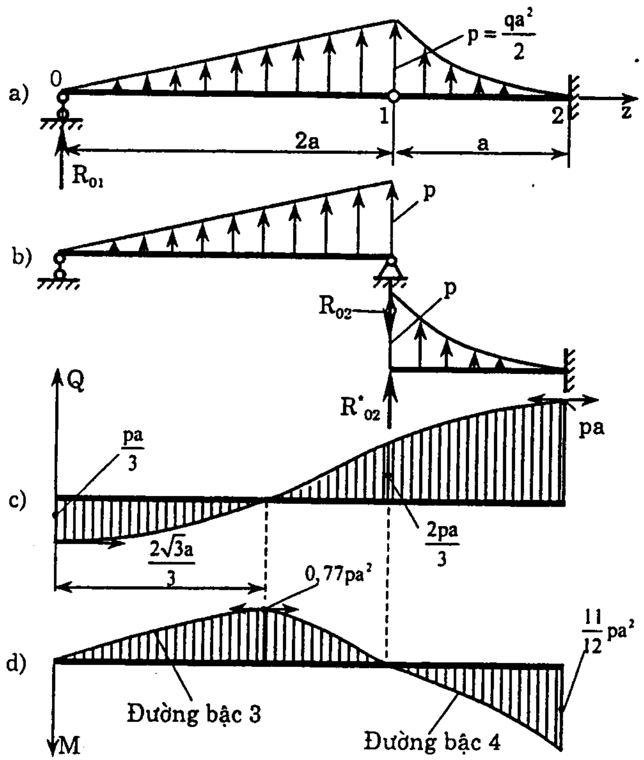
$$\Rightarrow R_{02} = \frac{2}{3}\cdot pa$$

$$\sum m_1(\vec{P}) = 0$$

$$\Rightarrow R_{01} = \frac{1}{3}\,pa.$$

$$\vec{R}^{*}_{02} = -\vec{R}_{02}.$$

Trong đoạn 0–1 hàm p(z) là hàm dương tăng theo luật bậc nhất, nên hàm Q(z) là bậc 2 lõm $\left(\text{vì } \frac{d^2Q}{dz^2} = \frac{p}{2a} > 0\right)$. Trong



Hình 1.24.

đoạn 1-2 hàm p(z) là hàm bậc 2 dương giảm, nên đồ thị Q(z) trong đoạn này là đường cong bậc 3 lồi $\left(\text{vì } \frac{d^2Q}{dz^2} < 0\right)$.

Hàm mômen trong đoạn 0–1 là hàm bậc 3 biểu đồ là đường cong lõm $\left(\text{vì } \frac{d^2M}{dz^2} = p(z) > 0\right)$.

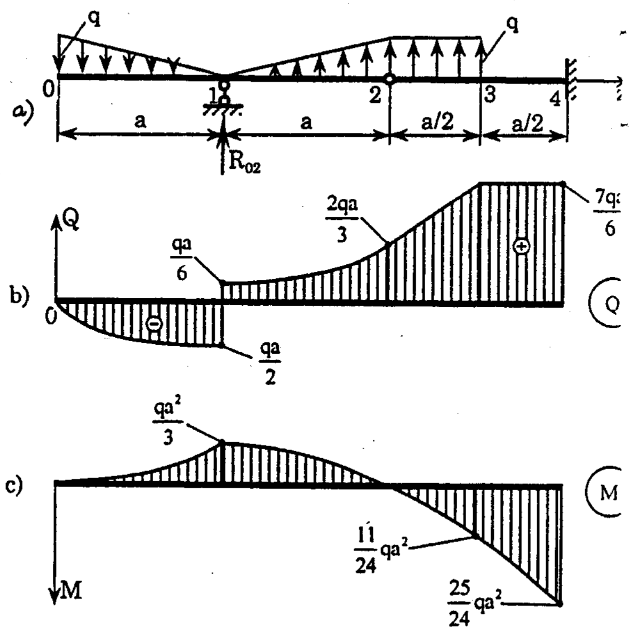
Tương tự như vậy, hàm mômen trong đoạn 1–2 là bậc 4 (vì p(z), là bậc 2) và đồ thị M trong đoạn này là đường cong lõm bậc 4 (vì p(z) > 0). Đồ thị của Q và M cho trên hình 1.24c,d.

BÀI 23

Một dầm chịu lực như hình 1.25a. Hãy vẽ biểu đồ lực cắt $Q_y(z)$ và mômen uốn $M_x(z)$.

GIẢI

Phải xác định phản lực liên kết và viết các biểu thức nội lực. Cụ thể là :



Hình 1.25.

$$Q(z) = -qz - \frac{q}{a}\frac{z^2}{2!}\Bigg|_{i=1,\ 0 \le z \le a} + R_{02} + \frac{q}{a}\cdot 2\,\frac{(z-a)^2}{2!}\Bigg|_{i=2,\ a \le z \le 2a}$$

$$-\frac{q}{a}\frac{(z-2a)^2}{2!}\Bigg|_{i=3,\ 2a \le z \le 2{,}5a} \qquad - q(z-2{,}5a)\Bigg|_{i=4,\ 2{,}5a \le z \le 3a}$$

$$M(z) = -q\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{q}{a}\,\frac{z^3}{3!}\Bigg|_{i=1\ \ 0\le z\le a} + R_{02}(z-a) + \frac{2\cdot q}{a}\cdot\frac{(z-a)^3}{3!}\Bigg|_{i=2\ \ a\le z\le 2a}$$

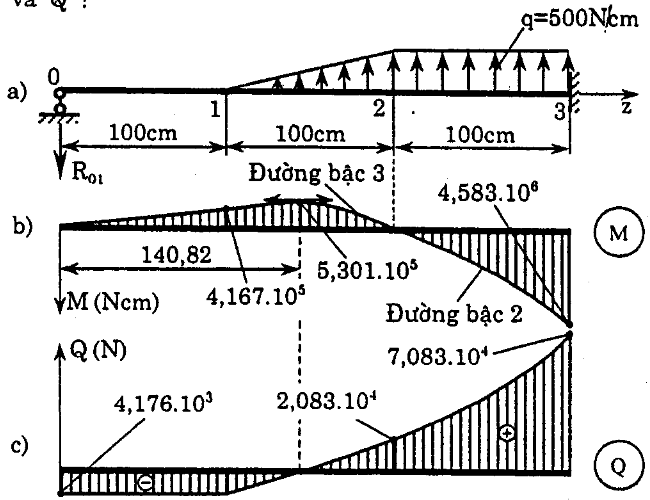
$$-\frac{q}{a}\cdot\frac{(z-2a)^3}{3!}\Bigg|_{i=3\ \ 2a\le z\le 2{,}5a} - \frac{q\,(z-2{,}5a)^2}{2}\Bigg|_{i=4\ \ 2{,}5a\le z\le 3a}$$

Tại $z = 2a$, $M(2a) = 0 \Rightarrow R_{02} = \frac{2}{3}\,qa\uparrow$

Thay R_{02} vào Q (z) và M (z) và vẽ biểu đồ (Q), (M) như hình 1.25b,c.

BÀI 24

Một dầm có liên kết khớp trung gian chịu lực như hình 1.26a. Hãy vẽ biểu đồ M và Q ?



Hình 1.26.

GIẢI

Viết biểu thức nội lực và xác định phản lực liên kết bằng phương pháp vạn năng. Cụ thể là :

$$M(z) = -R_{01}\cdot z\,\Bigg|_{1} + \frac{5\,(z-100)^3}{3!}\Bigg|_{2} - \frac{5\,(z-200)^3}{3!}\Bigg|_{3}$$

$$Q(z) = -R_{01}\,\Bigg|_{1} + \frac{5\,(z-100)^2}{2}\Bigg|_{2} - \frac{5\,(z-200)^2}{2}\Bigg|_{3}$$

Tại $z = 200$ cm, $M(200) = 0 \Rightarrow R_{01} = 4{,}176\,.\,10^3$ N (chiều như đã chọn).

Biểu thức tường minh của M và Q như sau :

$$M(z) = -4{,}176\,.\,10^3 z\,\Bigg|_{1} + \frac{5\,(z-100)^3}{6}\Bigg|_{2} - \frac{5\,(z-200)^3}{6}\Bigg|_{3}$$

$$Q(z) = -4{,}176\,.\,10^3\,\Bigg|_{1} + \frac{5\,(z-100)^2}{2}\Bigg|_{2} - \frac{5\,(z-200)^2}{2}\Bigg|_{3}$$

đoạn 0-1 : $0 \le z \le 100$ cm

đoạn 1-2 : 100 cm $\le z \le 200$ cm

đoạn 2-3 : 200 cm $\le z \le 300$ cm

Biểu đồ của (M) và (Q) được cho trên hình 1.26b, c.

BÀI 25

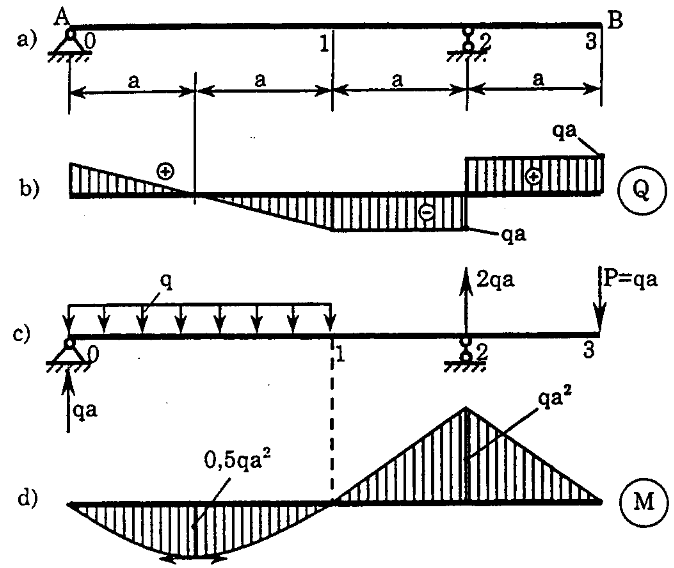
Một dầm có sơ đồ hình học và biểu đồ lực cắt (Q) như hình 1.27a,b. Hãy dựng lại sơ đồ tải trọng và vẽ biểu đồ (M) ?

GIẢI

Từ biểu đồ Q và sơ đồ hình học, khi đi từ trái sang phải ta thấy :

Tại "O" biểu đồ Q có bước nhảy từ dưới lên đó chính là phản lực R_{01} = qa, tương tự như vậy tại 2 có phản lực R_{03} = 2qa. Tại 3 có bước nhảy xuống dưới nên tại đó có P = qa hướng xuống. Đoạn 0–1 biểu đồ (Q) là đoạn thẳng nghiêng đi xuống nên trên đoạn đó tải trọng là phân bố đều q < 0 (hướng xuống). Sơ đồ tải trọng trên dầm đã cho được mô tả lại trên hình 1.27c.

Phương trình M(z) theo (1.6) :



Hình 1.27.

$$M(z) = qaz - q\frac{z^2}{2}\Bigg|_{1} + q\frac{(z-2a)^2}{2}\Bigg|_{2} + 2qa(z-3a)\Bigg|_{3}$$

Tại $z = a$, $M(a) = M_{max} = qa^2 - q\dfrac{a^2}{2} = q\dfrac{a^2}{2}$.

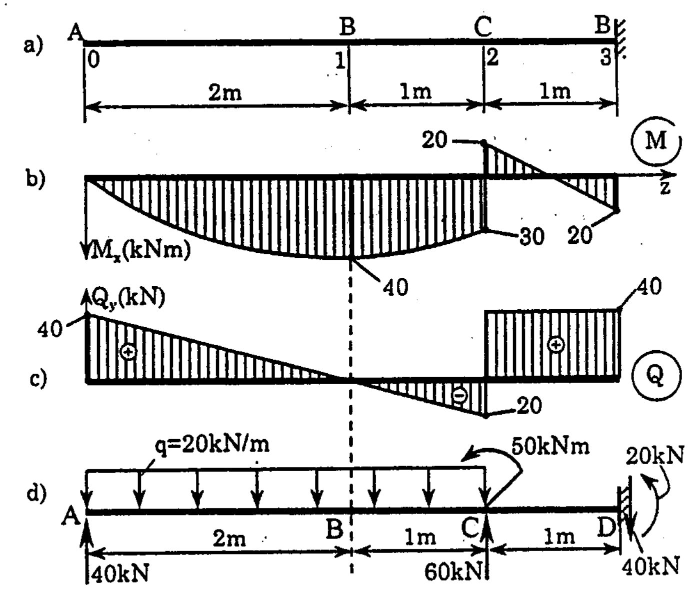
Theo hàm M(z) trong từng đoạn ứng với miền xác định của chúng, ta dựng được biểu đồ (M) như hình 1.27d.

BÀI 26

Một dầm chịu uốn có liên kết, kích thước và biểu đồ của mômen uốn cho trên hình 1.28a,b. Hãy vẽ biểu đồ lực cắt và tải trọng tác dụng lên dầm để có biểu đồ mômen đã cho.

GIẢI

Theo qui ước về chiều dương của trục z và của tung độ M_x, lực cắt Q_y là dương khi tiếp tuyến của biểu đồ M_x có chiều như hình 1.28b. Vì vậy, trong đoạn 2–3 lực cắt Q_y là dương :



Hình 1.28.

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = \frac{20 + 20}{1} = 40 \text{ kN}$$

Trong đoạn 0–2, biểu đồ M_x là một đường bậc 2, dạng tổng quát của đường bậc 2 có dạng :

$$M_x = Az^2 + Bz + C$$

Thay các tung độ M_x tại $z = 0$, $z = 2m$, $z = 3m$, ta có :

$z = 0$, ta có : $C = 0$

$z = 2m$; $M_x = 40 = A.2^2 + B2$

$z = 3m$; $M_x = 30 = A.3^2 + B3$

Suy ra : $A = -10$; $B = 40$

Vậy $M_x = -10z^2 + 40z$. Từ các liên hệ vi phân, ta có :

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = \left(-20z + 40\right) \text{ kN}$$

$$q_y = \frac{dQ_y}{dz} = -20 \text{ kN/m.} \qquad \text{(a)}$$

Như vậy, biểu đồ Q_y (hình 1.28c) trong đoạn 2-3 là một hằng dương bằng 40 kN, còn trong đoạn 0–2 là bậc nhất, tại z = 2m thì $Q_y = 0$, tại đó M_x cực đại. Tại "2" biểu đồ M_x có bước nhảy bằng: 30 + 20 = 50 kNm nhảy từ dưới nhảy lên, chứng tỏ tại "2" có mômen ngoại lực $M_c^* = 50$ kNm làm căng thớ trên của dầm. Quan hệ (a) cho thấy trên đoạn 0-2 dầm chịu tải trọng phân bố đều hướng xuống dưới.

Từ biểu đồ Q_y ta thấy : tại 0, 2, 3 trên biểu đồ Q có bước nhảy, độ lớn và chiều của bước nhảy đúng bằng vectơ lực tập trung tương ứng tại 0, 2, 3. Khi người quan sát đi từ trái sang phải theo chiều dương trục z. Những nhận biết ở trên cho ta dựng lại tải trọng trên dầm như hình 1.28d.

BÀI 27

Một dầm có sơ đồ hình học và biểu đồ (Q), (M) như hình 1.29a. Hãy lập lại sơ đồ tải trọng tác dụng lên dầm để có biểu đồ (Q) và (M) đã cho.

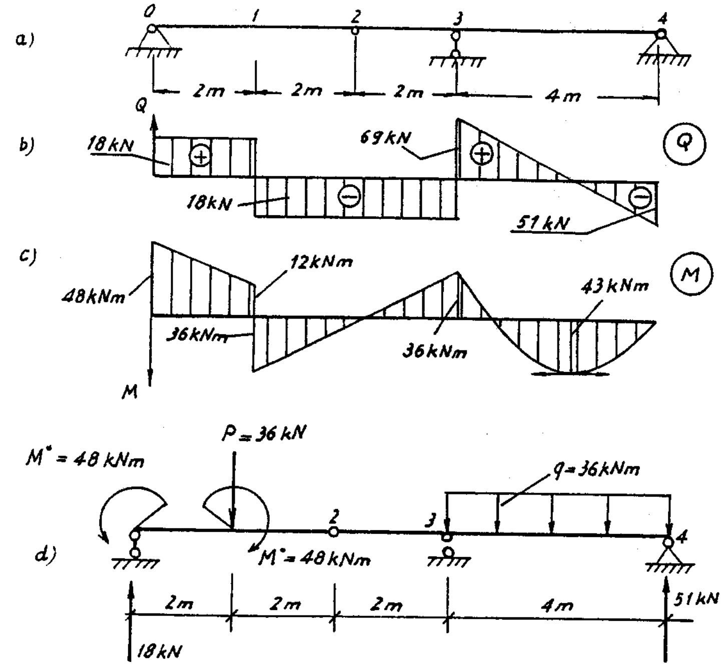
GIẢI

Căn cứ vào biểu đồ lực cắt và biểu đồ mômen khi đi từ 0 ÷ 4 cho ta thấy :

Trong các đoạn từ 0 ÷ 3 không có tải trọng phân bố vì Q là những đoạn thẳng song song với trục thanh, còn M là những đoạn thẳng cắt trục thanh. Đoạn 3 ÷ 4 phải có tải trọng phân bố đều hướng xuống vì Q là hàm giảm (Q' = q < 0) và M là đoạn cong lồi (M'' = q < 0).

Tại các mặt cắt 0, 1, 3, 4 biểu đồ lực cắt có bước nhảy. Tại mặt cắt đó trên sơ đồ tính phải có lực tập trung có vectơ đúng bằng độ lớn và chiều bước nhảy. Tại các mặt cắt 0 và 1, biểu đồ mômen có bước nhảy. Vậy tại các mặt cắt này trên sơ đồ tính có mômen tập trung lần lượt ngược và thuận chiều kim đồng hồ.

Vậy sơ đồ chất tải như (hình 1.29d).



Hình 1.29.

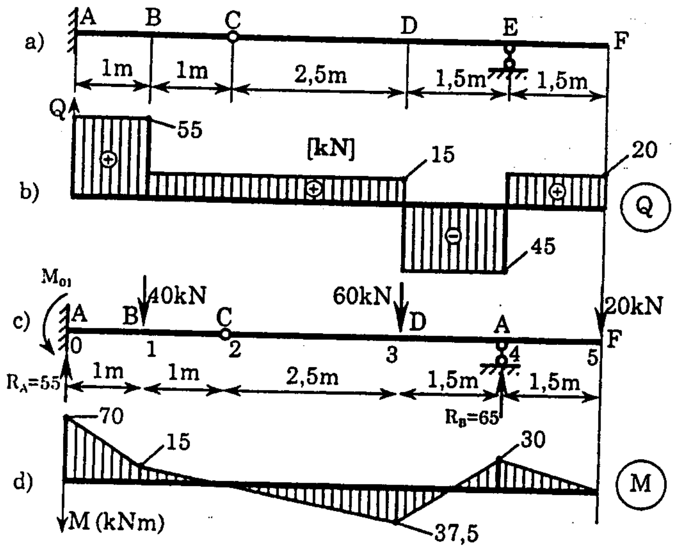
BÀI 28

Một dầm có sơ đồ hình học và biểu đồ (Q) như hình 1.30a,b. Hãy dựng lại sơ đồ tải trọng và vẽ (M) ?

GIẢI

Từ biểu đồ Q, khi đi từ trái sang phải ta thấy : tại điểm 1, 3 và 5 biểu đồ có bước nhảy từ trên xuống, nên tại đó có lực tập trung hướng từ trên xuống và có độ lớn bằng đúng bước nhảy, còn bước nhảy tại 0 và 4 hướng từ dưới lên đó chính là các phản lực hướng lên tại 0 và 4. Do đó, sơ đồ tải trọng như hình 1.30c.

Để vẽ biểu đồ mômen ta viết $M_x(z)$ theo (1.6) :



Hình 1.30.

$$M(z) = -M_{01} + 55z\Big|_{1} - 40(z-1)\Big|_{2} - 60(z-4{,}5)\Big|_{3} + 65(z-6)\Big|_{4} \quad (a)$$

Tại $z = 2$m, $M(2m) = 0 \Rightarrow M_{01} = 70$ kNm.

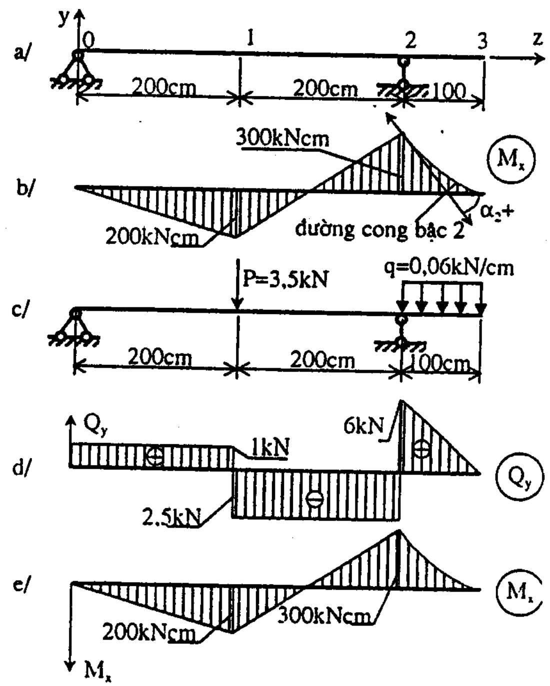
Thay $M_{01} = 70$ kNm vào (a) và vẽ biểu đồ M_x cho từng đoạn theo hàm và miền xác định của chúng, ta có biểu đồ (M_x) như hình 1.30d.

BÀI 29

Một dầm chịu uốn có sơ đồ hình học, liên kết và biểu đồ mômen như hình 1.31a, b. Hãy thiết lập lại tải trọng nào tác dụng lên dầm để có biểu đồ mômen đã cho và vẽ biểu đồ Q ? Biết $tg\alpha_2{}^+ = 6$ kN.

GIẢI

Biểu đồ mômen, sơ đồ liên kết và hình học cho thấy : phản lực tại 0 hướng lên và thỏa mãn phương trình



Hình 1.31.

$$R_0 \cdot 200 = 200 \text{ kNcm} \Rightarrow R_0 = 1 \text{ kN}\uparrow$$

Lực cắt tại 2^- được tìm từ quan hệ :

$$\frac{dM}{dz}\Big|_{2^-} = Q_{2^-} = -\frac{300+200}{200} = -2{,}5 \text{ kN}$$

Lực cắt tại 2^+ chính là $tg\alpha_2{}^+$. Cụ thể là :

$$Q_{2^+} = tg\alpha_2{}^+ = 6 \text{ kN}$$

Tại 1 biểu đồ M có điểm gãy, tại đây phải có lực tập trung hướng xuống và trị số là :

$$P = \left|\frac{200}{200}\right| + \left|\frac{500}{200}\right| = 3{,}5 \text{ kN}$$

Trên đoạn 2-3 biểu đồ M là đường bậc hai lồi, do đó trên đoạn này có tải trọng q phân bố đều hướng xuống $\left(\text{vì } \frac{d^2M}{dz^2} = q = \text{hằng} < 0\right)$.

Các lập luận trên cho ta xác lập tải trọng như hình 1.31c và vẽ biểu đồ lực cắt là đường bậc nhất với $Q_2+ = 100\,q = 6$ kN như hình 1.31d.

BÀI 30

Một dầm có sơ đồ hình học và liên kết như hình 1.32a. Cho biết biểu đồ mômen uốn đầy đủ.

Hãy tái hiện lại sơ đồ tải trọng và vẽ biểu đồ lực cắt.

GIẢI

Trong đoạn 0-1, 1-2 và 2-3 biểu đồ mômen là những đoạn thẳng xiên cắt trục dầm. Cho nên trên các đoạn này biểu đồ Q là những đoạn thẳng song song với trục dầm. Trên đoạn 3-4 biểu đồ mômen là một parabol bậc 2, nên biểu đồ Q là một đoạn xiên, có tung độ bằng không tại vị trí $M_{max} = 62{,}5$ kNm.

Từ liên hệ vi phân $\frac{dM}{dz} = Q(z)$ ta có lực cắt trong các đoạn như sau :

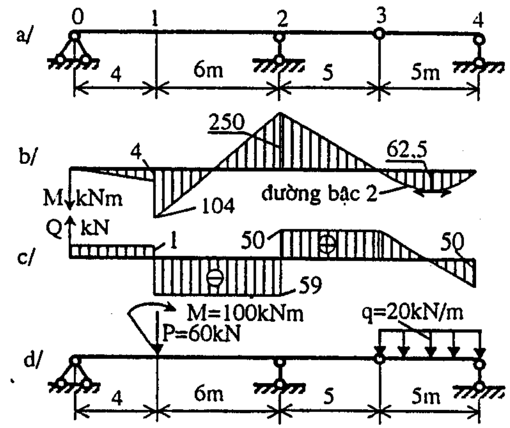
$$\text{Đoạn 0-1 : } Q_{0-1} = \frac{dM_1}{dz} = \frac{4}{4} = 1 \text{ kN} > 0$$

$$\text{Đoạn 1-2 : } Q_{1-2} = -\frac{dM_2}{dz} = -\frac{250 + 104}{6} = -59 \text{ kN} < 0$$

$$\text{Đoạn 2-3 : } Q_{2-3} = \frac{dM_3}{dz} = \frac{250}{5} = 50 \text{ kN} > 0$$

Đoạn 3-4 :

Tại 3 không có lực tập trung nên tại đó trên biểu đồ Q không có bước nhảy. Từ tung độ $Q_3 = 50$ kN tại điểm 3 nối với $Q = 0$ tại điểm giữa trên đoạn 3-4 và kéo dài ta được $Q_4 = -50$ kN < 0.



Hình 1.32.

Các giá trị lực cắt tại 0, 1, 2, 4 chính là các phản lực liên kết và ngoại lực tập trung tại các điểm nói trên. Biểu đồ lực cắt được dựng lại trên hình 1.32c. Tại điểm 1 trên biểu đồ M có bước nhảy bằng 100 kNm từ trên xuống cho nên tại đây có mômen ngoại lực tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ. Trên đoạn 3-4 biểu đồ M là đường bậc 2 lồi và Q là bậc 1 giảm dần như trên hình 1.32b, c cho nên trên đoạn này ngoại lực phải âm và phân bố đều. Sơ đồ tải trọng được dựng lại trên hình 1.32d.

BÀI 31

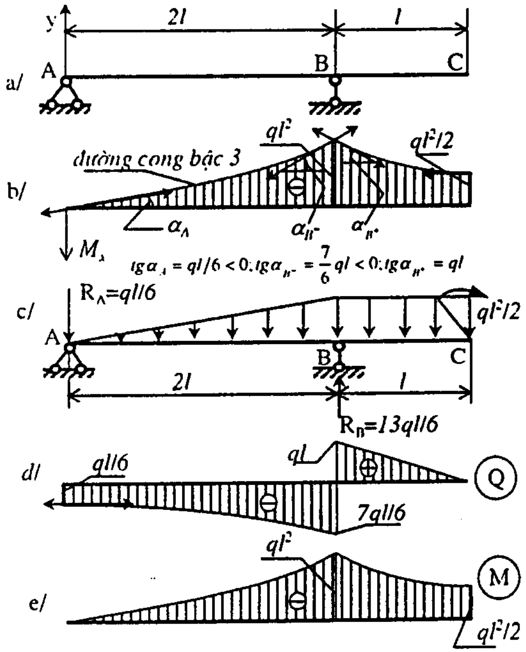
Một dầm chịu uốn có sơ đồ hình học, liên kết và biểu đồ mômen như hình 1.33a,b. Hãy xác định ngoại lực tác dụng lên dầm và vẽ biểu đồ Q ?

GIẢI

Từ biểu đồ M cho thấy : tại C biểu đồ có bước nhảy bằng $ql^2/2$ căng thớ trên và có tiếp tuyến nằm ngang.

Do đó, tại C có mômen tập trung $M^* = ql^2/2$ quay thuận chiều kim đồng hồ và không có lực tập trung.

- Trên các đoạn AB và BC biểu đồ là những đường cong bậc 3 và 2 i, nên trên các đoạn tương ứng dầm chịu tải trọng q phân bố bậc nhất và éu hướng xuống $\left(\text{vì } \dfrac{d^2M}{dz^2} = q < 0\right)$.



Hình 1.33.

- Tại A, $tg\alpha_A = \left.\dfrac{dM}{dz}\right|_{z=0} = \dfrac{ql}{6} < 0$ nên tại đây trên biểu đồ Q có bước nhảy hướng xuống bằng $ql/6$ và bằng phản lực R_A.

Tương tự như vậy, tại mặt cắt B bên trái có $\left.\dfrac{dM}{dz}\right|_{B^-} = \dfrac{7}{6}ql < 0$ và tại B bên phải $tg\alpha_{B^+} = ql > 0$, nên biểu đồ Q tại B có tung độ bên trái âm bằng $\dfrac{7}{6}ql$ và bên phải dương bằng ql. Nghĩa là tại gối tựa B có phản lực hướng lên bằng $\dfrac{13}{6}ql$. Để dầm cân bằng thì ta phải có :

$$\sum Y = 0 = -R_A - R_q + \frac{13}{6}ql - ql = 0$$

Suy ra : hợp lực R_q trong đoạn AB là diện tích tam giác có $q_A = 0$, $q_B = q$. Các lập luận trên cho ta xác lập lại tải trọng tác dụng lên dầm và biểu đồ Q như hình 1.33c, d.

BÀI 32

Cho một thanh cong hình dạng bất kỳ S có chiều dài dây cung là L chịu tải trọng phân bố đều q. Hãy chứng minh rằng hợp lực $\vec{R}$ của tải trọng phân bố này có phương chiều vuông góc với dây cung L và đi qua điểm giữa của dây cung và có độ lớn bằng tích của q và chiều dài L (hình 1.34).

GIẢI

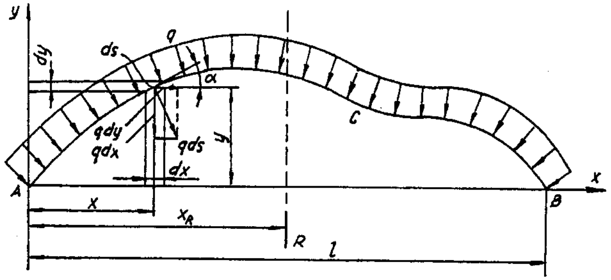
Xét phân tố thanh dS chịu tác dụng của lực phân tố qdS với các thành phần theo phương x và y là :

$$qdx,\ qdy$$

Khi ký hiệu hợp lực của tải trọng q là R và các thành phần của nó lên phương x và y là R_x, R_y, ta có :

$$R_x = \int_s qdy = q\int_s dy = q\int_0^0 dy = 0$$

$$R_y = \int_s qdx = q\int_0^l dx = ql$$



Hình 1.34.

Do đó :

$$R = R_y = ql \qquad (1)$$

Vì $\vec{R_x} = 0$ cho nên hợp lực $\vec{R} = \vec{R_y} = \vec{ql}$ và vuông góc với trục x, nghĩa là vuông góc với dây cung L.

Gọi x_R là khoảng cách từ gốc "A" đến đường tác dụng của hợp lực R, theo định lý Varignon ta có thể tìm được x_R như sau :

$$R x_R = \int_s q\,xdx + \int_s qydy = q\int_0^{\ell} xdx + \int_0^{0} ydy = \frac{ql^2}{2}$$

$$x_R = \frac{l}{2}. \qquad (2)$$

Nghĩa là đường tác dụng của hợp lực R đi qua trung điểm của dây cung. Đó là điều cần chứng minh. Các kết quả (1) và (2) được phát biểu dưới dạng một định lý như sau :

Định lý : "Hợp lực của tải trọng phân bố đều dọc theo một cung hình dạng bất kỳ có độ lớn bằng tích của tải trọng với chiều dài dây chắn cung, có đường tác dụng vuông góc đi qua trung điểm của dây cung".

BÀI 33

Một thanh cong tròn chịu lực như hình 1.35a. Hãy viết các biểu thức nội lực theo q, R, α, β với $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$.

GIẢI

Thanh được chia làm hai đoạn AB và BC.

Nội lực trên mặt cắt D_1 bất kỳ thuộc đoạn AB ($0 \leq \varphi \leq \alpha$) theo định lý đã chỉ ra trong bài 32, ta có hợp lực của q trong đoạn $0 \leq \varphi \leq \alpha$ là :

$$R_1 = qAD_1 = 2qR\sin\varphi/2$$

Do đó, điều kiện cân bằng của đoạn AD_1 cho ta :

$$N(\varphi) = -R_1 \sin\varphi/2 = -2qR\sin^2\varphi/2 = -qR(1-\cos\varphi);$$

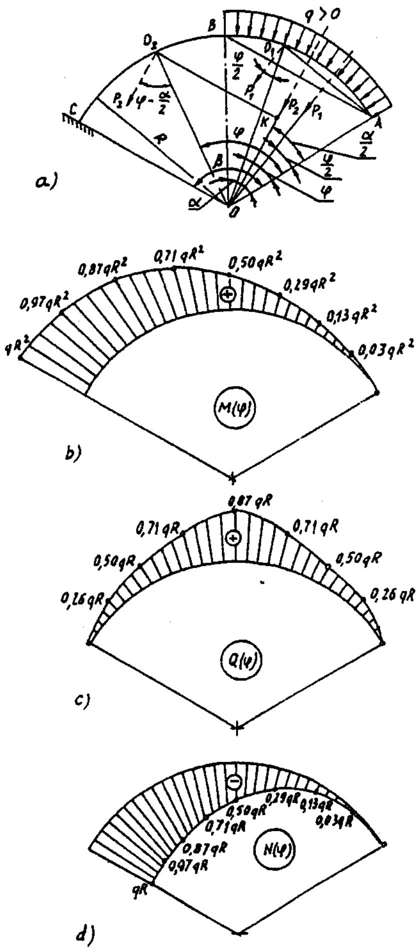
$$Q(\varphi) = R_1 \cos\varphi/2 = 2qR\sin\varphi/2\cos\varphi/2 = qR\sin\varphi;$$

$$M(\varphi) = R_1 \frac{AD_1}{2} = 2qR^2\sin^2\varphi/2 = qR^2(1-\cos\varphi)$$

Nội lực trên mặt cắt D_2 thuộc đoạn BC ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) nhận được khi khảo sát điều kiện cân bằng của phần thanh bên phải mặt cắt D_2. Cụ thể là :

$$N(\varphi) = -R_2\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = -2qR\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$Q(\varphi) = R_2\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = 2qR\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right);$$



Hình 1.35.

$$M(\varphi) = R_2D_2K = R_2R\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = 2qR^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Với $\alpha = 60^o$ và $\beta = 120^o$ giá trị của N (φ), Q (φ), M(φ), tại các φ_i khác nhau được cho trong bảng 1.2 và 1.3 dưới đây và biểu đồ (M), (Q), (N) được cho trên hình 1.35b, c, d.

Bảng 1.2

φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$1-\cos\varphi$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
0	0	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,259	0,966	0,034	−0,034	0,259	0,034
30	0,500	0,866	0,134	−0,134	0,500	0,134
45	0,707	0,707	0,293	−0,293	0,707	0,293
60	0,866	0,500	0,500	−0,500	0,866	0,500

Bảng 1.3

φ^o	$\varphi-30^o$	$\sin(\varphi-30^o)$	$\cos(\varphi-30^o)$	$N(\varphi)/qR$	$Q(\varphi)/qR$	$M(\varphi)/qR^2$
60	30	0,500	0,866	−0,500	0,866	0,500
75	45	0,707	0,707	−0,707	0,707	0,707
90	60	0,866	0,500	−0,866	0,500	0,866
105	75	0,966	0,259	−0,966	0,259	0,966
120	90	1,000	0,000	−1,000	0,000	1,000

BÀI 34

Một thanh cong một phần tư vòng tròn chịu lực q phân bố đều theo phương thẳng đứng (hình 1.36a). Hãy vẽ các biểu đồ N, Q, M ?

GIẢI

Nội lực trên mặt cắt ngang có tọa độ φ so với phương thẳng đứng do lực sơ cấp $dP = qdS = q\rho d\alpha$ là (hình 1.36b) :

$$dN = -dP\sin\varphi = q\rho\sin\varphi\, d\varphi\ ;$$

$$dQ = dP\cos\varphi = q\rho\cos\varphi\, d\varphi\ ;$$

$$dM = dP\,.\rho(\sin\varphi - \sin\alpha) =$$

$$= q\rho^2(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha$$

Nội lực do toàn bộ ngoại lực tác dụng lên phần khảo sát từ $0 \div \varphi$ (phần trên) (hình 1.36b) :

$$N = -q\rho\sin\varphi\int_0^{\varphi} d\alpha = -q\rho\varphi\sin\varphi;$$

$$Q = q\rho\cos\varphi\int_0^{\varphi} d\alpha = q\rho\varphi\cos\varphi\ ;$$

$$M = q\rho^2\int_0^{\varphi}(\sin\varphi - \sin\alpha)\,d\alpha =$$

$$= q\rho^2(\varphi\sin\varphi + \cos\varphi - 1)\ ;$$

tại $\varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0$; tại $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_{\pi/4} \approx -0{,}555\rho q$$

tại $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow N_{\pi/2} = -q\rho\frac{\pi}{2} = -1{,}571\,q\rho.$$

Tương tự :

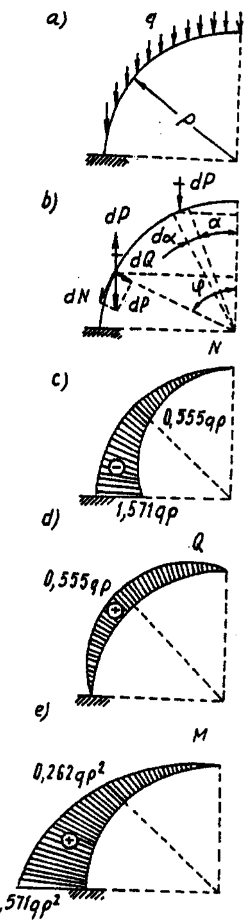
$Q_o = 0$; $Q_{\pi/4} \approx 0{,}555\ q\rho$; $Q_{\pi/2} = 0$

$M_o = 0$;

$$M_{\pi/4} \approx q\rho^2\left(\frac{\pi}{4}0{,}707 + 0{,}707 - 1\right)$$

$$\approx 0{,}262\ q\rho^2$$

$$M_{\pi/2} = q\rho^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 0{,}57 + q\rho^2$$



Hình 1.36.

Biểu đồ N, Q, M được cho trên hình 1.36c, d, e.

BÀI 35

Một thanh cong là một nửa vòng tròn bán kính R chịu tải trọng phân bố đều q theo phương tiếp tuyến (hình 1.37a). Hãy vẽ các biểu đồ N, Q, M.

GIẢI

Gọi α là góc tạo bởi mặt cắt ngang (phương hướng kính) và phương ngang thì hợp lực của lực sơ cấp tại đây là :

$dP = qdS = qRd\alpha$

Các nội lực sơ cấp tại mặt cắt φ do dP gây ra là :

$$dN = -dP\cos(\varphi - \alpha) = -qR\cos(\varphi - \alpha)\,d\alpha$$

$$dQ = dP\sin(\varphi - \alpha) = qR\sin(\varphi - \alpha)\,d\alpha$$

$$dM = -dP\left[R - R\cos(\varphi - \alpha)\right] = -qR^2\left[1 - \cos(\varphi - \alpha)\right]d\alpha$$

Nội lực tổng cộng tại φ do toàn bộ tải trọng q tác dụng trên phần từ $0 \div \varphi$ là :

$$N = -qR\int_0^{\varphi}\cos(\varphi - \alpha)\,d\alpha = -qR\sin\varphi$$

$$Q = qR\int_0^{\varphi}\sin(\varphi - \alpha)\,d\alpha = qR(1 - \cos\varphi)$$

$$M = -qR^2\left[\int_0^{\varphi}d\alpha - \int_0^{\varphi}\cos(\varphi - \alpha)\,d\alpha\right]$$

$$= qR^2(\sin\varphi - \varphi)\ ;$$

tại $\varphi = 0 \Rightarrow N_0 = 0\ ;\ Q_0 = 0\ ;$

$M_0 = 0$

tại $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow N_{\pi/4} = -0{,}707\,qR\ ;$

$Q_{\frac{\pi}{4}} = 0{,}293\,qR\ ;\ M_{\pi/4} = -0{,}0789\,R^2.$

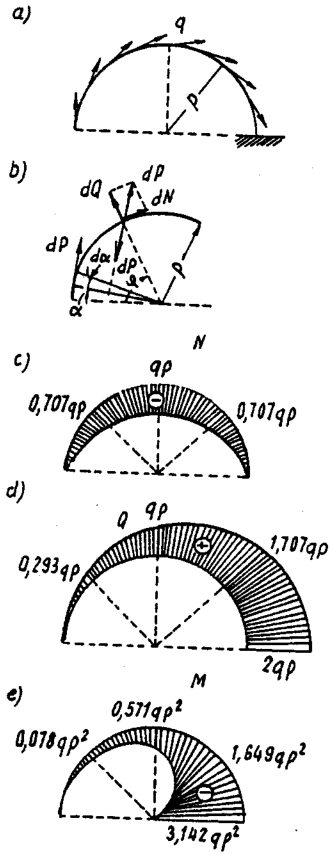
Tại $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$N_{\frac{\pi}{2}} = -qR\ ;\ Q_{\pi/2} = qR\ ;$

$M_{\pi/2} = -0{,}571\,qR^2.$

Tại $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

$N_{\frac{3\pi}{2}} = 0{,}707\,qR\ ;$



Hình 1.37.

$Q_{\frac{3\pi}{4}} = 1{,}707\,qR\ ;$

$M_{\frac{3\pi}{4}} = -1{,}649\,qR^2$

tại $\varphi = \pi$

$N_{\pi} = 0\ ;\ Q_{\pi} = 2qR\ ;$

$M_{\pi} = -3{,}142\,qR^2.$

Các biểu đồ N, Q, M được cho trên hình 1.37c, d, e.

BÀI 36

Một thanh cong hình êlip $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ hở tại "O", chịu áp lực q. Hãy xác định nội lực tại mặt cắt có tọa độ x, y bất kỳ theo q, a, b đã biết và biểu thức nội lực khi a = b ? (hình 1.38a).

GIẢI

Do tính đối xứng với trục Ox nên ta chỉ cần khảo sát một nửa phía trên. Gọi q_x, q_y là hình chiếu của q lên các phương x, y. Nguyên lý cộng tác dụng cho ta :

$$N = qy\cos\beta - qx\sin\beta\ ;$$

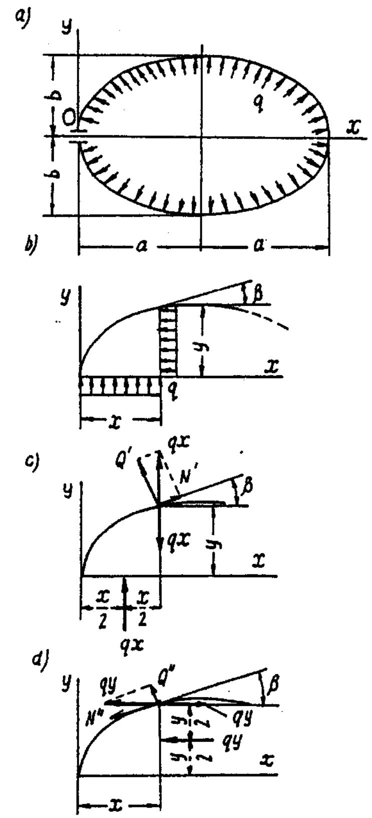
$$Q = qx\cos\beta - qy\sin\beta\ ;$$

$$M = -\frac{q}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Chú ý đến :

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

ta có :



Hình 1.38.

$$\sin\beta = \frac{a - x}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(2ax - x^2\right) + \left(a - x\right)^2}};$$

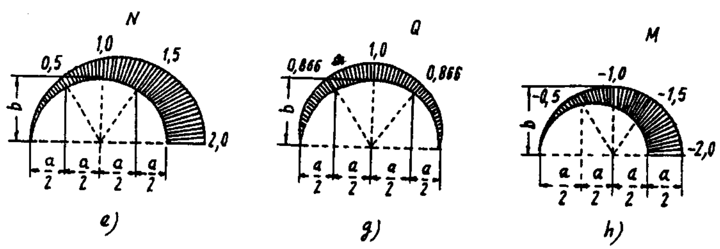
$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{b}\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(2ax - x^2\right) + \left(a - x\right)^2}};$$

Do đó :

$$N = \frac{qax}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(2ax - x^2\right) + \left(a - x\right)^2}}$$

$$Q = \frac{q\left[\frac{a}{b}x + \frac{b}{a}(a - x)\right]\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\left(2ax - x^2\right) + \left(a - x\right)^2}};$$

$$M = -\frac{q}{2}\left[\frac{b^2}{a^2}\left(2ax - x^2\right) + x^2\right].$$



Hình 1.38

Khi a = b ta có một thanh cong tròn hở tại "O". Trong trường hợp riêng này ta có :

$$N = q\cdot x\ ;\quad Q = q\sqrt{2ax - x^2}\ ;\quad M = -qax.$$

Biểu đồ lực dọc N, lực cắt Q và mômen M được cho trên hình 1.38e,g,h.

BÀI 37

Cho khung chịu lực như hình 1.39a. Vẽ các biểu đồ nội lực (N_z), (Q_y), (M_x) của khung.

GIẢI

1) Xác định các phản lực :

$$H_A = 0\ ;\ R_A = \frac{qa}{2}\ ;\ R_E = \frac{qa}{2}$$

2) Dùng phương pháp mặt cắt, xác định các thành phần nội lực tại các mặt cắt trên các đoạn.

Chia khung ra làm 4 đoạn: AB, BC, CD và DE. Trên mỗi đoạn ta thiết lập một hệ trục tọa độ yz như hình 1.39b.

Bằng phương pháp mặt cắt, ta xác định các thành phần nội lực tại các mặt cắt di động lần lượt trên mỗi đoạn.

a) Đoạn AB, $0 \leq z \leq a$ (hình 1.39c).

Các phương trình cân bằng:

$$\Sigma Z = N_z = 0$$

$$\Sigma Y = -\frac{qa}{2} + Q_y = 0$$

$$\Sigma m_{O_1} = M_x - \frac{qa}{2}\cdot z = 0$$

Suy ra :

$$N_z = 0\ ;\ Q_y = \frac{qa}{2}\ ;\ M_x = \frac{qa}{2}\cdot z$$

b) Đoạn BC, $0 \leq z \leq a$ (hình 1.39d)

Các phương trình cân bằng :

$$\Sigma Z = N_z + \frac{qa}{2} = 0$$

$$\Sigma Y = Q_y = 0$$

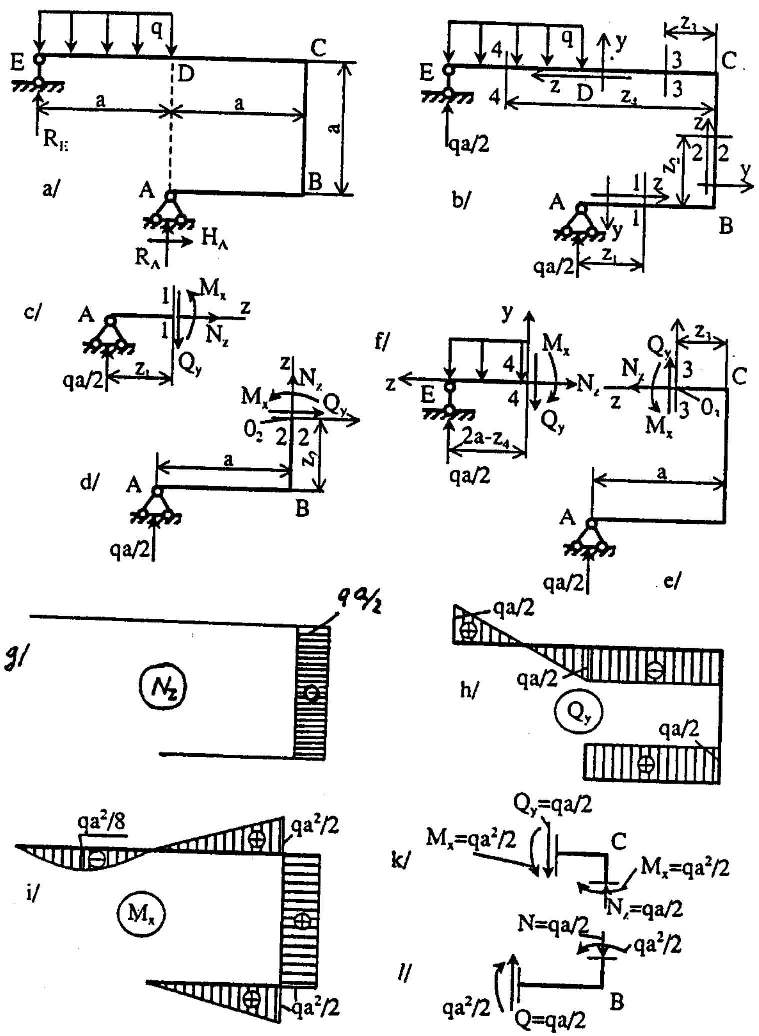
$$\Sigma m_{O_2} = M_x - \frac{qa}{2}\cdot a = 0$$

Suy ra :

$$N_z = -\frac{qa}{2}\ ;\ Q_y = 0\ ;\ M_x = \frac{qa^2}{2}$$

c) Đoạn CD, $0 \leq z \leq a$ (hình 1.39e)

Các phương trình cân bằng :



Hình 1.39.

$$\sum Z = N_z = 0$$

$$\sum Y = Q_y + \frac{qa}{2} = 0$$

$$\sum m_{O_3} = M_x - \frac{qa}{2}\left(a - z\right) = 0$$

Suy ra :

$$N_z = 0 \; ; \; Q_y = -\frac{qa}{2} \; ; \; M_x = \frac{qa}{2}\left(a - z\right)$$

d) Đoạn DE, $a \leqslant z \leqslant 2a$ (hình 1.39f).

Dùng mặt cắt 4-4 chia khung làm 2 phần, xét cân bằng phần trái mặt cắt 4-4. Cụ thể là:

$$\sum Z = N_z = 0$$

$$\sum Y = -Q_y + \frac{qa}{2} - q\left(2a - z\right) = 0$$

$$\sum m_{O_4} = -M_x + q\,\frac{(2a - z)^2}{2} - \frac{qa}{2}\left(2a - z\right) = 0$$

Suy ra :

$$N_z = 0 \; ; \; Q_y = qz - \frac{3}{2}qa \; ; \; M_x = \frac{q}{2}\left(2a - z\right)\left(a - z\right)$$

3) Từ các biểu thức nội lực trong các đoạn, ta vẽ các biểu đồ (N_z), (Q_y), và (M_x) như hình 1.39g, h, i.

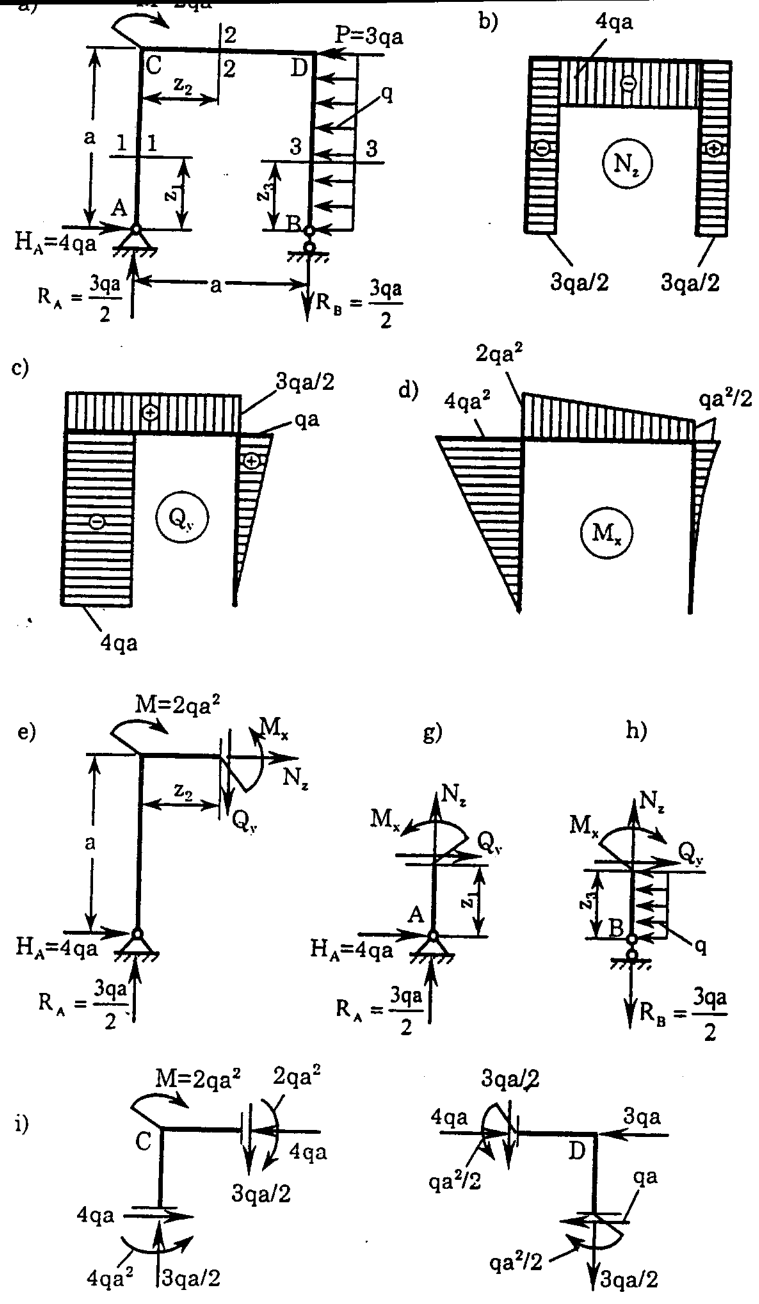
Để kiểm tra biểu đồ nội lực trong khung thì tốt nhất là xét sự cân bằng của lực tác dụng lên nút (cả ngoại lực và nội lực). Chẳng hạn ta xét nút C và B của khung. Các ngoại lực và nội lực tác dụng lên nút C và B được biểu diễn như hình 1.39k,l.

BÀI 38

Vẽ biểu đồ nội lực trong khung tĩnh định bằng phương pháp mặt cắt cho trên hình 1.40a, sau đó kiểm tra tính đúng đắn của biểu đồ đã vẽ được.

GIẢI

Để vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt trong khung, trước hết phải xác định các phản lực liên kết bằng điều kiện cân bằng. Cụ thể



Hình 1.40.

$$\sum m_A(\vec{P}) = 0 \ ; \ \sum m_B(\vec{P}) = 0 \ ; \ \sum X = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3qa}{2}\downarrow \ ;$$

$$R_A = \frac{3qa}{2}\uparrow \ ; \ H_A = 4qa$$

Tưởng tượng cắt khung tại các đoạn AC, CD, DB hình 1.40a. Chiều của mômen uốn trên các thanh đứng AC, DB được chọn tùy ý, nếu kết quả tính toán là dương, vẽ tung độ của biểu đồ M_x về phía thớ căng của mômen đã chọn. Chiều dương của lực cắt và lực dọc vẫn theo qui ước như thanh thẳng :

Xét điều kiện cân bằng cho :

Đoạn AC ($0 \leq z \leq a$) (hình 1.40g).

$$N_z = -\frac{3qa}{2} \ ; \ Q_y = -4qa \ ; \ M_x = -4qaz .$$

Đoạn CD ($0 \leq z_2 \leq a$) (hình 1.40e)

$$N_z = -4qa \ ; \ Q_y = \frac{3qa}{2} \ ; \ M_x = \frac{3qa}{2}z_2 + 2qa^2 - 4qa^2 = \frac{3qa}{2}z_2 - 2qa^2$$

Đoạn DB ($0 \leq z_3 \leq a$) (hình 1.40h).

$$N_z = \frac{3qa}{2} \ ; \ Q_y = qz_3 \ ; \ M_x = -\frac{qz_3^2}{2}$$

Biểu đồ N_z, Q_y, M_x được vẽ trên hình 1.40b, c, d. Biểu đồ N_z, Q_y có đánh dấu dương âm. Để kiểm tra kết quả vẽ biểu đồ, ta kiểm tra bằng cách xét cân bằng các nút C và D (hình 1.40i). Căn cứ biểu đồ nội lực, vẽ các nội lực tác dụng lên các nút. Nếu biểu đồ nội lực vẽ đúng thì các thành phần nội lực và ngoại lực cân bằng nhau. Cụ thể là các phân tử trên các hình 1.40e, g, h, i, k phải cân bằng.

BÀI 39

Vẽ biểu đồ nội lực của một khung cho trên hình 1.41a.

GIẢI

Phải thiết lập biểu thức của các nội lực trên mỗi mặt cắt di động (1-1) và (2-2) (hình 1.41a) để từ đó vẽ các biểu đồ nội lực cho từng đoạn. Khi đi ở trong khung từ 0 đến 2, mômen được xem là dương nếu căng trong, căng phía ngoài là âm, lực cắt và lực dọc vẫn giữ quy ước như trong thanh thẳng. Do đó, để thuận tiện ta ngầm định các nội lực cần tính trên mỗi mặt cắt di động (1-1) và (2-2) trên các đoạn 0-1 và 1-2 tương ứng đều đặt theo chiều dương.

Do đó, để thuận tiện ta ngầm định các nội lực cần tính trên mỗi mặt cắt di động (1–1) và (2–2) trên các đoạn 0–1 và 1–2 tương ứng đều đặt theo chiều dương.

Đối với đoạn 0–1 : $0 \leq z_1 \leq a$

$$N_1 = -P_2 = -\frac{3}{28}qa$$

$$Q_1 = P_1 - qz_1 = \frac{3}{7}qa - qz_1$$

$$M_1 = P_1 z_1 - q\frac{z_1^2}{2} = \frac{3}{7}qaz_1 - q\frac{z_1^2}{2}$$

Đối với đoạn 1–2 : $0 \leq z_2 \leq a$

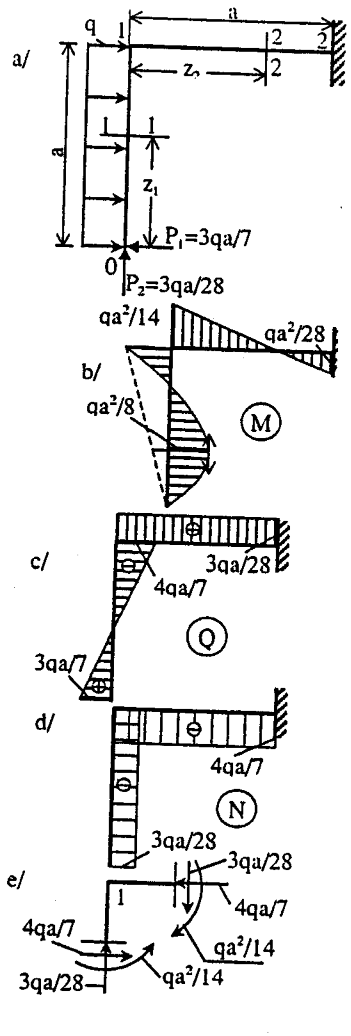
$$N_2 = \frac{3}{7}qa - qa = \frac{-4}{7}qa$$

$$Q_2 = \frac{3}{28}qa$$

$$M_2 = -P_2 Z_2 - P_1 a + q\frac{a^2}{2}$$

Biểu đồ M, Q, N được cho trên hình 1.41b, c, d.

Tính đúng đắn của các biểu đồ đã vẽ được thể hiện ở sự cân bằng nút "1" (hình 1.41e).



Hình 1.41.

BÀI 40

Một khung tĩnh định cân bằng như hình 1.42a. Hãy vẽ nhanh biểu đồ M (không viết biểu thức của M cho các đoạn).

GIẢI

Nhận xét do liên kết như hình cho nên đoạn 3–4 và 6–7 không có mômen. Tại khớp 5 không có mômen, tại điểm 6 có mômen tập trung quay thuận kim đồng hồ, tại đây biểu đồ M có bước nhảy bằng $qa^2/4$ căng trên. Biểu đồ M trên đoạn 3–6 là đường xiên qua khớp 5.

Từ điều kiện cân bằng nút 3, suy ra mômen đoạn 2–3 là hằng, căng trong.

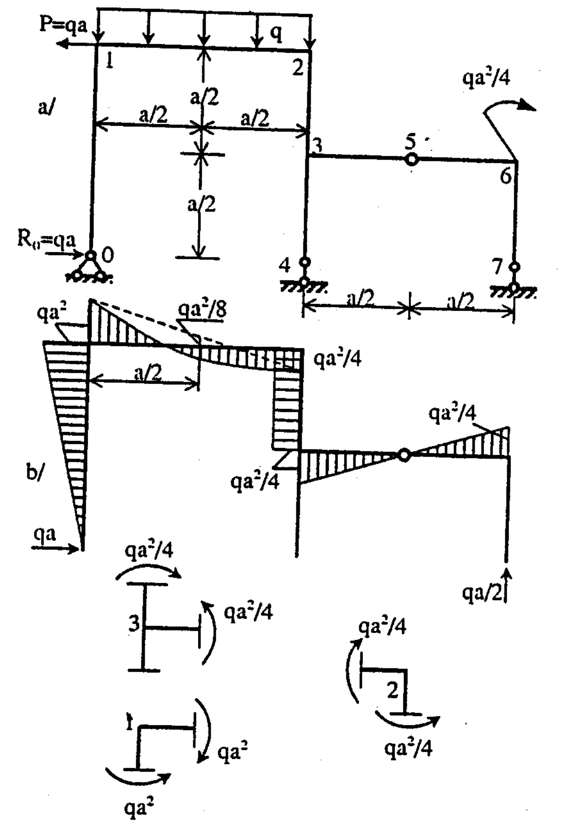
Khi khảo sát điều kiện cân bằng của khung ta xác định được phản lực tại 0, như hình 1.42a. Mômen tại 1 thuộc đoạn 0–1 căng ngoài vì có giá trị: qa^2. Điều kiện cân bằng nút 1 và 2 cho ta các tung độ và chiều căng của M tại mặt cắt 1 và 2 thuộc đoạn 1–2. Các nhận xét trên cho phép vẽ biểu đồ M như hình 1.42b.

BÀI 41

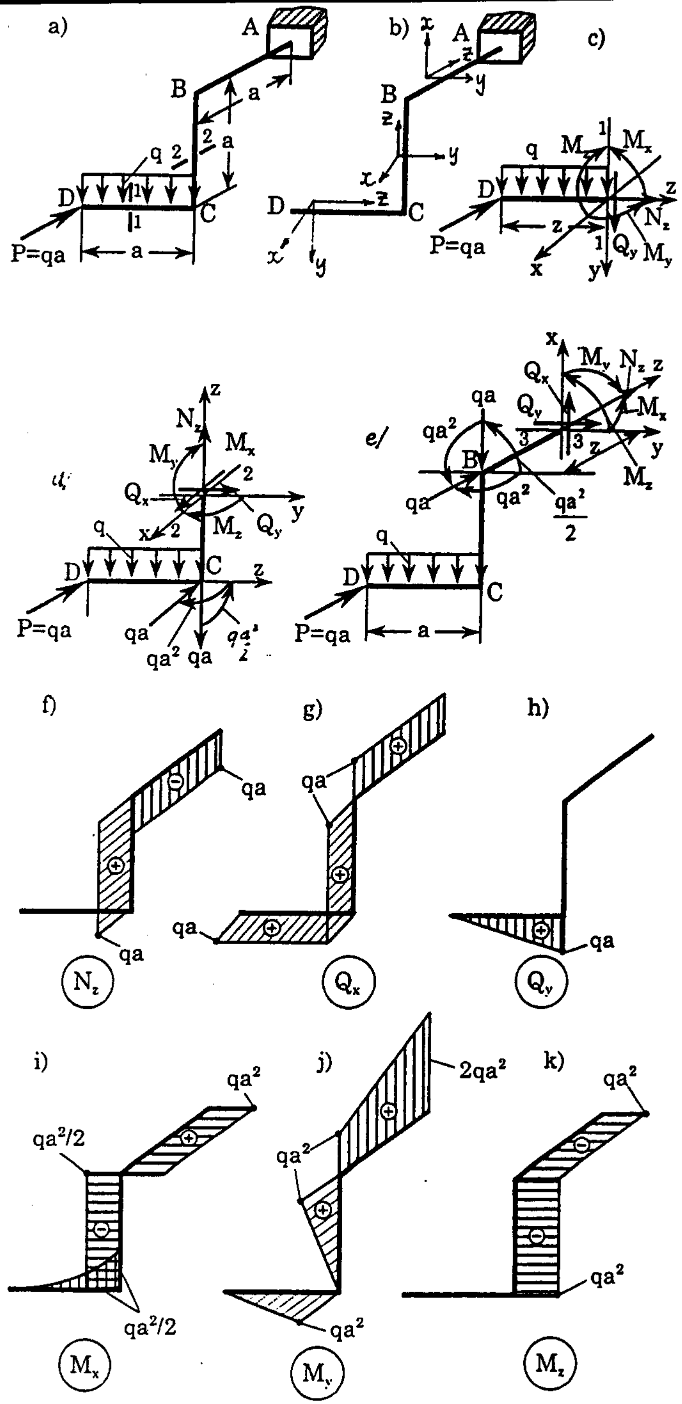
Vẽ biểu đồ nội lực của khung không gian như hình 1.43a.

GIẢI

1) Các trục tọa độ đối với các đoạn thanh được chọn như hình 43b. Xét sự cân bằng và viết các biểu thức nội lực đối với mỗi đoạn thanh được cắt ra.



Hình 1.42.



Hình 1.43.

a. Đoạn DC : $0 \leq z \leq a$ (hình 1.43c).

Tại mặt cắt 1–1 ta vẽ các thành phần nội lực theo quy ước dương như hình 1.43c. Sáu phương trình cân bằng tỉnh học cho ta 6 thành phần nội lực sau đây :

$$N_z = 0 \ ; \ Q_x = qa \ ; \ Q_y = -qz \ ; \ M_x = -\frac{qz^2}{2} \ ; \ M_y = qaz \ ; \ M_z = 0 \quad (1)$$

b. Đoạn BC : $0 \leq z \leq a$ (hình 1.43d).

Trên mặt cắt 2–2 các thành phần nội lực được đặt theo chiều dương. Để đơn giản việc viết biểu thức các nội lực, ta dời các ngoại lực tác dụng trên phần khung được xét về điểm C như trên hình 1.43d.

Sáu phương trình cân bằng tỉnh học cho ta sáu thành phần nội lực sau :

$$\left.\begin{array}{lll} N_z = qa \ ; & Q_x = qa \ ; & Q_y = 0 \\ M_x = -\dfrac{qa^2}{2} \ ; & M_y = qaz \ ; & M_z = -qa^2 \end{array}\right\}$$

c) Đoạn AB: Dùng mặt cắt 3–3 cách B một đoạn z ($0 \leq z \leq a$) chia khung ra làm 2 phần.

Các thành phần nội lực tại mặt cắt 3–3 được biểu diễn như hình 1.43e.

Dời các ngoại lực tác dụng trên phần khung ở bên trái mặt cắt 3-3 được giữ lại về B như trên hình 1.43e.

Sáu phương trình cân bằng tỉnh học cho ta 6 thành phần nội lực sau :

$$\left.\begin{array}{lll} N_z = -qa \ ; & Q_x = qa \ ; & Q_y = 0 \ ; \\ M_x = qa^2 \ ; & M_y = qa(a-z) \ ; & M_z = -\dfrac{qa^2}{2} \end{array}\right\}$$

2) Trên cơ sở các biểu thức nội lực nhận được ở trên, ta vẽ các biểu đồ nội lực N_z, Q_x, ..., M_z như hình 1.43f,g,h,i,j,k.

Chương 2
KÉO VÀ NÉN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Điều kiện bền - ba bài toán thường gặp

Để đảm bảo sự làm việc an toàn khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn điều kiện bền :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \qquad (2.1)$$

Từ bất đẳng thức trên, ta có thể gặp ba bài toán cơ bản sau đây :

- *Kiểm tra bền* : Kiểm tra bền là bài toán kiểm tra điều kiện (2.1) đối với mọi mặt cắt của thanh. Cụ thể là :

$$\sigma_{max} = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \qquad (2.2)$$

- *Chọn kích thước mặt cắt*: : Yêu cầu của bài toán này là xác định kích thước tối thiểu của mặt cắt ngang thỏa mãn điều kiện sau :

$$F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} = [F] \qquad (2.3)$$

Để đảm bảo an toàn và tiết kiệm chỉ nên chọn F xấp xỉ tỷ số $\frac{N_z}{[\sigma]}$ trong phạm vi chừng ± 5% là đủ.

- *Xác định tải trọng cho phép*

Khi biết kích thước mặt cắt và ứng suất cho phép, cần xác định tải trọng lớn nhất cho phép đặt lên chi tiết máy hay kết cấu. Muốn thế phải có :

$$N = f(P) \leq F[\sigma] \qquad (2.4)$$

2. Điều kiện cứng - ba bài toán thường gặp

Điều kiện cứng là điều kiện hạn chế biến dạng và chuyển vị dọc trục của thanh tùy thuộc vào yêu cầu kỹ thuật cụ thể cho trước của từng cấu kiện. Các biến dạng và chuyển vị cho phép này ký hiệu là : $[\varepsilon]$ và $[u]$.

Điều kiện cứng được diễn đạt như sau :

$$\varepsilon \leq [\varepsilon] \text{ hoặc } u \leq [u] \qquad (2.5)$$

Từ quan hệ (2.5) có thể rút ra các bài toán sau đây :

- Kiểm tra điều kiện cứng, tức là kiểm tra điều kiện (2.5).
- Chọn mặt cắt ngang là làm thỏa mãn điều kiện :

$$F \geq \frac{N}{E[\varepsilon]} \qquad (2.6)$$

- Chọn tải trọng cho phép P là thực hiện điều kiện :

$$N = f(P) \leq EF\,[\varepsilon] \qquad (2.7)$$

Trong các công thức từ (2.1) đến (2.7), lực dọc N(z) được tính theo công thức (1.3), còn chuyển vị dọc trục u(z) có thể tính theo các phương pháp dưới đây.

3. Các phương pháp tính chuyển vị u (z)

a) Tích phân trực tiếp

$$\varepsilon_z = \frac{du}{dz} = \frac{\sigma}{E} \; ; \; \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\,\varepsilon_z \qquad (2.8)$$

$$u(z) = \sum \int \frac{N(z)\,dz}{EF} \qquad (2.9)$$

Tích phân được lấy dọc theo chiều dài của từng đoạn trên đó hàm $\frac{N(z)}{EF}$ xác định, còn tổng được lấy trên tất cả các đoạn của hệ.

b) Phương pháp vạn năng

Chuyển vị u(z) có thể được xác định theo một công thức đã chuẩn bị sẵn đặc biệt thuận lợi của phương pháp vạn năng đối với bất kỳ bài toán kéo (nén) nào dù là tĩnh định hay siêu tĩnh.

* Trường hợp độ cứng C_i là hằng số với $\forall i$ (hình 1.1c)

$$u_k(z) = \sum_{i=1}^{k=\overline{1,n}} \left[\Delta u_{0i} + P_{0i}\frac{(z-a_{i-1})}{EF} + \Delta q_{0i}\frac{(z-aq_{i-1})^2}{2!\,EF} + \Delta q'_{0i}\frac{(z-a_{i-1})^3}{3!\,EF} + \ldots \right] \qquad (2.10)$$

$$N_k(z) = EF\frac{dU(z)}{dz} \Rightarrow \text{công thức (1.3)}$$

Ở đây :

Δu_{0i} là bước nhảy của chuyển vị dọc trục tại đầu trái "0i" của đoạn "i". $C_i = \dfrac{E F_i}{a_i - a_{i-1}}$ là độ cứng khi kéo (nén) của đoạn thanh thứ "i". "k" là đoạn thanh trên đó xác định $u_k(z)$.

* Trường hợp độ cứng C_i thay đổi :

Phương trình các đại lượng cần tính dưới dạng ma trận được viết :

$$\vec{S}_i(z) = [B_i][B^*_{i-1}][B^*_{i-2}]\ldots[B^*_1]\Delta\vec{S}_{01} + [B_i][B^*_{i-1}][B^*_{i-2}]\ldots[B^*_2]\Delta\vec{S}_{02} + \ldots + [B_i]\Delta\vec{S}_{0i} \; ; \qquad (2.11)$$

$$\vec{S}^*_i(a_i) = [B^*_i][B^*_{i-1}][B^*_{i-2}]\ldots[B^*_1]\Delta\vec{S}_{01} + [B^*_i][B^*_{i-1}][B^*_{i-2}]\ldots[B^*_2]\Delta\vec{S}_{02} + \ldots + [B^*_i]\Delta\vec{S}_{0i}\,, \; i = \overline{1,n} \qquad (2.12)$$

Trong đó ma trận $[B_i(z)]$ và $[B^*_i(a_i - a_{i-1})]$ có dạng :

$$[B_i(z)] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \dfrac{\Phi_1}{E_iF_i} & \dfrac{\Phi_2}{E_iF_i} & \dfrac{\Phi_3}{E_iF_i} & \ldots \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots \end{bmatrix} \; ; \; \vec{S}_i(z) = \begin{Bmatrix} U_i(z) \\ N_i(z) \end{Bmatrix} \qquad (2.13)$$

$$\Delta\vec{S}_{oi} = \{\Delta U_{oi}\,,\, P_{oi}\,,\, \Delta q_{oi}\,,\, \Delta q'_{oi}\,,\, \Delta q''_{oi}\,,\, \ldots\}^T \; ;$$

$$\text{Với } \Phi_k(z - a_{i-1}) = \begin{cases} \dfrac{(z-a_{i-1})^k}{k!} & \text{khi } z \geq a_{i-1} \\ 0 & \text{khi } 0 \leq z \leq a_{i-1} \end{cases} \qquad (2.14)$$

$[B^*_i]$ nhận được từ $[B_i]$ khi thay $z = a_i - a_{i-1}$.

c) Phương pháp năng lượng

- Thuật toán Vérechtchaguine

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Omega_i\, g_{ci}}{E_i F_i} \qquad (2.15)$$

trong đó :

Ω_i là diện tích biểu đồ lực dọc N_p do ngoại lực cho trước gây ra trên đoạn "i".

g_{ci} là tung độ của biểu đồ lực dọc $\overline{N}$ do lực đơn vị đặt vào điểm cần tính chuyển vị theo phương cần tính chuyển vị gây ra ứng với hoành độ trọng tâm của Ω_i.

- Áp dụng định lý Castigliano

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P_{gt}}\right)_{P_{gt}=0} = \delta \qquad (2.16)$$

ở đây :

P_{gt} là lực giả tạo được đặt vào điểm và phương chuyển vị cần tính δ ;

U là thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy được do tất cả các ngoại lực P_i, lực giả tạo P_{gt} gây ra và có biểu thức :

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{N^2(z)}{EF}\, dz \qquad (2.17)$$

4. Tính hệ siêu tĩnh chịu kéo và nén

Những phương pháp thường được sử dụng trong Sức bền vật liệu.

a) Phương pháp biến dạng

Theo phương pháp này cần phải thiết lập các phương trình cân bằng tĩnh học và các phương trình mô tả điều kiện tương thích của chuyển vị, nghĩa là thiết lập quan hệ hình học giữa các chuyển vị dọc trục của các thanh khác nhau của hệ. Giải hệ hai loại phương trình trên để có được các lực dọc trong hệ.

b) Phương pháp lực

Phương trình chính tắc thứ k của phương pháp lực đối với hệ siêu tĩnh chịu tác dụng đồng thời của tải trọng, sự thay đổi của nhiệt độ, do lắp ghép không chính xác và chuyển vị của gối tựa có dạng tổng quát sau đây :

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \ldots + \delta_{kk}X_k + \ldots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{k\Delta} + \Delta_{k\delta} = 0$$

Với $k = \overline{1,n}$ (2.18)

$$\delta_{kj} = \sum \frac{\overline{N}_k\,\overline{N}_j}{EF}\, l \ ; \ \Delta^{o}_{kp} = \sum \frac{\overline{N}_k\, N_p}{EF}\, l \ ; \ \Delta_{kt} = \sum_{k} \overline{N}_k \,.\, \alpha\, t_c l$$

$$\Delta_{k\Delta} = -\sum_{i} \overline{R}_{ik}\Delta_{im} \ ; \ \Delta_{k\delta} = \sum_{i} \overline{N}_{ik} \,.\, \delta_i$$

$\overline{N}_k$, $\overline{N}_j$, N_p là lực dọc trong các thanh của hệ cơ bản tĩnh định do các ẩn số $\overline{X}_k = \overline{X}_j = 1$ và tải trọng ngoài gây ra.

$\alpha\, t_c l$ là độ dãn dài của thanh có chiều dài l, chịu sự biến thiên nhiệt độ ở trục thanh t_c và hệ số dãn nở vì nhiệt α của vật liệu.

$\overline{R}_{ik}$ là phản lực tại gối tựa i nơi có chuyển vị cưỡng bức đã biết do lực $\overrightarrow{X}_k = 1$ gây ra trong hệ ở trạng thái "k" tĩnh định. Δ_{im} là chuyển vị cưỡng bức đã biết tại liên kết "i" của hệ siêu tĩnh.

δ_i là độ dài dư cho chế tạo không chính xác so với thiết kế của thanh thứ "i", $\delta_i > 0$ khi chiều dài thực tế lớn hơn chiều dài thiết kế và ngược lại. Dấu tổng trong công thức $\Delta_{k\delta}$ được lấy theo số thanh bị chế tạo không chính xác.

c) Phương pháp vạn năng

Khi giải bài toán bằng phương pháp này ta chỉ việc sử dụng trực tiếp các phương trình vạn năng đã chuẩn bị sẵn (2.10) hoặc (2.11).

d) Phương pháp năng lượng (nguyên lý công cực tiểu)

Đối với hệ khớp, lực tác dụng vào nút, phương trình của nguyên lý công cực tiểu có dạng :

$$\sum \int \frac{N\,\overline{N}}{EF}\, dz = 0 \qquad (2.19a)$$

Khi EF như nhau đối với mọi thanh :

$$\sum N\,\overline{N}\,.\,l = 0 \qquad (2.19b)$$

trong đó :

N là lực dọc trên từng đoạn của hệ tương đương do ngoại lực cho trước và phản lực thừa gây ra.

$\overline{N}$ tương tự như vậy nhưng chỉ do phản lực thừa bằng đơn vị $\overline{X}_i = 1$ gây ra.

c) Áp dụng định lý Menabrea

Gọi P_j là ngoại lực cho trước tác dụng lên hệ, X_i là các phản lực thừa cần tìm, $U(P_j, X_i)$ là thế năng biến dạng đàn hồi, định lý cho hệ phương trình tìm X_i như sau :

$$\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.20}$$

II. CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN

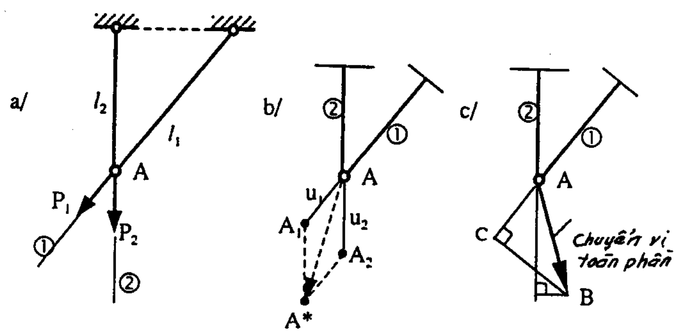
BÀI 1

Một hệ khớp gồm hai thanh 1 và 2 chịu đồng thời hai lực P_1, P_2 dọc theo trục thanh (hình 2.1a). Hãy tính các chuyển vị theo phương thanh 1 và 2 và chuyển vị toàn phần của nút A ?

GIẢI

Thế năng biến dạng đàn hồi của toàn hệ có biểu thức :

$$U = \frac{P_1^2 l_1}{2E_1F_1} + \frac{P_2^2 l_2}{2E_2F_2}$$



Hình 2.1.

Các đạo hàm riêng $\frac{\partial U}{\partial P_1}$ và $\frac{\partial U}{\partial P_2}$ cho ta chuyển vị u_1, u_2 của nút A theo các phương thanh 1 và 2 (hình 2.1b).

$$u_1 = \frac{P_1 l_1}{E_1F_1} \quad ; \quad u_2 = \frac{P_2 l_2}{E_2F_2}$$

Chuyển vị toàn phần của điểm A không thể xác định được bằng quy tắc hình bình hành nghĩa là đường chéo hình bình hành AA* với các cạnh u_1, u_2 (hình 2.1b), mà là cạnh huyền AB của tam giác ACB vuông tại C (hình 2.1c). Các chuyển vị u_1, u_2 chỉ là hình chiếu của chuyển vị toàn phần AB lên các phương 1 và 2.

BÀI 2

Một dàn phẳng hình tròn có n thanh như nhau có hệ số cứng k, phân bố đều theo dọc chu vi và nối khớp với nhau bằng nút chung ở tâm "O". Lực P đặt vào O và cũng nằm trong mặt phẳng dàn. Hãy chứng tỏ rằng chuyển vị toàn phần của điểm O luôn luôn cùng phương cùng chiều với lực P và không phụ thuộc góc α (hình 2.2a).

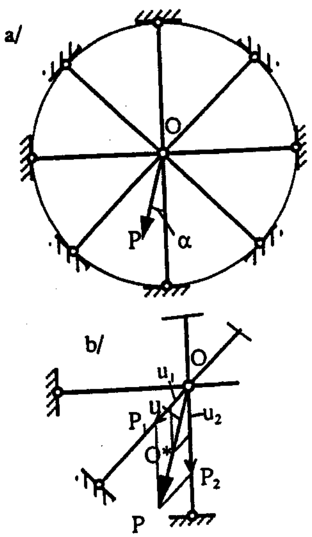
GIẢI

Gọi P_1 và P_2 là các thành phần của lực P trên các phương thanh 1 và 2 (hình 2.2b).

Vì mỗi một thanh đều nằm trong mặt phẳng đối xứng nên các chuyển vị toàn phần u_1 và u_2 (hình 2.2b) do P_1 và P_2 gây ra phải nằm trên đường tác dụng của các lực này. Cụ thể là dọc theo các thanh 1 và 2 và có giá trị là :

$$u_1 = \frac{P_1}{k} \quad , \quad u_2 = \frac{P_2}{k}$$

Do đó, chuyển vị toàn phần u do P gây ra được xác định theo quy tắc hình bình hành (hình 2.2b) và bằng đường chéo OO* của hình bình hành xây dựng từ các cạnh u_1, u_2 và không phụ thuộc α.



Hình 2.2.

$$u = OO' = \frac{P}{k}$$

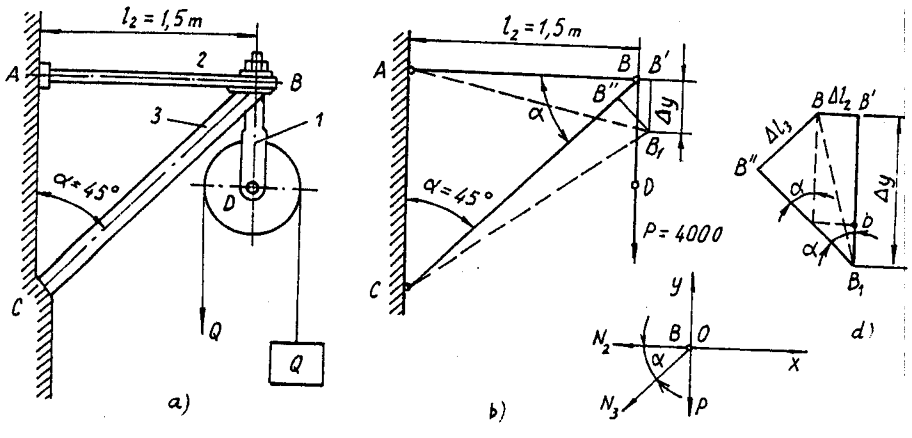
BÀI 3

Một thiết bị nâng dùng để đưa vật nặng Q = 2000daN lên cao (hình 2.3a). Hãy chọn đường kính của các thanh thép tròn BD, AB và thanh gỗ vuông BC của giá đỡ côngxôn của thiết bị theo điều kiện bền và kiểm tra lại theo điều kiện cứng. Cho biết: $[\sigma]_{th} = 1600$ daN/cm^2; $[\Delta_{yB}] = 0{,}5$ cm.

$$[\sigma]^{gỗ} = 120 \text{ kN/cm} ;$$

$$E_{th} = 2.10^6 \text{ daN/cm}^2$$

$$E_{gỗ} = 10^5 \text{ daN/cm}^2$$



Hình 2.3.

GIẢI

Từ kết cấu thực (hình 2.3a) một cách gần đúng chúng ta có thể chọn một sơ đồ tính như hình 2.3 mà sẽ không phạm một sai lầm nào. Khi bỏ qua ma sát thì ở điểm treo D chịu một lực $P = 2Q = 4000$ daN $= N_1$.

Diện tích mặt cắt ngang của thanh treo BD được tìm từ điều kiện :

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{4000}{1600} = 2{,}5 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow d_1 = \sqrt{\frac{4F_1}{\pi}} \geq 1{,}13\sqrt{2{,}5} = 1{,}78 \text{ cm} = 17{,}8 \text{ mm}$$

Ta lấy $d_1 = 18$ mm ($F_1 = 2{,}54$ cm^2).

Vì liên kết đã chọn là khớp nên nút B chịu một hệ lực đồng quy phẳng gồm : $\vec{P}, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ (hình 2.3c). Điều kiện cân bằng nút này cho ta :

$$N_3 = -5660 \text{ daN} ; \; N_2 = 4000 \text{ daN}.$$

Thanh AB chịu kéo, còn thanh gỗ BC chịu nén.

Ta thấy ngay rằng từ điều kiện bền đường kính d_2 của thanh thép AB bằng $d_1 = 18$ mm.

Đối với thanh gỗ BC, điều kiện bền cho ta :

$$F_3 = a \times a = \frac{N_3}{[\sigma]^{gỗ}_n} \geq \frac{5660}{120} = 47 \text{ cm}^2 \text{ suy ra } a \geq \sqrt{47} = 6{,}85 \text{ cm}$$

ta lấy : a = 7 cm, (F = 49 cm^2).

Trong bài này ta sẽ xác định chuyển vị thẳng đứng của nút B theo sơ đồ biến dạng bé (hình 2.3d) :

Gọi B_1 là vị trí của B sau biến dạng (hình 2.3b, d)

Δ_y là chuyển vị thẳng đứng của B, ta có :

$$\Delta_y = \overline{B'B_1} = \overline{B_1 b} + \overline{bB'} = \frac{\Delta l_2}{tg\,\alpha} + \frac{\Delta l_3}{\sin\alpha} = \frac{N_2 l_2}{E_2F_2\, tg\alpha} + \frac{N_3 l_3}{E_3F_3\, tg\alpha} =$$

$$= \frac{4000 \times 150}{2 \cdot 10^6 \times 2{,}54\, tg\, 45^o} + \frac{5660 \cdot 150\sqrt{2}}{10^5 \times 49 \sin 45^o} = 0{,}46 \text{ cm} < [\Delta_{yB}]$$

Điều kiện cứng được đảm bảo

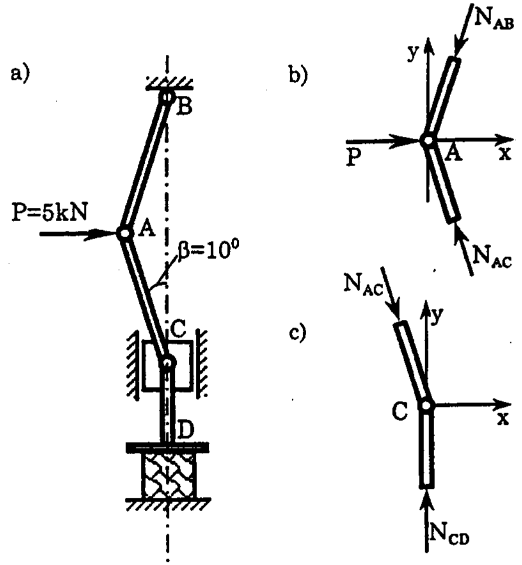
Bạn đọc có thể nhận lại được kết quả này rất nhẹ nhàng bằng phương pháp Mohr theo công thức :

$$\Delta_{yB} = \sum_{i=2}^{3} \frac{\overline{N}_i N^o_{ip}}{E_i F_i} = \frac{\overline{N}_2 N^o_{2p}}{E_2 F_2} + \frac{\overline{N}_3 N^o_{3p}}{E_3 F_3} = \frac{1 \cdot 14000}{2 \cdot 10^6 \cdot 2{,}54} + \frac{5660}{10^5 \cdot 49} = 0{,}46 \text{ cm}$$

BÀI 4

Tính đường kính các khâu AB, AC và CD của một thiết bị nén hình 2.4a. Vật liệu làm các thanh có :

$$\sigma_{CH} = 24 \text{ kN/cm}^2 \text{, Hệ số an toàn } n = 5$$



Hình 2.4.

GIẢI

Để xác định nội lực trong các thanh ta xét sự cân bằng các nút A, C như hình 2.4b, c. Cụ thể là :

Nút A :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{AB} = N_{AC}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{AB} = N_{AC} = \frac{P}{2\sin\beta} = 14{,}4 \text{ kN.}$$

Nút C :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{CD} = N_{AC}\cos\beta = 14{,}4 \,.\, 0{,}9848 = 14{,}2 \text{ kN.}$$

Vì lực dọc trong ba thanh xấp xỉ nhau, nên ta chỉ cần chọn diện tích mặt cắt cho một thanh, ví dụ thanh AC :

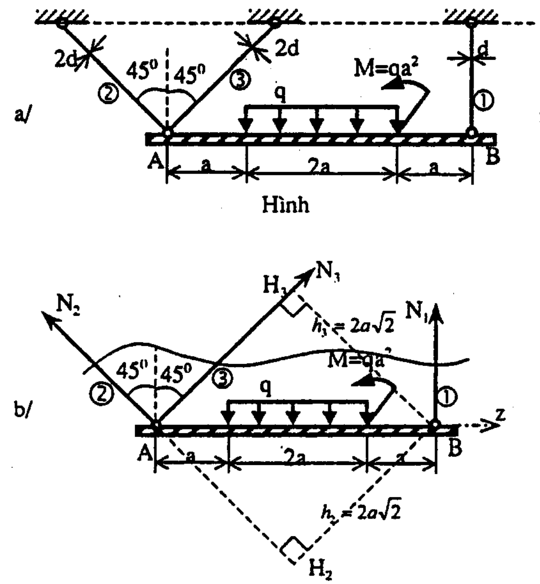
$$F \geqslant \frac{N_{AC}}{[\sigma]} = \frac{5 \,.\, 14{,}4}{24} = 3 \text{ cm}^2$$

Do đó :

$$d_{AB} = d_{AC} = d_{CD} = 2 \text{ cm.}$$

BÀI 5

Thanh AB tuyệt đối cứng, liên kết khớp với các thanh cùng vật liệu (1), (2), (3) chịu tác dụng của ngoại lực như hình 2.5a. Chọn giá trị lực q cho phép để các thanh đó thỏa mãn điều kiện bền, cho biết $[\sigma]$.



Hình 2.5.

GIẢI

Các nội lực N_1, N_2, N_3 được xác định từ các điều kiện cân bằng sau đây :

$$\sum m_A(\vec{F}) = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{3\,qa}{4}$$

$$\sum Z = 0 \;;\; N_2 = N_3$$

$$\sum m_B(\vec{F}) = 0 \Rightarrow N_2 = N_3 = N = \frac{5\,qa}{4\sqrt{2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{3\,qa}{\pi\,d^2} \leqslant [\sigma]$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \frac{N}{F_2} = \frac{5\,qa}{4\sqrt{2}}\;\frac{1}{\pi\,d^2} \leq [\sigma]$$

Vì $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. Nên lực q cho phép phải thỏa mãn bất đẳng thức :

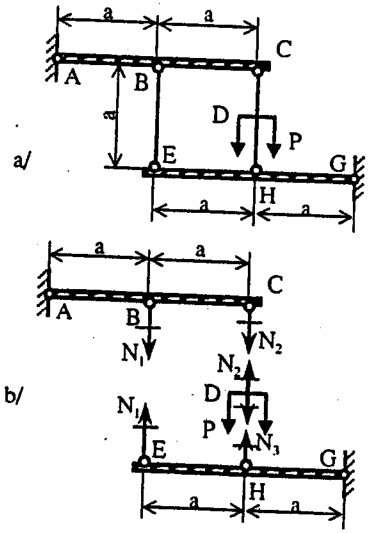
$$q \leq \frac{\pi\,d^2[\sigma]}{3\,a}$$

BÀI 6

Một hệ treo chịu lực P như hình 2.6a. Trong đó các thanh hãm AC và GE là cứng tuyệt đối, các nhánh BE và CH là đàn hồi. Trọng lượng của các thanh được bỏ qua trong tính toán, $[\sigma] = 16$ dN/cm^2, P = 48 kN. Hãy :

a) Xác định bậc siêu tĩnh của hệ ?

b) Chọn F_1, F_2 trong các thanh BE và CH.



Hình 2.6.

GIẢI

Đối với hệ này, chúng ta có thể xác định tất cả các phản lực liên kết và nội lực chỉ bằng các điều kiện cân bằng tĩnh học, cho nên hệ là tĩnh định, không có liên kết thừa.

Để xác định nội lực trong các thanh đàn hồi ta tưởng tượng cắt hệ như hình 2.6b và viết điều kiện cân bằng cho từng phần đã cắt ra. Cụ thể là :

$$\sum m_A = 0 \Rightarrow 2N_2 + N_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum m_G = 0 \Rightarrow 2N_1 + N_3 = 0 \qquad \text{(b)}$$

Đối với phân tố chứa điểm D thuộc thanh CH, ta thực hiện phép chiếu các lực lên phương CH và thu được :

$$N_2 = P + N_3 \qquad \text{(c)}$$

Từ ba phương trình (a), (b), (c) cho ta :

$$N_1 = \frac{2P}{3}\;;\; N_2 = -\frac{P}{3}\;;\; N_3 = -\frac{4P}{3}$$

Diện tích F_1 mặt cắt ngang thanh BE được tìm từ điều kiện :

$$F_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{2\,.\,48}{3\,.\,16} = 2 \text{ cm}^2$$

Thanh CH ta sẽ chọn một diện tích F_2 cho cả thanh theo điều kiện :

$$F_2 = \frac{4\,.\,48}{3\,.\,16} = 4 \text{ cm}^2$$

BÀI 7

Cho một thanh chịu lực dọc trục như hình 2.7a. Hãy tính và vẽ biểu đồ N và σ dọc theo thanh. Tính chuyển vị tại A ?

GIẢI

1/ Phương pháp mặt cắt và tích phân trực tiếp

Xét nội lực trong ba đoạn AB, BC, CD (hình 2.7a).

Đoạn AB : $(0 \leq z_1 \leq 2\text{m})$; $N_z = -60 - 15z_1$

Đoạn BC : $(2\text{m} \leq z_2 \leq 4\text{m})$; $N_z = -20 - 15z_2$

Đoạn CD : $(4\text{m} \leq z_2 \leq 6\text{m})$; $N_z = -80 - 15z_3$

Ứng suất trong các đoạn được tính theo công thức $\sigma_z = \dfrac{N_z}{F}$

Biểu đồ lực dọc N_z và ứng suất pháp σ_z được vẽ trên hình 2.7b, c.

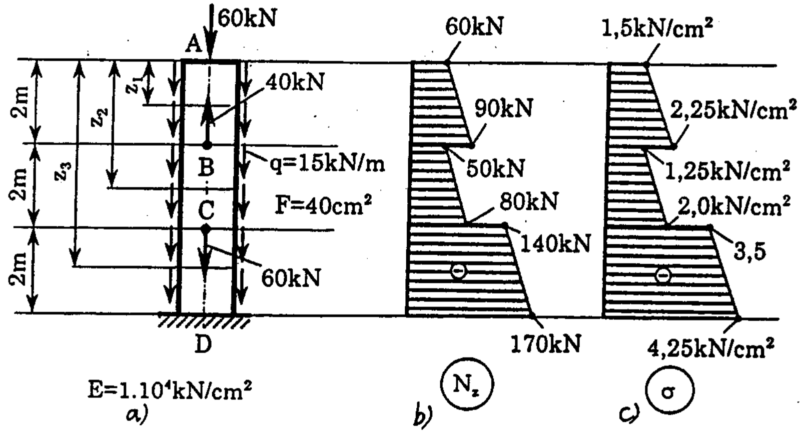
- Chuyển vị của điểm A là tổng đại số biến dạng dài trong các đoạn. Vì lực dọc là hàm số của z nên công thức tính biến dạng dài có dạng :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF}$$

- Chuyển vị của điểm A là tổng biến dạng dài trong từng đoạn :

$$\delta_A = \int_{AB} \frac{N_z dz_1}{EF} + \int_{BC} \frac{N_z dz_2}{EF} + \int_{CD} \frac{N_z dz_3}{EF}$$

Sau khi đổi đơn vị và thay cận tích phân tương ứng, ta có :



Hình 2.7.

$$\delta_A = \int_0^2 \frac{-60 - 15z_1}{1 \,.\, 10^8 \,.\, 40 \,.\, 10^{-4}}\, dz_1 + \int_2^4 \frac{-20 - 15z_2}{1 \,.\, 10^8 \,.\, 40 \,.\, 10^{-4}}\, dz_2 + \int_4^6 \frac{-80 - 15z_3}{1 \,.\, 10^8 \,.\, 40 \,.\, 10^{-4}}\, dz_3$$

$$\delta_A = -1{,}475 \,.\, 10^3 \text{ m.}$$

2/ Phương pháp vạn năng

Khi chọn gốc toạ độ tại A, chiều dương trục z hướng xuống theo (2.10), ta có :

$$u(z) = +\Delta u_{0_1} - \frac{60z}{EF} - \frac{15z^2}{2EF}\Bigg|_1 + \frac{40(z-2)}{EF}\Bigg|_2 - \frac{60(z-4)}{EF}\Bigg|_3$$

$$N(z) = -60 - 15z\Big|_1 + 40\Big|_2 - 60\Big|_3 \qquad (a)$$

$$0 \leqslant z \leqslant 2\text{m} \qquad 2\text{m} \leqslant z \leqslant 4\text{m} \qquad 4\text{m} \leqslant z \leqslant 6\text{m}$$

Tại z = 6 m thì u(6 m) = 0 suy ra $\Delta u_{0_1} = u_A = 1{,}475 \,.\, 10^{-3}$ m.

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{F} = \frac{1}{F}\left(-60 - 15z\right)\Big|_1 + 40\Big|_2 - 60\Big|_3 \qquad (b)$$

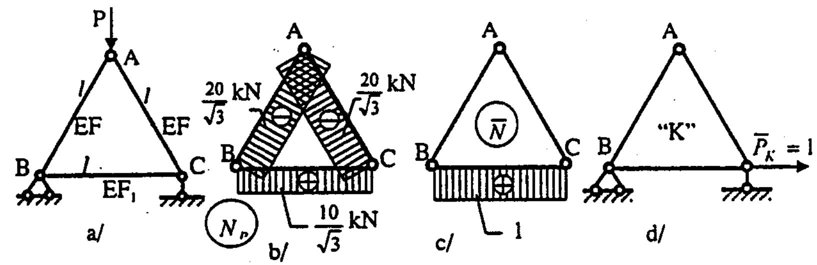
Biểu đồ lực dọc và ứng suất được vẽ theo (a), (b) được cho trên hình 2.7b, c.

BÀI 8

Một hệ khớp được cho trên hình 2.8a. Hãy tính chuyển vị ngang của điểm C, và chọn diện tích mặt cắt ngang của thanh BC ? Biết :

$$P = 20 \text{ kN} \;;\; l = 3 \text{ m};\; E = 2 \,.\, 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

$$F = 2F_1 \;;\; [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$



Hình 2.8.

GIẢI

Hệ đã cho là một hệ tĩnh định nên dễ dàng vẽ được các biểu đồ (N_P) và ($\overline{N}$) (hình 2.8b, c).

Bằng cách nhân biểu đồ của Vêrêsaghin ta được :

$$\Delta_c = \sum_{i=1}^{3} \frac{\Omega_i\, g_{ci}}{E_i F_i} = \frac{1}{EF_1}\left(\frac{10}{\sqrt{3}} \cdot 300 \,.\, 1\right) = \frac{3 \,.\, 10^3}{\sqrt{3} \,.\, EF_1} \text{ (cm)} \qquad (a)$$

Gọi diện tích thanh BC là F_1, từ điều kiện bền ta có :

$$\frac{N_{BC}}{F_1} \leqslant [\sigma] \Rightarrow F_1 \geqslant \frac{N_{BC}}{[\sigma]} = \frac{10}{\sqrt{3} \,.\, 16} = 0{,}36 \text{ cm}^2$$

Thay F_1 vào (a) ta thu được :

$$\Delta_c = \frac{3 \,.\, 10 \,.\, \sqrt{3} \,.\, 16}{\sqrt{3} \,.\, 2 \,.\, 10^4 \,.\, 10} = \frac{24}{100} = +0{,}24 \text{ cm}$$

Nút "C" chuyển vị sang phải theo chiều $\overrightarrow{P_k} = 1$.

BÀI 9

Một hệ khớp gồm hai thanh chịu lực P thẳng đứng như hình 2.9a. Hãy xác định F_1, F_2 ? theo các số liệu sau :

$$P = 10 \text{ kN}, \; a = 1 \text{ m} \; ; \; \alpha = 30^o \; ; \; \left[\sigma_k\right]_I = 1000 \text{ daN/cm}^2 \; ;$$

$$E_1 = 2 \,.\, 10^6 \text{ daN/cm}^2 \; ; \; \left[\sigma_n\right]_{II} = 100 \text{ daN/cm}^3 \; ;$$

$$E_2 = 0{,}1 \,.\, 10^6 \text{ daN/cm}^2 \; ; \; \left[\delta_x\right]_A = \left[\delta_y\right] = 0{,}13 \text{ cm}.$$

GIẢI

1/ Phương án 1

Giải bài toán theo sơ đồ biến dạng.

Theo điều kiện cân bằng tĩnh (hình 2.9a), ta có :

$\sum X = 0$, $\sum Y = 0 \Rightarrow N_1 = N_2 = 10$ kN.

Diện tích mặt cắt ngang theo điều kiện bền phải là :

$$F_1^* \geq \frac{N_1}{\left[\sigma_k\right]} = \frac{10}{10} = 1 \text{ cm}^2$$

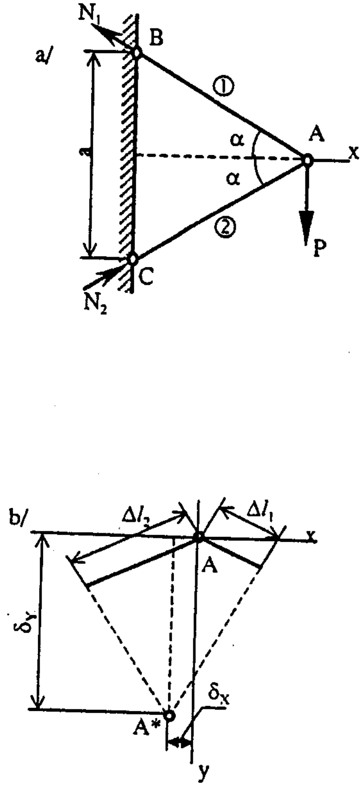
$$F_2^* \geq \frac{N_2}{\left[\sigma_n\right]} = \frac{10}{1} = 10\text{cm}^2$$

Với các giá trị F_1^*, F_2^* này độ dãn và co của các thanh là :

$$\Delta l_1 = \frac{N \,.\, a}{E_1 F_1^*} = \frac{10 \,.\, 100}{2 \,.\, 10^4 \,.\, 1} = 0{,}05 \text{ cm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{10 \,.\, 100}{0{,}1 \,.\, 10^4 \,.\, 10} = 1 \text{ cm}$$

Vị trí của điểm đặt lực A ở



Hình 2.9a,b.

trạng thái biến dạng là A' như hình 2.9b. Từ hình vẽ này ta có các quan hệ hình học như sau :

$$\Delta l_1 = \delta_y \sin\alpha - \delta_x \cos\alpha \; ; \; \Delta l_2 = \delta_y \sin\alpha + \delta_x \cos\alpha$$

Suy ra

$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2 \sin\alpha} = 0{,}15 \text{ cm} \; ; \; \delta_x = \frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{2 \cos\alpha} = 0{,}0289 \text{ cm}$$

Vì rằng

$\delta_y = 0{,}15$ cm $> \left[\delta_y\right] = 0{,}13$ cm nên cần phải chọn lại F_1^* và F_2^*. Ta cố định $F_1^* = 1$ cm^2 và chọn F_2 theo điều kiện cứng. Cụ thể là :

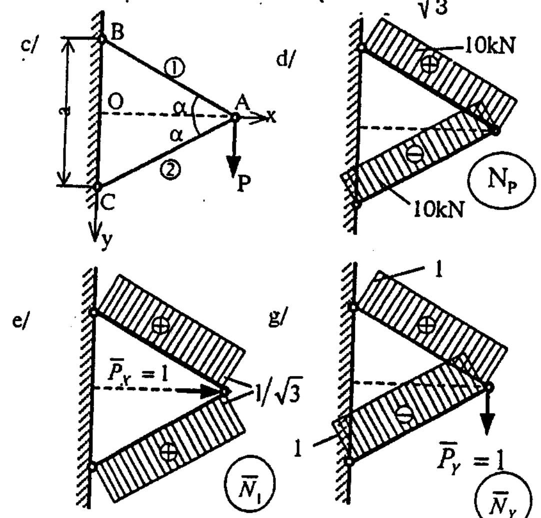
$$\delta_y = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2 \sin 30^o} = 0{,}05 + \Delta l_2 \leq \left[\delta_y\right] = 0{,}13 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 a}{E_2 F_2} \leq 0{,}08 \text{ cm}.$$

Do đó F_2 cần thiết phải là : $F_2 = \dfrac{N_2 a}{E_2 \,.\, 0{,}08} = 12{,}5 \text{ cm}^2 > F_2^*$.

Ứng suất trong thanh 2 và chuyển vị của điểm đặt lực ứng với $F_2 = 12{,}5$ cm^2 là :

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = 0{,}8 \text{ kN/cm}^2 \; ; \; \delta_y = 0{,}13 \text{ cm} \; ; \; \delta_x = \frac{0{,}08 - 0{,}05}{\sqrt{3}} = 0{,}0173 \text{ cm}.$$



Hình 2.9c,d,e,g.

2/ Phương án 2

Trong phương án này, chúng ta sẽ tính các chuyển vị bằng cách nhân biểu đồ. Cụ thể như sau :

Các biểu đồ lực dọc do P, $\overline{P}_x = 1$, $\overline{P}_y = 1$ gây ra được cho trên hình 2.9d, e, g.

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{2} \frac{(N_{pi})(\overline{N}_{xi})}{E_i F_i} = \frac{10 \times a . 1}{E_1 F_1 \sqrt{3}} - \frac{10 \times a . 1}{E_2 F_2 \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{10 . 100 . 1}{2 . 10^4 . \sqrt{3} . 1} - \frac{10 \times 100 . 1}{10^3 \times 10\sqrt{3}} = \frac{1}{20\sqrt{3}} - \frac{1}{10\sqrt{3}} = 0{,}289 \text{ mm}$$

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{2} \frac{(N_{pi})(\overline{N}_{yi})}{E_i F_i} = \frac{100 \times 10 . 1}{2 . 10^4 . 1} + \frac{10 \times 100 . 1}{10^3 . 10} = 1{,}5 \text{ mm}$$

Cố định diện tích $F_1 = 1 \text{ cm}^2$, do đó F_2 phải thỏa mãn đồng thời điều kiện cứng và điều kiện bền của thanh 2 :

$$\delta_y \leqslant [\delta_y] \Rightarrow \frac{10 \times 100}{2 . 10^4} + \frac{10 \times 100}{10^3 . F_2} \leqslant 0{,}13 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow F_2 \geqslant 12{,}5 \text{ cm}^2$$

Với $F_1 = 1 \text{ cm}^2$ và $F_2 = 12{,}5 \text{ cm}^2$ thì :

$$\sigma_2 = \frac{10}{12{,}5} = 0{,}8 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma_n]_2 = 1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\delta_y = 0{,}13 \text{ cm} = [\delta_y] \;;$$

$$\delta_x = \frac{10 . 100 . 1}{2 . 10^4 . \sqrt{3} . 1} - \frac{10 . 100 . 1}{10^3 . 12{,}5} = 0{,}0173 \text{ cm} < [\delta_x] = 0{,}13 \text{ cm}$$

Hệ được đảm bảo tốt cả về điều kiện bền và cứng.

BÀI 10

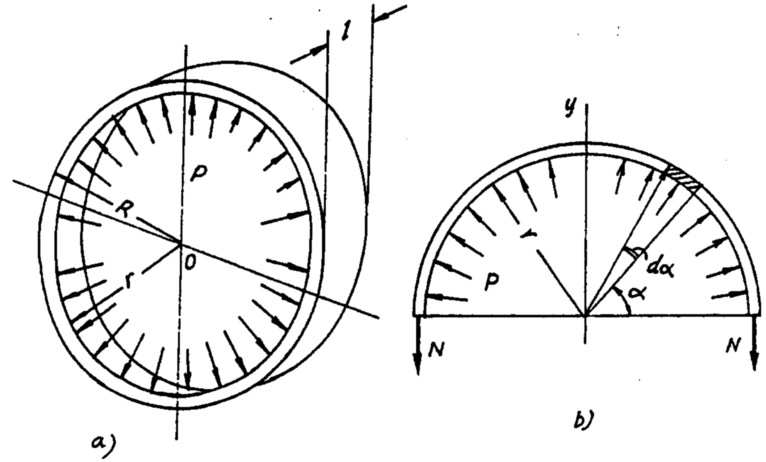
Một đai gia cường (cho một vỏ trụ tròn) chịu áp lực bên trong $p = 2 \text{ MN/m}^2$ có bán kính trong $r = 10$ cm, bán kính ngoài $R = 10{,}1$ cm, chiều rộng l (hình 2.10a), $E = 2 . 10^5 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{ch} = 300 \text{ MN/m}^2$. Hãy tính độ dãn nở Δr và hệ số an toàn n_{ch} ?

GIẢI

Điều kiện cân bằng của một nửa đai theo phương y (hình 2.10b) cho ta :

$$N = \int_0^{\pi/2} pr . l \sin\alpha \, d\alpha = p . r . l$$

Kết quả này đã được chứng minh trong bài 1.32.



Hình 2.10.

Ứng suất pháp trong thành của đai là :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{p . r . l}{(R - r)\, l} = \frac{p . r}{(R - r)} = \frac{2 . 10 . 10^{-2}}{0{,}1 . 10^{-2}} = 200 \text{ MN/m}^2$$

Hệ số an toàn so với giới hạn chảy là :

$$n_{ch} = \frac{\sigma_{ch}}{\sigma} = \frac{300}{200} = 1{,}5$$

Độ dãn nở Δr được xác định từ định nghĩa ε_r :

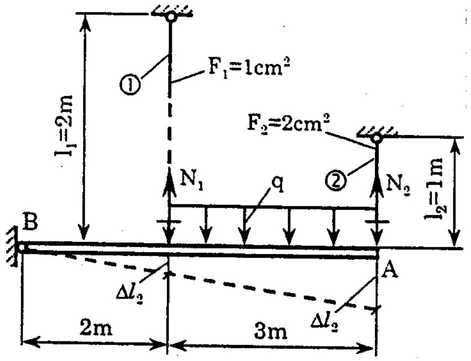
$$\varepsilon_r = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{N}{EF} = \frac{prl}{E(R - r)\, l}$$

$$\Rightarrow \Delta r = \frac{pr^2}{E(R - r)} = \frac{2 . 10^{-2}}{2 . 10^5 . 10^{-3}} =$$

$$\Delta r = 10^{-4} \text{ m} = 0{,}01 \text{ cm.}$$

BÀI 11

Một hệ treo như hình 2.11. Hãy xác định tải trọng q, nếu σ_{ch} = 24 kN/cm^2, môđun đàn hồi E = 2.10^4 kN/cm^2, hệ số an toàn n = 1,6, F_1 = 1 cm^2, F_2 = 2 cm^2, các thông số tính toán khác cho trên hình vẽ.



Hình 2.11.

GIẢI

Đây là bài toán siêu tĩnh bậc 1 vì số ẩn số lực phải tìm là 4, tại khớp B có hai thành phần và hai thành phần lực căng trong các dây 1 và 2. Lấy mômen đối với điểm B, ta có phương trình sau: (hình 2.11).

$$\sum m_B = N_1 . 2 + N_2 . 5 - 3q . 3,5 = 0 \qquad (a)$$

Cần xét điều kiện biến dạng của hệ vì thanh AB cứng tuyệt đối nên biến dạng của các thanh 1 và 2 là Δl_1 và Δl_2 có quan hệ :

$$\Delta l_2 = \frac{5}{2}\Delta l_1 \quad \text{hay} \quad \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{5}{2}\frac{N_1 l_1}{EF_1}$$

Do đó : $N_2 = 10\,N_1$ (b)

Thay (b) vào (a), ta được :

$$N_1 = \frac{10,5}{52}q \, ; N_2 = \frac{105}{52}q$$

Từ điều kiện bền $\frac{N_z}{F} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n}$ của các thanh 1 và 2, ta suy ra

Đối với thanh 1 : $\frac{10,5}{52}q\frac{1}{1.10^{-4}} \leq \frac{24.10^4}{1,6} \Rightarrow q \leq 74$ kN/m.

Đối với thanh 2 : $\frac{10,5}{52}q\frac{1}{2.10^{-4}} \leq \frac{24}{1,6}\cdot 10^4, \Rightarrow q \leq 14,86$ kN/m.

Ta phải chọn [q] = 14,86 kN/m. Lúc đó N_1 = 3 kN; N_2 = 30 kN.

Chuyển vị của điểm A bằng Δl_2 :

$$\Delta_A = \Delta l_2 = \frac{N_2 . l_2}{EF_2} = \frac{30 \times 100}{2.10^4 \times 2} = 0,075 \text{ cm}$$

BÀI 12

Một thanh chịu kéo mặt cắt ngang thay đổi như hình 2.12. Hãy tính ε_z, ΔF/F, độ thay đổi thể tích tuyệt đối của thanh theo các đại lượng cho trước P, q, l, F (z), E, μ.

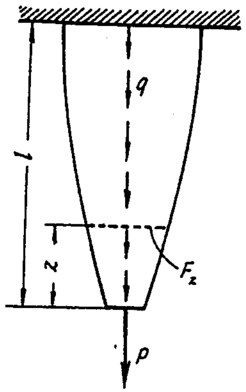
GIẢI

Lực dọc và ứng suất pháp trên mặt cắt bất kỳ z là

$$N_z = P + qz \, ; \sigma_z = \frac{N_z}{F_z} = \frac{P + qz}{F_z}$$

Biến dạng dọc tỷ đối theo định luật Hooke là :

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{P + qz}{EF_z}$$



Hình 2.12.

Biến dạng diện tích tỷ đối của mặt cắt ngang :

$$\frac{\Delta F}{F} = -2\mu\frac{\sigma}{E} = -2\mu\frac{P + q.z}{EF_z}$$

Biến đổi thể tích tuyệt đối ΔV :

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E}\int_0^{l} N_z dz = \frac{(1-2\mu)}{E}\int_0^{l}\left(P + qz\right)dz =$$

$$= \frac{(1-2\mu)}{E}\left(P + \frac{ql}{2}\right)l$$

BÀI 13

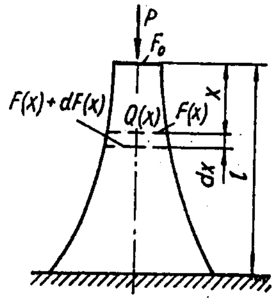
Cho một cột chịu nén bởi lực P có diện tích mặt cắt ở đỉnh thỏa mãn điều kiện bền là $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$ (hình 2.13). Hãy thiết kế cột sao cho mọi điểm của nó có ứng suất như nhau. Nếu cột được làm bằng vật liệu có:

$[\sigma] = 16$ kN/cm², $\gamma = 8 \cdot 10^{-5}$ kN/cm³, $l = 2000$ cm ; P = 160 kN.

GIẢI

Gọi F(x) và $\big(F(x) + dF(x)\big)$ là diện tích mặt cắt ngang tại toạ độ x và (x + dx).

Q (x) là trọng lượng đoạn cột có chiều dài x.



Hình 2.13.

Điều kiện cân bằng của đoạn cột có chiều dài x và (x + dx) lần lượt là :

$$P + Q(x) = [\sigma]\, F(x) \qquad \text{(a)}$$

$$P + Q(x) + \gamma F(x)\, dx = [\sigma] \big[F(x) + dF(x)\big] \qquad \text{(b)}$$

Hiệu của hai biểu thức (b) và (a) là :

$$\gamma F(x)\, dx = [\sigma]\ dF(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma\, dx}{[\sigma]}$$

Tích phân quan hệ này ta có :

$$\ln F(x) = \frac{\gamma x}{[\sigma]} + C \Rightarrow F(x) = e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]} + C} \qquad \text{(c)}$$

Hằng số C được tìm từ điều kiện :

Tại x = 0 thì F (x) = $F_0 = e^c$. Thay $F_0 = e^c$ vào (C) ta thiết lập được quy luật thay đổi của diện tích mặt cắt ngang của cột đảm bảo ứng suất tại mọi điểm trong cột đều bằng nhau như sau :

$$F(x) = F_0\, e^{\frac{\gamma x}{[\sigma]}}$$

Diện tích mặt cắt ngang tại chân cột, theo các số liệu vào của đề bài là :

$$F_{max} = F(l) = \frac{P}{[\sigma]}\, e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{160}{16}\, e^{\frac{8.2.10^{-2}}{16}} = 10\, e^{0,01} = 10{,}1005 \text{ cm}^2$$

Đối với cột có mặt cắt ngang không đổi thì diện tích mặt cắt ngang của loại cột này khi kể đến trọng lượng bản thân của nó là :

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} = \frac{160}{16 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^3} = \frac{10}{(1 - 10^{-2})} = 10{,}101 \text{ cm}^2$$

Các kết quả này cho thấy sự khác nhau về diện tích mặt cắt ngang của cột độ bền đều và cột có mặt cắt ngang không đổi là rất bé không có ý nghĩa thực tế.

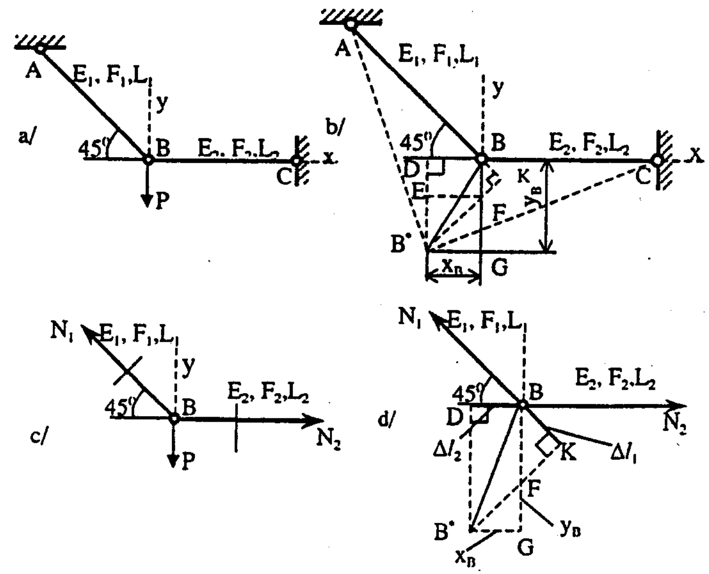
BÀI 14

Hệ gồm 2 thanh AB, BC liên kết khớp tại B chịu lực P theo phương thẳng đứng (hình 2.14a). Hãy xác định chuyển vị theo phương thẳng đứng và nằm ngang của điểm B.

GIẢI

Tách nút B và xét điều kiện cân bằng nút này. Cụ thể là (hình 2.14c).

Phương trình cân bằng :



Hình 2.14.

$$\sum Y = N_1\cos45^o = P \Rightarrow N_1 = \sqrt{2}P$$

$$\sum X = N_1\cos45^o = N_2 \Rightarrow N_2 = P$$

Chuyển vị dọc trục của các thanh là :

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}\,Pl_1}{E_1F_1} \;;\; \Delta l_2 = \frac{Pl_2}{E_2F_2}$$

Gọi y_B và x_B là chuyển vị thẳng đứng theo phương y của điểm B và nằm ngang theo phương x, chúng được tính như sau :

Theo sơ đồ biến dạng hình 2.14b với điểm B* là vị trí mới của B ở trạng thái biến dạng :

$$y_B = BG = BF + EB^* = \sqrt{2}\,.\,\Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{2Pl_2}{E_1F_1} + \frac{Pl_2}{E_2F_2}$$

$$x_B = BD = \frac{Pl_2}{E_2F_2}$$

Hoặc là tính theo sơ đồ hình 2.14d :

$$x_B = \Delta l_2 = \frac{Pl_2}{E_2F_2} \;;\; y_B\cos45^o - x_B\cos45^o = \Delta l_1 \Rightarrow$$

$$y_B = \frac{\Delta l_1}{\cos45^o} + x_B = \sqrt{2}\,\Delta l_1 + x_B \Rightarrow$$

$$y_B = \sqrt{2}\,\Delta l_1 + x_B = \frac{2Pl_1}{E_1F_1} + \frac{Pl_2}{E_2F_2}\,.$$

Chúng ta có thể nhận được kết quả trên bằng phương pháp đơn giản hơn khi sử dụng thuật toán Vêrêsaghin. Cụ thể là :

$$y_B = BG = \sum_{i=1}^{2}\frac{(\overline{N})(N_p)}{E_iF_i} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\overline{N}_i\,N_{ip}}{E_iF_i} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}\,Pl_1}{E_1F_1} + \frac{1\,.\,P\,.\,l_2}{E_2F_2} = \frac{2Pl_1}{E_1F_1} + \frac{Pl_2}{E_2F_2}\;;$$

Trong đó biểu đồ lực dọc ($\overline{N}$) do $\overline{P} = 1$ gây ra nhận được từ biểu đồ (N_p) chia cho P.

BÀI 15

Một kết cấu chịu lực như hình 2.15a. Hãy xác định chuyển vị thẳng đứng δ_y và chuyển vị thẳng ngang của điểm đặt lực P.

Các đại lượng P, a, E_1, F_1, E_2, F_2 được xem là đã biết, các thanh gạch sọc được xem cứng tuyệt đối.

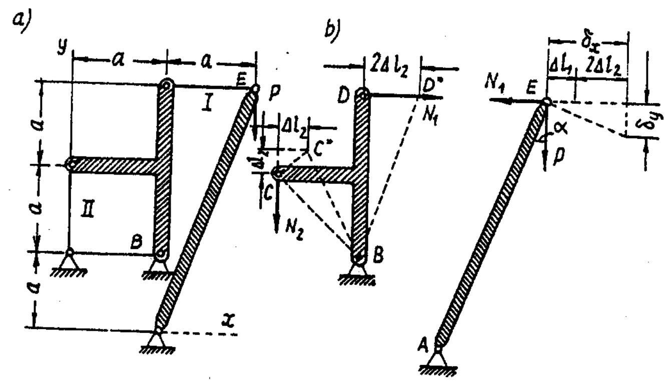
GIẢI

1/ Phương án 1

Theo phương pháp mặt cắt, ta cắt các thanh I, II và đặt vào các mặt cắt các lực N_1, N_2. Các lực N_1 và N_2 được xác định từ điều kiện cân bằng sau đây :

$$\sum m_A = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{P}{3} \;;\; \sum m_B = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{2P}{3}\,.$$

Sơ đồ chuyển vị của các nút C, D và E được mô tả trên hình 15b, c.



Hình 2.15.

Theo định luật Hooke ta có :

$$\Delta l_1 = Pa/3E_1F_1 \quad;\quad \Delta l_2 = \frac{2\,Pa}{3\,E_2F_2}$$

Từ hình 2.15b. Suy ra :

$$CC^* = \delta_c = \Delta l_2\sqrt{2}\;; \qquad DD^* = \delta_c\,\frac{2a}{a\sqrt{2}} = 2\Delta l_2$$

Chuyển vị thẳng theo các phương x và y của điểm đặt lực E sẽ là (hình 2.15c) :

$$\delta_x = 2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{4Pa}{3E_2F_2} + \frac{1}{3}\frac{Pa}{E_1F_1} = \frac{Pa}{3}\left(\frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1}\right)$$

$$\delta_y = \delta_x \operatorname{tg}\alpha = \delta_x \frac{a}{3a} = \frac{Pa}{9}\left(\frac{4}{E_2F_2} + \frac{1}{E_1F_1}\right).$$

2/ Phương án 2

Gọi $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ là lực dọc trong các thanh I và II do một lực $\overline{P} = 1$ đặt thẳng đứng tại E ta có ngay δ_y cho công thức Mohr :

$$\delta_y = \sum_{k=1}^{2} \int \frac{\overline{N}_k N_{kp}\, dz}{E_kF_k} = \frac{1.P.a}{9E_1F_1} + \frac{4.P.a}{9E_2F_2} = \frac{Pa}{9}\left(\frac{1}{E_1F_1} + \frac{4}{E_2F_2}\right)$$

Tương tự nếu gọi $\overline{N}_{1n}, \overline{N}_{2n}$ là lực dọc trong các thanh I và II do một lực $\overline{P} = 1$ đặt tại E theo phương ngang gây ra. Điều kiện cân bằng cho ta :

$$\overline{N}_{1n} = 1 \ ; \ \overline{N}_{2n} = 2.\overline{N}_{1n} = 2.$$

Do đó :

$$\delta_x = \sum_{i=1}^{2} \int \frac{\overline{N}_{in} N_{ip}\, dz}{E_iF_i} = \frac{Pa}{3E_1F_1} + \frac{4.P}{3E_2F_2} = \frac{Pa}{3}\left(\frac{1}{E_1F_1} + \frac{4}{E_2F_2}\right)$$

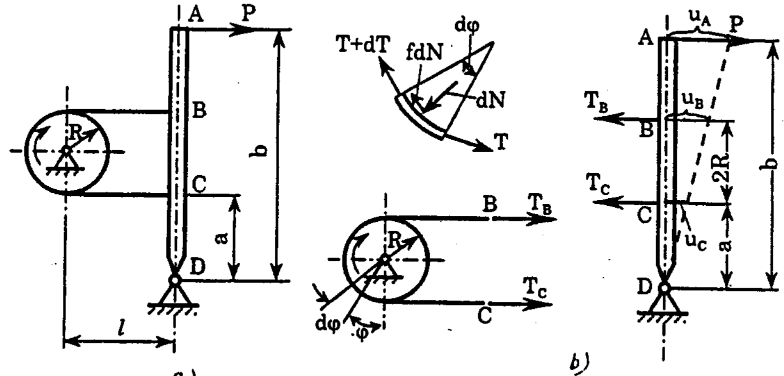
Đây là phương án cho kết quả nhanh hơn nhiều so với phương án 1 dùng sơ đồ biến dạng.

BÀI 16

Một thiết bị phanh được mô tả trên hình 2.16a. Thiết bị này gồm một cần gạt AD cứng tuyệt đối, một bánh xe bán kính R cũng cứng tuyệt đối và một dây đai có độ cứng cho trước lắp trên bánh đai, hai đầu của nó được buộc vào cần gạt tại B và C. Cho biết hệ số ma sát trên mặt tiếp xúc giữa đai và bánh đai là f. Hãy xác định mômen phanh, chuyển vị thẳng ngang của điểm A đầu cần và nghiệm bài toán sẽ thay đổi thế nào nếu bánh đai quay theo chiều ngược lại ?

GIẢI

Chúng ta tưởng tượng tách hệ ra như hình 2.16b và khảo sát điều kiện cân bằng cho từng phần: Đối với cần AD :



Hình 2.16

$$T_c a + T_B (a + 2R) = Pb \qquad (a)$$

Khảo sát cân bằng của một phân tố đai $Rd\varphi$ dưới tác dụng của lực căng T, T + dT, phản lực pháp tuyến từ bánh đai dN, lực ma sát fdN. Điều kiện cân bằng của phân tố này là (hình 2.16b).

$$dT + f\,dN = 0$$

$$dN = Td\varphi$$

Do đó :

$$\frac{dT}{T} = -f\,d\varphi \Rightarrow T = c\,e^{-f\varphi} \qquad (b)$$

Hằng số tích phân C được tìm từ điều kiện :

Khi $\varphi = 0$, $T = T_c$, vì thế từ (b) rút ra :

$$T = C \text{ và } T = T_c.e^{-f\varphi}$$

Lực căng $\quad T_B = T_{\varphi=\pi} = T_c.e^{-f\pi} \qquad (c)$

Thay (c) vào (a) ta suy ra :

$$T_c = \frac{P.b}{a + e^{-f\pi}(a + 2R)}$$

Mômen phanh được xác định từ điều kiện :

$$M = \int_0^\pi RfdN = Rf\int_0^\pi T_c.e^{-f\varphi}d\varphi = T_cR(1 - e^{-f\pi}) = \frac{P.bR(1 - e^{-f\pi})}{a + e^{-f\pi}(a + 2R)}$$

Từ hình 2.16b ta thấy :

Chuyển vị của điểm A là $U_A = U_c \cdot \frac{b}{a}$, $U_A = U_B \cdot \frac{b}{a + 2R}$.

Gọi Δl là độ dãn dài tuyệt đối của đai ta có thể tính Δl như sau :

$$\Delta l = \frac{T_C \cdot l}{EF} + \frac{T_B \cdot l}{EF} + \int_0^{\pi} \frac{TRd\varphi}{EF} = \frac{T_C}{EF}\left[l + l\,e^{-f\pi} + \frac{R}{f}\left(1 - e^{-f\pi}\right)\right]$$

Nhưng điều kiện biến dạng của hệ cho ta :

$$\Delta l = U_C + U_B = U_A\,\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a + 2R}{a}\right)$$

Suy ra :

$$U_A = \frac{\Delta l \,.\, b}{a\left(1 + \frac{2R}{a}\right)} = \frac{P \,.\, b^2}{2EF\,(a + R)} \cdot \frac{l\left(1 + e^{-f\pi}\right) + \frac{R}{f}\left(1 - e^{-f\pi}\right)}{a + \left(a + 2R\right)e^{-f\pi}}$$

Nếu bánh đai quay theo chiều ngược với chiều trên hình 2.16a thì dấu của lực ma sát đổi chiều. Và, do đó trong các biểu thức của các đại lượng cần tính đã nhận được ở trên ta chỉ việc thay f bằng –f.

BÀI 17

Xác định lực dọc N_1 và N_2 trong các thanh 1 và 2 (hình 2.17a) của kết cấu. Nếu trong quá trình chế tạo thanh 1 bị ngắn hơn so với thiết kế một đoạn Δ_0 = 0,5 mm. Các thanh được làm bằng thép có E = 2 . 10^{-4} kN/cm^2.

GIẢI

Đây là bài toán kéo (nén) 1 bậc siêu tĩnh. Phương án tốt nhất giải bài toán là phương pháp lực với ẩn số thừa N_1.

Theo phương pháp này, phương trình chính tắc được viết :

$$\delta_{11} N_1 + \Delta_{1\Delta_0} = 0$$

Tính $\Delta_{1\Delta_0}$ và δ_{11}

$\Delta_{1\Delta_0}$ là chuyển vị thẳng dọc theo phương $\overline{N}_1 = 1$ tại liên kết 1 do chuyển vị cưỡng bức gây ra trong hệ cơ bản và được tính theo công thức :

$$\Delta_{1\Delta_0} = -\sum \overline{R}_i \,.\, \Delta_{i_0} = -1 \,.\, \Delta_0$$

$$\delta_{11} = \frac{\overline{N}_1 a}{E_1F_1} + \frac{\overline{N}_2 2a}{E_1F_1} =$$

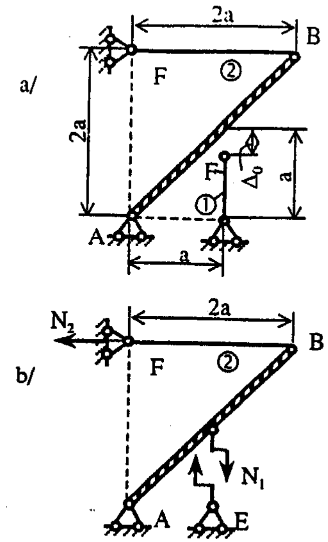
$$= \frac{1.a}{EF} + \frac{2a}{4EF} = \frac{1,5a}{EF}$$

Trong đó : $\frac{1}{2}\,\overline{N}_1 = \overline{N}_2 = 0,5$.

Suy ra :

$$N_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta_0}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta_0\,EF}{1,5a}$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{\Delta_0\,EF}{3\,a}.$$



Hình 2.17.

BÀI 18

Một thanh thẳng thuần nhất mặt cắt không đổi được ngàm chặt ở hai đầu. Khi không tính toán, hãy chứng minh rằng, nếu thanh được nung nóng đều thì sẽ không có chuyển vị dọc trục thanh.

GIẢI

Từ điều kiện đối xứng ta thấy mặt cắt ở giữa thanh sẽ không có chuyển vị dọc trục. Bây giờ ta lại xét một nửa thanh phải hoặc trái. Trong mỗi nửa thanh này các đầu cuối đều không có chuyển vị. Từ điều kiện đối xứng của mỗi nửa này mà mặt cắt ở giữa mỗi đoạn một lần nữa lại không thể phát sinh chuyển vị dọc trục. Theo lập luận này ta có thể chia thanh ra một số đoạn nhỏ tùy ý, mà ở các đầu cuối của mỗi đoạn không có chuyển vị dọc trục. Từ đó có thể kết luận rằng chuyển vị dọc ở mọi mặt cắt ngang của thanh với giữ kiện đề bài không thể phát sinh.

BÀI 19

Một thanh có E = 2.10^4 kN/cm^2, mặt cắt thay đổi F_1 = 630,7 cm^2, F_2 = 173,87 cm^2 được ngàm chặt hai đầu, ở giữa chịu một lực dọc trục P = 52 KN (hình 2.19a).

Hãy vẽ các biểu đồ chuyển vị (U), lực dọc (N) và tính ứng suất lớn nhất về trị tuyệt đối, max$|\varepsilon|$ và max$|U|$? (đơn vị tính [KN, cm]).

GIẢI

Phương trình chuyển vị của các đoạn và giá trị chuyển vị tại các mặt cắt phân chia giữa các đoạn được tính theo phương pháp vạn năng như sau :

Đoạn 1 : $U_1(z) = -2{,}517E - 06z$

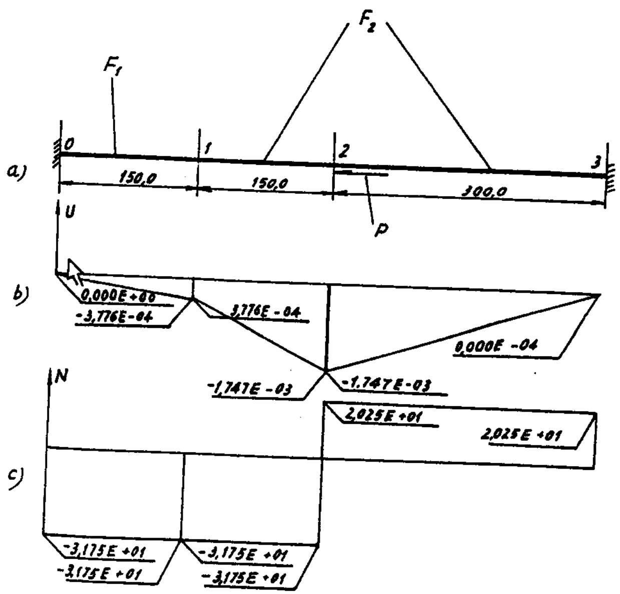
$(0{,}000E + 00 < z < 1{,}5000E + 02)$

Đoạn 2 : $U_2(z) = -9{,}129E - 06z \quad -3{,}776E{-}04$

$(1.500E + 02 < z < 3.000E + 02)$

Đoạn 3 : $U_3(z) = +5{,}923E - 60z - 1{,}747E{-}03$

z =	Bước nhảy	Biên trái	Biên phải
0,000E + 00	0,000E + 00	0,000E + 00	0,000E + 00
1,5000E+ 02	0,000E+ 00	-3,776E-04	-3,776E-04
3,000E+ 02	0,000E+ 00	-1,747E-03	-1,747E-03
6,000E+ 02	-1,776E-15	-1,776E-15	0,000E+ 00



Hình 2.19.

Biểu đồ chuyển vị dọc trục (u), vẽ theo các hàm u(z) ở trên được cho trên hình 2.19b. Biểu đồ lực dọc (N) được vẽ theo quan hệ $N = E_iF_i \dfrac{du_i}{dz}$, (i = 1,2,3) và được mô tả trên hình 2.19c. Theo biểu đồ (N) thì mặt cắt chịu ứng suất lớn nhất về trị tuyệt đối là các mặt cắt trong đoạn 1–2. Cụ thể là :

$$\max|\sigma| = \frac{31{,}75}{173{,}87} = 0{,}183 \text{ KN/cm}^2.$$

$$\max|\varepsilon| = \max\left|\frac{N}{EF}\right| = \frac{31{,}75}{2.10^4.\,173{,}87} = 0{,}0915.10^{-4}$$

Từ biểu đồ (u) ta có :

$$\max\left|U(z = 300 \text{ cm})\right| = 1{,}747.10^{-3} \text{ cm}$$

BÀI 20

Người ta muốn có một dàn thép chịu lực như hình 2.20a, nhưng do chế tạo không chính xác nên các thanh 3 bị hụt một đoạn Δ. Hãy xác định :

a) Chuyển vị thẳng đứng của điểm "k" do chế tạo không chính xác gây ra ?

b) Tính nội lực trong dàn và chuyển vị thẳng đứng tại k do Δ và P gây ra ? Cho biết các thanh cùng vật liệu, cùng diện tích mặt cắt ngang : EF.

GIẢI

Gọi $\Delta_{K\Delta}$ là chuyển vị thẳng đứng tại k do lắp ghép gây ra ta có thể tính nó theo công thức :

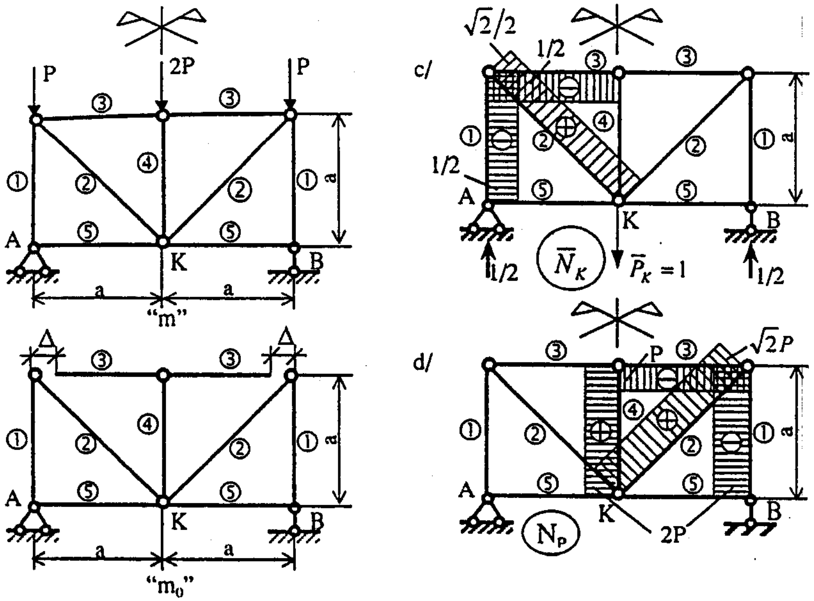
$$\Delta_{k\Delta} = \sum \overline{N}_{ik}\,\Delta_{im_0} \qquad \text{(a)}$$

Trạng thái "k" và biểu đồ $(\overline{N}_k)$ được cho trên hình 2.20c, trong trường hợp này i = 2, $\Delta_3 = -\Delta$. Do hệ đối xứng qua thanh giữa nên theo (a), ta có :

$$\Delta_{k\Delta} = -\frac{1}{2}\left(-\Delta\right) \times 2 = \Delta \text{ (nút k đi xuống)}$$

Trạng thái chịu lực "m" và biểu đồ nội lực tương ứng được cho trên hình 2.20a, d.

a/ b/ c/ d/



Hình 2.20.

Chuyển vị thẳng đứng tại k do ngoại lực và lắp ghép không chính xác gây ra là :

$$\Delta_k = \Delta_{k\Delta} + \Delta_{kp} = \Delta + \sum \frac{N_{ip} \cdot l_i \cdot \overline{N}_{ik}}{EF} = \Delta + 2\left(+ \frac{2Pa}{EF} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\,Pa \cdot \sqrt{2}}{2EF} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{Pa \cdot 1}{2EF} \right) = \Delta + \frac{5{,}84\,Pa}{EF} \quad \text{(nút k đi xuống).}$$

BÀI 21

Cho một hệ treo như hình 2.21. Hãy tính N_1, N_2 theo q và a ? Biết thanh 1 và 2 có cùng độ cứng.

GIẢI

Gọi N_1, N_2 là những lực kéo trong thanh 1 và 2. Ta viết phương trình cân bằng mômen đối với điểm D :

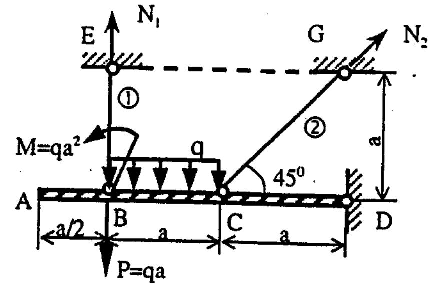
$$\sum m_D(\overrightarrow{F_k}) = 0 \Rightarrow$$

$$N_2 = \left(4{,}5\,qa - 2\,N_1\right) . \sqrt{2} \quad (a)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi U của hệ :

$$U = \frac{1}{2} \sum \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{N_1^2 a}{EF_1} + \frac{\{(4{,}5\,qa - 2N_1)\sqrt{2}\}^2 . a\sqrt{2}}{EF_2}\right]$$



Hình 2.21.

Theo định lý về cực tiểu của thế năng của Menabrea ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{2\,N_1 a}{EF_1} - \frac{4\sqrt{2}\left(4{,}5\,qa - 2\,N_1\right) . a\sqrt{2}}{EF_2}\right] = 0$$

Giải phương trình này với $F_2 = \sqrt{2}\,F_1$ ta có :

$$N_1 = 1{,}912\,qa$$

Từ (a) ta rút ra :

$$N_2 = \left(4{,}5\,qa - 3{,}824\,qa\right)\sqrt{2} = 0{,}954\,qa$$

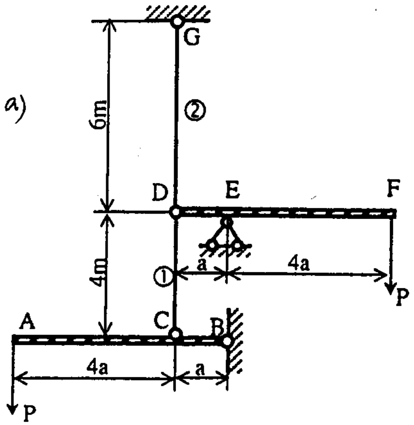
BÀI 22

Có một hệ treo chịu lực như hình 2.22a. Hãy xác định lực P cho phép tác dụng lên hệ theo hai điều kiện sau :

1) Điều kiện bền của thanh 1 và thanh 2 với $[\sigma] = 16\ kN/cm^2$.

2) Điều kiện cứng : chuyển vị thẳng đứng của điểm A : $\Delta_A \leq 1{,}5$ cm. Cho $E = 2 . 10^4\ kN/cm^2$, các thanh AB, DE cứng tuyệt đối.

GIẢI



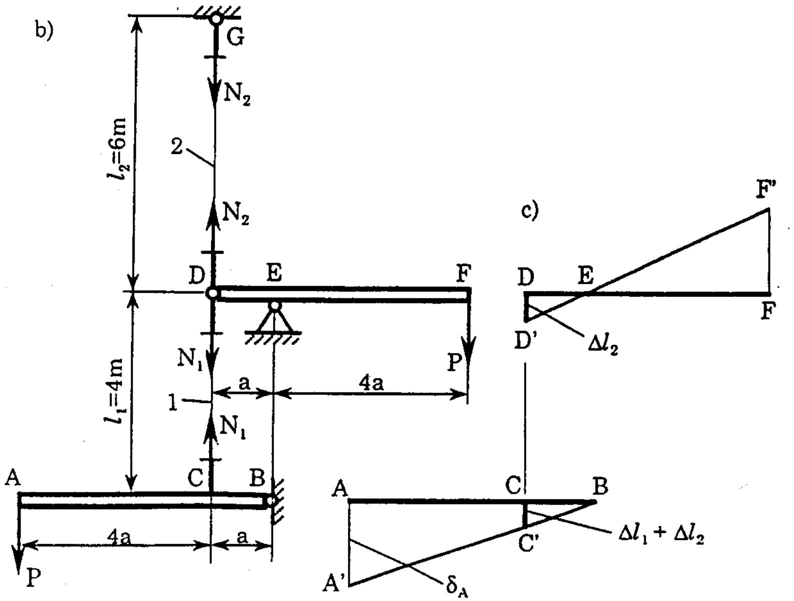
Hình 2.22a.

Hệ gồm hai thanh AB và DF liên kết với nhau bởi thanh CD. Nếu không có thanh nối CD thì thanh AB sẽ biến hình hình học vì khi đó AB là hệ có một bậc tự do, còn thanh DF vẫn không biến hình (2.22b). Thanh AB gọi là hệ phụ, thanh DF gọi là hệ chính.

Xét cân bằng thanh AB, lấy mômen đối với B, ta được $N_1 = 5P$. Xét cân bằng thanh DF, lấy mômen đối với điểm E, ta có :

$$\sum m_E = N_1 a - N_2 a - P\,.\,4a = 0$$

Suy ra : $N_2 = P$.



Hình 2.22 b,c

Từ điều kiện bền, ta có :

$\frac{N_1}{F_1} \leq [\sigma]$ và $\frac{N_2}{F_2} \leq [\sigma]$. Suy ra : $N_1 \leq [\sigma]\ F_1$; $5P \leq 16 \times 2 \Rightarrow P \leq 6{,}4$ kN

Tương tự, đối với thanh 2, ta có : $P \leq 32$ kN.

Từ điều kiện bền của thanh 1 và 2, ta thấy phải lấy trị số $P = 6{,}4$ kN.

Để xác định lực P từ điều kiện cứng ta phải xét biến dạng của hệ. Do độ dãn của dây 2, điểm D có vị trí D'; do độ dãn của hai dây 1 và 2, điểm C có vị trí C'. Chuyển vị các điểm A là $\delta_A = 5CC'$ (hình 2.22c). Gọi biến dạng dài của thanh 1 và 2 là Δl_1 và Δl_2 ta có :

$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF}$; $\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF}$. Ta thấy $CC' = \Delta l_1 + \Delta l_2$. Vậy

$\delta_A = 5(\Delta l_1 + \Delta l_2)$. Từ điều kiện cứng, ta có :

$$5\,(\Delta l_1 + \Delta l_2) = 5\left(\frac{5P\,.\,400}{2\,.\,10^4\,.\,2} + \frac{P\,.\,600}{2\,.\,10^4\,.\,2}\right) \leq 1{,}5 \text{ cm}$$

Bất đẳng thức này cho ta

$$P \leq 4{,}6 \text{ kN}$$

Trong 2 giá trị của lực P tìm được theo điều kiện bền và cứng ta phải chọn lực nhỏ nhất để đặt lên hệ. Cụ thể là

$$[P] \leq 4{,}6 \text{ kN.}$$

BÀI 23

Một hệ treo chịu lực cân bằng như hình 2.23a. Thanh AB cứng tuyệt đối, các thanh 1 và 2 bằng thép.

Yêu cầu

1) Chọn diện tích mặt cắt ngang F_1 của thanh 1, khi không có thanh 2 ?

2) Xác định lực kéo trong các thanh 1 và 2 khi hai thanh này có độ cứng như nhau ?

Biết : $[\sigma] = 16$ kN/cm^2.

$a = 150$ cm, $q = 0{,}5$ kN/cm^2

$P = qa$; $M = qa^2$; $E = 2\,.\,10^4$ kN/cm^2.

GIẢI

I. Phương án 1 – Phương pháp lực

1) Tính F_1 ? (khi không có thanh 2)

$\sum m_D = 0 \Rightarrow N_1 = 2{,}5\ qa$

$$F_1 \geqslant \frac{2{,}5\,qa}{16} = \frac{2{,}5 \times 0{,}5 \times 150}{16} = 11{,}7\ cm^2$$

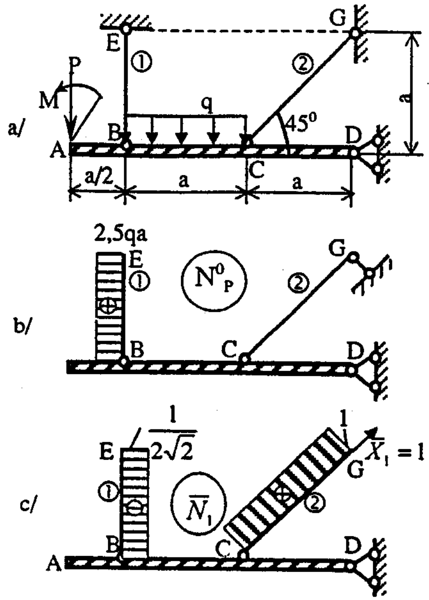
2) Có cả thanh 1 và 2

$$\frac{EF_1}{a} = \frac{EF_2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$F_2 = \sqrt{2}\,F_1 \,.\, (a_1)$

$\delta_{11}X_1 + \Delta^0_{1p} = 0 \Rightarrow$

Phương trình xác định N_2 :



Hình 2.23.

$X_1 = -\Delta^0_{1p}/\delta_{11}$

$\Delta^0_{1p} = -(\overline{N}_1)(N^0_p) =$

$$= \frac{-2{,}5\,qa^2}{EF_1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ ;\ \delta_{11} = \frac{a}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}\,EF_1} + \frac{a\sqrt{2}\,.\,1}{EF_2} =$$

$$= \frac{a}{8EF_1} + \frac{a\sqrt{2}}{E\sqrt{2}\,F_1} = \frac{a}{EF_1}\left(\frac{1}{8} + 1\right) = \frac{9a}{8EF_1}$$

Do đó suy ra $N_2 = X_1 = -\Delta^0_{ip}/\delta_{11} = 59$ kN,

$$N_1 = \frac{59}{2\sqrt{2}} + 2{,}5\,.\,0{,}5\,.\,150 = -20{,}85 + 187{,}5 = 166{,}65\ kN$$

$N_1 = 166{,}65$ kN

II. Phương án 2 – Phương pháp sơ đồ biến dạng

1) Tính F_1 ? (khi không có thanh 2) :

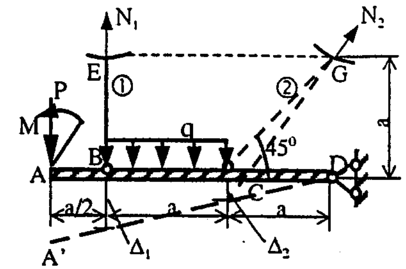
$\sum m_D = 0 \Rightarrow$

$$N_1 = \frac{5}{2}\,qa$$

$$F_1 \geqslant \frac{5\,qa}{2\,.\,16} = \frac{5\,.\,0{,}5 \times 150}{2 \times 16} = 11{,}7\ cm^2$$

$F_1 = 12{,}0\ cm^2$

2) Có cả thanh 1 và 2 (hình 2.23d)



Hình 2.23d.

$$\frac{EF_1}{a} = \frac{EF_2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow F_2 = \sqrt{2}\,F_1 . \qquad (a_1)$$

$$\sum m_D = 0 = qa^2 + 2{,}5\,qa^2 - 2aN_1 + 1{,}5\,qa^2 - N_2\frac{a}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow$$

$$2N_1 + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 5\,qa \quad (a_2)\ ;\ \Delta_1 = \frac{N_1 a}{EF_1}\ ;\ \Delta_2 = \frac{N_2\,a\sqrt{2}}{EF_2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\,N_2\,a}{EF_2}$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{2} = \frac{2\,N_2}{F_2}\cdot\frac{F_1}{N_1} = \frac{2\,N_2}{\sqrt{2}\,N_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{4\,N_2}{\sqrt{2}} \qquad (a_3)$$

từ (a_2) và (a_3) ta có :

$$\frac{8\,N_2}{\sqrt{2}} + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = 5\,qa \Rightarrow N_2 = \frac{5\sqrt{2}\,qa}{9} = \frac{5\sqrt{2}\,.\,0{,}5\,.\,150}{9} = 59\ kN$$

$$N_1 = \frac{4 \times 59}{\sqrt{2}} = 166{,}7\ kN.$$

BÀI 24

Cho một hệ khớp gồm ba thanh được nối với nhau bằng khớp ở đầu cuối A. Hệ chịu tải trọng P như trên hình vẽ (hình 2.24a). Độ cứng của thanh giữa $EF\sqrt{2}$ của mỗi thanh bên bằng EF. Hãy vẽ biểu đồ nội lực trong hệ khi dùng phương pháp lực.

GIẢI

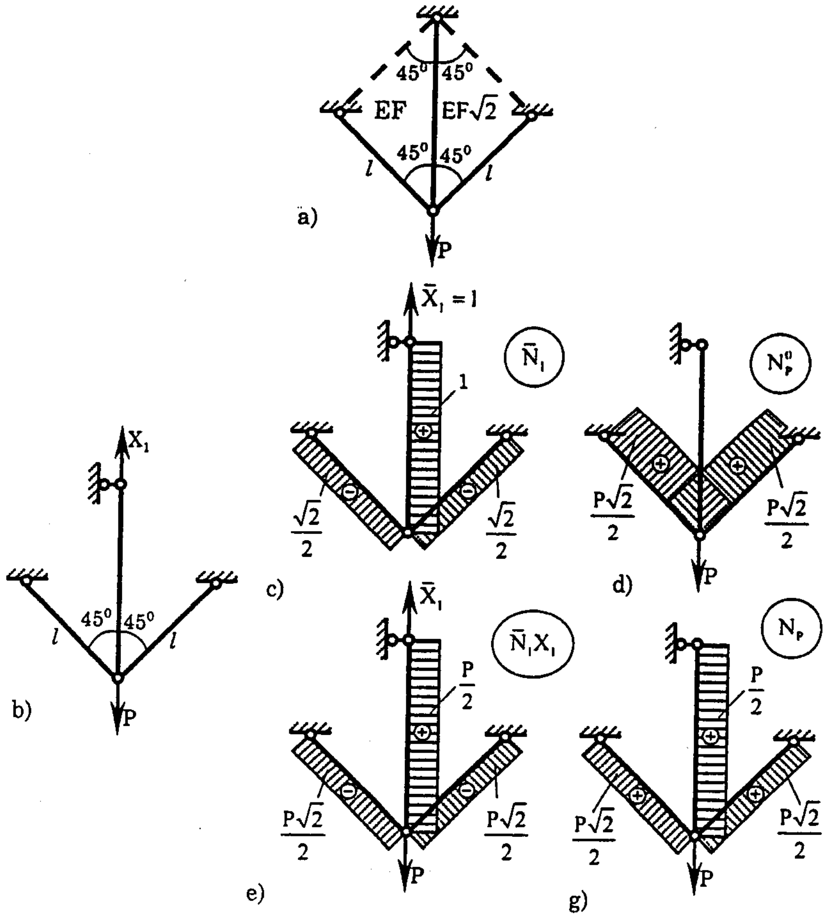
Bậc siêu tĩnh của hệ bằng 1. Một trong những phương án chọn hệ tương đương được cho trên hình vẽ (hình 2.24b). Khi đó phương trình chính tắc có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \qquad (1)$$

Biểu đồ lực dọc đơn vị $\overline{N}_1$ và biểu đồ lực dọc N_P^o do các lực $X_1 = 1$ và P gây ra trong hệ cơ bản có dạng trên hình vẽ (hình 2.24c, d).

Các hệ số của phương trình chính tắc (1) được xác định theo phương pháp Morh :

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{EF}\,\overline{N}_{1i}\,\overline{N}_{1i} = 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot l\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{EF} + \left[1\,.\,l\sqrt{2}\right]\left[l\right]\frac{1}{EF\sqrt{2}} = \frac{2l}{EF}$$



Hình 2.24

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{N}_{1i}\,N^o_{pi}}{EF_i} = -2\left[\frac{P\sqrt{2}}{2}\,l\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\frac{1}{EF} = -\frac{Pl}{EF}$$

Thay δ_{11} và Δ_{1P} vừa tìm được vào phương trình (1) và giải nó ta được $X_1 = P/2$.

Nguyên lý độc lập tác dụng của các lực cho phép ta viết.

$$(N_P) = (N_P^o) + (\overline{N}_1)X_1$$

Biểu đồ $(\overline{N}_1X_1)$ nhận được từ biểu đồ $(\overline{N}_1)$ sau khi nhân các tung độ của nó với $X_1 = P/2$ (hình 2.24e). Biểu đồ lực dọc cuối cùng N_P được cho trên hình 2.24g.

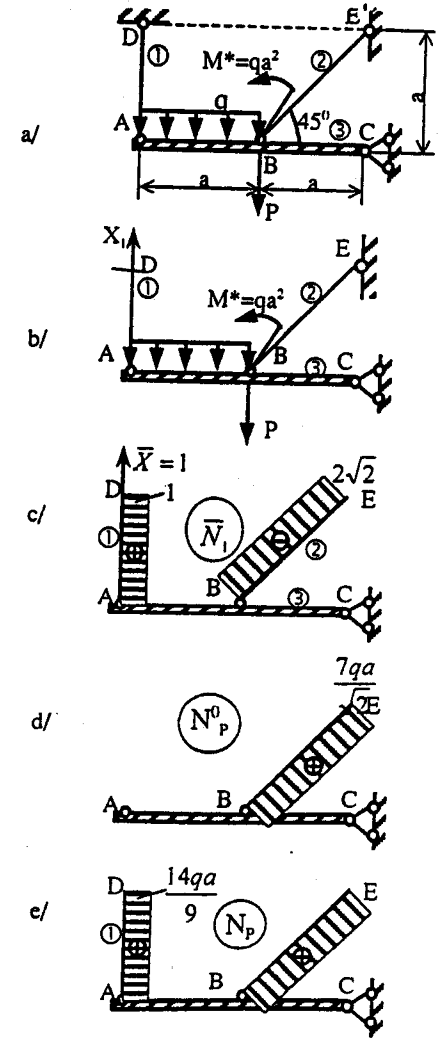
BÀI 25

Một hệ treo gồm các thanh (1) và (2) bằng thép, thanh (3) cứng tuyệt đối (hình 2.25a). Hãy thiết kế diện tích mặt cắt ngang của thanh 1 và 2 sao cho điều kiện bền được an toàn và hai thanh có cùng độ cứng.

GIẢI

Bài toán khảo sát là hệ siêu tĩnh bậc một chịu kéo (nén).

Xem liên kết D là "thừa", ta có hệ tương đương (hình 2.25b) và phương trình chính tắc :



Hình 2.25.

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P}^o = 0$$

Các biểu đồ lực dọc do $\overline{X}_1 = 1$ và tải trọng ngoài cho trước gây ra trong hệ cơ bản được cho trên các hình 2.25c, d.

$$\delta_{11} = \frac{aF_2 + 8\sqrt{2}\,aF_1}{EF_1F_2} = \frac{9\sqrt{2}\,a}{EF_2}$$

(Vì hai thanh có cùng độ cứng nên $F_2 = \sqrt{2}\,F_1$).

$$\Delta_{1P}^o = -\frac{14\sqrt{2}\,qa^2}{EF_2}$$

Do đó :

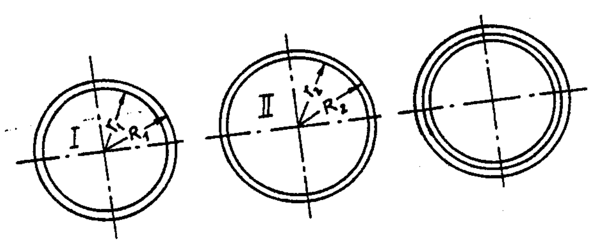
$$X_1 = \frac{\Delta_{1P}^o}{\delta_{11}} = -\frac{14\sqrt{2}\,qa^2}{EF_2} \times \frac{EF_2}{9\sqrt{2}\,a} = \frac{14\,qa}{9}$$

Để đảm bảo điều kiện bền ta phải có :

$$\frac{X_1}{F_1} \leqslant [\sigma] \Rightarrow F_1 \geqslant \frac{14\,qa}{9[\sigma]} \quad \text{và} \quad F_2 = \sqrt{2}\,F_1 = \frac{14\sqrt{2}\,qa}{9}$$

BÀI 26

Người ta ghép hai ống thép hình trụ I và II bằng cách làm lạnh ống trong I và nung nóng ống ngoài II. Bán kính các ống cho trước (hình 2.26): $r_1 = 40$ mm, $R_1 = 42$ mm; $r_2 = 41,96$ mm; $R_2 = 43$ mm; $E = 2.10^6$ daN/cm^2. Hãy xác định ứng suất trong các thành ống I và II khi làm lạnh ống ngoài.



Hình 2.26.

GIẢI

Khi làm lạnh ống ngoài II, ống này truyền một áp lực phân bố đều hướng kính p lên mặt ngoài ống I, ngược lại ống I lại tác dụng lên mặt trong ống II áp lực p như vậy. Giá trị của áp lực p này được xác định từ điều kiện : Tổng các thay đổi bán kính ngoài của ống trong ΔR_1 và sự thay đổi bán kính trong của ống ngoài Δr_2 phải bằng hiệu giá trị ban đầu của các bán kính $R_1 - r_2$. Cụ thể là :

$$\Delta R_1 + \Delta r_2 = R_1 - r_2$$

trong đó :

$$\Delta R_1 = \frac{p}{E}\cdot\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} \quad \text{và} \quad \Delta r_2 = \frac{p}{E}\cdot\frac{r_2^2}{R_2 - r_2}$$

Vậy điều kiện biến dạng liên tục sẽ là :

$$\frac{p}{E}\left(\frac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \frac{r_2^2}{R_2 - r_2}\right) = R_1 - r_2$$

Từ đây rút ra :

$$p = \frac{E(R_1 - r_2)}{\dfrac{R_1^2}{R_1 - r_1} + \dfrac{r_2^2}{R_2 - r_2}} = \frac{2.10^6 \,.\, 0,004}{\dfrac{4,2^2}{0,2} + \dfrac{4,196^2}{0,104}} \approx 31 \text{ daN/cm}^2$$

Các ứng suất pháp σ_I và σ_{II} được xác định :

$$\sigma_I = \frac{pr_1}{R_1 - r_1} = \frac{34\,.\,4,2}{0,2} = 651 \text{ daN/cm}^2 \; ;$$

$$\sigma_{II} = \frac{pr_2}{R_2 - r_2} = \frac{31\,.\,4,196}{0,104} \approx 1250 \text{ daN/cm}^2.$$

BÀI 27

Một hệ khớp đối xứng gồm ba thanh thép chịu một lực kéo P = 80 kN như hình 2.27a.

Hãy chọn mặt cắt ngang của các thanh. Cho biết $[\sigma] = 14$ kN/cm^2 và tỷ số độ cứng của thanh giữa với các thanh biên là $\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{2}\cos\alpha$, $l_1 = 1,5$ m, $\alpha = 30^o$.

Điều kiện để chọn mặt cắt ngang của từng thanh theo điều kiện bền là :

$$F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]} \qquad (a)$$

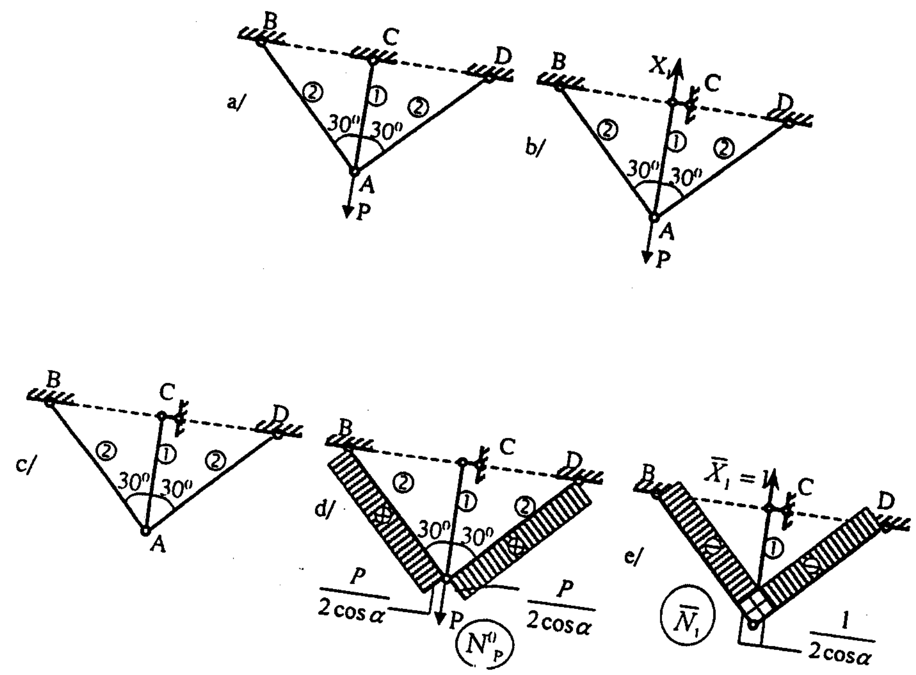
Công thức này cho thấy cần phải tính trước các nội lực N_i $(\overline{i = 1,3})$.

Vì hệ có một thanh "thừa" nên hệ có bậc siêu tĩnh $n = 1$.

Hệ tương đương và hệ cơ bản được cho trên hình 2.27b, c.

Theo phương pháp lực ta có phương trình mô tả biến dạng tại liên kết C theo phương thẳng đứng là :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P}^{o} = 0 \qquad (b)$$



Hình 2.27

Trong đó :

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(\overline{N}_{i1})(\overline{N}_{i1})}{E_i F_i} \; ; \; \Delta_{1P}^{o} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(\overline{N}_{1i})(\overline{N}_P^{o})}{E_i F_i}$$

Các biểu đồ (N_P^o), $(\overline{N}_1)$ được cho trên hình 2.27d, e.

Theo đề bài ta có : $\frac{k_2}{k_1} = \frac{\cos\alpha}{2} = \frac{EF_2}{l_2} \cdot \frac{l_1}{EF_1} = \frac{F_2 \cos\alpha}{F_1}$. Do đó $2F_2 = F_1$

$$\delta_{11} = \frac{l_2 \cos\alpha}{2EF_2} + 2\,\frac{l_2\,(1/4\cos^2\alpha)}{EF_2} = \frac{l_2}{2EF_2}\left(\cos\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$$

$$\Delta_{1P}^{o} = -2\,\frac{l_2 P}{EF_2\, 2\cos\alpha} \cdot \frac{1}{2\cos\alpha} = -\frac{Pl_2}{2EF_2\cos^2\alpha}$$

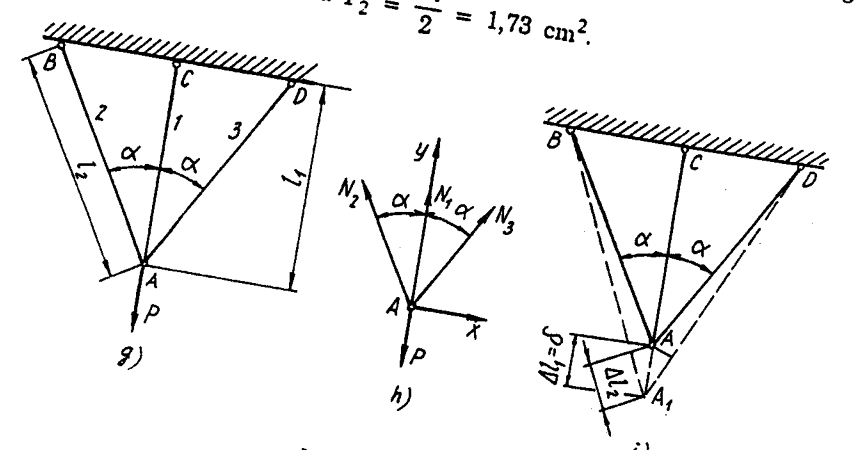
Thay δ_{11} và Δ_{1P}^{o} vào (b) ta đi đến :

$$X_1 = \frac{Pl_2}{2EF_2\cos^2\alpha} \cdot \frac{2EF_2\cos^2\alpha}{l_2(\cos^3\alpha + 1)} = \frac{P}{\cos^3\alpha + 1} = \frac{80}{1 + 0{,}866^3} = 48{,}50 \text{ kN}$$

Diện tích mặt cắt ngang của thanh 1 và các thanh biên là :

$$F_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{X_1}{[\sigma]} = \frac{P}{14(\cos^2\alpha + 1)} \text{ cm}^2,$$ với $P = 80$ kN và $\alpha = 30^o$

thì $F_1 = \frac{48{,}5}{14} = 3{,}46$ cm² và $F_2 = \frac{F_1}{2} = 1{,}73$ cm².



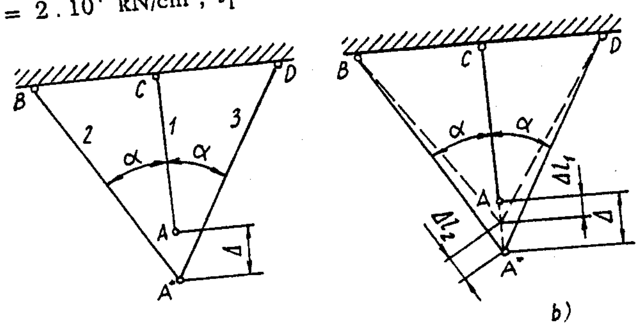
Hình 2.27

Bạn đọc có thể khử siêu tĩnh bằng cách khảo sát hệ ở trạng thái biến dạng (hình 2.27i) để có được quan hệ giữa các chuyển vị của các cấu kiện (thanh) riêng biệt. Các quan hệ này được gọi là các phương trình liên tục của biến dạng. Tuy nhiên, phương án này khá dài và phức tạp, đặc biệt hệ có nhiều thanh và không đối xứng.

BÀI 28

Người ta muốn có một hệ khớp gồm ba thanh như hình 2.27a của bài 27. Nhưng do chế tạo không chính xác thanh 1 bị ngắn so với hai thanh biên một đoạn $\Delta = 0{,}15$ cm (hình 2.28a). Vì vậy người ta nối cưỡng bức các thanh lại để được hệ như hình 2.28b.

Hãy xác định nội lực và ứng suất ban đầu (lắp ghép) trong các thanh sinh ra do quá trình ghép cưỡng bức nói trên. Nếu $F_1 = 3$ cm^2, $F_2 = F_3 = 2$ cm^2, $E = 2 . 10^4$ kN/cm^2, $l_1 = 2$ m, $\alpha = 30^o$.



Hình 2.28.

GIẢI

Theo định luật Hooke ta có thể viết :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} \;;\; \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} \qquad (1)$$

Mặt khác từ trạng thái biến dạng của hệ sau khi ghép (hình 2.28b) Δl_2 có quan hệ :

$$\Delta l_2 = (\Delta - \Delta l_1)\cos\alpha \qquad (2)$$

Thay Δl_1 và Δl_2 vào (2) rồi biểu diễn N_2 theo Δ và N_1, ta có :

$$N_2 = \frac{EF_2}{l_2}\left(\Delta - \frac{N_1 l_1}{EF_1}\right)\cos\alpha \qquad (3)$$

Khi khảo sát bài toán về phương diện tĩnh học (hình 2.28) ta đi đến quan hệ giữa N_1 và N_2 với giả thiết N_1 và N_2 là các lực kéo :

$$N_1 + 2N_2\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

Thay (3) vào (4) ta rút ra lực dọc N_1 :

$$N_1 = \frac{2k_2\cos^2\alpha}{1 + 2\dfrac{k_2}{k_1}\cos^2\alpha} \qquad (5)$$

Lực nén trong thanh biên N_2 được tìm từ (4) :

$$N_2 = -\frac{N_1}{2\cos\alpha} \qquad (6)$$

Lực dọc trong các thanh phụ thuộc vào độ cứng

$$k_1 = \frac{EF_1}{l_1}\;,\; k_2 = \frac{EF_2}{l_2} \text{ và } \Delta .$$

Với các số liệu tính toán đã cho ta xác định được các lực dọc và ứng suất trong các thanh sinh ra sau khi ghép như sau :

$$N_1 = \frac{2\cdot\dfrac{2 . 10^4 . 2}{200}\cdot 0{,}866^2}{1 + 2\cdot\dfrac{2 . 10^4 . 2 . 0{,}866 . 200}{200 . 2 . 10^4 . 2}\cdot 0{,}866^2}\cdot 0{,}15 = 20{,}9 \text{ kN}$$

$$N_2 = N_3 = -\frac{20{,}9}{2 . 0{,}866} = -12{,}06 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{20{,}9}{3} = 6{,}97 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\frac{N_2}{F_2} = -\frac{12{,}06}{2} = -6{,}03 \text{ kN/cm}^2$$

Phương án 2

Để giải bài toán này thuận lợi nhất là dùng công thức (2.18) phương pháp lực đối với hệ chịu chuyển vị cưỡng bức với phương trình chính tắc như sau :

$$\delta_{11} N_1 + \Delta^o_{1\Delta} = 0 \qquad (a)$$

N_1 là lực dọc kéo trong thanh 1 do chế tạo không chính xác gây ra.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{N}_i l_i}{E_i F_i} = \frac{\overline{N}_1 l_1}{E F_1} + 2\,\frac{\overline{N}_2 l_2}{E F_2} = \frac{1 \,.\, l_1}{EF_1} + 2\,\frac{1 \,.\, l_2}{4E_2F_2\cos\alpha}$$

$$= \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_2\cos^2\alpha} = \frac{2k_2\cos^2\alpha + k_1}{2k_1\,k_2\cos^2\alpha}\,.$$

$$\Delta^o_{1\Delta} = -\,\Delta$$

Từ (a) suy ra :

$$N_1 = -\frac{\Delta^o_{1\Delta}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta\, 2k_1k_2\cos^2\alpha}{2k_2\cos^2\alpha + k_1} = \frac{\Delta_2\, k_2\cos^2\alpha}{1 + \dfrac{2k_2}{k_1}\cos^2\alpha}$$

$$N_2 = N_3 = -\frac{N_1}{2\cos\alpha}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2\,\Delta\, k_2\cos^2\alpha}{F_1\left(1 + \dfrac{2k_2}{k_1}\cos^2\alpha\right)}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\,\frac{\Delta\, k_2\cos\alpha}{F_2\left(1 + \dfrac{2\,k_2}{k_1}\cos^2\alpha\right)}$$

BÀI 29

Tính ứng suất trong các thanh 1 và 2 xảy ra trong quá trình lắp ghép với $\Delta_0 < 0$ là sai số của đoạn chế tạo không chính xác. Đối với các thanh, lấy $E = 2\,.\,10^7$ N/cm^2, $F_1 = F_2 = F$.

GIẢI

Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng hai phương pháp dưới đây :

- Phương pháp tính toán theo sơ đồ biến dạng ;
- Phương pháp lực đối với hệ chịu chuyển vị cưỡng bức.

1/ Phương pháp tính theo sơ đồ biến dạng (hình 2.29c).

Đây là bài toán kéo (nén) siêu tĩnh.

Phương trình cân bằng :

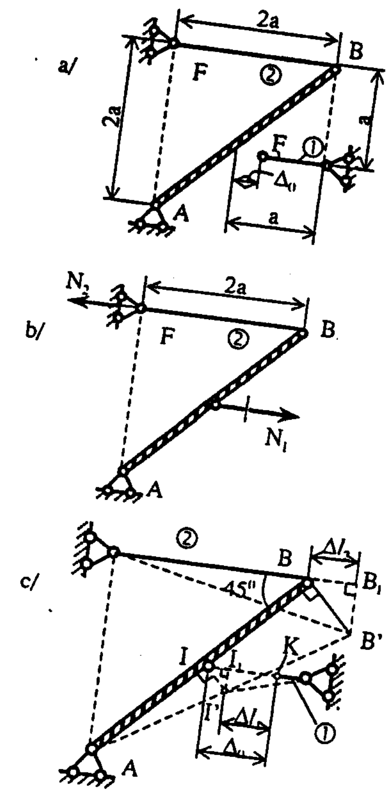
$$\sum m_A = 0 \text{ (hình 2.29b)} \Rightarrow 2aN_2 - aN_1 = 0 \qquad (1)$$

Thiết lập điều kiện biến dạng (trạng thái biến dạng) của hệ như hình 2.29c.

$$\text{Ta có : } II_1 = \frac{II'}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{BB'}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\,\Delta l_2 = \frac{\Delta l_2}{2}$$

$$KI_1 = \Delta l_1$$

$$\text{Từ hình vẽ ta có : } II_1 + I_1K = \Delta_0 \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{2} + \Delta l_1 = \Delta_0$$



Hình 2.29.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{N_2 . 2a}{EF} + \frac{N_1 . a}{EF} = \Delta_0 \qquad (2)$$

Giải hệ phương trình (1), (2) ta đi đến :

$$N_1 = \frac{2EF\,\Delta_0}{3a} \quad , \quad N_2 = \frac{EF\,\Delta_0}{3a}$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{2E\Delta_0}{3a} = 3{,}33\ kN/cm^2 \ , \ \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{E\Delta_0}{3a} = 1{,}67\ kN/cm^2$$

2/ Phương pháp lực

Bài toán này sẽ được giải quyết một cách nhanh chóng và nhẹ nhàng khi ta dùng phương pháp lực với ẩn số thừa là N_1 (hình 2.29b). Phương trình chính tắc mô tả chuyển vị tương đối của mặt cắt vuông góc với thanh "1" là :

$$\delta_{11} N_1 + \Delta_1{}^0{}_{\Delta_0} = 0$$

Trong đó $\Delta^0{}_{1\Delta_0}$ là chuyển vị thẳng dọc trục thanh 1 do chuyển vị cưỡng bức Δ_0 gây ra trong hệ cơ bản và được xác định bởi :

$$\Delta_{1\Delta_0} = -\Delta_0$$

$$\text{Còn } \delta_{11} = \frac{\overline{N}_1 a}{E_1F_1} + \frac{\overline{N}_2\, 2a}{E_2F_2} = \frac{1}{EF}\left(a + 0{,}5\,a\right) = \frac{1{,}5\,a}{EF}$$

Suy ra :

$$N_1 = -\frac{\Delta_{1\Delta_0}}{\delta_{11}} = \frac{\Delta_0 . EF}{1{,}5\,a}$$

Từ (1) ta rút ra :

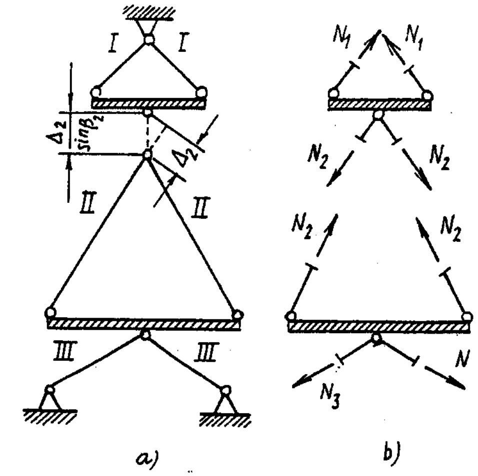
$$N_2 = \frac{\Delta_0 . EF}{3\,a}$$

Do đó :

$$\sigma_1 = 3{,}33\ kN/cm^2 \ ; \ \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = 1{,}67\ kN/cm^2$$

BÀI 30

Một hệ siêu tĩnh có sơ đồ kết cấu và số liệu vào như hình 2.30a. Do chế tạo không chính xác cho nên thanh 2 bị ngắn hơn so với thiết kế một đoạn $\Delta_2 = 0{,}12$ cm (hình 2.30a). Hãy tính ứng suất trong các thanh do sự chế tạo không chính xác này ?



Hình 2.30.

GIẢI

Các phương trình cân bằng (hình 2.30b), cho ta :

$$\begin{aligned} 2N_1\sin\beta_1 &= 2N_2\sin\beta_2\ ; \\ 2N_2\sin\beta_2 &= 2N_3\sin\beta_3 \end{aligned} \qquad (a)$$

Phương trình liên tục của biến dạng trong trường hợp này như sau :

$$\frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} + \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} + \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{\Delta_2}{\sin\beta_2}$$

hay

$$\frac{\sigma_1 a}{\sin^2\beta_1} + \frac{\sigma_2 b}{\sin^2\beta_2} + \frac{\sigma_3 c}{\sin^2\beta_3} = E\,\frac{\Delta_2}{\sin^2\beta_2} \qquad (b)$$

Thay các giá trị bằng số vào (a) và (b) ta có hệ phương trình thu gọn sau đây :

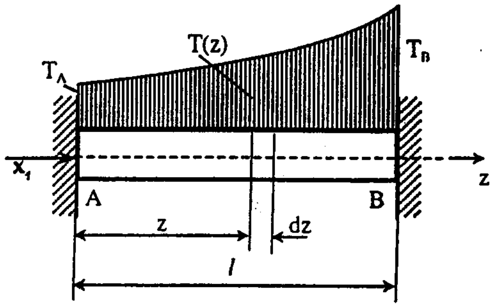
$$6\sqrt{2} . \sigma_1 = 7\sqrt{2}\,\sigma_2\ ;$$
$$7\sqrt{3} . \sigma_2 = 8\,\sigma_3\ ;$$
$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 40$$

Suy ra

$$\sigma_1 \approx 8{,}56\ kN/cm^2 \ , \ \sigma_2 = 6{,}2\ kN/cm^2 \ , \ \sigma_3 = 9{,}39\ kN/cm^2$$

BÀI 31

Thanh AB (hình 2.31a) có chiều dài l, diện tích mặt cắt ngang F, môđun đàn hồi E, hệ số dãn nở nhiệt α. Thanh được kẹp chặt giữa hai vách cứng và được nung nóng theo quy luật $T(z) = T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} Z^n$, trong đó T_A, T_B là nhiệt độ đạt được ở đầu A và B. Hãy xác định ứng suất nhiệt trong thanh theo n = 0,1,2, 3...,n. Cho biết l = 80 cm, F = 20 cm^2; E = 2 . 10^4 kN/cm^2, α = 125 . 10^{-7}, T_A = 10°C; T_B = 55°C.



Hình 2.31.

GIẢI

Gọi Δl_T là độ dãn dài của thanh AB do nung nóng khi không có ngàm A, B và Δl_N là độ dãn của thanh AB khi thanh chịu phản lực X_1, theo điều kiện biên ta có :

$$\Delta l = \Delta l_N + \Delta l_T = -\frac{X_1 l}{EF} + \int_0^l \alpha T(z)\,dz = -\frac{X_1 l}{EF} + \int_0^l \alpha\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{l^n} z^n\right)dz$$

$$= -\frac{X_1 l}{EF} + \alpha l\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right) = 0$$

Từ đây rút ra :

$$X_1 = \alpha EF\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right)$$

Và ứng suất :

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{X_1}{F} = -\alpha E\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right) \qquad \text{(a)}$$

Khi n = 0 thanh được nung nóng đều dọc theo trục thanh $\Delta T = T_B$:

$$X_{01} = \alpha EF\,T_B \quad \text{và} \quad \sigma_0 = -\alpha E\,T_B \qquad \text{(b)}$$

Khi n = 1, T (z) là hàm bậc nhất :

$$X_{11} = \alpha EF\left(\frac{T_A + T_B}{2}\right) = \alpha EF\,T_{tb} \qquad \text{(c)}$$

$$\sigma_1 = -\alpha E\,T_{tb}$$

Khi n = 2 thanh được nung nóng dọc theo thanh theo quy luật parabol bậc hai.

$$X_{21} = \alpha EF\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{3}\right) \ ; \ \sigma_2 = -\alpha E\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{3}\right) \qquad \text{(d)}$$

Với các số liệu vào của đề bài, ta có :

n = 0

$$N_{01} = -X_{01} = -125 . 10^{-7} . 2 . 10^4 . 20 . 55 = -275 \text{ kN}$$

$$\sigma_0 = \frac{N_{01}}{F} = -\frac{275}{20} = -13{,}75 \text{ kN/cm}^2.$$

n = 1

$$N_{11} = -X_{11} = -125 . 10^{-7} . 2 . 10^4 . 20\left(\frac{10+55}{2}\right) = -162{,}5 \text{ kN}$$

$$\sigma_1 = -\frac{N_{11}}{F} = -125 . 10^{-7} . 2 . 10^4 \cdot \frac{(10+55)}{2} = -8{,}125 \text{ kN/cm}^2$$

n = 2

$$N_{21} = -X_{21} = -125 . 10^{-7} . 2 . 10^4 . 20 . \left(10 + \frac{55-10}{3}\right) = -125 \text{ kN}$$

$$\sigma_2 = -\frac{125}{20} = -6{,}25 \text{ kN/cm}^2.$$

Bạn đọc có thể nhận được kết quả (a) theo phương án thuận tiện hơn khi sử dụng phương trình chính tắc của phương pháp lực. Cụ thể là :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1t}^0 = 0$$

trong đó :

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{N}_1 \overline{N}_1 dz}{EF} \quad \text{và} \quad \Delta_{1t}^0 = \int_0^l \overline{N}_1 . \alpha T(z)\,dz$$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EF} \ ; \ \Delta_{1t}^0 = -\alpha l\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right)$$

Do đó, phản lực "thừa" X_1 cần xác định là :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1t}^0}{\delta_{11}} = \alpha EF\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right)$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = -\frac{X_1}{F} = -\alpha E\left(T_A + \frac{T_B - T_A}{n+1}\right)$$

Đây là kết quả đã nhận được ở trên.

BÀI 32

Một thanh mặt cắt ngang thay đổi chịu lực như hình 2.32a. Hãy kiểm tra bền và cứng cho thanh. Biết $[\sigma] = 12\ kN/cm^2$; $[u] = 0{,}1$ cm; $P = 450$ kN.

GIẢI

Chuyển vị và nội lực theo phương pháp vạn năng dạng ma trận có dạng :

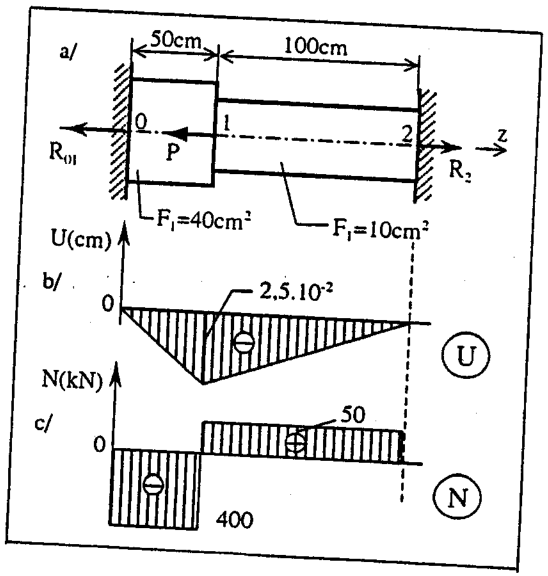
$$\vec{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} U_1 \\ N_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z/EF_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} \qquad (a)$$

$$\vec{S}_2(z) = \left[B_2\right]\left[B_1^*\right]\Delta S_{01} + \left[B_2\right]\Delta S_{02}$$

$$S_2^*(150) = \left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\Delta S_{01} + \left[B_2^*\right]\Delta S_{02} =$$

$$= \begin{Bmatrix} U_2^* \\ N_2^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{100}{10\,E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{50}{40\,E} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{01} \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 100/10\,E \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 450 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$



Hình 2.32.

Giải hệ hai phương trình này ta có :

$R_{01} = -400$ kN (ngược chiều hình 2.32a).

$R_2 = 50$ kN.

Thay $R_{01} = -400$ kN vào $\vec{S}_1(z)$ và $\vec{S}_2(z)$ ta có các phương trình của U(z), N(z) trong các đoạn 1 và 2. Đồ thị của chúng cho trên hình 2.32b, c.

$$\max\left|\sigma\right| = \frac{400}{40} < [\sigma] = 12\ kN/cm^2\ ;$$

$$\max\left|u\right| = 2{,}5\,.\,10^{-2}\,cm < \left[u\right] = 0{,}1\,cm$$

Vậy thanh làm việc an toàn theo cả hai điều kiện bền và cứng.

BÀI 33

Một thanh chịu lực như hình 2.33.

Khe hở giữa đầu dưới của thanh và nền cứng là Δ. Hãy tính chuyển vị δ của điểm đặt lực P khi $P \geq \dfrac{EF\Delta}{l}$, thế năng biến dạng đàn hồi trong thanh và vẽ đồ thị quan hệ $P = f(\delta)$?

GIẢI

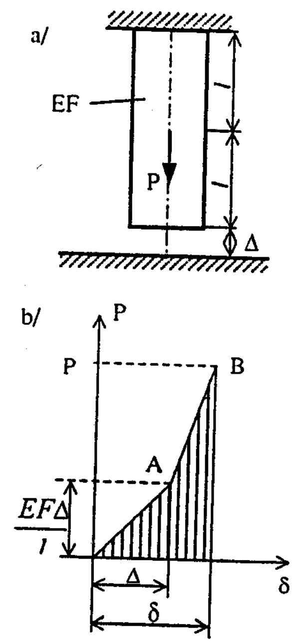
Khi $P \geq \dfrac{EF\Delta}{l}$ thì khe hở đã được đóng lại. Phản lực N đặt vào đầu dưới thanh được tìm từ điều kiện :

$$\frac{(P - N)l}{EF} - \frac{Nl}{EF} = \Delta$$

Do đó, nội lực trong phần dưới và phần trên thanh sẽ là :

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{P}{2} - \Delta EF/2l \\ P - N &= \frac{P}{2} + \frac{\Delta EF}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

Chuyển vị δ của điểm đặt lực P có biểu thức :



Hình 2.33.

$$\delta = \frac{Pl}{2EF} + \frac{\Delta}{2}$$

Thế năng tích luỹ trong hai đoạn thanh sẽ là tổng thế năng biến dạng sau đây :

$$U = \frac{(P - N)^2 l}{2EF} + \frac{N^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{4EF} + \frac{EF\Delta^2}{4l}$$

Đồ thị của quan hệ $P = f(\delta)$ (hình 2.33b).

Đoạn OA tương ứng khi $P \leq \frac{EF\Delta}{l}$ còn đoạn AB tương ứng khi $P \geq \frac{EF\Delta}{l}$. Diện tích phần gạch sọc là công của lực P và có giá trị là U.

BÀI 34

Cho một thanh chịu lực như trên hình 2.34a. Bằng phương pháp vạn năng. Hãy viết biểu thức, vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực, tính ứng suất và chuyển vị lớn nhất. Biết $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm², $F = 10^{-3}$ m².

GIẢI

Trong trường hợp bài toán, thanh được chia làm 3 đoạn, biểu thức của U (z) và N (z) được viết dưới dạng tổng (2.10), lần lượt là :

$$EFU(z) = R_{01} \cdot z \,\Big|_{1} - 100(z-1)\,\Big|_{2} + \frac{100(z-2)^2}{2}\,\Big|_{3}$$

$$N(z) = R_{01}\,\Big|_{1} - 100\,\Big|_{2} + 100(z-2)$$

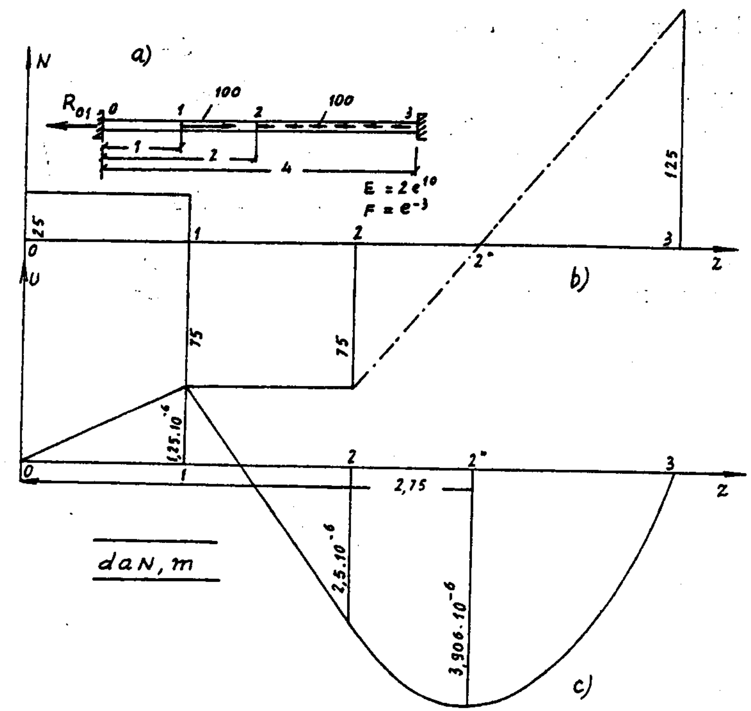
R_{01} được xác định từ điều kiện $U(z = 4\text{ m}) = 0$. Cụ thể là :

$$4R_{01} - 100 \cdot 3 + 100 \cdot \frac{2^2}{2} = 0 \Rightarrow R_{01} = 25 \text{ daN}$$

Thay R_{01} vào N (z), U (z) và vẽ biểu đồ của chúng như trên hình 2.34b, c.

Ứng suất và chuyển vị lớn nhất lần lượt là :

$$\sigma_{max} = \frac{125}{10^{-3}} = 125 \cdot 10^3 \text{ daN/m}^2 \;;\; \max U(z = 2{,}75) = 3{,}91 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$



Hình 2.34

BÀI 35

Một kết cấu gồm thanh AB tuyệt đối cứng, các thanh (1) và (2) hình tròn cùng vật liệu. Do chế tạo không chính xác, thanh (2) ngắn đi một đoạn nhỏ δ. Đường kính thanh (2) bằng d và gấp hai lần đường kính thanh (1). Sau khi nối thanh (2) vào AB, hệ còn chịu lực Q (hình 2.35a).

Hãy :

1. Xác định nội lực và ứng suất trong các thanh.

2. Xác định giá trị δ lớn nhất để các thanh thỏa mãn điều kiện bền $[\sigma]$, E, a và Q cho trước.

GIẢI

Phương án đơn giản nhất để giải bài toán này là sử dụng phương pháp lực. Theo phương pháp này hệ tương đương được chọn như hình 2.35b với N_{2T} là lực dọc tỉnh cần tìm trước tiên, thỏa mãn phương trình :

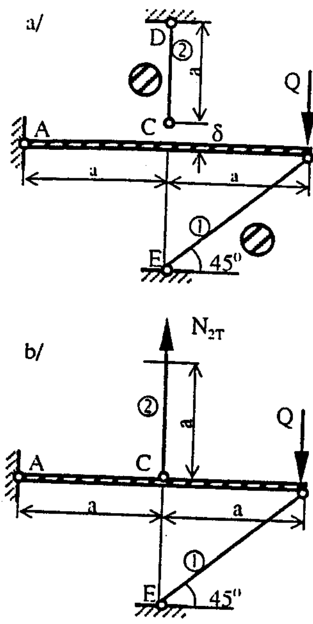
$$\delta_{22} N_{2T} + \Delta_{2Q}^{0} + \Delta_{2\delta}^{0} = 0 \quad (a)$$

Tính hệ số và số hạng tự do :

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\overline{N}_i^2 l_i}{E_i F_i} = \frac{\overline{N}_1^2 l_1}{EF_1} + \frac{\overline{N}_2^2 l_2}{EF_2} =$$

$$= \frac{1^2 . a}{EF_2} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 . a\sqrt{2}}{E . F_1} =$$

$$= \frac{a}{4EF_1} + \frac{a\sqrt{2}}{2EF_1} = \frac{a(1 + 2\sqrt{2})}{4EF_1};$$



Hình 2.35.

$$\Delta_{2Q}^{0} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\overline{N}_i N_{Pi}^{0} l_i}{E_i F_i} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) . \left(-Q\sqrt{2}\right) a\sqrt{2}}{EF_1} + 0 = -\frac{2aQ}{\sqrt{2}\, EF_1};$$

$$\Delta_{2\delta}^{0} = -\delta$$

Từ phương trình (a) suy ra dạng cụ thể của N_2 :

$$N_2 = -\frac{\left(\Delta_{2Q}^{0} + \Delta_{2\delta}^{0}\right)}{\delta_{22}} = \frac{4\left(2Qa + \sqrt{2}\, EF_1\delta\right)}{a\left(\sqrt{2} + 4\right)} > 0$$

N_1 được suy ra từ điều kiện cân bằng :

$$\sum m_A(\vec{P}) = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{N_1 - 2Q}{\sqrt{2}} = \frac{4\left(2Qa + \sqrt{2}\, EF_1\delta\right) - 2aQ\left(\sqrt{2} + 4\right)}{\sqrt{2}\, a\left(\sqrt{2} + 4\right)} < N_2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{4\left(2Qa + \sqrt{2}\, E\delta F_1\right) - aQ\left(2\sqrt{2} + 8\right)}{a\left(2 + 4\sqrt{2}\right) F_1} < [\sigma] \quad (a)$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{4\left(2Qa + \sqrt{2} . E\delta F_1\right)}{4F_1 a\left(\sqrt{2} + 4\right)} < [\sigma] \quad (b)$$

Từ hai giá trị δ_a , δ_b rút ra tương ứng từ (a) và (b) ta phải chọn giá trị δ nhỏ nhất trong hai giá trị này. Nghĩa là

$$\delta = \min\left(\delta_a , \delta_b\right)$$

BÀI 36

Một thanh chịu kéo nén siêu tĩnh như hình 2.36a. Hãy vẽ biểu đồ chuyển vị dọc trục U(z) và lực dọc N(z) và kiểm tra điều kiện cứng cho thanh. Biết $[\varepsilon] = 2 . 10^{-3}$, $[U] = 0{,}1$ cm.

GIẢI

Biểu thức của U (z) và N (z) theo (2.10) có dạng:

$$U(z) = R_{01} \frac{z}{EF}\Bigg|_{1} - 100\frac{(z - 100)}{EF} + 100\frac{(z - 100)^2}{2EF} - 50\frac{(z - 100)^4}{4!\, EF}\Bigg|_{2}$$

$$N(z) = R_{01}\Bigg|_{1} - 100 + 100(z - 100) - 50\frac{(z - 100)^3}{6}\Bigg|_{2}$$

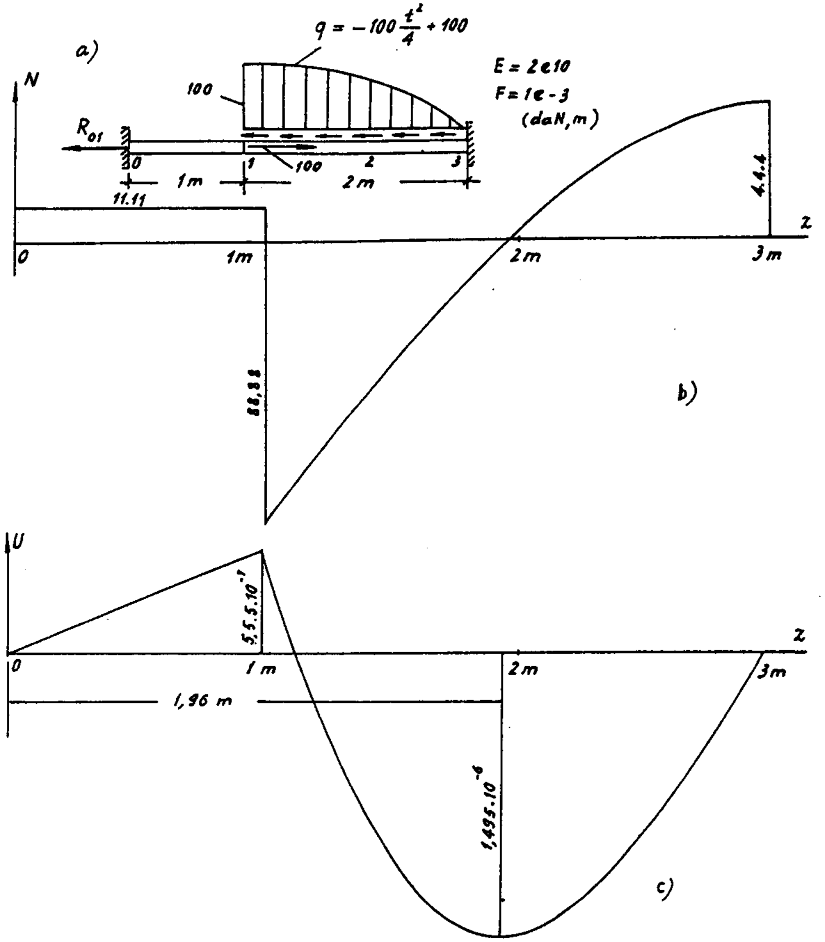
R_{01} được xác định từ phương trình vạn năng này. Cụ thể là :

tại z = 300 cm, U (z = 300) = 0. Suy ra : R_{01} = 11,11 daN.

Thay R_{01} = 11,11 daN vào các biểu thức của U(z) và N (z) ta được các biểu thức này dưới dạng tường minh. Biểu đồ của N và U, được cho trên hình 2.36b, c. Từ các biểu đồ này ta thấy :

Tại z = 100 cm

$$|\varepsilon_{max}| = \left|\frac{N_{max}}{EF}\right| = \frac{88{,}80}{2 . 10^{10} . 10^{-3}} = 0{,}4444 . 10^{-5} \leq [\varepsilon] = 2 . 10^{-3}$$



Hình 2.36.

tại z = 196 cm

$$\left|U_{max}\right| = 1{,}495\,.\,10^{-6}\ \text{m} = 1{,}495\,.\,10^{-4}\ \text{cm} < \left[U\right] = 0{,}1\ \text{cm}$$

Điều kiện cứng được thỏa mãn.

BÀI 37

Một thanh chịu lực dọc trục có quy luật $q(z) = q_0 + \dfrac{q_1 - q_0}{l^n} z^n$ như hình 2.37a.

Cho biết : l = 80 cm, F = 20 cm², E = 2 . 10⁴ kN/cm², q_0 = 0,1 kN/cm, q_1 = 1 kN/cm.

Hãy vẽ biểu đồ U (z) và N (z) với n = 0, 1, 2, 3.

GIẢI

1/ Trường hợp n = 0

$$q(z) = q_1 = 1\ \text{kN/cm}$$

$$EFU(z) = R_{01}z + \frac{1\,.\,z^2}{2}$$

$$N(z) = R_{01} + 1\,.\,z$$

Tại z = l, U (l) = 0 ⇒ R_{01} = −40 kN

Biểu đồ U (z) và N (z) được cho trên hình 2.37b.

2/ Trường hợp n = 1

$$q(z) = 0{,}1 + \frac{0{,}9Z}{80}\ ;\ \Delta q_{01} = 0{,}1\ ;$$

$$\Delta q'_{01} = 0{,}01125$$

$$EFU(z) = R_{01}z + 0{,}1\,\frac{z^2}{2} + 0{,}01125\,\frac{z^3}{3\,!}$$

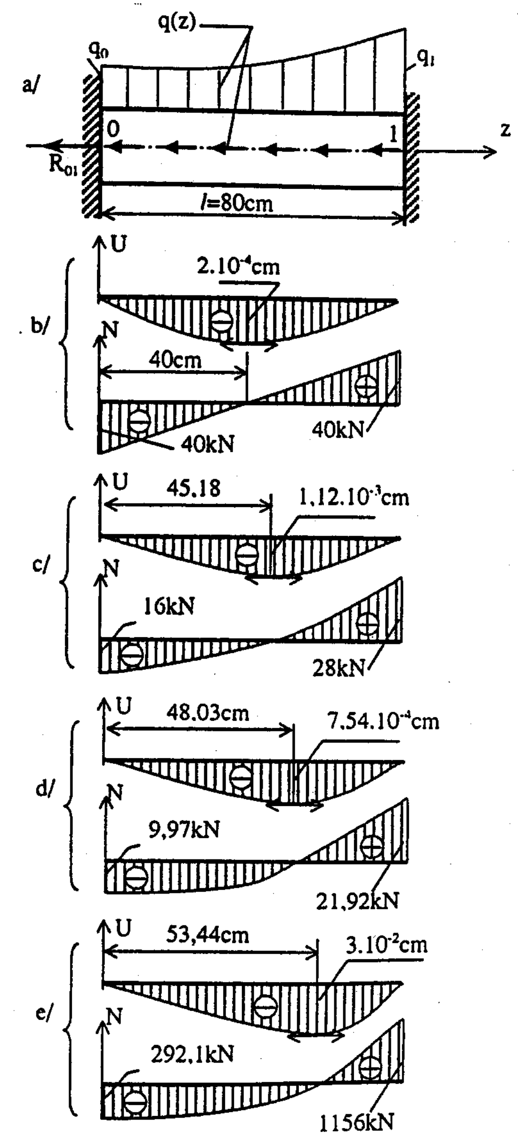
$$N(z) = R_{01} + 0{,}1\,z + 0{,}01125\,\frac{z^2}{2}$$

Tại z = l = 80 cm, U (l) = 0. Cụ thể là :

$$R_{01}\,.\,l + 0{,}1\,\frac{l^2}{2} + 0{,}01125\,\frac{l^3}{6} = 0$$

$$\Rightarrow R_{01} = -16\ \text{kN}.$$

Thay R_{01} = −16 kN vào U(z) và N (z) và vẽ các biểu đồ U (z) và N (z) như hình 2.37c.



Hình 2.37.

3/ Trường hợp n = 2

$$q = 0{,}1 + \frac{0{,}9\,z^2}{80^2} \quad ; \quad \Delta q_{01} = 0{,}1 \ ; \ \Delta q'_{01} = \frac{1{,}8\,.\,0}{80^2} = 0$$

$$\Delta q''_{01} = \frac{1{,}8}{80^2} = 0{,}00028.$$

$$EFU(z) = R_{01}\,.\,z + 0{,}1\,\frac{z^2}{2} + 0{,}00028\,\frac{z^4}{4\,!}$$

$$N(z) = R_{01} + 0{,}1\,z + 0{,}00028\,\frac{z^3}{3\,!}$$

Tại z = 80 cm, U (80 cm) = 0. Cụ thể là :

$$R_{01}\,.\,80 + 0{,}1\cdot\frac{80^2}{2} + 0{,}00028\,\frac{80^4}{4\,!} = 0 \Rightarrow R_{01} = -\,9{,}973 \text{ kN}$$

Theo các hàm của U và N với $R_{01} = -9{,}973$ kN và các số liệu đề bài, biểu đồ (U) và (N) được cho trên hình 2.37d.

4/ Trường hợp n = 3

Các bước tính toán trong trường hợp này hoàn toàn tương tự các bước trước. Với các số liệu của đề bài và n = 3, hàm chuyển vị dọc trục U (z) và hàm lực dọc N (z) dưới dạng tường minh là:

$$U(z) = 1{,}758\,.\,10^{-11}\,z^5 + 1{,}25\,.\,10^{-7}\,.\,z^2 - 7{,}302\,.\,10^{-4}\,.\,z$$

$$N(z) = 3{,}517\,.\,10^{-5}\,.\,z^4 + 0{,}1z - 292{,}1$$

$$0 \leq z \leq 80 \text{ cm}$$

Biểu đồ $\big(U(z)\big)$ và $\big(N(z)\big)$ được cho trên hình 2.37e.

BÀI 38

Một thanh siêu tĩnh mặt cắt thay đổi chịu lực như hình 2.38a,b. Hãy tính chuyển vị và lực dọc lớn nhất cho trong hai trường hợp có cấu tạo sau đây :

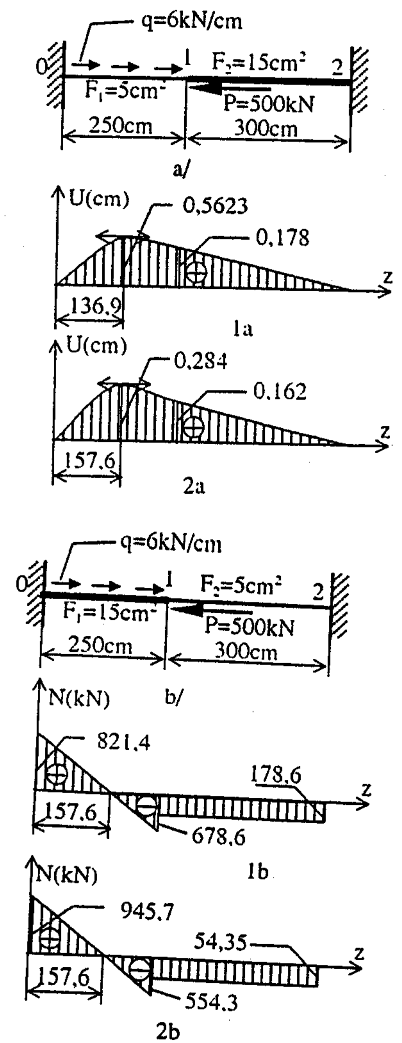
1) Đoạn 0−1 có $F_1 = 5$ cm²
   đoạn 1−2 có $F_2 = 15$ cm² (hình 2.38a)
2) Đoạn 0−1 có $F_1 = 15$ cm²
   đoạn 1−2 có $F_2 = 5$ cm² (hình 2.38b).

Biết : $E = 2\,.\,10^4$ kN/cm².

GIẢI

Trường hợp 1

Hàm chuyển vị dọc trục U(z) và lực dọc N(z) được viết bằng phương pháp vạn năng (xem tham khảo dạng ma trận bài 32):



Hình 2.38.

$$U_1(z) = -3 \cdot 10^{-5} \cdot z^2 + 8{,}214 \cdot 10^{-3} z \ , \quad 0 \leqslant z \leqslant 250 \text{ cm}$$

$$U_2(z) = -5{,}952 \cdot 10^{-4} z + 17{,}86 \ ; \quad 250 \leqslant z \leqslant 550 \text{ cm}$$

$$N_1(z) = -6z + 821{,}4$$

$$N_2(z) = -178{,}6 \text{ kN}$$

Biểu đồ (U), (N) được cho trên hình 2.38–1a, 1b).

Trường hợp 2

$$U_1(z) = -10^{-5} \cdot z^2 + 3{,}152 \cdot 10^{-3} \cdot z$$

$$U_2(z) = -5{,}435 \cdot 10^{-4} z + 0{,}16$$

$$N_1(z) = -6z + 945{,}7$$

$$N_2 = -54{,}35$$

Biểu đồ U và N được mô tả trên hình 2.38–2a, 2b.

Từ các biểu đồ cho thấy :

$$U_{1max} = 0{,}5623 \text{ cm} \ , \ U_{2max} = 0{,}254 \text{ cm} \ ;$$

$$N_{1max} = 821{,}4 \text{ kN} \ , \ N_{2max} = 945{,}7 \text{ kN}.$$

BÀI 39

Một vành tròn bằng thép được ghép có độ dôi với một vành nhôm (hình 2.39a). Thí nghiệm cho thấy trong một vài trường hợp sau khi nung nóng hệ đã ghép đến một nhiệt độ xác định rồi làm lạnh hệ này thì vòng nhôm bên trong tách khỏi vành thép ngoài.

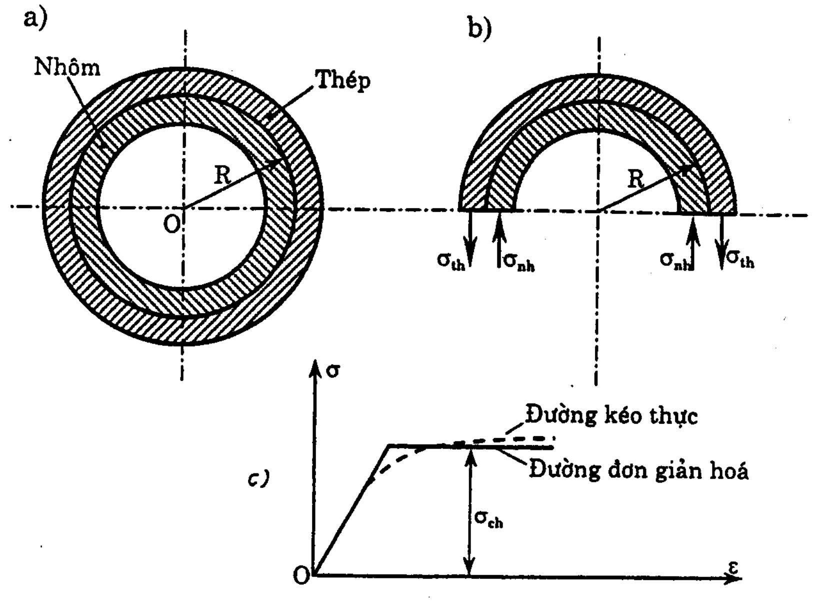
Hãy cho biết trong điều kiện nào hiện tượng này có thể xảy ra. Những số liệu như thế nào cần có để có được một sự đánh giá bằng số của hiện tượng nói trên ?

GIẢI

Hiện tượng nêu ra trong đề bài là có thể, nếu khi nung nóng trong vành nhôm sẽ phát sinh biến dạng dẻo đủ lớn. Nếu ký hiệu Δ là hiệu giữa bán kính ngoài của vành nhôm và bán kính trong của vành thép trước khi ghép thì ta có :

$$\varepsilon_{nh} + \varepsilon_{th} = \frac{\Delta}{R} \qquad \text{(a)}$$

ε_{nh} và ε_{th} lần lượt là độ co và độ dãn tương đối hướng kính của vành nhôm và thép.



Hình 2.39.

Trong giới hạn đàn hồi khi có thêm sự nung nóng th' :

$$\varepsilon_{nh} = \frac{\sigma_{nh}}{E_{nh}} - \alpha_{nh} \cdot T \ , \quad \varepsilon_{th} = \frac{\sigma_{th}}{E_{th}} + \alpha_{th} \cdot T \ , \qquad \text{(b)}$$

Trong đó :

σ_{nh}, σ_{th} là ứng suất trong vành nhôm và thép ;

α_{nh}, α_{th} là hệ số dãn nở dài tương ứng của nhôm và thép.

Mặt khác với chiều dày h như nhau thì điều kiện cân bằng (hình 2.39b) cho ta : $\sigma_{th} = \sigma_{nh} = \sigma$ và phương trình (a) được viết lại khi chú ý đến hệ (b) như sau :

$$\sigma = \frac{\dfrac{\Delta}{R} + T\left(\alpha_{nh} - \alpha_{th}\right)}{\dfrac{1}{E_{nh}} + \dfrac{1}{E_{th}}} \qquad \text{(c)}$$

Khi thừa nhận biểu đồ σ (ε) kéo hoặc nén của nhôm là đàn hồi dẻo lý tưởng (hình 2.39c) thì giới hạn chảy của nhôm σ_{nh}^{ch} thấp hơn giới chảy của thép. Do ứng suất trong cả hai vành thép và nhôm là như nhau như đã chỉ ra ở trên, cho nên khi vành nhôm đã chảy dẻo thì vành thép vẫn đàn hồi. Ứng suất ban đầu khi ghép căng σ_0 bằng :

$$\sigma_0 = \frac{\Delta/R}{\dfrac{1}{E_{nh}} + \dfrac{1}{E_{th}}} \qquad (d)$$

Thay (d) vào (c) ta đi đến

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\dfrac{1}{E_{nh}} + \dfrac{1}{E_{th}}} \qquad (e)$$

Điều này cho thấy σ không thể lớn hơn σ_{nh}^{ch} . Nếu nhiệt độ nung nóng

$$T > \left(\sigma_{nh}^{ch} - \sigma_o\right)\left(\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{ch}}\right)\frac{1}{\alpha_{nh} - \alpha_{th}}$$

thì trong vành nhôm biến dạng dẻo xuất hiện và $\sigma = \sigma_{nh}^{ch}$.

Bị làm lạnh các vành sẽ biến dạng đàn hồi. Khi đó ứng suất dư sẽ là tổng đại số σ_{nh}^{ch} và ứng suất do làm lạnh rút ra từ (e) khi T đổi dấu. Nghĩa là :

$$\sigma_{du} = \sigma_{nh}^{ch} - \frac{T(\alpha_{nh} - \alpha_{th})}{\dfrac{1}{E_{nh}} + \dfrac{1}{E_{th}}} \qquad (g)$$

Khi mà $\sigma_{du} < 0$ thì vành nhôm bật ra khỏi vành thép. Do đó, điều kiện bật này sẽ là :

$$T\left(\alpha_{nh} - \alpha_{th}\right) > \sigma_{nh}^{ch}\left(\frac{1}{E_{nh}} + \frac{1}{E_{th}}\right). \qquad (h)$$

Có thể có trường hợp biến dạng dẻo trong vành nhôm xuất hiện ngay trong khi lắp ghép trước khi nung thì bản chất hiện tượng vật lý được mô tả bởi quan hệ (g) và (h) vẫn được bảo toàn bất kể σ_{nh}^{ch} đạt được bằng cách nào.

BÀI 40

Cho một hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của tải trọng P hình 2.40a. Hãy xác định :

a/ Lực P theo phương pháp ứng suất cho phép và phương pháp cân bằng giới hạn.

b/ Ứng suất trong các thanh của hệ theo hai phương pháp nêu trên ?

Các số liệu vào cho trước :

$E_1 = E_2 = E_3 = E = 2.10^6$ daN/cm^2; $[\sigma] = 1600$ daN/cm^2; a = 40 cm; b = 120 cm; c = 40 cm; $\beta_1 = 45^o$; $\beta_2 = 60^o$; $\beta_3 = 30^o$; $F_1 = 12$ cm^2; $F_2 = 14$ cm^2; $F_3 = 16$ cm^2.

GIẢI

1/ Theo phương pháp ứng suất cho phép

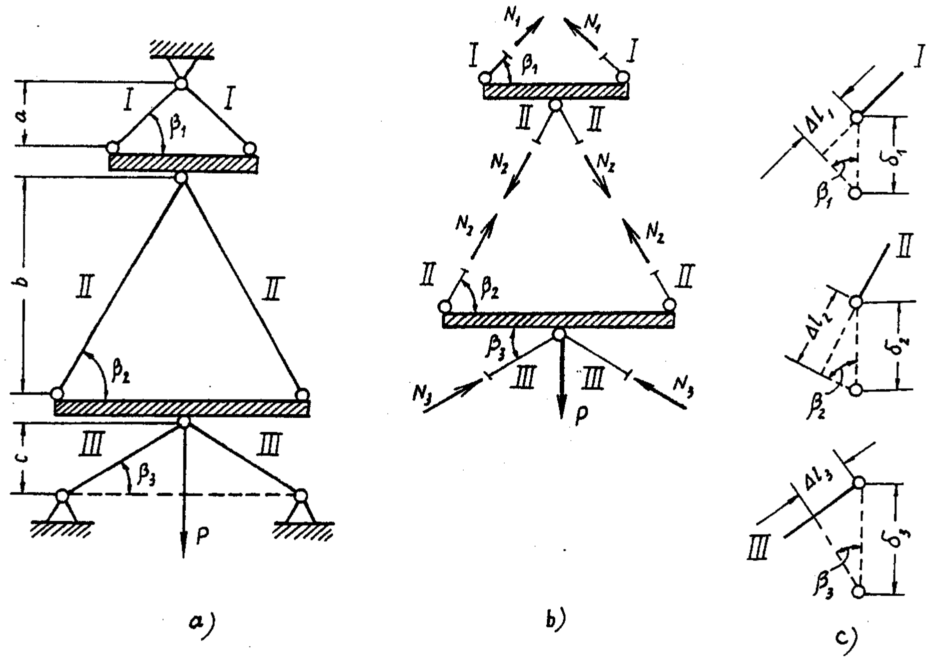
Bằng phương pháp mặt cắt như trên hình 2.40b và điều kiện cân bằng hình chiếu lên phương lực P, cho ta :

$$2N_1\sin\beta_1 = 2N_2\sin\beta_2 \ ; \ 2N_2\sin\beta_2 + 2N_3\sin\beta_3 = P \qquad (a)$$

Điều kiện tương thích của chuyển vị của điểm đặt lực P được chỉ ra trên sơ đồ biến dạng (hình 2.40c).

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta_3$$

trong đó :



Hình 2.40.

$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} = \frac{N_1 l_1}{E_1F_1\sin\beta_1} \; ; \; \delta_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} = \frac{N_2 l_2}{E_2F_2\sin\beta_2}$$

$$\delta_3 = \frac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} = \frac{N_3 l_3}{E_3F_3\sin\beta_3} \qquad (c)$$

Từ hình 2.40a ta có quan hệ hình học như sau :

$$l_1 = \frac{a}{\sin\beta_1} \; ; \; l_2 = \frac{b}{\sin\beta_2} \; ; \; l_3 = \frac{c}{\sin\beta_3} \qquad (d)$$

Thay (d) vào (c), sau đó vào (b) ta đi đến :

$$\frac{N_1 a}{E_1F_1\sin^2\beta_1} + \frac{N_2 b}{E_2F_2\sin^2\beta_2} + \frac{N_3 c}{E_3F_3\sin^2\beta_3} \qquad (e)$$

Sau khi thay các giá trị bằng số đã cho từ đề bài vào hệ phương trình cân bằng (a) và phương trình tương thích của chuyển vị (e) ta có hệ 3 phương trình xác định nội lực trong các thanh như sau :

$$\sqrt{2}\,N_1 = \sqrt{3}\,N_2 \; , \; \sqrt{3}\,N_2 + N_3 = P \; , \; 14\,N_1 + 24\,N_2 = 21\,N_3$$

Giải hệ này ta nhận được :

$$N_1 = 0{,}332\ P \; , \; N_2 = 0{,}27\ P \; ; \; N_3 = 0{,}53\ P$$

Từ các kết quả này ta có ứng suất trong các thanh :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0{,}332\,P}{12} \approx 0{,}0276\ P \; ;$$

$$\sigma_2 = \frac{0{,}27\,P}{14} \approx 0{,}0193\,P \; ; \; \sigma_3 = \frac{0{,}53\,P}{16} \approx 0{,}0331\ P.$$

Do $\sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2$, cho nên lực P cho phép theo phương pháp ứng suất cho phép được xác định từ điều kiện $0{,}0331\ P \leq [\sigma] \Rightarrow [P] \leq 483{,}4$ kN.

Với lực tác dụng $P = [P]$ ứng suất trong các thanh có giá trị :

$$\sigma_1 = 13{,}34\ \text{kN/cm}^2 \; , \; \sigma_2 = 9{,}32\ \text{kN/cm}^2 \; , \; \sigma_3 = 16\ \text{kN/cm}^2.$$

2/ Tính theo phương pháp cân bằng giới hạn theo biểu đồ Prandtl và thừa nhận $\sigma_{ch} = [\sigma]$

Theo kết quả tính ở mục 1 ta thấy σ_3 và σ_1 lớn hơn σ_2. Vì thế, hệ trở thành biến hình hình học khi trạng thái chảy đạt được ở thanh 1 và thanh 3. Phương trình cân bằng tĩnh cho ta quan hệ giữa N_1 và N_3 như sau (hình 2.40b) :

$$2N_1\sin\beta_1 + 2N_3\sin\beta_3 = P$$

Ở trạng thái này $N_1 = [\sigma]\,F_1$, $N_3 = [\sigma]\,F_3$. Do đó ngoại lực lớn nhất P_{max} tương ứng là :

$$P_{max} = 2\,.\,16\left(12\,\frac{\sqrt{2}}{2} + 16\,\frac{1}{2}\right) = 527{,}5\ \text{kN} > [P] = 483\ \text{kN}$$

Nếu chọn cùng một hệ số an toàn cho cả hai trường hợp thì lực tính toán theo khả năng chịu tải lớn hơn lực tính toán theo phương pháp ứng suất cho phép cỡ 9,1%. Cụ thể là :

$$\frac{P_{max} - [P]}{[P]}\cdot 100 = \frac{527{,}5 - 483}{483} \approx 9{,}1\%$$

BÀI 41

Một hệ siêu tĩnh có sơ đồ kết cấu và số liệu vào như trên hình 2.40a trong bài 40, với P = 0 nhưng lại chịu tác dụng của sự biến thiên nhiệt độ Δt.

Hãy xác định ứng suất nhiệt trong các thanh của hệ. Cho biết hệ số dãn nở nhiệt của vật liệu thanh là như nhau :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha = 12{,}5\,.\,10^{-6}$$

GIẢI

Phương trình cân bằng tĩnh (hình 2.41a) cho ta :

$$\left.\begin{aligned} 2N_1\sin\beta_1 &= 2N_2\sin\beta_2 \; ; \\ 2N_2\sin\beta_2 &= 2N_3\sin\beta_3 \; . \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

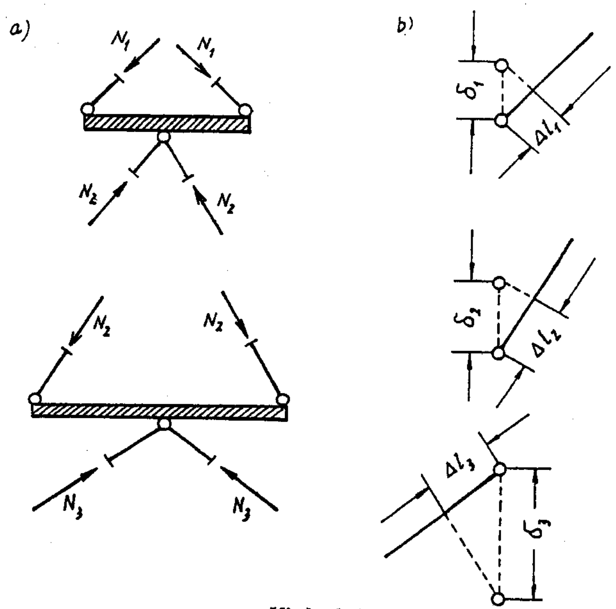
Điều kiện tương thích của chuyển vị trong trường hợp này là sự bất biến chiều cao của hệ như sau (hình 2.41b).

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad (b)$$

trong đó $\quad \delta_1 = \dfrac{\Delta l_1}{\sin\beta_1} \; , \; \delta_2 = \dfrac{\Delta l_2}{\sin\beta_2} \; , \; \delta_3 = \dfrac{\Delta l_3}{\sin\beta_3} \; ,$

$$\Delta l_1 = l_1\alpha_1\Delta t - \frac{N_1 l_1}{E_1F_1} \; , \; \Delta l_2 = l_2\alpha_2\Delta t - \frac{N_2 l_2}{E_2F_2}$$

$$\Delta l_3 = l_3\alpha_3\Delta t - \frac{N_3 l_3}{E_3F_3} \; .$$



Hình 2.41.

Với các giá trị của δ_i, điều kiện (b) có dạng cụ thể :

$$\frac{a}{\sin^2\beta_1}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_1}{EF_1}\right) + \frac{b}{\sin^2\beta_2}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_2}{EF_2}\right) +$$

$$+ \frac{c}{\sin^2\beta_3}\left(\alpha\Delta t - \frac{N_3}{EF_3}\right) = 0 \qquad (c)$$

Thay $N_1 = \sigma_1F_1$, $N_2 = \sigma_2F_2$, $N_3 = \sigma_3F_3$ và các giá trị số đã cho ta dẫn các hệ (a) và (c) về hệ phương trình với các ẩn là σ_1, σ_2, σ_3 cần tìm như sau :

$$6\sigma_1 . \sqrt{2} = 7\sigma_2\sqrt{3}$$

$$7\sigma_2 . \sqrt{3} = 8\sigma_3$$

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 2\sigma_3 = 50$$

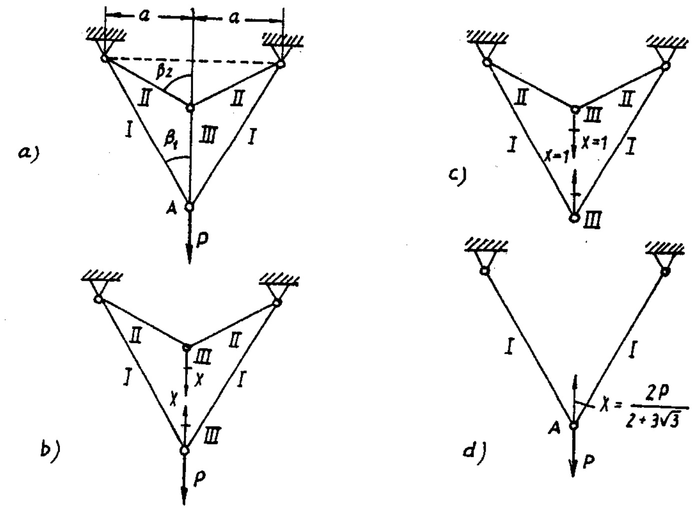
Nghiệm của hệ này là :

$\sigma_1 \approx 11{,}05$ kN/cm^2; $\sigma_2 = 7{,}74$ kN/cm^2; $\sigma_3 = 11{,}72$ kN/cm^2.

BÀI 42

Một hệ treo liên kết khớp, chịu lực như hình 2.42a. Hãy tính ứng suất trong các thanh và chuyển vị thẳng đứng tại A.

Biết rằng : P = 8000 daN, a = 1 m, $\beta_1 = 30^o$; $\beta_2 = 60^o$; $E_I = E_{II} = E_{III} = E = 2 . 10^6$ daN/cm^2, $F_I = F_{II} = F_{III} = F = 2$ cm^2.



Hình 2.42.

GIẢI

1) Phương án 1

Để tính hệ siêu tĩnh này ta có thể sử dụng nguyên lý công cực tiểu dưới dạng :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{\overline{N}_i N_{Pi}}{E_i F_i} dz = 0 \qquad (a)$$

Theo đề bài công thức này có dạng đơn giản:

$$\sum_{i=1}^{5} \overline{N}_i N_{Pi} l_i = 0 \qquad (b)$$

Hệ tương đương ta chọn như hình 2.42b. Điều kiện cân bằng tĩnh của hệ này cho ta :

$$N_I = \frac{P-X}{2\cos\beta_1} = \frac{P-X}{\sqrt{3}} \; ; \; N_{II} = \frac{X}{2\cos\beta_2} = X \; ; \; N_{III} = X$$

Từ điều kiện cân bằng tĩnh đối với hệ cơ bản (hình 2.42c) rút ra :

$$\overline{N}_I = -\frac{1}{\sqrt{3}} \; ; \; \overline{N}_{II} = 1 \; ; \; \overline{N}_{III} = 1 \qquad (d)$$

Từ quan hệ hình học của hệ đã cho chiều dài của các thanh là :

$$l_I = 2\,m \; ; \; l_{II} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,m \; ; \; l_{III} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,m \qquad (e)$$

Thay các kết quả (c), (d) và (e) vào (b) ta có :

$$-2\,\frac{P-X}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 + 2X\,\frac{2}{\sqrt{3}} + X\,\frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\left[-2P + (2 + 3\sqrt{3})X\right] = 0$$

Do đó :

$$X = N_{III} = N_{II} = \frac{2P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}278\,P$$

Và $$N_I = \frac{P - X}{\sqrt{3}} = \frac{3\,P}{2 + 3\sqrt{3}} \approx 0{,}417\,P$$

Ứng suất trong các thanh :

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F} = \frac{0{,}417 \,.\, 8 \,.\, 10^3}{2} = 1668 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_{II} = \sigma_{III} = \frac{X}{F} = \frac{0{,}278 \,.\, 8 \,.\, 10^3}{2} = 1112 \text{ daN/cm}^2$$

Để tính chuyển vị thẳng đứng Δ_{AP} tại A, một lần nữa ta lại dùng công thức Maxwell   Mohr (hình 2.42c, d).

$$\Delta_{AP} = \sum \int_{l_i} \frac{\overline{N}_i \,.\, N_{Pi}}{E_i F_i}\,dz = \frac{2}{EF}\,N_I \overline{N}_I l_I = \frac{2}{EF}\,\frac{3\,P}{(2 + 3\sqrt{3})} \cdot \frac{2\,a}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2 \,.\, 0{,}417 \,.\, 8 \,.\, 10^3 \,.\, 2 \,.\, 10^2}{2 \,.\, 10^6 \,.\, 2 \,.\, 1{,}732} \approx 0{,}19 \text{ cm.}$$

2) Phương án 2 để xác định ẩn số thừa X :

Ta có thể xác định X một cách rất thuận lợi và đơn giản trực tiếp từ phương trình chính tắc của phương pháp lực khi đặt $X = X_1$ với hệ tương đương hình 2.42b :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta^0_{1P} = 0$$

δ_{11} được tính toán trên hệ cơ bản hình 2.42c, còn Δ^0_{1P} tính trên hệ cơ bản hình 2.42b khi không có X.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\overline{N}_{1i} \,.\, \overline{N}_{1i}}{E_i F_i} = \frac{1}{EF}\left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 200 \,.\, \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \,.\, 1 \cdot \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot 1\right) =$$

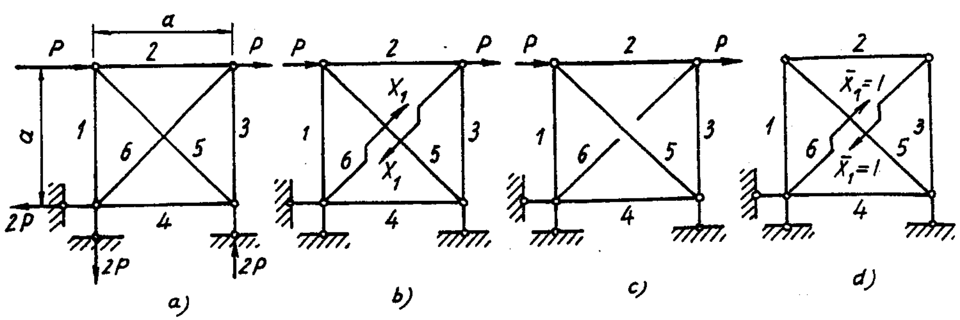
$$= \frac{1}{EF} \cdot \frac{400}{\sqrt{3}}\,(2{,}077)$$

$$\Delta^0_{1P} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\overline{N}_{1i} N_{iP}}{E_i F_i} = -\frac{1}{EF}\,\frac{P \,.\, 200}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{400\,P}{3EF} \Rightarrow$$

$$X_1 = X = -\frac{-400\,P}{3EF} \times \frac{EF\sqrt{3}}{400 \,.\, 2{,}07335} = 0{,}278\,P.$$

BÀI 43

Xác định nội lực trong các thanh của một dàn siêu tĩnh với giả thiết rằng các thanh làm bằng cùng một vật liệu và có mặt cắt ngang như nhau (hình 2.43a).



Hình 2.43.

GIẢI

Dễ thấy rằng hệ có một bậc siêu tĩnh, ẩn số thừa được chọn là X_1. Đó là lực dọc trong thanh 6. Do đó, hệ tương đương có dạng như hình 2.43b. Phương trình chính tắc biểu diễn chuyển vị tương đối bằng không có dạng :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta^{\circ}_{1P} = 0 \qquad \text{(a)}$$

Vì trong các thanh dàn chỉ có lực dọc nên các chuyển vị δ_{11} và Δ_{1P} được xác định theo công thức :

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\overline{N}_i^2 l_i}{EF} \qquad \text{(b)}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\overline{N}_i N_{Pi} l_i}{EF} \qquad \text{(c)}$$

trong đó : $\overline{N}_i$ là lực dọc trong thanh i do lực $\overline{X}_1 = 1$ gây ra.

N_{Pi} là lực dọc trong thanh i do ngoại lực cho trước gây ra.

Để xác định các nội lực này, ta sẽ khảo sát điều kiện cân bằng các nút lần lượt trong hệ cơ bản (hình 2.43c, d) các kết quả tính toán nội lực các thanh được cho trong bảng A.

Từ bảng A, ta có :

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pa}{\sqrt{2}\,EF}(5 + 4\sqrt{2})$$

$$\delta_{11} = \frac{2a(1+\sqrt{2})}{EF}$$

Thay các kết quả này vào (a) ta đi đến :

$$X_1 = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} P \approx 1{,}56\,P$$

Bảng A

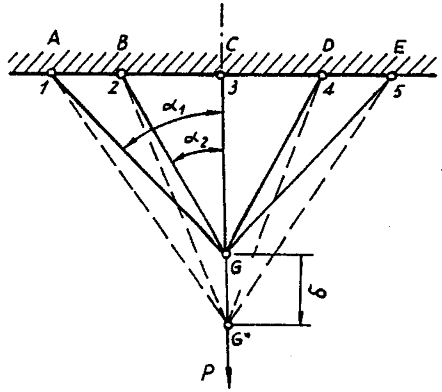
Thanh	Chiều dài l_i	$\overline{N}_i$	N_{Pi}	$\overline{N}_i^2 l_i$	$\overline{N}_i N_{Pi} l_i$
1	a	$-\sqrt{2}/2$	2P	a/2	$-\text{Pa}\sqrt{2}$
2	a	$-\sqrt{2}/2$	P	a/2	$-\text{Pa}\sqrt{2}$
3	a	$-\sqrt{2}/2$	0	a/2	0

Tiếp bảng A

4	a	$-\sqrt{2}/2$	2P	a/2	$-\text{Pa}\sqrt{2}$
5	$a\sqrt{2}$	1	$-2P\sqrt{2}$	$a\sqrt{2}$	$-4\,\text{Pa}$
6	$a\sqrt{2}$	1	0	$a\sqrt{2}$	0
Σ	–	–	–	$2a(1+\sqrt{2})$	$-\text{Pa}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(5+4\sqrt{2})$

BÀI 44

Hãy xác định lực P thẳng đứng đặt vào nút G của hệ thanh đối xứng liên kết khớp để nút G đi xuống một đoạn $\delta = 0{,}5$ cm. Cho biết $E_i = E = 2.10^4$ kN/cm^2, $F_3 = 10{,}6$ cm^2; $l_3 = l = 100$ cm và các thanh có cùng độ cứng.



Hình 2.44.

GIẢI

Chúng ta ký hiệu :

α_i là góc nghiêng của thanh i so với phương thẳng đứng ;

l_i là chiều dài của thanh i ;

$E_i F_i$ là độ cứng của mặt cắt ngang của thanh i, Δ_i là độ dãn (chuyển vị dọc trục của thanh i.

Từ hình 2.44 và vì biến dạng bé ta có :

$$\Delta_i = \delta . \cos\alpha_i$$

Lực dọc trong thanh i là :

$$N_i = \frac{\Delta_i E_i F_i}{l_i}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi U của hệ được viết

$$U = \sum \frac{N_i \Delta_i}{2} = \sum \frac{\Delta_i^2 E_i F_i}{2 l_i} = \delta^2 \sum \frac{E_i F_i}{2 l_i} \cos^2 \alpha_i$$

Theo định lý của Lagrange ta có :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = \delta \sum_i \frac{E_i F_i \cos \alpha_i}{l_i} = \delta E \sum \frac{F_i \cos \alpha_i}{l_i} \qquad \text{(a)}$$

Vì các thanh có độ cứng như nhau nên quan hệ giữa các F_i là :

$$F_1 = \frac{2F}{\sqrt{2}} \;;\; F_2 = \frac{2F}{\sqrt{3}} \qquad \text{(b)}$$

Thay giá trị bằng số vào (a) ta có lực P cần thiết đặt vào nút G để có $\delta = 0{,}5$ cm :

$$P = 0{,}5 \,.\, 2 \,.\, 10^4 \left(2\, \frac{2 \,.\, 10{,}6}{\sqrt{2}} \; \frac{\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}}{2 \,.\, 2 \,.\, 100} + 2\, \frac{2 \,.\, 10{,}6 \,.\, \sqrt{3}}{\sqrt{3} \,.\, 2 \,.\, 100 \,.\, 2} + \frac{10{,}6 \,.\, 1}{100} \right) =$$

$= 3614{,}6$ kN

BÀI 45

Một hệ khớp gồm 6 thanh có cùng vật liệu, cùng mặt cắt ngang F chịu lực và liên kết như hình 2.45. Tính nội lực trong các thanh.

GIẢI

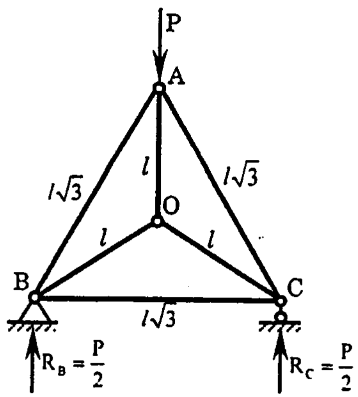
a/ Tính lực dọc trong các thanh

Điều kiện cân bằng toàn hệ cho ta các phản lực :

$$R_B = P/2 \;;\; R_C = \frac{P}{2}$$

Gọi X là lực kéo trong các thanh OA, OB, OC, khi khảo sát cân bằng nút "O" cho thấy lực trong ba thanh này bằng nhau và bằng X.

Điều kiện cân bằng nút "A" và "B" cho ta :



Hình 2.45.

$$N_{AB} = N_{AC} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(P + X\right) \;;\; N_{BC} = \frac{\sqrt{2}}{6}\left(P - 2X\right)$$

b/ Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ,

$$U = \frac{l}{2EF}\left(3X^2 + 2\sqrt{3}\,N_{AB}^2 + \sqrt{3}\,N_{OC}^2\right) =$$

$$= \frac{l}{2EF}\left[3X^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(P+X\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(P-2X\right)^2\right]$$

Định lý Menabrea cho phép ta viết :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{l}{EF}\left[3X + \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(P+X\right) - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(P-2X\right)\right] = 0$$

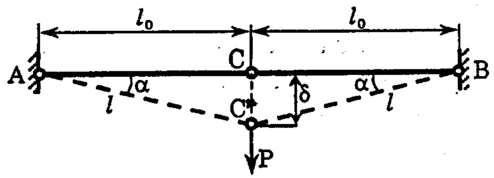
Suy ra

$$X = -\frac{\sqrt{3}-1}{4} \cdot P = N_{OA} = N_{OB} = N_{OC}$$

$$N_{AC} = -\frac{5\sqrt{3}-3}{12} \cdot P \quad \text{và} \quad N_{BC} = \frac{3+\sqrt{3}}{12} P$$

BÀI 46

Một hệ gồm hai thanh giống nhau có chiều dài l_0, mặt cắt ngang F liên kết khớp thẳng hàng như hình 2.46 . Người ta đặt vào khớp C một lực P vuông góc với AB làm cho điểm C bị một chuyển vị bé δ = CC*. Hãy tính δ và chỉ ra rằng nguyên lý độc lập tác dụng không áp dụng được vào bài toán này.



Hình 2.46.

GIẢI

Khi có lực P mỗi thanh dài ra một đoạn rất bé $\Delta = l - l_0$ và có biến dạng dài tỷ đối ε theo định nghĩa là :

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{l_0^2}} - 1 \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{l_0}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2} \qquad \text{(a)}$$

Khi gọi N là lực kéo trong các thanh và xét điều kiện cân bằng nút C* ta có :

$$2N \, . \, \alpha = P \qquad \text{(b)}$$

Theo định luật Hooke $\quad N = EF \, . \, \varepsilon \qquad$ (c)

Từ các quan hệ (a), (b), (c), ta rút ra :

$$\delta = l_0 \left(\frac{P}{EF} \right)^{1/3} \qquad \text{(d)}$$

Quan hệ (d) cho thấy : Chuyển vị δ không tỷ lệ với lực P, vì thế nguyên lý cộng tác dụng không áp dụng được vào bài toán này.

BÀI 47

Có một dàn chịu lực như hình 2.47a. Hãy tìm xem khi tăng P thanh nào trong dàn đạt được giới hạn chảy đầu tiên và lực P tương ứng khi đó bằng bao nhiêu ?

Cho biết : $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2$, $h = 4$ m, $l = 3$ m, $E = 2{,}1 \, . \, 10^4 \text{ kN/cm}^2$

$F = \text{const} = 15 \text{ cm}^2$ đối với tất cả các thanh.

GIẢI

Hệ trên hình 2.47a là hệ siêu tĩnh bậc 1, vì có một liên kết thừa. Thanh nào có nội lực lớn nhất thì thanh ấy sẽ đạt được ứng suất σ_{ch} trước tiên. Để biết được điều đó, cần phải khử siêu tĩnh cho hệ và tính nội lực trong tất cả các thanh ở trạng thái đàn hồi. Biểu đồ nội lực (N) sẽ cho ta biết thanh nào có $|N_{max}|$. Hệ tương đương như trên hình 2.47b và phương trình chính tắc như sau :

$$\delta_{11} X_1 + \Delta^0_{1P} = 0$$

trong đó
$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\overline{N}_{1i} \overline{N}_{1i} l_i}{EF}$$

$$\Delta^0_{1P} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\overline{N}_{1i} N^0_{Pi} l_i}{EF}$$

$\overline{N}_{1i}$ là nội lực trong các thanh dàn do lực $\overline{X}_1 = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.

N^0_{Pi} là nội lực trong các thanh dàn do tải trọng P cần tìm gây ra trong hệ cơ bản.

Nội lực tại liên kết "thừa" (thanh BD) là :

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = $$

$$= - \frac{189 \, P/15}{455/25} = -0{,}778 \, P$$

Nội lực trong thanh thứ i là $N_i = N^0_{Pi} + \overline{N}_{1i} X_1$. (a)

Các kết quả tính toán theo công thức (a) được cho trên hình 2.47e. Từ biểu đồ (N_P) ta thấy thanh AC có nội lực kéo lớn nhất $N_{AC} = 0{,}889$ P. Thanh AC là thanh đạt được ứng suất chảy đầu tiên với nội lực chảy :

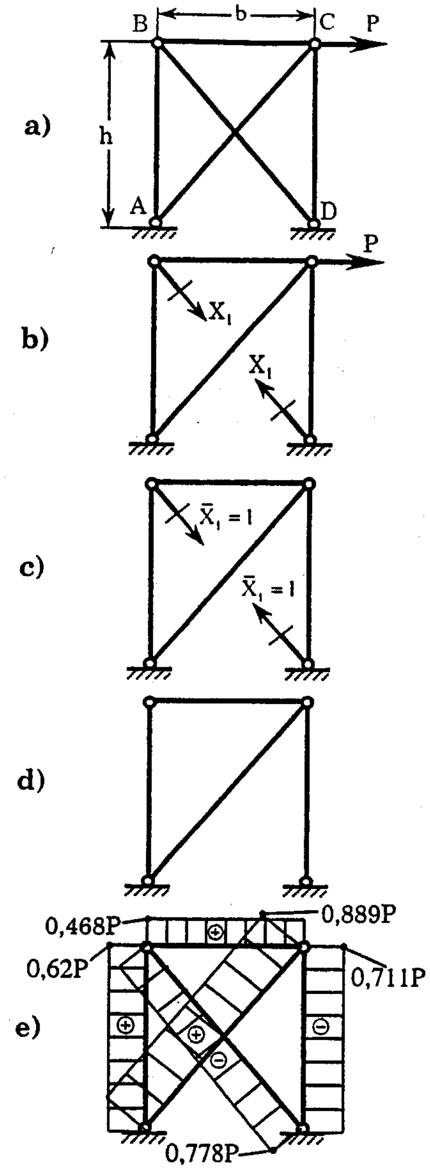
$$N_{ch} = 24 \times 15 = 360 \text{ kN}.$$

Tải trọng P ứng với thanh AC chảy dẻo là :

$$N^{ch}_{AC} = 0{,}889 \, P = 360 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \quad P_{AC} = 405 \text{ kN}.$$

Chú ý là mặc dù thanh AC đã chảy dẻo nhưng hệ vẫn là một hệ cân bằng và bất biến hình. Hệ vẫn còn tiếp tục chịu được lực lớn hơn P_{AC}. Hệ chỉ bị phá hủy (mất khả năng chịu lực) là nếu có hai thanh trong hệ đạt được ứng suất chảy hoặc là ngay cả với $P \geq P_{AC} = 405$ kN dàn bị mất ổn định.



Hình 2.47.

BÀI 48

Cho một cột bằng thép mặt cắt ngang thay đổi từng khúc chịu lực như hình 2.48a.

Hãy

1) Tính lực giới hạn P_{gh}

2) Vẽ biểu đồ mô tả quan hệ giữa chuyển vị U_c của mặt cắt C và lực P tăng tĩnh từ 0 đến P_{gh}.

GIẢI

Các phương trình xác định phản lực R_A, R_B trong trường hợp này là :

$$R_A + R_B - 3P = 0 \quad (a)$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0 \quad (b)$$

ở đây Δl_1, Δl_2, Δl_3 biến dạng dài của các đoạn 1, 2, 3.

Lực dọc N_1, N_2, N_3 trong các đoạn là :

$$N_1 = R_A \; ; \; N_2 = R_A - P \; ;$$

$$N_3 = R_A - 3P = -R_B$$

Biến dạng dài của các đoạn thanh là :

$$\Delta l_1 = \frac{R_A \, . \, l}{EF} \; ; \; \Delta l_2 = \frac{(R_A - P)\, l}{2EF} \; ; \; \Delta l_3 = \frac{(R_A - 3P)\, l}{3EF}$$

Thay các kết quả này vào (b), ta có :

$$R_A + \frac{(R_A - P)}{2} + \frac{(R_A - 3P)}{3} = 0$$

hay $\quad R_A\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{P}{2} + P = \frac{3P}{2}$

Suy ra : $R_A = \frac{9}{11}P$. Từ (a), suy ra : $R_B = \frac{24}{11}P$.

Ứng suất σ_1, σ_2, σ_3 trong các đoạn 1, 2, 3 có trị số :

$$\sigma_1 = \frac{9P}{11F} \; ; \; \sigma_2 = -\frac{P}{11F} \; ; \; \sigma_3 = -\frac{8P}{11F}$$

Từ đó, ta thấy ứng suất σ_1 lớn nhất, nên đoạn 1 sẽ chảy dẻo trước, lúc đó :

$$\sigma_1 = \sigma_{ch} = \frac{9P_{1gh}}{11F} \quad ; \quad P_{1gh} = \frac{11F\,\sigma_{ch}}{9} = 586{,}67 \text{ kN}$$

Chuyển vị của điểm C bằng biến dạng dài của đoạn 3 :

$$|U_c| = |\Delta l_3| = \frac{(R_A - 3P)\, l}{3EF} = \frac{\left(\frac{9}{11}P_{1gh} - 3P_{1gh}\right) l}{3EF} =$$

$$= \frac{24\,F\,\sigma_{ch}\, . \, l}{27EF} = \frac{1600\,\sigma_{ch}}{9E}$$

Lúc đó, lực dọc trong đoạn 2 và 3 là :

$$N_2 = -\frac{2\,F\,\sigma_{ch}}{9} \; ; \; N_3 = -\frac{24\,F\,\sigma_{ch}}{9}$$

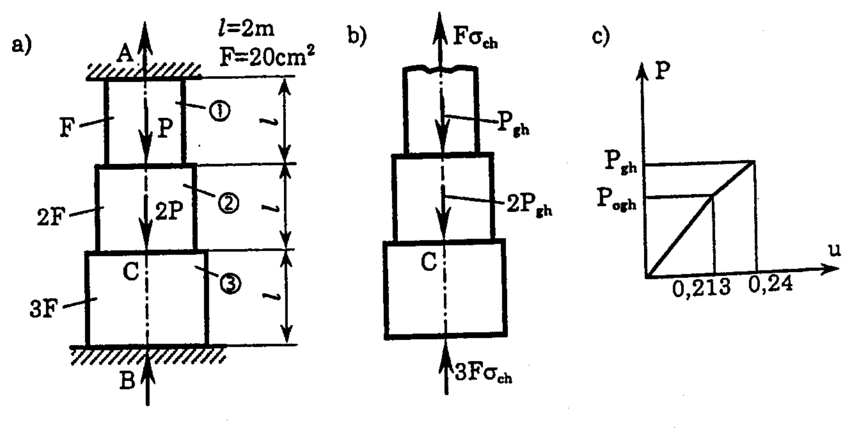
Vì $\sigma_3 > \sigma_2$ nên khi tăng tải tiếp tục thì chỉ đoạn 1 và 3 đạt đến trạng thái giới hạn, nghĩa là $N_1 = F\sigma_{ch}$ và $N_3 = 3F\sigma_{ch}$. Từ hình 2.48b ta có :

$$3P_{gh} = F\,.\,\sigma_{ch} + 3F\sigma_{ch}$$

hay $P_{gh} = \frac{4}{3}F\,.\,\sigma_{ch}$

Chuyển vị của điểm C lúc đó là :

$$|U_c| = \frac{3\,F\,\sigma_{ch}\, . \, l}{3EF} = \frac{200\,\sigma_{ch}}{E}$$



Hình 2.48

Thay trị số của σ_{ch} và F, ta có :

$$P_{gh} = \frac{4}{3} \cdot 20 \,.\, 24 = 640 \text{ kN}$$

Chuyển vị U_c ứng với P_{tgh} là :

$$|U_c| = \frac{1600\,\sigma_{ch}}{9E} = \frac{1600 \,.\, 24}{9 \,.\, 2 \,.\, 10^4} = 0{,}213 \text{ cm}$$

Chuyển vị U_c ứng với P_{gh} là :

$$|U_c| = \frac{200\,\sigma_{ch}}{E} = \frac{200 \,.\, 24}{2 \,.\, 10^4} = 0{,}24 \text{ cm}$$

Đồ thị chuyển vị của C vẽ trên hình 2.48c. Chuyển vị của C hướng xuống phía dưới vì đoạn 3 chịu nén.

BÀI 49

Một thanh siêu tĩnh gồm hai đoạn 0–1, 0–2 chịu lực dọc trục và liên kết như hình 2.49a. Hãy vẽ biểu đồ chuyển vị dọc trục U(z) và biểu đồ lực dọc N(z), kiểm tra bền và cứng cho thanh. Biết rằng các đoạn (0–1) và (1–2) có diện tích mặt cắt ngang là :

$F_1 = 10 \text{ cm}^2$ và $F_2 = 20 \text{ cm}^2$ $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$

chiều dài đoạn 1 là $l_1 = 300$ cm

và đoạn 2 là $l_2 = 200$ cm. $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[U] = 0{,}3$ cm.

Đơn vị tính sử dụng là kN, cm.

GIẢI

Khi sử dụng phương pháp vạn năng ta viết phương trình các đại lượng cần tính U(z), N(z) dưới dạng ma trận cho trường hợp này (bạn đọc xem kỹ bài 2.32) như sau :

Đoạn 1, (0–1) : $0 \leq z \leq 300$ cm ;

$$\vec{S}_1(z) = \left[B_1(z)\right] \Delta\vec{S}_{01} \;;\; \vec{S}_1^*(z = 300 \text{ cm}) = \left[B_1^*\right] \Delta\vec{S}_{01}$$

Đoạn 2, (1–2) : $300 \leq z \leq 500$ cm ;

$$\vec{S}_2(z) = \left[B_2(z)\right]\left[B_1^*\right]\Delta\vec{S}_{01} + \left[B_2(z)\right]\Delta\vec{S}_{02} \;;$$

$$\vec{S}_2(z = 500 \text{ cm}) = \left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\Delta\vec{S}_1 + \left[B_2^*\right]\Delta\vec{S}_2$$

Ở đây :

$$\Delta\vec{S}_{01} = \left|\begin{matrix} 0 \\ R_{01} \\ 0 \\ 1/100 \; \dfrac{\text{kN}}{\text{cm}} \end{matrix}\right. ; \qquad \Delta\vec{S}_{02} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 200 \text{ kN} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{100} \text{ kN/cm} \end{matrix}\right. ;$$

$$\left[B_i(z)\right] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \dfrac{\Phi_1}{EF_i} & \dfrac{\Phi_2}{EF_i} & \dfrac{\Phi_3}{EF_i} \dots \\ & & & \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 \dots \end{bmatrix} \qquad (i = \overline{1,2})$$

Phản lực tại ngàm "0" được tìm từ điều kiện :

$$U(z = 500 \text{ cm}) = 0 \;\Rightarrow\; R_{01} = -300 \text{ kN}$$

Thay các $\Delta\vec{S}_{0i}$ $(i = \overline{1,2})$ với $R_{01} = -300$ kN vào $\vec{S}_i(z)$ $(i = \overline{1,2})$ ta được các véctơ $\vec{S}_i(z)$ tường minh. Biểu đồ của (U) và (N) được mô tả trên hình 2.49b, c.

Từ các biểu đồ (U) và (N) ta thấy các mặt cắt có U_{max} và N_{max} về trị tuyệt đối tương ứng tại Z = 245 cm và Z = 500 cm.

Việc kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng là thực hiện kiểm tra các bất đẳng thức (2.2) và (2.5).

Cụ thể là :

- **Điều kiện bền :**

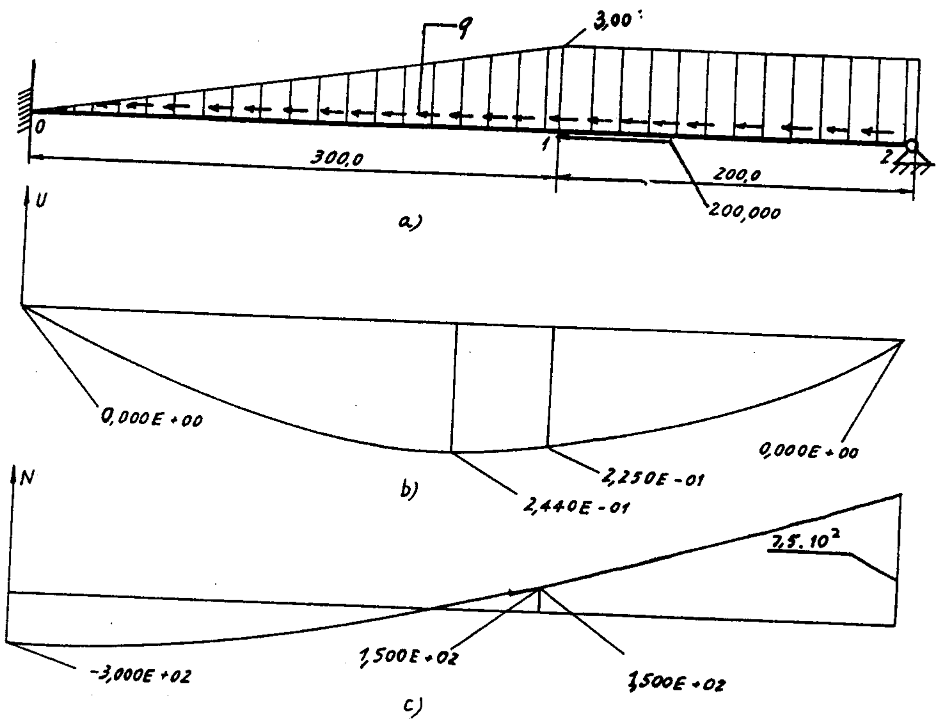
$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F_2} = \frac{750}{20} = 37{,}5 \text{ kN/cm}^2 > [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

Thanh bị phá hủy :

- **Điều kiện cứng**

$$\max|U| = |-0{,}2449 \text{ cm}| < [U] = 0{,}3 \text{ cm}$$

Thanh đủ cứng.



Hình 2.49.

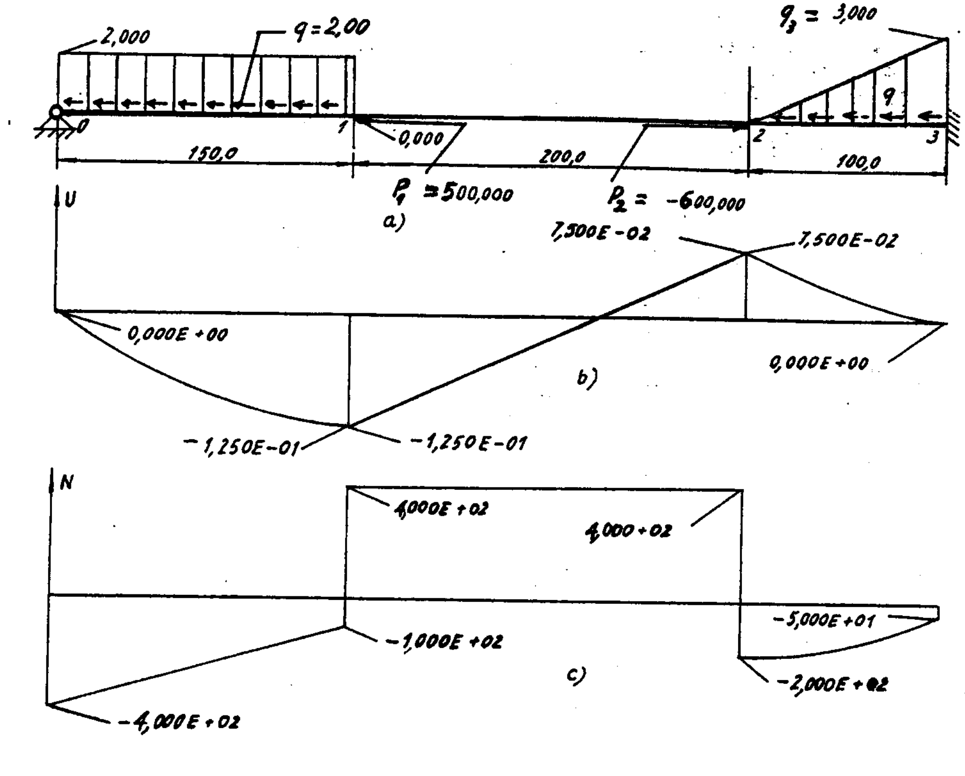
BÀI 50

Một thanh có mặt cắt thay đổi từng bậc một đầu chịu liên kết tựa bất động, một đầu ngàm chặt, đoạn 0–1 chịu lực phân bố đều $q_{0-1} = 2$ kN/cm , tại mặt cắt 1 và 2 chịu lực tập trung $P_1 = 500$ kN, $P_2 = -600$ kN , đoạn 2–3 chịu lực phân bố bậc nhất tại mặt cắt 2 có $q_2 = 0$, tại mặt cắt ngàm 3 có $q_3 = 3$ kN/cm . Kích thước các đoạn 0–1, 1–2, 2–3 đo bằng cm được cho trên hình 2.50a. Hãy viết biểu thức giải tích của U(z), N(z), vẽ các biểu đồ của chúng và tính max $|\sigma|$.

Cho biết : $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm², $F_1 = 15$ cm², $F_2 = 20$ cm, $F_3 = 10$ cm.

GIẢI

- Viết các phương trình của U(z) và N(z).



Hình 2.50.

Theo các công thức tổng quát từ (2.12) ÷ (2.14) ta viết các phương trình này đối với bài toán đang khảo sát như sau :

Đối với đoạn (0–1) : $0 \le z \le 150$ cm ;

$$\vec{S_1}(z) = \begin{Bmatrix} U_1(z) \\ N_1(z) \end{Bmatrix} = \left[B_1(z)\right] \overrightarrow{\Delta S}_{01} \; ; \; \begin{Bmatrix} U_1^*(z = 200 \text{ cm}) \\ N_1^*(z = 200 \text{ cm}) \end{Bmatrix} = \left[B_1^*\right] \overrightarrow{\Delta S}_{01}.$$

Đối với đoạn thứ 2 (1–2) : $150 \text{ cm} \le z \le 350$ cm ;

$$\vec{S_2}(z) = \begin{Bmatrix} U_2(z) \\ N_2(z) \end{Bmatrix} = \left[B_2(z)\right] \left[B_1^*\right] \overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2(z)\right] \overrightarrow{\Delta S}_{02} \; ;$$

$$\begin{Bmatrix} U_2^* \\ N_2^* \end{Bmatrix} = \left[B_2^*\right] \left[B_1^*\right] \overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2^*\right] \overrightarrow{\Delta S}_{02}.$$

Đối với đoạn thứ 3 (2–3) : $350 \text{ cm} \le z \le 450$ cm ;

$$\vec{S}_3(z) = \begin{Bmatrix} U_3(z) \\ N_3(z) \end{Bmatrix} = \left[B_3(z)\right]\left[B_2^*(z)\right]\left[B_1^*(z)\right] \vec{\Delta S}_{01} +$$

$$+ \left[B_3(z)\right]\left[B_2^*(z)\right] \vec{\Delta S}_{02} + \left[B_3(z)\right] \vec{\Delta S}_{03} ,$$

$$\vec{S}_3^{*} = \begin{Bmatrix} N_3^* \\ N_3^* \end{Bmatrix} = \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\vec{\Delta S}_{01} + \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\vec{\Delta S}_{02} + \left[B_3^*\right]\vec{\Delta S}_{03} .$$

Trong đó :

$$\vec{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 500 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \vec{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ -600 \\ 0 \\ 3/100 \end{vmatrix} ;$$

$$\left[B_i(z)\right] = \begin{vmatrix} \Phi_0 & \dfrac{\Phi_1}{E_iF_i} & \dfrac{\Phi_2}{E_iF_i} & \dfrac{\Phi_3}{E_iF_i} \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} \quad (i = \overline{1,3})$$

Phản lực dọc trục tại gối tựa bất động bên trái R_{01} được xác định từ điều kiện :

$$U(z = a_3 = 450 \text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -400 \text{ kN}$$

Theo các phương trình U (z), N(z) của các đoạn đã viết ở trên với $R_{01} = -400$ kN ta dựng được các biểu đồ (U) và (N) như hình 2.50b,c.

Ứng suất pháp lớn nhất về trị tuyệt đối sinh ra ở mặt cắt z = 0, tại đó $N_1 = -400$ kN, $F_1 = 15$ cm^3. Cụ thể là :

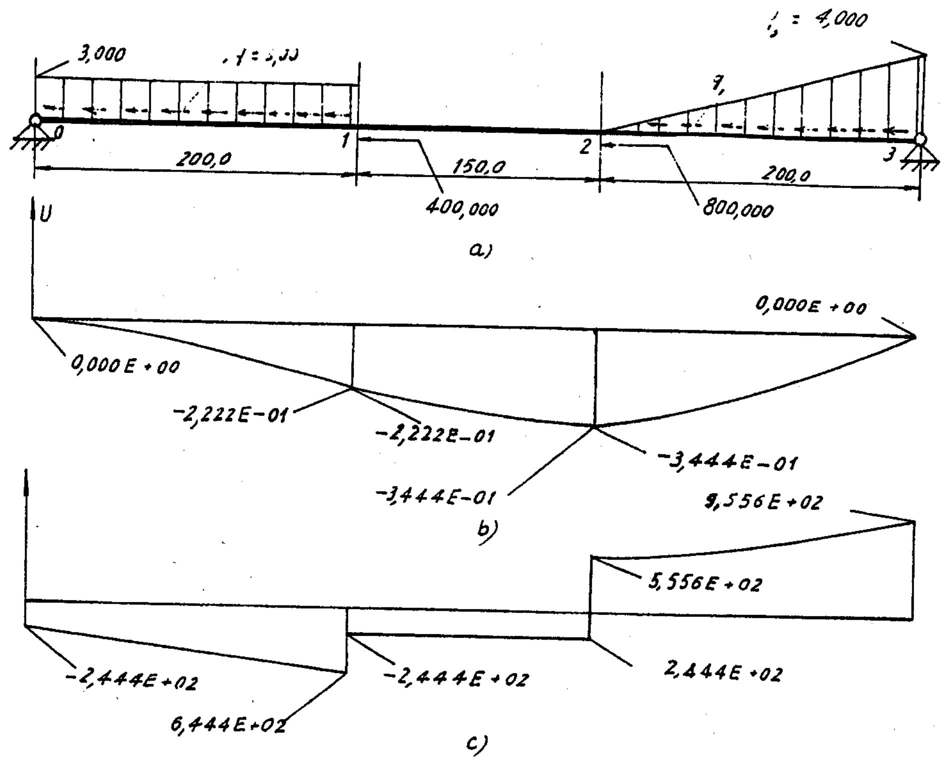
$$\max|\sigma| = \frac{N_1}{F_1} = \left|\frac{-400}{15}\right| = 26{,}67 \text{ kN/cm}^2.$$

BÀI 51

Một thanh chịu kéo, nén với các liên kết tựa bất động ở hai đầu, đoạn 0–1 chịu lực phân bố đều $q_{0-1} = -2$ kN/cm, tại 1 và 2 chịu các lực tập trung $P_1 = 400$ kN, $P_2 = 800$ kN, đoạn 2–3 chịu lực phân bố bậc nhất $q_2 = 0$, $q_3 = 4$ kN/cm. Kích thước dài của các đoạn như hình 2.51a. Hãy viết biểu thức giải tích của U(z) và N(z) và biểu đồ của chúng. Biết rằng :

$$E = 2{,}10^4 \text{ kN/cm}^2 , \; F_1 = 20 \text{ cm}^2 , \; F_2 = 15 \text{ cm}^2 , \; F_3 = 20 \text{ cm}^2 .$$

GIẢI



Hình 2.51.

Phương trình ma trận của U(z) và N(z) đối với bài toán này theo công thức tổng quát từ (2.12) ÷ (2.14) của phương pháp vạn năng có dạng :

Đối với đoạn 0–1 : 0 ≤ z ≤ 200 cm ;

$$\vec{S}_1(z) = \begin{Bmatrix} N_1(z) \\ N_1(z) \end{Bmatrix} = \left[B_1(z)\right] \vec{\Delta S}_{01} ; \quad \vec{S}_1^*(z = 200 \text{ cm}) = \left[B_1^*\right] \vec{\Delta S}_{01}.$$

Đối với đoạn 1–2 : 200 cm ≤ z ≤ 350 cm ;

$$\vec{S}_2(z) = \left[B_2\right]\left[B_1^*\right] \vec{\Delta S}_{01} + \left[B_2\right] \vec{\Delta S}_{02} ;$$

$$\vec{S}_2^*(z = 350\ \text{cm}) = \left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02}$$

Đối với đoạn 2-3 : 350 cm ≤ z ≤ 550 cm ;

$$\vec{S}_3(z) = \left[B_3\right]\left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_3\right]\left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} + \left[B_3\right]\overrightarrow{\Delta S}_{03}$$

$$\vec{S}_3(z = 550\ \text{cm}) = \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} + \left[B_3^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{03} .$$

trong đó :

$$\overrightarrow{\Delta S}_{01} = \left|\begin{matrix} 0 \\ R_{01} \\ -2 \\ 0 \end{matrix}\right. ; \quad \overrightarrow{\Delta S}_{02} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 400 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right. ; \quad \overrightarrow{\Delta S}_{03} = \left|\begin{matrix} 0 \\ 800 \\ 0 \\ 1/50 \end{matrix}\right. ;$$

$$[B_i(z)] = \left|\begin{matrix} \Phi_0 & \dfrac{\Phi_1}{EF_i} & \dfrac{\Phi_2}{EF_i} & \dfrac{\Phi_3}{E_iF_i} \\ 0 & 1 & \Phi_1 & \Phi_2 \end{matrix}\right| \qquad (i = \overline{1,3})$$

Phản lực dọc trục R_{01} tại gối 0 được xác định từ phương trình U(z = 550 cm) = 0. Cụ thể là :

$$R_{02} = -244,4\ \text{kN}$$

Thay $\overrightarrow{\Delta S}_{01}$ với $R_{01} = -244,4$ kN, $\overrightarrow{\Delta S}_{02}$, $\overrightarrow{\Delta S}_{03}$ vào các phương trình của $\vec{S}_1(z)$, $\vec{S}_2(z)$, $\vec{S}_3(z)$ và từ các phương trình ấy ta có các biểu đồ (U) và (N) như hình 2.51b,c.

BÀI 52

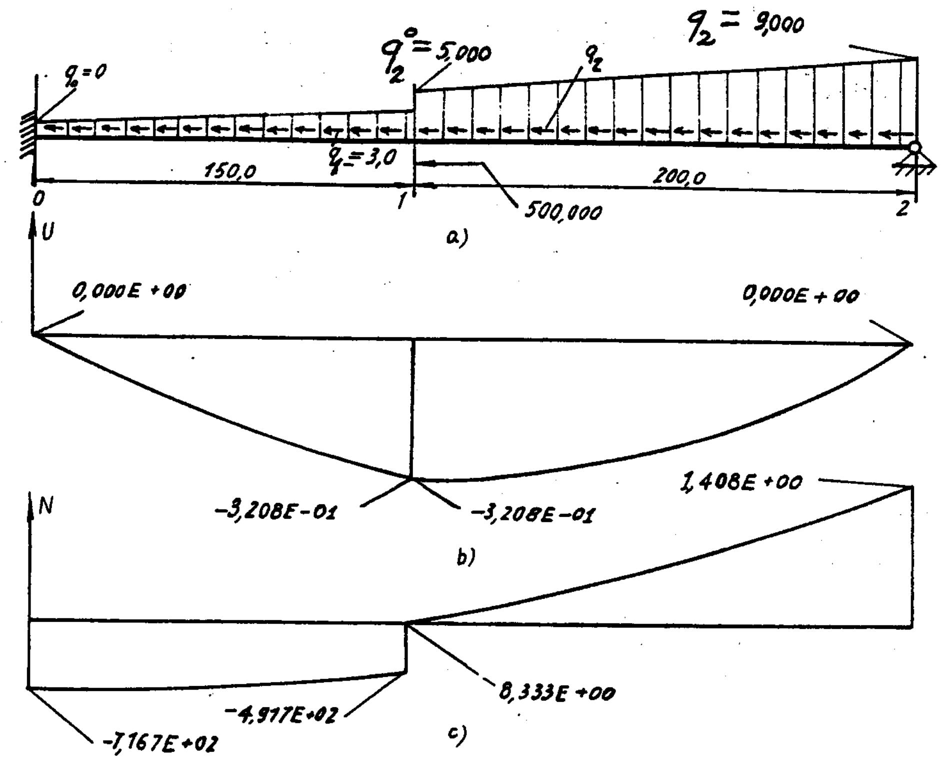
Cho một thanh chịu kéo nén như hình 2.52a. Hãy chỉ ra mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền và độ cứng và vẽ các biểu đồ U và N?

Cho biết :

E = 2e4, F_1 = 15, F_2 = 20, đơn vị tính là : kN, cm.

GIẢI

Phương trình chuyển vị U(z) và lực dọc N(z) trong trường hợp này theo (2.12) có dạng :



Hình 2.52.

Đoạn 1 : 0 ≤ z ≤ 150 cm,

$$\vec{S}_1(z) = \left[B_1(z)\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} ; \quad \vec{S}_1^*(150\ \text{cm}) = \left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01}$$

Đoạn 2 : 150 cm ≤ z ≤ 350 cm,

$$\vec{S}_2(z) = \left[B_2(z)\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2(z)\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} ;$$

$$\vec{S}_2^*(350\ \text{cm}) = \left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} .$$

trong đó :

$$\overrightarrow{\Delta S}_{01} = \left|\begin{matrix} 0 \\ R_{01} \\ 0 \\ \dfrac{1}{50} \end{matrix}\right. ; \quad \overrightarrow{\Delta S}_{02} = \left|\begin{matrix} 500 \\ 2 \\ \dfrac{1}{50} \end{matrix}\right. ;$$

$$\left[B_2(z)\right] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{(z-150)}{2.10^4.20} & \dfrac{(z-150)^2}{2\,!\,2.10^4.20} & \dfrac{(z-150)^3}{3\,!\,2.10^4.20} \\ 0 & 1 & (z-150) & \dfrac{(z-150)^2}{2}\dots \end{bmatrix}$$

$$\left[B_2^*\right] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{200}{2.10^4.20} & \dfrac{200^2}{2\,!\,2.10^4.20} & \dfrac{200^3}{3\,!\,2.10^4.20}\dots \\ 0 & 1 & 200 & \dfrac{200^2}{2}\dots \end{bmatrix};$$

$$\left[B_1(z)\right] = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{z}{EF_1} & \dfrac{z^2}{2\,EF_1} & \dfrac{z^3}{3\,!\,EF_1}\dots \\ 0 & 1 & z & \dfrac{z^2}{2}\dots \end{bmatrix}$$

R_{01} được xác định từ điều kiện :

$$U_2(z = 300\text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -716{,}7\text{ kN}.$$

Thay giá trị $R_{01} = -716{,}7$ kN và các $\overrightarrow{\Delta S}_{01}$, $\overrightarrow{\Delta S}_{02}$ vào $\vec{S}_1(z)$, $\vec{S}_2(z)$ rồi vẽ biểu đồ (U), (N) từ các hàm vừa nhận được. Các biểu đồ này được cho trên hình 2.52b,c.

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ bền là mặt cắt "2" với N = 1408 kN và $\sigma_{max} = \dfrac{N}{F_2} = \dfrac{1408}{20} = 70{,}4$ kN/cm^2.

Mặt cắt nguy hiểm nhất về độ cứng là mặt cắt "1". Tại mặt cắt này chuyển vị có giá trị tuyệt đối lớn nhất bằng 0,321 cm.

BÀI 53

Một thanh thép có $E = 2.10^4$ kN/cm^2 chịu lực dọc trục và liên kết như hình 2.53a. Hãy thiết lập phương trình các đại lượng cần tính U(z) và N(z) dưới dạng ma trận tường minh và tính $\max|\sigma|$ và $\max|\varepsilon|$?

GIẢI

Phương trình ma trận đối với từng đoạn :

Đoạn 1 : $0 \leqslant z \leqslant 200$ cm ;

$$\vec{S}_1(z) = \left[B_1(z)\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01}\ ;\ \vec{S}_1^*(200\text{ cm}) = \left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01}$$

$$\vec{S}_2(z) = \left[B_2(z)\right].\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2(z)\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02}\ ;$$

$$\vec{S}_2^*(400\text{ cm}) = \left[B_2^*\right].\left[B_1^*\right].\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02}$$

Đoạn 2 : 200 cm $\leqslant z \leqslant$ 400 cm.

Đoạn 3 : 400 cm $\leqslant z \leqslant$ 600 cm ;

$$\vec{S}_3(z) = \left[B_3(z)\right].\left[B_2^*\right].\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_3(z)\right]\left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} + \left[B_3(z)\right]\overrightarrow{\Delta S}_{03}\ ;$$

$$\vec{S}_3(z = 600\text{ cm}) = \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\left[B_1^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{01} + \left[B_3^*\right]\left[B_2^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{02} + \left[B_3^*\right]\overrightarrow{\Delta S}_{03}$$

Trong các phương trình này các ma trận $\left[B_i(z)\right]$ và $\left[B_i^*\right]$ với $i = \overline{1,3}$ có dạng thay đổi và được xác định theo (2.13). Ví dụ :

$$\left[B_2^*(z = 400\text{ cm})\right] = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{200}{2.10^4.15} & \dfrac{200^2}{2\,!\,2.10^4.15} & \dfrac{200^2}{3\,!\,2.10^4.15}\dots \\ 0 & 1 & \dfrac{200}{1} & \dfrac{200^2}{2\,!}\dots \end{vmatrix}$$

Các $\overrightarrow{\Delta S}_{0i}$ trong bài toán này có dạng cụ thể như sau :

$$\overrightarrow{\Delta S}_{01} = \begin{vmatrix} 0 \\ R_{01} \\ 0 \\ \dfrac{1}{100}\ \text{kN/cm}^2 \end{vmatrix};\quad \overrightarrow{\Delta S}_{02} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -\dfrac{1}{100}\ \text{kN/cm}^2 \end{vmatrix};\quad \overrightarrow{\Delta S}_{03} = \begin{vmatrix} 0 \\ 400\text{ kN} \\ 0 \\ \dfrac{1}{100}\ \text{kN/cm}^2 \end{vmatrix}$$

R_{01} được tìm từ điều kiện :

$$U(z = 600\text{ cm}) = 0 \Rightarrow R_{01} = -276{,}2\text{ kN}.$$

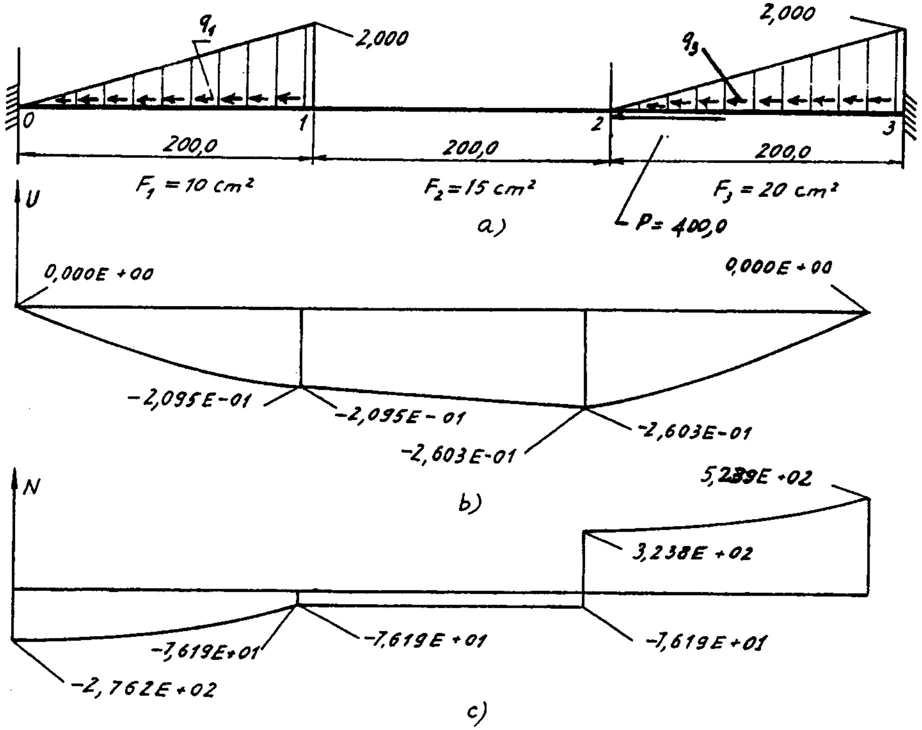
Thay $\overrightarrow{\Delta S}_{01}$ với $R_{01} = -276{,}2$ kN và $\overrightarrow{\Delta S}_{02}$, $\overrightarrow{\Delta S}_{03}$ vào các phương trình $\vec{S}_1(z)$, $\vec{S}_2(z)$ và $\vec{S}_3(z)$ ta được các phương trình tường minh dạng ma trận cần tìm.

Ứng suất pháp lớn nhất về trị tuyệt đối xảy ra ở mặt cắt "0". Cụ thể là :

$$\max|\sigma| = \left|\frac{-276{,}2}{10}\right| = 27{,}62\ \text{kN/cm}^2$$

Biến dạng tỷ đối lớn nhất về trị tuyệt đối cũng xẩy ra ở mặt cắt "0" và có giá trị là :

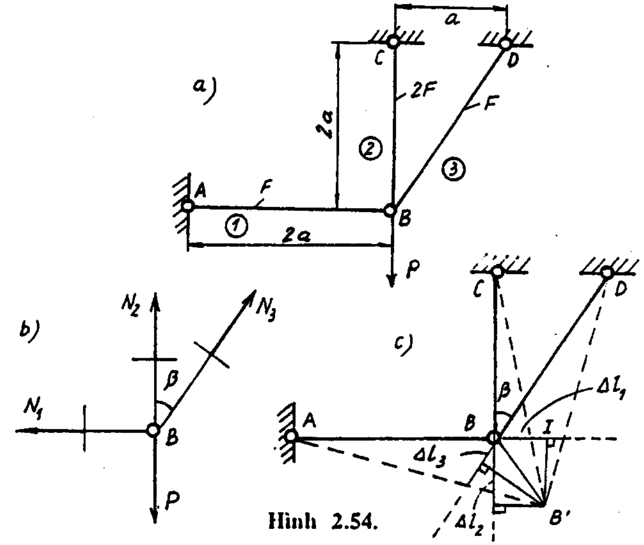
$$\max|\varepsilon| = \left|\frac{-N_{01}}{EF_1}\right| = \left|\frac{-276{,}2}{2.10^4.10}\right| = 13{,}81.10^{-4}$$



Hình 2.53.

BÀI 54

Tính các nội lực trong các thanh AB, BC và BD của hệ thanh chịu lực như hình 2.54a, bằng phương pháp biến dạng. Các số liệu tính toán được cho trên hình vẽ.



Hình 2.54.

GIẢI

Đây là hệ siêu tĩnh với các thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.

a/ Thiết lập các phương trình cân bằng tĩnh lực.

Tách nút B, chiếu các lực tác dụng lên các phương nằm ngang và thẳng đứng ta được (hình 2.54b) :

$$-N_1 + N_3\sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$N_2 + N_3\cos\beta - P = 0 \qquad (2)$$

b/ Thiết lập phương trình biến dạng.

Hệ sau khi biến dạng được vẽ như ở hình 2.54c. Hình chiếu của biểu thức vectơ $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB'}$ lên phương BD cho ta :

$$\Delta l_3 = \Delta l_2\cos\beta - \Delta l_1\sin\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{N_3 . a\sqrt{5}}{EF} = \frac{N_2 . 2a}{2EF}\cos\beta - \frac{N_1 . 2a}{EF}\sin\beta \qquad (3)$$

Trong đó : $\Delta l_3 = N_3 l_3/EF$; $\Delta l_2 = N_2 . 2a/2EF$; $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 . 2a}{EF}$

Thay $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ vào các phương trình (1), (2), (3) và rút gọn lại ta được hệ phương trình sau :

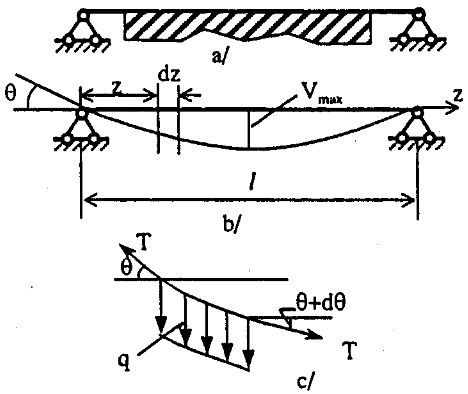
$$\left.\begin{aligned} \sqrt{5}\,N_1 - N_3 &= 0 \\ \sqrt{5}\,N_2 + N_3 &= \sqrt{5}\,P \\ 2N_1 - 2N_2 + 5N_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Giải hệ phương trình (4) ta thu được các lực dọc cần tìm :

$$N_1 = \frac{2P}{4+5\sqrt{5}} \; ; \qquad N_2 = \frac{(2+5\sqrt{5})\,P}{4+5\sqrt{5}} \; ; \qquad N_3 = \frac{2\sqrt{5}\,P}{4+5\sqrt{5}}$$

BÀI 55

Một dây mềm trọng lượng trên một đơn vị chiều dài là q, độ cứng EF, nằm trên một mặt phẳng ngang nhẵn cứng chịu lực căng T_0 giữa hai gối tựa bất động (hình 2.55a). Sau khi bỏ mặt phẳng đỡ dây thì dây bị võng xuống (hình 2.55b). Hãy thiết lập quan hệ giữa V_{max} với T_0 và q ?



Hình 2.55.

GIẢI

Gọi T là lực căng của dây khi võng ($T > T_0$) và xét cân bằng của một phân tố dây dz (hình 2.55c), ta có :

$$T\theta - q\,dz + T(\theta + d\theta) = 0 \Rightarrow \frac{q}{T} = -\frac{d\theta}{dz}$$

Sau khi tích phân ta có :

$$\theta = \frac{q}{T}\left(c - z\right)$$

Điều kiện biên cho ta : khi $z = l/2$ thì $\theta = 0$, do đó : $C = l/2$ và :

$$\theta = \frac{q}{T}\left(\frac{l}{2} - z\right)$$

$$V_{max} = \int_0^{l/2} \theta\,dz = \frac{ql^2}{8T} \text{ hay } T = \frac{ql^2}{V_{max}} \qquad \text{(a)}$$

Do các lực căng T và T_0 không bằng nhau và dây bị dãn dài một đoạn bằng hiệu chiều dài đường võng và chiều dài thẳng ban đầu của dây :

$$\frac{(T - T_0)l}{EF} = \int_0^l \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right) dz = \int_0^l \frac{\theta^2}{2}\,dz \Rightarrow \frac{T - T_0}{EF} = \frac{ql^2}{24\,T^2}$$

Thay giá trị T từ (a) vào đây ta có quan hệ cần tìm giữa V_{max}, T_0 và q như sau :

$$V_{max}^3 + \frac{3}{8}\,\frac{V_{max}\,T_0\,.\,l^2}{EF} - \frac{3}{64}\,\frac{ql^4}{EF} = 0$$

Ta tính vài giá trị của V_{max}

Khi $\dfrac{ql}{EF} = 0{,}012$ với $T_0/EF = 0$ thì $V_{max} \approx 0{,}084\ l$

$T_0/EF = 0{,}005$ thì $V_{max} \approx 0{,}075\ l$

$T_0/EF = 0{,}010$ thì $V_{max} \approx 0{,}068\ l$

Nghĩa là với cùng giá trị q thì độ võng của dây càng giảm khi lực căng ban đầu T_0 càng tăng.

Chương 3

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ CÁC GIẢ THUYẾT VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT GIỚI HẠN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trạng thái ứng suất khối (hình 3.1a,b,c):

Các ứng suất σ, τ và ứng suất toàn phần p trên mặt nghiêng có công thức :

* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_3 (hình 3.1c,d) :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma = \sigma_1\cos^2\gamma + \sigma_2\sin^2\gamma \; ; \; \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\gamma \\ &p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma_1^2\cos^2\gamma + \sigma_2\sin^2\gamma} \end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_2 (hình 3.1g) :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma = \sigma_1\cos^2\beta + \sigma_2\sin^2\beta \; ; \quad \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\beta \\ &p = \sqrt{\sigma_1^2\cos^2\beta + \sigma_3^2\sin^2\beta} \end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

* Trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_1 (hình 3.1i) :

$$\left.\begin{aligned} &\sigma = \sigma_2\cos^2\alpha + \sigma_3\sin^2\beta \; ; \; \tau = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha \\ &p = \sqrt{\sigma_2^2\cos^2\beta + \sigma_3^2\sin^2\beta} \end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

Các ứng suất σ, τ và p có thể xác định bằng vòng tròn Mohr và được chỉ trên các hình 3.1e,h,k. Bằng cách xếp chồng ba đồ thị này ta được đồ thị vòng tròn Mohr đối với trạng thái ứng suất khối tổng quát (hình 3.1l).

Các ứng suất tiếp cực trị :

$$\tau_1 \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \; ; \; \tau_2 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \; ;$$

$$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{3.4}$$

Sự thay đổi thể tích tương đối :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1 - 2\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) \tag{3.5}$$

Thế năng biến dạng riêng :

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{3.6}$$

Thế năng riêng biến đổi hình dáng :

$$u_h = \frac{1 + \mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \tag{3.7}$$

Thế năng riêng biến đổi thể tích :

$$u_v = \frac{1 - 2\mu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \tag{3.8}$$

2. Trạng thái ứng suất phẳng (hình 3.1m)

Gọi $\vec{n}$ là pháp tuyến của mặt cắt nghiêng và α là góc tạo bởi $\vec{n}$ và trục x. σ_α và τ_α là ứng suất pháp và tiếp trên mặt nghiêng này được xác định bởi :

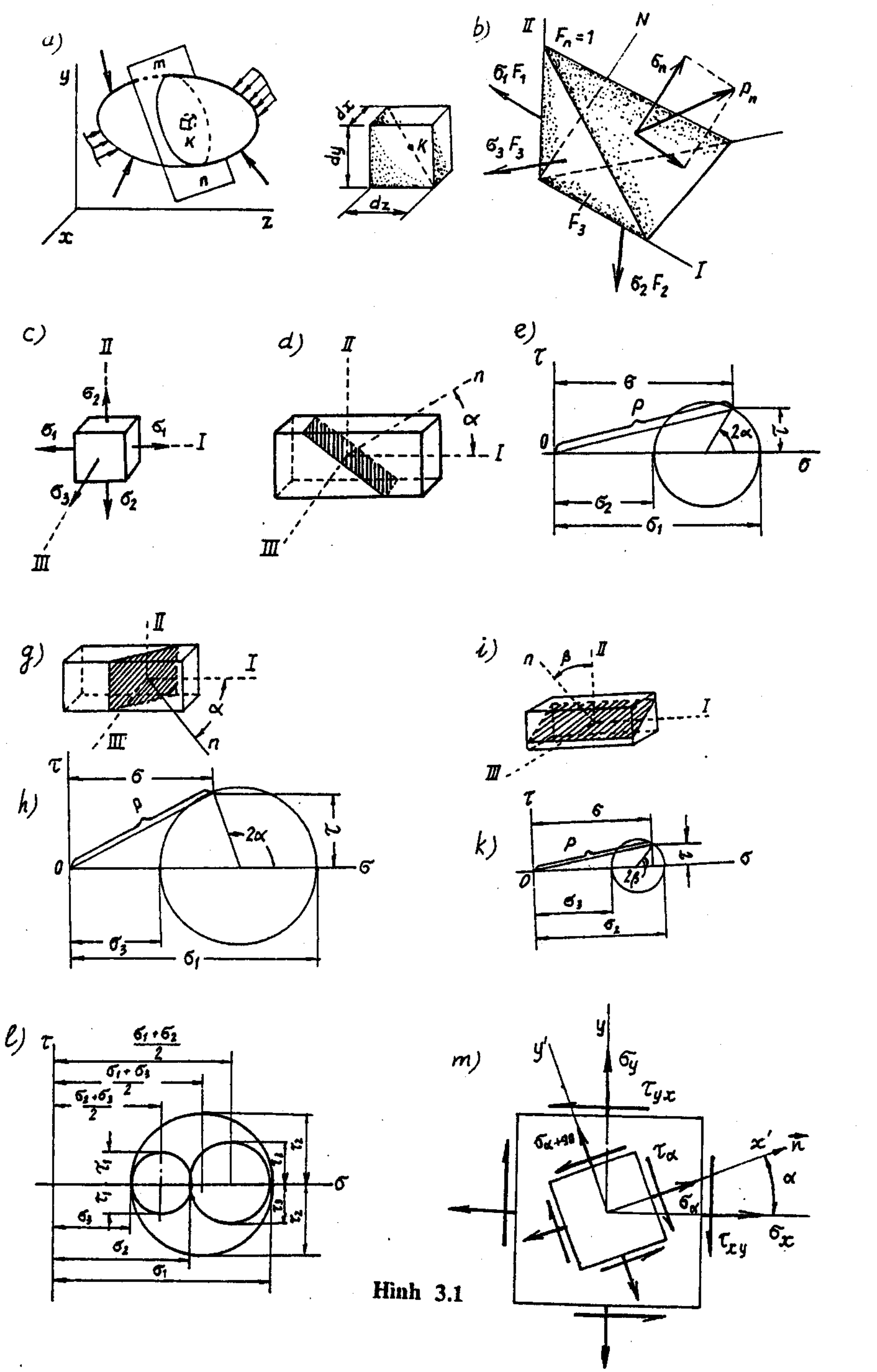
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{3.9}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \tag{3.10}$$

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha + 90^\circ} = \sigma_x + \sigma_y \tag{3.11}$$

Ứng suất chính có công thức :

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3.12}$$



Hình 3.1

$$\operatorname{tg}\alpha_{\frac{max}{min}} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{\frac{max}{min}}} \quad (3.13)$$

Ứng suất tiếp cực trị :

$$\tau_{\frac{max}{min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) + \tau_{xy}^2} = \pm\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (3.14)$$

3. Các giả thuyết về trạng thái ứng suất giới hạn

a) Giả thuyết theo ứng suất tiếp lớn nhất (thuyết bền thứ III)

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.15)$$

b) Giả thuyết theo thế năng biến đổi hình dáng (thuyết bền thứ IV)

$$\sigma_{td} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \quad (3.16)$$

c) Giả thuyết về trạng thái ứng suất giới hạn (thuyết bền Mohr)

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - k\sigma_3 \ ; \ k = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \quad (3.17)$$

4. Định luật Húc

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \ ; \ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \ ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \ ; \ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \ ; \quad (3.18)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \ ; \ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \ .$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (3.19)$$

II. Các bài toán giải sẵn

BÀI 1

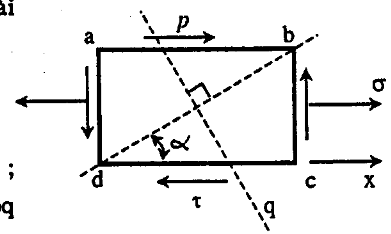
Một phân tố phẳng chịu ứng suất (hình 3.2) được tách ra từ một vật thể chịu lực có : $\sigma = 30$ kN/cm², $\tau = 15$ kN/cm², $E = 2.10^4$ kN/cm². Hãy xác định biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo bd ?

GIẢI

Theo định luật Hooke biến dạng dài tỷ đối theo phương bd :

$$\varepsilon_{bd} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{bd} - \mu\sigma_{pq}\right)$$

σ_{bd} là ứng suất pháp theo phương bd ; σ_{pq} là ứng suất pháp theo phương pq vuông góc với bd. Phương bd xác định góc $\alpha = 30^o$ với phương x, trị số của σ_{bd} là :



Hình 3.2.

$$\sigma_{bd} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

Ở đây $\sigma_x = \sigma = 30$ kN/cm² ; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau = -15$ kN/cm².

Ta có : $\sigma_{bd} = \frac{30}{2} + \frac{30}{2}\cos 60^o + 15\sin 60^o = 35{,}5$ kN/cm².

σ_{pq} xác định từ biểu thức :

$$\sigma_{pq} + \sigma_{bd} = \sigma_x + \sigma_y \ ; \ \sigma_{pq} = \sigma_x + \sigma_y - \sigma_{bd} = -5{,}5 \text{ kN/cm}^2.$$

Vậy : $\varepsilon_{bd} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{bd} - \mu\sigma_{pq}\right) = \frac{1}{2.10^4}\left[35{,}5 - 0{,}28\,(-5{,}5)\right] = 18{,}52\,.\,10^{-4}$

Biết rằng $\varepsilon_{bd} = \frac{\Delta l_{bd}}{l_{bd}}$ (Δl_{bd} - độ dãn dài của đường chéo bd ;

l_{bd} - chiều dài của đường chéo bd).

Do đó $\Delta l_{bd} = \varepsilon_{bd}\,.\,l_{bd} = 0{,}0926$ mm.

BÀI 2

Hai mặt cắt AC và BC đi qua điểm C (hình 3.3) nằm trong trạng thái ứng suất phẳng. Hãy tính các ứng suất chính và ứng suất trên mặt cắt xiên σ_u và biến dạng ε_u theo ph ương $\vec{u}$, $\vec{n} \equiv \vec{u}$ là véctơ pháp tuyến trên mặt nghiêng AC.

$$E = 2\,.\,10^4 \text{ kN/cm}^2, \qquad \mu = 0{,}25$$

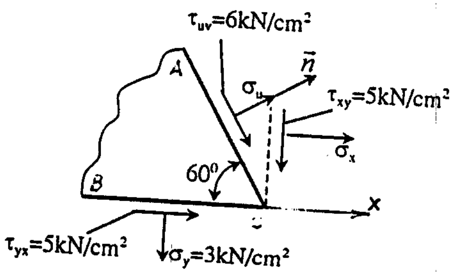
GIẢI

Từ phân tố ACB đã tách ra ta có : $\sigma_y = 3\ kN/cm^2$, $\tau_{yx} = -5\ kN/cm^2$, do đó, $\tau_{xy} = 5kN/cm^2$, $\tau_{uv} = 6kN/cm^2$.

Trên mặt cắt nghiêng có pháp tuyến $\vec{n}$ ta có công thức :

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha .$$

Phương của pháp tuyến ngoài $\vec{n}$ trên mặt cắt nghiêng làm một góc $\alpha = 30^o$ với trục x theo chiều dương. Vậy :



Hình 3.3.

$$\sigma = \frac{\sigma_x - 3}{2}\sin 60^o + 5\cos 60^o.$$

Suy ra $\sigma_x = 11{,}07\ kN/cm^2$.

Các ứng suất chính và σ_u có trị số

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{11{,}07 + 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{11{,}07 - 3}{2}\right)^2 + 5^2}$$

$\sigma_{max} = 13{,}27\ kN/cm^2$; $\sigma_{min} = 0{,}61\ kN/cm^2$.

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_u = \frac{11{,}07 + 3}{2} + \frac{11{,}07 - 3}{2}\cos 60^o - 5\sin 60^o = 4{,}73\ kN/cm^2.$$

Theo định luật Hooke, biến dạng dài tương đối là $\varepsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \mu\sigma_v)$; σ_v tính từ đẳng thức $\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \Rightarrow \sigma_v = 9{,}34\ kN/cm^2$

Do đó : $\varepsilon_u = \frac{1}{2 . 10^4}\left(4{,}73 - 0{,}25 . 9{,}34\right) = 1{,}2 . 10^{-4}$.

BÀI 3

Một phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng như hình 3.4a. Hãy xác định phân tố chính tương ứng. Tìm phương và trị số của các ứng suất trên phân tố có ứng suất tiếp lớn nhất, trạng thái ứng suất này là gì?

GIẢI

Phân tố đã cho có $\sigma_x = 3\ kN/cm^2$; $\sigma_y = -3\ kN/cm^2$; $\tau_{xy} = -2kN/cm^2$

Phương và trị số của ứng suất chính

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{3 - 3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3 + 3}{2}\right)^2 + (-2)^2}$$

$\sigma_{max} = 3{,}6\ kN/cm^2$; $\sigma_{min} = -3{,}6\ kN/cm^2$

$$tg\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{max}} = \frac{-2}{-3 - 3{,}6} = 0{,}303 \ ;\ \alpha_1 = 16^o51'$$

$$tg\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{min}} = \frac{-2}{-3 + 3{,}6} = -3{,}33 \ ;\ \alpha_2 = 106^o51'$$

Vòng tròn ứng suất có tâm tại $\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{3 - 3}{2} = 0.$

Cực P của vòng tròn ứng suất được xác định từ

$$\sigma = \sigma_y = -3 \ ;\ \tau = \tau_{xy} = -2.$$

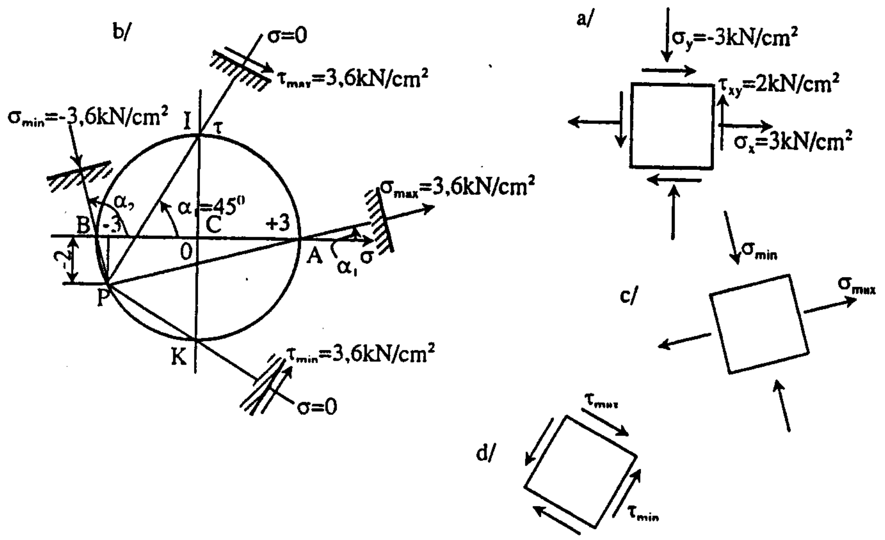
Bán kính của vòng Mo là CP (hình 3.4b)

Từ P kẻ các tia PA và PB cho phương chính của phân tố chính, phân tố chính được vẽ trên hình 3.4c.

Từ P kẻ các tia PI và PK cho phương của các mặt cắt có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu, các phương này làm một góc 45^o với các phương chính. Phân tố này được vẽ trên hình 3.4d. Trị số của các ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu là :

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{3 + 3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \pm\ 3{,}6\ kN/cm^2$$

Ta thấy trạng thái ứng suất của phân tố là trạng thái trượt thuần túy vì trên các mặt chỉ có ứng suất tiếp, không có ứng suất pháp.



Hình 3.4.

BÀI 4

Một phân tố chính có các ứng suất chính được cho như trên hình 3.5a. Hãy xác định ứng suất tiếp và pháp trên các mặt nghiêng so với mặt chính các góc $\beta = 20^o$ và $\alpha = -70^o$.

GIẢI

Ta ký hiệu các mặt nghiêng lần lượt là (β) và (α) có pháp tuyến là $\vec{n}_\beta$ và $\vec{n}_\alpha$. Trạng thái ứng suất chính đã cho có :

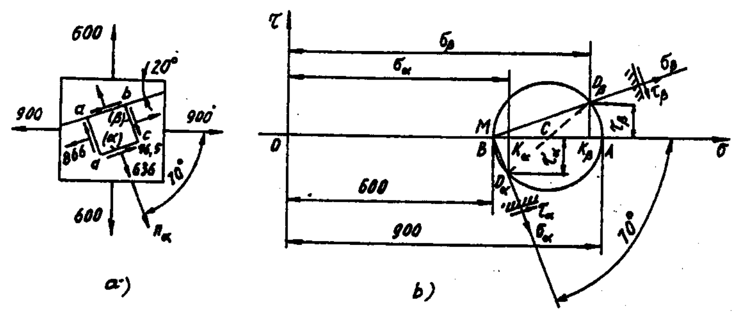
$$\sigma_1 = 900 \text{ daN/cm}^2,\ \sigma_2 = 600 \text{ daN/cm}^2,\ \sigma_3 = 0,\ \alpha = -70^o$$

Ứng suất pháp và tiếp trên các mặt β và α được tính theo công thức (3.1) :

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2\cos^2\alpha = (900 \,.\, 0,884 + 600 \,.\, 0,117) = 866 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha = (900 \,.\, 0,117 + 600 \,.\, 0,884) = 636 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha = \frac{900 - 600}{2}\left(-0,643\right) = -96,5 \text{ daN/cm}^2$$



Hình3.5

Các ứng suất này được biểu diễn trên các mặt (β) và (α) như hình 3.5a.

Kết quả trên có thể nhận được bằng vòng tròn Mohr ứng suất. Cụ thể là :

Theo σ_1, σ_2 ta dựng vòng tròn Morh. Từ cực B vẽ các tia song song với $\vec{n}_\beta$ và $\vec{n}_\alpha$. Giao của các tia này với vòng tròn vừa vẽ là các điểm D_β và D_α. Hoành độ của chúng cho ta $\sigma_\beta = OK_\beta = 866$ daN/cm^2, $\sigma_\alpha = OK_\alpha = 636$ daN/cm^2

Tung độ cho : $\tau_\beta = K_\beta \,.\, D_\beta = 96,5$ daN/cm^2 ;

$$\tau_\alpha = K_\alpha D_\alpha = -96,5 \text{ daN/cm}^2.$$

Trên hình 3.5b, tỷ lệ xích đã thực hiện : 1 cm ứng với 200 daN/cm^2 và đơn vị tính là daN, cm.

BÀI 5

Một phân tố chịu ứng suất được cho trên hình 3.6a. Hãy xác định phân tố chính và các ứng suất trên nó.

GIẢI

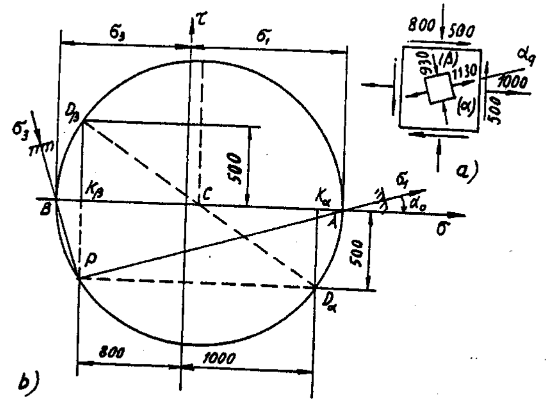
Ứng suất trên các mặt của phân tố đã cho (hình 3.6a) là :

$$\sigma_\alpha = 1000 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_\beta = -800 \text{ daN/cm2}$$

$$\tau_\alpha = -500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\beta = 500 \text{ daN/cm}^2$$



Hình 3.6

Các ứng suất chính và phương chính được tính theo các công thức :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1000 - 800\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(1000 + 800)^2 + 4.500^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(200 + 2060\right) = 1130 \text{ daN/cm}^2 ;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left(200 - 2060\right) = -930 \text{ daN/cm}^2 ;$$

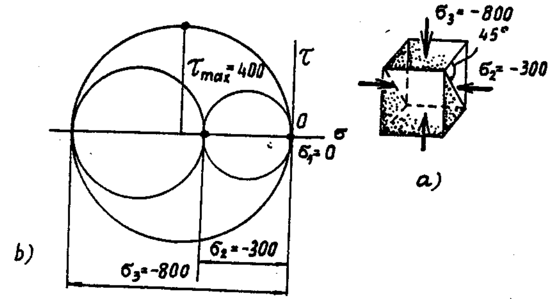
$$\text{tg}\alpha_0 = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta} = \frac{-(-500)}{1130 - (-800)} = \frac{500}{1930} = 0{,}259 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha_0 = 14^o32'$. (hình 3.6a).

Trên hình 3.6b, giới thiệu cách giải bài toán bằng phương pháp hình học (vòng Mohr ứng suất). Trong hệ tọa độ $\tau O\sigma$, theo các ứng suất đã cho trên phân tố hình 3.6a, ta dựng vòng tròn ứng suất và xác định điểm cực $P(\sigma_\beta, -\tau_\beta)$. Sau đó, từ P vẽ các tia PA và PB. Các tia này là pháp tuyến của các mặt chính tương ứng có σ_1, σ_3 (hình 3.6a,b).

BÀI 6

Một phân tố chính chịu các ứng suất như trên hình 3.7a. Hãy xác định ứng suất tiếp lớn nhất và mặt phẳng chứa nó bằng vòng tròn Mohr. Khi nào các vòng Mohr thu về một, và khi nào các vòng Mohr này thu về một điểm, ứng suất pháp và tiếp trên các mặt phân tố bằng bao nhiêu, mặt nào là mặt chính ? Đơn vị tính toán ứng suất được sử dụng là daN/cm^2.



Hình 3.7

GIẢI

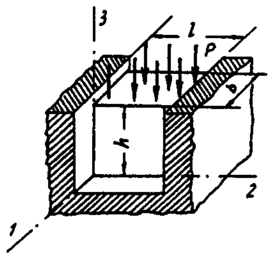
Trạng thái ứng suất phẳng hình (3.7a) chỉ là một trường hợp riêng của trạng thái ứng suất khối, khi mà một trong ba ứng suất chính bằng không. Nó cũng có thể được biểu diễn bằng ba vòng Mohr. Vì thế trạng thái ứng suất trên hình 3.7a có vòng Mohr như hình 3.7b với $\tau_{max} = 400$ daN/cm^2 nằm trên mặt phẳng đường chéo (hình 3.7a).

Khi mà hai ứng suất chính trùng nhau thì các vòng Mohr thu về một vòng.

Khi cả ba ứng suất chính trùng nhau $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ thì ba vòng Mohr thu về một điểm. Trong trườnghợp này trên tất cả các mặt cắt ứng suất tiếp bằng không, còn ứng suất pháp bằng σ. Bất kỳ mặt nào cũng là mặt chính. Một vật thể chịu tác dụng của áp lực thủy tĩnh theo mọi phương là một ví dụ về trạng thái ứng suất như vậy.

BÀI 7

Một chi tiết kích thước l x b x h được đặt vừa khít giữa hai mặt phẳng cứng tuyệt đối, chịu nén đều theo phương thẳng đứng có hợp lực P. Bỏ qua ma sát giữa chi tiết và các mặt phẳng tựa, hãy tính áp lực mà mặt phẳng tựa phải chịu và sự thay đổi thể tích của chi tiết. Cho trước E, μ của vật liệu chi tiết (hình 3.8).



Hình 3.8

GIẢI

Do biến dạng bị kiềm chế và hiệu ứng Poisson mà theo phương dọc trục phát sinh ứng suất nén σ_2. Vì vậy, ta có các ứng suất chính sau đây (hình 3.8) :

$$\sigma_1 = 0 \; ; \; \sigma_2 = \frac{-N}{b.h} \; ; \; \sigma_3 = -\frac{P}{l.b}$$

Trong đó, N là lực mà thành phẳng tựa tác dụng vào chi tiết.

Theo điều kiện của bài toán l = const cho nên

$$\varepsilon_2 = 0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\sigma_3\right) = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \mu\sigma_3 = -\mu\frac{P}{l.b}.$$

Do đó, lực mà mặt phẳng tựa phải chịu là :

$$R = -N \Rightarrow R = bh\sigma_2 = -bh\mu\frac{P}{l.b} = -\mu\frac{hP}{l}.$$

Tính biến dạng dài tuyệt đối theo phương h và b.

$$\Delta h = \varepsilon_1 b = \frac{h}{E}\left(\sigma_3 + \mu\sigma_2\right) = \left(1-\mu^2\right)\frac{Ph}{blE}$$

$$\Delta b = \varepsilon_1 b = \frac{b\mu}{E}\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{\mu(1+\mu)}{El}P$$

Biến dạng thể tích tỷ đối là :

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}\left(0 - \frac{\mu P}{bl} - \frac{P}{bl}\right) = -\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{blE}.P$$

Vì vậy, độ thay đổi thể tích của chi tiết theo định nghĩa là :

$$\Delta V = \theta.V = \theta.blh = -(1-2\mu)(1+\mu)\frac{Ph}{E}.$$

BÀI 8

Một khối thép được đặt khít trong rãnh khuôn (hình 3.9) được xem là cứng tuyệt đối. Khối thép chịu nén bởi áp lực đều P. Hãy xác định áp lực đặt vào khối thép và áp lực khối thép tác dụng vào thành khuôn? Biết E_T = 2.10^7N/cm^2 ; μ = 0,28, $[\sigma]$ = 16 kN/cm^2.

GIẢI

Theo hệ trục đã chọn trên hình vẽ, ta có điều kiện :

$$\sigma_z = -p \; ; \; \sigma_y = 0 \; ; \; \varepsilon_x = 0$$

Theo định luật Hooke :

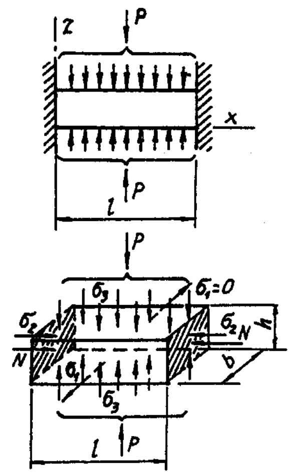
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = 0$$

Suy ra : $\sigma_x = -\mu p.$ (a)

Vậy theo phương x, khối thép bị nén. Theo qui ước dấu ứng suất chính ta có : $\sigma_1 = 0$; $\sigma_2 = -\mu p$; $\sigma_3 = -p$.

Theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất, điều kiện bền là :

$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$ hay $p \leq [\sigma]$ (b)



Hình 3.9

Theo thuyết thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất điều kiện bền là :

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma] \Rightarrow$$

$$\sqrt{\mu^2p^2 + p^2 - \mu p^2} = 0{,}8p \leq [\sigma] \Rightarrow p \leq 1{,}25[\sigma]. \quad (c)$$

Trị số lớn nhất có thể của p tác dụng lên khối thép là $p \leq [\sigma] = 16\ kN/cm^2$.

Theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng thì thành khuôn chịu áp lực do khối thép tác dụng vào $q = -\sigma_x = \mu p = 0,28 . p$. Áp lực q này được dùng để tính khuôn.

BÀI 9

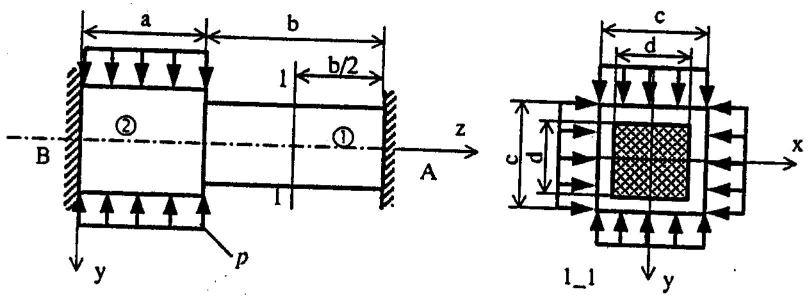
Cho thanh có kích thước và chịu lực như hình 3.10a.

1. Tính ứng suất trong các đoạn thanh.

2. Tính chuyển vị của mặt cắt 1 - 1

cho a = 0,9 m ; b = 0,6 m ; c = 6 cm ; d = 4 cm ; $p = 15\ kN/cm^2$; $\mu = 0,3$, $E = 2,1.10^4\ kN/cm^2$.

GIẢI



Hình 3.10

Đoạn I :

$$\sigma_x^I = \sigma_y^I = 0$$

$$\varepsilon_z^I = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^I - \mu\left(\sigma_x^I + \sigma_y^I\right)\right] = \frac{\sigma_z^I}{E}$$

Đoạn II :

$$\sigma_x^{II} = \sigma_y^{II} = -p$$

$$\varepsilon_z^{II} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z^{II} - \mu\left(\sigma_x^{II} + \sigma_y^{II}\right)\right] = \frac{1}{E}\left(\sigma_z^{II} + 2\mu p\right)$$

Điều kiện biến dạng :

$$u_I + u_{II} = 0$$

hay :

$$\varepsilon_z^I . b + \varepsilon_z^{II} . a = 0$$

Vậy : $\sigma_z^I \times 60 + (\sigma_z^{II} + 2\mu p).90 = 0$ (a)

Mặt khác : $\sigma_z^I = \dfrac{N}{F_1}$; $\sigma_z^{II} = \dfrac{N}{F_2}$ (b)

Thay (b) vào (a), ta được : N = −129,6 kN.

$$\sigma_z^I = \frac{N}{F_1} = -8,1\ kN/cm^2$$

$$\sigma_z^{II} = \frac{N}{F_2} = -3,6\ kN/cm^2$$

Chuyển vị của mặt cắt 1−1

$$U_{1-1} = \frac{-N . b/2}{EF_1} = \frac{129,6 \times 30}{2,1 . 10^7 . 16} = +6.10^{-2}\ cm.$$

BÀI 10

Một trụ thép tròn đặc đường kính D = 50 mm đặt khít trong ống đồng chiều dày $\delta = 1$ mm. Trụ thép chịu lực nén phân bố đều có hợp lực P. Hãy xác định ứng suất trong ống đồng. Cho biết $E_T = 2E_d$; $\mu_T = 0,3$; bỏ qua ma sát giữa các chi tiết của hệ (hình 3.11a).

GIẢI

Lập hệ trục như trên hình 3.11a, ứng suất nén theo phương z có trị số là :

$$\sigma_z = -\frac{P}{F} = -\frac{4 . 150}{\pi . 5^2} = -7,6\ kN/cm^2$$

Ở đây chúng ta có bài toán biến dạng phẳng, cụ thể là :

Vì bề dày của ống đồng mỏng nên trong ống phát sinh ứng suất kéo được xem như phân bố đều dọc theo chiều dày và theo chiều cao ống, gọi ứng suất pháp đó là σ. Mặt khác khối trụ bằng thép chịu áp lực phân bố đều của ống đồng tác dụng dọc chiều cao, gọi áp lực này là q. Xét cân bằng của nửa ống đồng (hình 3.11b) có chiều cao bằng đơn vị, lực kéo trên thành ống là N cân bằng với hình chiếu của áp lực q theo phương x đã biết, ta có :

$$2N = qD \Rightarrow q = \frac{2\delta 6}{D}$$

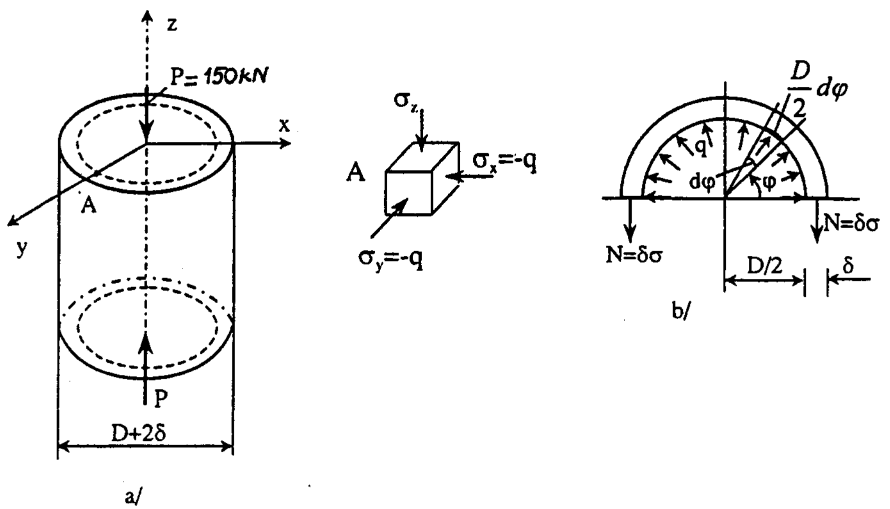
Tách phân tố A trên trục y của lõi thép, ta thấy phân tố chịu ứng suất σ_z và ứng suất $\sigma_x = \sigma_y = -q$. Vì ống đồng và lõi thép đặt khít nên điều kiện biến dạng tương thích của lõi thép và ống đồng là : $\varepsilon_T = \varepsilon_d$:

trong đó, $\varepsilon_d = \dfrac{\sigma}{E_d}$; $\varepsilon_T = \dfrac{1}{E_T}\left[\sigma_x - \mu_T \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$.

Vậy : $$\frac{\sigma}{E_d} = \frac{1}{E_T}\left[-q - \mu_T \cdot \left(-q - 7{,}6\right)\right] \qquad \text{(a)}$$

Thay các giá trị bằng số của μ_T, σ_z, $E_T = 2E_d$ và $q = \dfrac{2\delta\sigma}{D}$ vào phương trình (a), ta có ứng suất trong ống đồng :

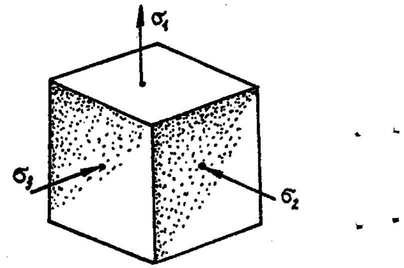
$$\sigma = \frac{\mu_T \sigma_z}{2\dfrac{\delta}{D}\left(1 - \mu_T\right) + \dfrac{E_T}{E_d}} = \frac{0{,}3 \,.\, 7{,}6}{2\dfrac{0{,}1}{5}\left(1 - 0{,}3\right) + 2} = 1{,}12 \text{ kN/cm}^2$$



Hình 3.11

BÀI 11

Một trạng thái ứng suất được cho trên hình 3.12 với $\sigma_1 = 200$ daN/cm^2, $\sigma_2 = -400$ daN/cm^2, $\sigma_3 = -800$ daN/cm^2. Hãy xác định bằng giải tích các ứng suất $\tau_{1,2,3}$, σ_β và τ_β trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_1 ; σ_α và τ_α trong mặt phẳng song song với trục chính ứng suất σ_2, tương tự là τ_γ, τ_γ đối với trục chính ứng suất σ_3. Với $\beta = 20^o$; $\alpha = 60^o$; $\gamma = 30^o$.



Hình 3.12

GIẢI

Trạng thái ứng suất đã cho là trạng thái ứng suất chính có: $\sigma_1 = 200$ daN/cm^2, $\sigma_2 = -400$ daN/cm^2 và $\sigma_3 = -800$ daN/cm^2. Các ứng suất tiếp cực trị tương ứng là :

$$\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \pm\frac{-400 + 800}{2} = \pm\ 200 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_2 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm\frac{200 + 800}{2} = \pm\ 500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_3 = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm\frac{200 + 400}{2} = \pm\ 300 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_\beta = \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\sin^2\beta = -400\cos^2 30^o - 800\sin^2 30^o = -500\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\sin 2\beta = \frac{-400 + 800}{2}\sin 60^o \approx 173 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_3\sin^2\alpha = 200\cos^2 60^o - 800\sin^2 60^o = -550\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha = \frac{200 + 800}{2}\sin 120^o \approx 433 \text{ daN/cm}^2$$

$$\sigma_\gamma = \sigma_1\cos^2\gamma + \sigma_2\sin^2\gamma = 200\cos^2 30^o - 400\sin^2 30^o = 50\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$$

$$\tau_\gamma = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\gamma = \frac{200 + 400}{2}\sin 60^o = 260 \text{ daN/cm}^2.$$

BÀI 12

Cho một trạng thái ứng suất tổng quát (hình 3.13).

Hãy chứng minh rằng :

1) Nếu trên hai mặt cắt vuông góc với nhau (ví dụ mặt có pháp tuyến x và y) thỏa mãn điều kiện :

$$\tau_{yx} = k\sigma_x \ , \ \tau_{yz} = k\tau_{xz} \ , \ \sigma_y = k\tau_{xy} \qquad \text{(a)}$$

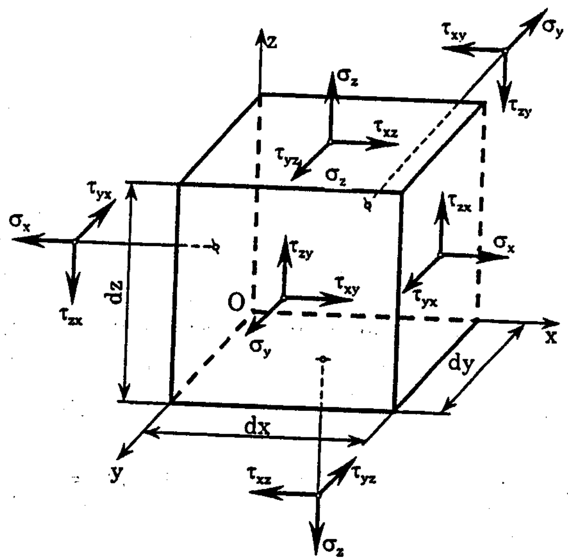
k là một hằng số nào đó, thì trạng thái ứng suất đã cho không thể là trạng thái ứng suất khối.

2) Nếu, ngoài điều kiện (a) trạng thái ứng suất đã cho còn có quan hệ :

$$\tau_{zx} = n\sigma_x \ , \ \sigma_z = n\tau_{xz} \ , \ \tau_{zy} = n\tau_{xy} \qquad \text{(b)}$$

thì trạng thái ứng suất đã cho là trạng thái ứng suất đơn.

GIẢI



Hình 3.13

Để chứng minh, trước hết cần phải xác định các ứng suất chính. Nghĩa là tìm nghiệm của phương trình :

$$\sigma^3 - S_1.\sigma^2 + S_2.\sigma - S_3 = 0 \qquad (1)$$

Trong đó, S_1, S_2, S_3 là các bất biến của trạng thái ứng suất và có biểu thức :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \ ; \ S_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_z \end{vmatrix}$$

1) Theo điều kiện (a) thì

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ k\sigma_x & k\tau_{xy} & k\tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = 0$$

Điều này có nghĩa là một trong các nghiệm của phương trình bậc ba (1) bằng không.

2) Theo điều kiện (a) và (b) thì

$$S_3 = 0 \ , \ S_2 = 0$$

Do đó, hai nghiệm của phương trình bậc ba (1) bằng không.

Đó là điều cần chứng minh.

BÀI 13

Một trạng thái ứng suất được cho trên hình 3.14 với các ứng suất tính bằng daN/cm2. Hãy xác định

τ_1, τ_2, τ_3, σ_β và τ_β song song với trục σ_1;

σ_α, τ_α song song với trục σ_2 và các biến dạng chính ε_1, ε_2, ε_3 ?

Biết $\beta = 30^o$; $\alpha = 60^o$; $E = 2.10^6$ daN/cm^2.

$\mu = 0,3$.

GIẢI

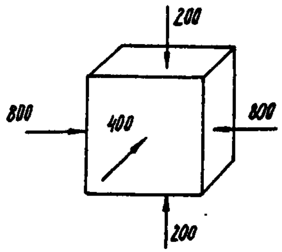
Với trạng thái ứng suất trên hình 3.14 thì :

$\sigma_1 = 200$ daN/cm^2, $\sigma_2 = -400$ daN/cm^2, $\sigma_3 = -800$ daN/cm^2, và theo công thức (3.4) ta có :

$$\tau_1 = \pm \frac{-400 + 800}{2} = \pm 200 \frac{daN}{cm^2},$$

$$\tau_2 = \pm \frac{200 + 800}{2} = \pm 500 \frac{daN}{cm^2},$$

$$\tau_3 = \pm \frac{200 + 400}{2} = \pm 300 \frac{daN}{cm^2}.$$



Hình 3.14

Các ứng suất σ_β, τ_β trong mặt phẳng song song với trục của σ_1 với góc $\beta = 30^o$ được tính theo công thức (3.3) :

$$\sigma_\beta = -400 \cos^2 30^o - 500 \sin^2 30^o = -500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\beta = \frac{-400 + 800}{2} \sin 60^o \approx 173 \text{ daN/cm}^2.$$

Tương tự như vậy σ_α, τ_α trên mặt song song với trục của σ_2 với $\alpha = 60^o$ theo công thức (3.2) ta có :

$$\sigma_\alpha = 200 \cos^2 60^o - 800 \sin^2 60^o = -500 \text{ daN/cm}^2$$

$$\tau_\alpha = \frac{200 + 800}{2} \sin 120^o \approx 433 \text{ daN/cm}^2.$$

Theo định luật Hooke các biến dạng chính được tính :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = \frac{100}{2.10^6}\left(2 + 0,3 . 12\right) = 2,8 . 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] = \frac{100}{2.10^6}\left(-4 + 0,3 . 6\right) = -1,1 . 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] = \frac{100}{2.10^6}\left(-8 + 0,3 . 2\right) = -3,7 . 10^{-4}.$$

Chương **4**

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẲNG

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mômen tĩnh và tọa độ trọng tâm trong hệ tọa độ xOy lập tùy ý của hình phẳng diện tích F.

$$S_x = \int_F y dF \ ; \ S_y = \int_F x dF$$

$$x_c = \frac{S_y}{F} \ ; \ y_c = \frac{S}{F} \qquad (4.1)$$

2. Mômen quán tính đối với trục x và y

$$J_x = \int_F y^2 dF \ ; \ J_y = \int_F x^2 dF$$

$J_{xy} = \int_F xydF$ là mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục vuông góc x, y.

3. Các công thức chuyển trục song song và xoay trục

$$J_x = J_{xo} + a^2F \ ; \ J_y = J_{y_o} + b^2F \ ; \ J_{xy} = J_{x_oy_o} + a.b.F \quad (4.2)$$

Trong công thức (4.2); x, y là các trục bất kỳ tương ứng song song với các trục trung tâm x_o, y_o. a, b tương ứng là khoảng giữa x và x_o ; y và y_o

$$\left.\begin{aligned} J_u &= \frac{J_x - J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_v &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_u &+ J_v = J_x + J_y \end{aligned}\right\} \quad (4.3)$$

$$J_{uv} = \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha \qquad (4.3)$$

Trong đó các hệ trục xOy và uOv là những hệ trục vuông góc tạo với nhau một góc α.

4. Vị trí của hệ trục quán tính chính và mômen quán tính chính

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}\ ;\ J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2} \qquad (4.4)$$

5. Êlip quán tính và tính mômen quán tính nhờ êlip quán tính.

Êlip quán tính : $$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1 \qquad (4.5)$$

trong đó : $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ là các bán kính quán tính.

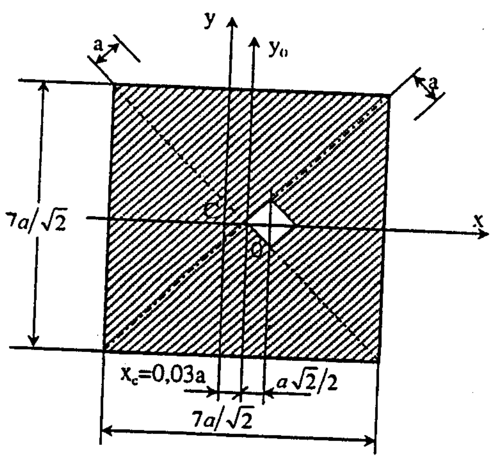
Mômen quán tính đối trục u : $$J_u = h^2.F \qquad (4.6)$$

Ở đây u là trục trung tâm bất kỳ, h là khoảng cách từ trục u đến tiếp tuyến với êlip song song với trục u.

II. CÁC BÀI TOÁN GIẢI SẴN

BÀI 1

Một hình phẳng vuông cạnh $7a/\sqrt{2}$ được khoét một lỗ vuông cạnh a = 2 cm (hình 4.1). Hãy xác định trọng tâm c của mặt cắt, hệ trục và mômen quán tính chính trung tâm?



Hình 4.1.

GIẢI

Mặt cắt ngang đối xứng đối với trục x, vậy $y_c = 0$, để xác định x_c, ta chọn hệ trục x_0Oy_0 có gốc tọa độ tại tâm hình vuông lớn :

$$x_c = \frac{\Sigma S_{y0}}{\Sigma F} = \frac{-a^2 . a\sqrt{2}/2}{(7a/\sqrt{2})^2 - a^2} = -0{,}03\,a = -0{,}06\ \text{cm}$$

Hệ trục xcy là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Mômen quán tính chính trung tâm J_x và J_y là :

$$J_x = \frac{(7a/\sqrt{2})^4}{12} - \frac{a^4}{12} = 50{,}02a^4 - 0{,}08a^4 = 799{,}04\ \text{cm}^4.$$

$$J_y = \frac{(7a/\sqrt{2})^4}{12} + \left(7a/\sqrt{2}\right)^2\left(-0{,}03a\right)^2 - \left[\frac{a^4}{12} + a^2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= 50.04a^4 - 0.58a^4 = 49{,}46a^4 = 791{,}36\ \text{cm}^4$$

Trong đó $\frac{a^4}{12}$ là mômen quán tính chính trung tâm của hình vuông nhỏ đối với trục x được suy ra từ công thức xoay trục các mômen quán tính (4.3).

BÀI 2

Hãy xác định vị trí trọng tâm,các trục quán tính chính, mômen quán tính chính và bán kính quán tính đối với hình phẳng chữ L như hình 4.2a.

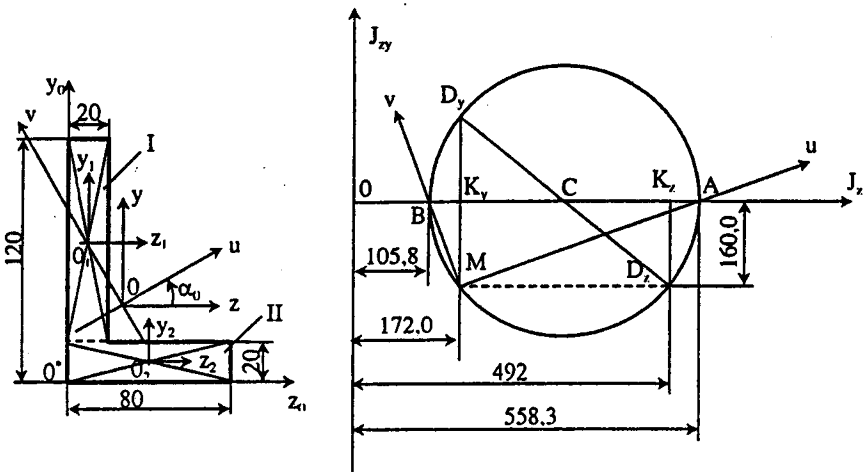
GIẢI

Tọa độ trọng tâm "O" của hình trong hệ tọa độ y_0z_0 :

$$z_0 = \frac{S_{y0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{20 + 64}{20 + 16} = \frac{84}{36} = 2{,}33\ \text{cm},$$

$$y_0 = \frac{S_{z0}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{140 + 16}{20 + 16} = \frac{156}{36} = 4{,}33\ \text{cm}$$

Qua trọng tâm "O" ta lập hệ trục zOy // $z_0O^*y_0$ và chia hình đã cho thành các hình đơn giản I và II (hình 4.2a), sau đó qua trọng tâm của các hình này ta lập các trục tọa độ z_1, y_1 và z_2, y_2 song song với các cạnh O^*z_0 và O^*y_0.



Hình 4.2.

Do đó :

$$J_{z_1}^{(I)} = \frac{2 \,.\, 10^3}{12} = 166{,}7 \text{ cm}^4 \quad ; \qquad J_{y_1}^{(I)} = \frac{10 \text{ x } 2^3}{12} = 6{,}7 \text{ cm}^4$$

$$J_{z_2}^{(II)} = \frac{8 \text{ x } 2^3}{12} = 5{,}33 \text{ cm}^4 \quad ; \qquad J_{y_2}^{(II)} = \frac{2 \,.\, 8^3}{12} = 85{,}3 \text{ cm}^4$$

Theo công thức chuyển trục song song (4.2), ta tính được :

$$J_z^{(I)} = J_{z_1}^{(I)} + F_{(I)} \,.\, a_{(I)}^2 = 166{,}7 + 20 \,.\, 2{,}67^2 = 308{,}1 \text{ cm}^4,$$

$$J_{zy}^{(I)} = J_{z_1y_1}^{(I)} + F_{(I)}\, a_{(I)}\, b_{(I)} = 0 - 20 \,.\, 2{,}67 \,.\, 1{,}33 = -71 \text{ cm}^4.$$

Tương tự ta có :

$$J_y^{(I)} = 42{,}1 \text{ cm}^4,$$

$$J_z^{(II)} = 182{,}7 \text{ cm}^4 \;;\; J_y^{(II)} = 129{,}9 \text{ cm}^4 \;;\; J_{zy}^{(II)} = -89 \text{ cm}^4$$

Do đó, mômen quán tính của toàn hình đối với hệ trục qua trọng tâm "O" là :

$$J_z = J_z^{(I)} + J_z^{(II)} = 309{,}3 + 182{,}7 = 492 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_y^{(I)} + J_y^{(II)} = 42{,}1 + 129{,}9 = 172 \text{ cm}^4$$

$$J_{zy} = J_{zy}^{(I)} + J_{zy}^{(II)} = -71 + (-89) = -160 \text{ cm}^4.$$

Góc nghiêng của các trục quán tính chính trung tâm uOv so với hệ zOy được xác định theo công thức (4.4) :

$$tg2\alpha_0 = \frac{2\,J_{zy}}{J_y - J_z} = \frac{-2 \,.\, 160}{172 - 492} = 1 \Rightarrow \alpha_0 = 22^o30'$$

Các mômen quán tính chính trung tâm theo (4.4), khi ấy là :

$$J_u = \frac{1}{2}\left[\left(J_z + J_y\right) + \sqrt{\left(J_z - J_y\right)^2 + 4\,J_{zy}^2}\,\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(664 + 452{,}5\right) = 558{,}3 \text{ cm}^4$$

$$J_v = \frac{1}{2}\left[\left(J_z + J_y\right) - \sqrt{\left(J_z - J_y\right)^2 + 4\,J_{zy}^2}\,\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(664 - 452{,}5\right) = 105{,}8 \text{ cm}^4$$

Bán kính quán tính đối với trục Δ nào đó và ký hiệu là i_Δ :

$$J_\Delta = \int_F y^2 dF = F\, i_\Delta^2$$

Vì vậy :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}} = \sqrt{\frac{558{,}3}{36}} = 3{,}94 \text{ cm},$$

$$i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}} = \sqrt{\frac{105{,}8}{36}} = 1{,}71 \text{ cm}.$$

Nghiệm của bài toán được giải bằng vòng tròn Mohr quán tính cho trên hình 4.2b.

BÀI 3

Một hình phẳng hình chữ Z có kích thước tính bằng cm như hình 4.3a. Hãy xác định trọng tâm, hệ trục và các mômen quán tính chính trung tâm.

GIẢI

Đối với mặt cắt không có trục đối xứng, muốn xác định mômen quán tính chính trung tâm, cần xác định các mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm, rồi dùng công thức xoay trục của mômen quán tính để xác định hệ trục chính và các mômen quán tính chính trung tâm.

Xác định trọng tâm

Lấy gốc tọa độ tại trọng tâm của hình chữ nhật đứng, lập hệ trục x_0, y_0, ta tính :

$$x_c = \frac{\Sigma S_{yo}}{\Sigma F} = \frac{2.4(-3) + 6.2.4}{2.4 + 2.14 + 2.6} = 0{,}5 \text{ cm}$$

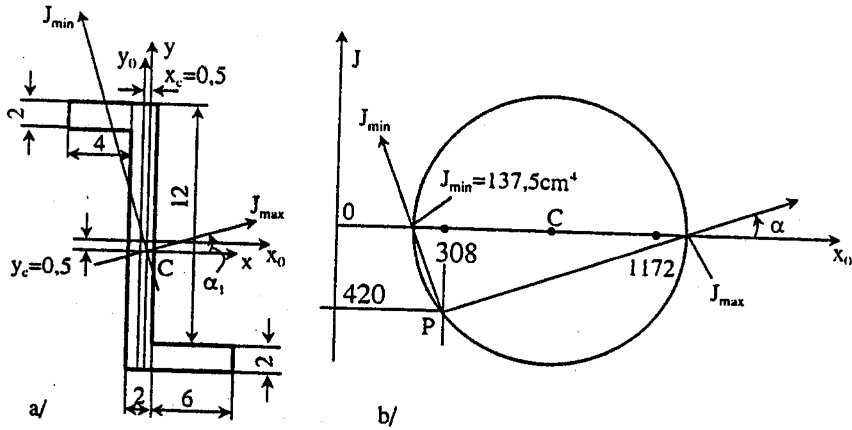
$$y_c = \frac{\Sigma S_{xo}}{\Sigma F} = \frac{4.2.6 + 6.2.(-6)}{2.4 + 14.2 + 2.6} = -0{,}5 \text{ cm}$$

Lập hệ trục trung tâm xCy (hình 4.3a) :

Tính các mômen quán tính đối với hệ trung tâm xCy :

$$J_x = \frac{6.2^3}{12} + 6.2.(5{,}5)^2 + \frac{2.14^3}{12} + 2.14\,(0{,}5)^2 -$$

$$- \frac{4.2^3}{12} + 2.4.(6{,}5)^2 = 1172 \text{ cm}^4$$



Hình 4.3

$$J_y = \frac{2.6^3}{12} + 2.6.(3{,}5)^2 + \frac{14.2^3}{12} + 14.2\,(0{,}5)^2 +$$

$$+ \frac{2.4^3}{12} + 2.4\,(3{,}5)^2 = 308 \text{ cm}^4.$$

$$J_{xy} = 2.6\,(3{,}5)\,(-5{,}5) + 14.2\,(-0{,}5)\,(-0{,}5) + 4.2\,(-3{,}5)\,(6{,}5) = -420 \text{ cm}^4$$

Tính mômen quán tính chính trung tâm :

Các mômen quán tính J_{max}, J_{min} và phương chính tính từ các công thức (4.4) :

$$J_{\substack{max\\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1172 + 308}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1172 - 308}{2}\right)^2 + 420^2} \Longrightarrow$$

$J_{max} = 1342{,}5 \text{ cm}^4$; $J_{min} = 137{,}5 \text{ cm}^4$

Phương chính J_{max} được xác định

$$tg\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{max}} = \frac{-420}{308 - 1342{,}5} = 0{,}41 \; ; \quad \alpha_1 = 22^o20'$$

Vòng tròn quán tính và các phương chính được vẽ trên hình 4.3a,b.

BÀI 4

Một hình phẳng hình chữ z có kích thước như hình 4.4. Hãy tính các mômen quán tính chính, hệ trục chính trung tâm, êlip quán tính và mômen quán tính trung tâm đối với trục trung tâm bất kỳ.

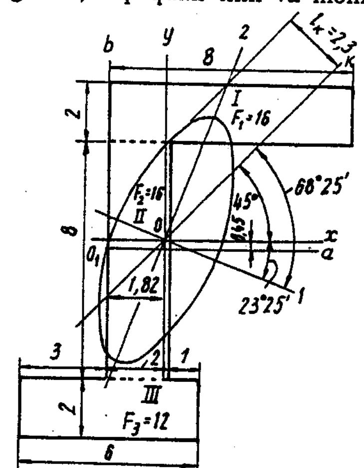
GIẢI

Ta phải chia hình đã cho ra thành 3 hình đơn giản I, II, III.

a) Xác định tọa độ trọng tâm.

Lập hệ trục O_1a và O_1b. Trong đó O_1a đi qua trọng tâm hình II.

$$a_0 = \frac{16 \times 4 + 16 \times 1}{16 + 16 + 12} = 1{,}82 \text{ cm}$$



Hình 4.4.

$$b_0 = \frac{16 \times 5 - 12 \times 5}{16 + 16 + 12} = 0,45 \text{ cm}$$

Từ a_0, b_0 nhận được lập hệ trục trung tâm xOy như hình 4.4.

b) Tính mômen quán tính đối với hệ trục xOy.

$$J_x = \left(\frac{8 + 2^3}{12} + 4,55^2 \times 16\right) + \left(\frac{2 \times 8^2}{12} + 0,45^2 \times 16\right) +$$

$$+ \left(\frac{6 \times 2^3}{12} + 5,45^2 \times 12\right) = 785,6 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \left(\frac{2 + 8^3}{12} + 2,18^2 \times 16\right) + \left(\frac{8 \times 2^3}{12} + 0,82^2 \times 16\right) +$$

$$+ \left(\frac{2 \times 6^3}{12} + 1,82^2 \times 12\right) = 253,2 \text{ cm}^4$$

c) Tính mômen quán tính ly tâm đối với hệ trục xOy.

$$J_{xy} = 4,55 \times 2,18 \times 16 + (-0,82)(-0,45) \times 16 + (-5,45)(-1,82) \times 12$$

$$= 283,6 \text{ cm}^4$$

d) Tính mômen quán tính chính :

$$J_{max} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2} = \frac{785,6 + 253,2}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{(785,6 - 253,2)^2 + 4 \times 283,6^2} = 908,2 \text{ cm}^4$$

$$J_{min} = 519,4 - 388,8 = 130,6 \text{ cm}^4.$$

e) Tính góc nghiêng của các trục chính :

$$\text{tg}\, 2\alpha_0 = -\frac{2 \times 283,6}{785,6 - 253,2} = -1,065 \Rightarrow \alpha_0 = -23^o25'$$

Hệ trục 102 trên hình 4.4 là hệ trục quán tính chính trung tâm.

g) Tính các bán kính quán tính và êlip quán tính :

$$i_{max} = \frac{908,2}{44} = 4,54 \text{ cm} \; ; \; i_{min} = \frac{130,6}{44} = 1,72 \text{ cm}$$

Theo các giá trị i_{max}, i_{min} ta dựng được êlip quán tính như hình 4.4.

h) Tính mômen quán tính đối với trục trung tâm bất kỳ OK nhờ êlip quán tính.

Ví dụ, tính mômen quán tính đối với trục OK nghiêng 45^o so với phương ngang và $68^o25'$ so với trục 01. Gọi l_K là khoảng cách giữa trục OK và tiếp tuyến của êlip song song với trục này. Bằng cách đo trực tiếp ta có:

$$l_K \approx 2,3 \text{ cm}.$$

Do đó :

$$J_K = l_K^2 . F = 2,3^2 . 44 = 232,8 \text{ cm}^4.$$

BÀI 5

Xác định trọng tâm của tam giác cong ACB (hình 4.5).

GIẢI

Trục Ou qua C là trục đối xứng của diện tích tam giác cong ACB.

Vì vậy $x_G = y_G$.

Ở đây ta có :

Mômen tĩnh của ACB đối với trục Ox là :

$$S_x = S_x^1 - S_x^2 = y_{G_1} F_1 - S_x^2 \qquad (1)$$

Trong đó : $y_{G_1} = \frac{r}{2}$; $F_1 = r^2$

Gọi S_x^3 là mômen tĩnh của diện tích nửa hình tròn đường kính DB đối với trục x, ta có : $S_x^3 = \frac{2 r^3}{3}$ (hình 4.5).

Khi đó ta có : $S_x^3 = 2 S_x^2 = \frac{2 r^3}{3}$ (2)

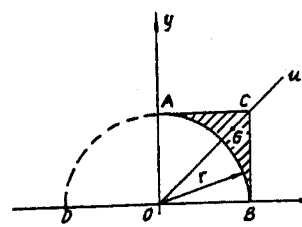
$$S_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2r^3}{3} = \frac{r^3}{3} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta có :

$$S_x = \frac{r}{2} \cdot r^2 - \frac{r^3}{3} = \frac{r^3}{6} \qquad (4)$$

Diện tích của hình tam giác cong :

$$F = F_1 - F_2 = r^2 - \frac{\pi r^2}{4} = \frac{(4 - \pi) r^2}{4} \qquad (5)$$



Hình 4.5.

Tọa độ trọng tâm của hình tam giác cong được xác định theo công thức :

$$x_G = y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{r^3}{6}\cdot\frac{4}{(4-\pi)\,r^2} = \frac{2}{3(4-\pi)}\cdot r \approx 0{,}76\,r$$

BÀI 6

Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy hình thang cân như trên hình vẽ (hình 4.6).

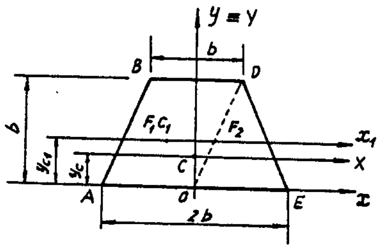
GIẢI

Hình thang cân có một trục đối xứng Oy. Do đó :

$$x_C = 0$$

Tung độ trọng tâm y_C được xác định bằng công thức :

$$y_C = \frac{S_x}{F}$$



Hình 4.6.

Ta chia hình thang cân thành một hình bình hành ABDO diện tích (F_1) và một hình tam giác ODE diện tích (F_2). Khi đó mômen tĩnh của hình thang đối với trục x :

$$S_x = S_x^1 + S_x^2 = F_1\cdot y_{C_1} + F_2\cdot y_{C_2} = b^2\cdot\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\,b^2\cdot\frac{b}{3}$$

$$S_x = \frac{2\,b^3}{3}$$

Diện tích mặt cắt ngang :

$$F = \frac{(b+2b)\,b}{2} = \frac{3b^2}{2}$$

Vậy : $$y_C = \frac{2b^3}{3}\cdot\frac{2}{3b^2} = \frac{4b}{9}$$

Hệ trục XCY là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Gọi C_1x_1 là trục quán tính trung tâm của diện tích F_1 (C_1x_1//x). Áp dụng công thức chuyển trục song song của các mômen quán tính từ trục x_1 (trục trung tâm) sang trục x ta có :

$$J_x^1 = J_{x_1}^1 + y_{C_1}^2\cdot F_1 = \frac{b^4}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2\cdot b^2 = \frac{b^4}{3}$$

Mômen quán tính của cả hình thang đối với trục x :

$$J_x = J_x^1 + J_x^2 = \frac{b^4}{3} + \frac{b\,.\,b^3}{12} = \frac{5b^4}{12}$$

Áp dụng công thức chuyển trục song song của các mômen quán tính về trục X (trục trung tâm của hình thang) từ trục x chứa AE đối với diện tích hình thang F ta có :

$$J_x = J_X + 2y_C S_X + y_C^2 F = J_X + y_C^2 F$$

Thay số vào ta có :

$$\frac{5b^4}{12} = J_X + \left(\frac{4b}{9}\right)^2\cdot\frac{3b^2}{2}$$

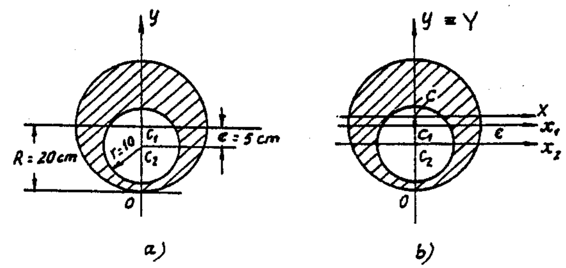
Suy ra : $$J_X = \frac{5b^4}{12} - \left(\frac{4b}{9}\right)^2\cdot\frac{3b^2}{2} = \frac{13b^4}{108}$$

BÀI 7

Tính trọng tâm và tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt như trên hình 4.7a.

GIẢI

Gọi hình tròn có bán kính R là hình 1, hình tròn có bán kính r là hình 2. Ta chọn hệ trục C_1x_1y với C_1 là tâm của hình 1 là hệ trục quy chiếu.



Hình 4.7

Vì trục y là trục đối xứng nên hoành độ trọng tâm mặt cắt $x_C = 0$, y_C được xác định bằng công thức (4.1) :

$$y_C = \frac{S_x}{F}$$

trong đó :

$$S_{x_1} = S_{x_1}^1 - S_{x_1}^2 = y_{C_1}F_1 - y_{C_1}F_2 = 0 - (-5).\pi.r^2 =$$

$$= 5\pi r^2 \approx 1570{,}8\,cm^3$$

$$F = F_1 - F_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) \approx 942{,}5\ cm^2$$

$$y_C = \frac{S_{x_1}}{F} \approx \frac{1570.8}{942.5} \approx 1{,}67\ cm$$

CXY với CY ≡ C_1y là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Các mômen quán tính chính trung tâm của hình (hình 4.7b) :

$$J_X = J_X^1 - J_x^2\ ;\ J_Y = J_Y^1 - J_Y^2$$

Áp dụng công thức chuyển trục song song của các mômen quán tính (4.2), ta có :

$$J_X^1 = J_{x_1}^1 + y_C^2.F_1 = \frac{\pi R^4}{4} + y_C^2.\pi R^2$$

$$J_X^2 = J_{x_2}^2 + (y_C + e)^2.F_2 = \frac{\pi r^4}{4} + (y_C + e)^2.\pi r^2$$

$$J_X = \left(\frac{\pi.20^4}{4} + 1{,}67^2.\pi.20^2\right) - \left[\frac{\pi.10^4}{4} + \left(1{,}67 + 5\right)^2.\pi.10^2\right]$$

$$J_X = 107400\ cm^4$$

$$J_Y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4}\left(20^4 - 10^4\right) \approx 117810\ cm^4.$$

BÀI 8

Một thanh ghép gồm hai thanh thép định hình có mặt cắt ngang như hình 4.8. Xác định các mômen quán tính chính và phương của hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

GIẢI

Số liệu về đặc trưng hình học của thép chữ [số 20 và thép góc 100 x 63 x 10.

[số 20 $h = 200$ mm ; $J_x = 1520\ cm^2$;
$F = 23{,}4\ cm^2$; $Jy = 113\ cm^4$
$z_0 = 2{,}07$ cm.

L 100 x 63 x 10 $F = 15{,}5\ cm^2$; $Jy = 154\ cm^4$
$x_0 = 3{,}4$ cm ; $Jx = 47{,}1\ cm^4$
$y_0 = 1{,}58$ cm ; $Ju = Jmin = 28{,}3\ cm^4$.

Ta có đối với thép góc (hình 4.8b).

$$J_v = J_{max} = J_x + J_y - J_{min} = 47{,}1 + 154 - 28{,}3 = 172{,}8\ cm^4$$

Mômen quán tính ly tâm J_{xy} có thể tính được từ mối quan hệ :

$$tg\,\alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{max}}\ ;\quad tg\,\alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{min}} = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$$

hay : $$tg\,\alpha_1.tg\,\alpha_2 = -1 = \frac{J_{xy}^2}{(J_y - J_{max}).(J_y - J_{min})}$$

Vậy :

$$J_{xy} = -\sqrt{-(J_y - J_{max}).(J_y - J_{min})}$$

$$= -\sqrt{-(154 - 172{,}8).(154 - 28{,}3)} = -48{,}61\ cm^4$$

Ta lấy dấu trừ cho J_{xy} vì trục chính max nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba.

1. Xác định trọng tâm mặt cắt (hình 4.8c).

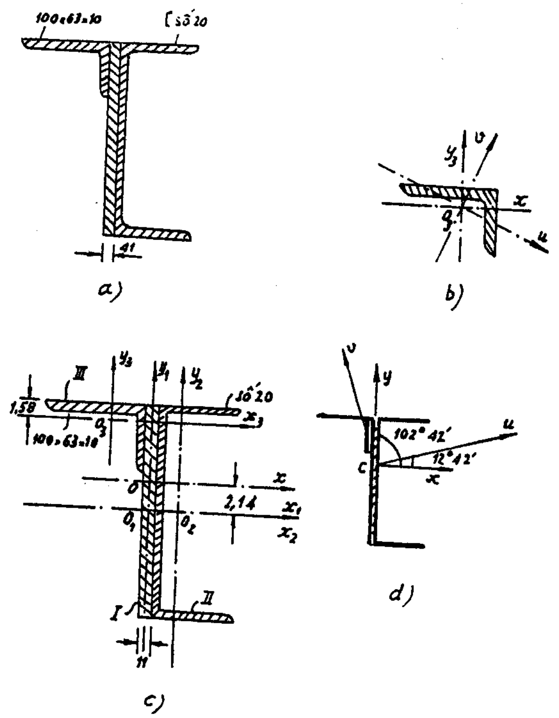
Ta chọn hệ trục $O_1x_1y_1$ làm hệ trục quy chiếu. Vị trí tọa độ trọng tâm mặt cắt đối với hệ trục tọa độ này được xác định theo (4.1) :

$$y_C = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{8{,}42.15{,}5}{22 + 15{,}5 + 23{,}4} = 2{,}14\ cm$$

$$X_C = \frac{S_{x_1}}{F} = \frac{2{,}62.23{,}4 + (-3{,}95).15{,}5}{22 + 15{,}5 + 23{,}4} \approx 0\ cm$$

Với $y_C = 2{,}14$ cm ta lập hệ trục quán tính trung tâm Oxy_1. Tọa độ trọng tâm của các hình thành phần đối với hệ trục trung tâm là :

Hình I :	$x = 0$	$y = -2{,}14$ cm
Hình II :	$x = 2{,}62$ cm	$y = -2{,}14$ cm
Hình III :	$x = -3{,}95$ cm	$y = 6{,}28$ cm.



Hình 4.8.

2. Mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm

Áp dụng công thức chuyển trục song song của các mômen quán tính (4.2), ta có :

$$J_x = \sum J_x^i = \frac{1{,}1 \,.\, 20^3}{12} + 2{,}14^2 \,.\, 1{,}1 \,.\, 20 + 1520 + 2{,}14^2 \,.\, 23{,}4 +$$

$$+ 47{,}1 + 6{,}28^2 \,.\, 15{,}5 = 3119{,}69 \text{ cm}^2$$

$$J_{y_1} = \sum J_j^i = \frac{20 \,.\, 1{,}1^3}{12} + 113 + 2{,}62^2 \,.\, 23{,}4 + 154 +$$

$$+ 3{,}95^2 \,.\, 15{,}5 = 671{,}64 \text{ cm}^4$$

$$J_{xy_1} = \sum J_{xy}^i = 0 + 2{,}62 \,.\, (-2{,}14) \,.\, 23{,}4 + (-3{,}95) \,.$$

$$.\, 6{,}28 \,.\, 15{,}5 - 48{,}61 = -544{,}30 \text{ cm}^4.$$

3. Phương của hệ trục quán tính chính trung tâm (hình 4.8d).

Theo công thức (4.4), ta có :

$$\text{tg}\, 2\alpha = -\frac{2 J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{-2 \,.\, (-544{,}3)}{3119{,}6 - 671{,}64} = 0{,}475$$

$$2\alpha = 25^o 24' + k \,.\, 180^o$$

$$\alpha_1 = 12^o 42' \; ; \quad \alpha_2 = 102^o 42'$$

4. Các mômen quán tính chính trung tâm.

Từ công thức (4.4), ta tính được :

$$J_{\substack{max \\ min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$= \frac{3119{,}69 + 671{,}64}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3119{,}69 - 671{,}64}{2}\right)^2 + \left(544{,}3\right)^2}$$

$$J_{max} = 3253{,}67 \text{ cm}^4 \; ; \; J_{min} = 555{,}67 \text{ cm}^4.$$

BÀI 9

Cho các mặt cắt ngang như hình 4.9a,b. Hãy xác định :

a) Mômen quán tính chính trung tâm đối với trục Ox.

b) Hệ trục quán tính chính trung tâm và các mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang hình 4.9b.

GIẢI

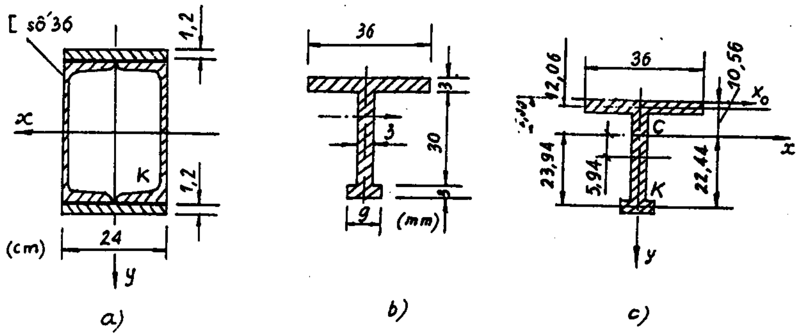
a) Tính mômen quán tính trung tâm đối với trục Ox.

Tra bảng thép chữ [số 36, ta có : h = 36 cm, d = 0,75 cm ; t = 1,26 cm; J_x = 10820 cm^4 . S_x = 350 cm^3.

Mặt cắt ghép có hai trục đối xứng xOy (hình 4.9a). Áp dụng công thức chuyển trục song song (4.2), ta tính mômen quán tính của mặt cắt ngang như sau :

$$J_x^* = 2\left[J_x + 24 \cdot \frac{1{,}2^3}{12} + \left(18{,}6\right)^2 . 24 \,.\, 1{,}2 \right] = 41574{,}2 \text{ cm}^4$$

b) Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm và các mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang (hình 4.9b).



Hình 4.9

Lấy hệ trục x_0y làm hệ trục quy chiếu, ta tính :

$$S_{x_0} = \frac{36\,.\,3^2}{2} + 30\,.\,3\,.\left(3 + \frac{30}{2}\right) + 3\,.\,9\,.\left(33 + \frac{3}{2}\right) = 2713{,}5 \text{ mm}^3$$

$$F = 36\,.\,3 + 30\,.\,3 + 9\,.\,3 = 225 \text{ mm}^2$$

$$y_{OC} = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{2713{,}5}{225} = 12{,}06 \text{ mm.}$$

Trọng tâm C của mặt cắt có tọa độ (0, 12,06 mm). Qua C dựng trục cx// x_0 ta có hệ trục quán tính chính trung tâm xcy.

Mômen quán tính đối với trục quán tính chính trung tâm cx :

$$J_x = \left(\frac{36 \times 3^3}{12} + 10{,}56^2 \times 36 \times 3\right) + \left(\frac{30^3 \times 3}{12} + 5{,}94^2 \times 30 \times 3\right) +$$

$$+ \left(\frac{9 \times 3^3}{12} + 22{,}44^2 \times 9 \times 3\right) = 35666{,}19 \text{ mm}^4.$$

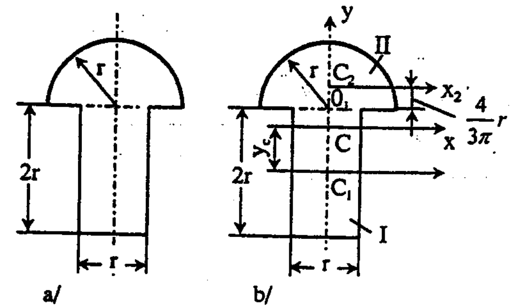
BÀI 10

Hãy xác định trọng tâm và mômen quán tính chính trung tâm của một mặt cắt như hình 4.10a.

GIẢI

Ta chia hình phẳng đã cho thành hai hình đơn giản I và II như hình 4.10b. Gọi C_1 là trọng tâm hình I và lập hệ trục C_1x_1y. Gọi C là trọng tâm

của hình đã cho (hình 4.10). Tọa độ trọng tâm x_C, y_C của C được xác định như sau :



Hình 4.10

Vì trục y là trục đối xứng nên $x_C = 0$, y_C xác định bằng công thức :

$$y_C = \frac{S_{x_1}}{F}$$

trong đó :

$$S_{x_1} = \frac{1}{2}\pi r^2\left(\frac{4}{3\pi}r + r\right) = 0{,}712\,\pi\, r^3$$

$$F = \frac{\pi r^2}{2} + 2r\,.\,r = 3{,}5708\, r^2$$

Vậy : $$y_C = \frac{0{,}712\,\pi\, r^3}{3{,}5708\, r^2} = 0{,}627\, r$$

Mômen quán tính chính trung tâm của hình

$$J_x = J_x^I + J_x^{II}$$

$$J_x^I = J_{x_1}^I + a^2F = \frac{r(2r)^3}{12} + (0{,}627\, r)^2 2r^2 = 1{,}456\, r^4$$

$$J_x^{II} = J_{x_2}^{II} + b^2F$$

với $$J_{x_2}^{II} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi d^4}{64} - \left(\frac{4}{3\pi}r\right)^2 \frac{\pi r^2}{2} = 0{,}035\,\pi r^4$$

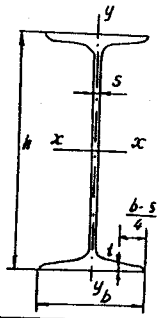
nên $$J_x^{II} = 0{,}035\,\pi r^4 + (0{,}797 r)^2\,\frac{\pi r^2}{2} = 1{,}11\, r^4$$

Vậy $$J_x = 1{,}456 r^4 + 1{,}11 r^4 = 2{,}566 r^4$$

$$J_y = \frac{1}{1}\,\frac{\pi d^4}{64} + \frac{2r\,.\,r^3}{10} \approx 0{,}566\, r^4$$

Bảng 4.1

I. Thép hình I cán nóng (theo ГОСТ 8239–89)



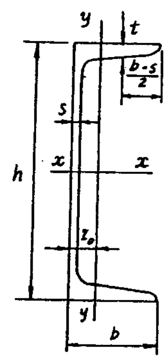
h – chiều cao tiết diện ;
b – chiều rộng của cánh ;
s – bề dày của thân ;
t – chiều dày cánh ;
A – diện tích tiết diện ;

J – mômen quán tính ;
W – mômen chống uốn ;
S – mômen tĩnh của nửa tiết diện ;
r – bán kính quán tính ;
m – khối lượng trên một mét dài.

N°	m, kg/m	Kích thước, mm				A, cm^2	J_x, cm^4	W_x, cm^3	r_x, cm	S_x, cm^3	J_y, cm^4	W_y, cm^3	r_y, cm
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,50	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,70	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	15,90	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	18,40	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	21,00	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	24,00	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	27,30	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	31,50	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	36,50	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	42,20	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	48,60	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	57,00	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	66,50	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231,0	18,109	708.0	808,0	101,00	3,09
50	78,50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	92,60	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	108,00	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Bảng 4.2

II. Thép hình U cán nóng (theo ГОСТ 8239–89)



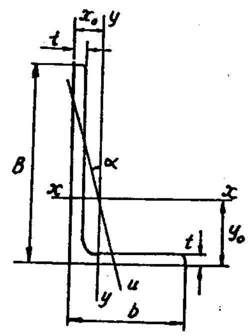
h – chiều cao tiết diện ;
b – chiều rộng của cánh ;
s – bề dày của thân ;
t – chiều dày cánh ;
A – diện tích tiết diện ;
z_0 – khoảng cách từ trục y đến mép ngoài của thân.

J – mômen quán tính ;
W – mômen chống uốn ;
S – mômen tĩnh của nửa tiết diện ;
r – bán kính quán tính ;
m – khối lượng trên một mét dài ;

N°	m kg/m	Kích thước				A, cm^2	J_x, cm^4	W_x, cm^3	r_x, cm	S_x, cm^3	J_y, cm^4	W_y, cm^3	r_y, cm	Z_0, cm
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	84	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,70

Bảng 4.3

III. Thép góc không đều cạnh cán nóng (theo ГОСТ 8239–89)



B – chiều rộng cánh lớn ; J – mômen quán tính ;

b – chiều rộng cánh nhỏ ; A – diện tích tiết diện ;

t – bề dày cánh ; J_{xy} – mômen quán tính ly tâm ;

r – bán kính quán tính ; r – khối lượng trên một mét dài ;

x_0, y_0 – khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh ;

α – góc nghiêng của trục chính trung tâm.

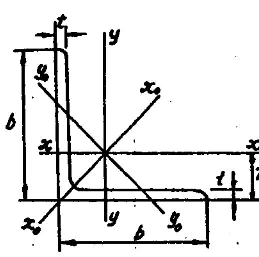
N°	m, kg/m	Kích thước, mm			A, cm^2	J_x, cm^4	r_x, cm	J_y, cm^3	r_y, cm	$l_{u\,min}$, cm	$r_{u\,min}$ cm	tgα	J_{xy}, cm^4	x_0, cm	y_0, cm
		B	b	t											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0.401	2.59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,39	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97

Tiếp bảng 4.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,7	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

Bảng 4.4

IV. Thép góc đều cạnh cán nóng (theo ГОСТ 8239–89)



b – chiều rộng cánh ; J – mômen quán tính ;

t – bề dày cánh ; A – diện tích tiết diện ;

r – bán kính quán tính ; J_{xy} – mômen quán tính ly tâm ;

m – khối lượng trên một mét dài ;

z_0 – khoảng cách từ trọng tâm đến mép ngoài của cánh.

N°	m, kg/m	Kích thước		A, cm^2	J_x, cm^4	r_x, cm	$J_{xo\,max}$ cm^4	$r_{xo\,max}$ cm	$J_{yo\,min}$ cm^4	$r_{yo\,min}$ cm	J_{yx} cm^4	z_0 cm
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,51	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,11	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4.96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78

Tiếp bảng 4.4

N°	m, kg/m	Kích thước b	Kích thước t	A, cm²	J_x, cm⁴	r_x, cm	$J_{xo\,max}$ cm⁴	$r_{xo\,max}$ cm	$J_{yo\,min}$ cm⁴	$r_{yo\,min}$ cm	J_{yx} cm⁴	z_0 cm
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	7,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	110	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	31 5	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,4	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9

Tiếp bảng 4.4

N°	m, kg/m	Kích thước b	Kích thước t	A, cm²	J_x, cm⁴	r_x, cm	$J_{xo\,max}$ cm⁴	$r_{xo\,max}$ cm	$J_{yo\,min}$ cm⁴	$r_{yo\,min}$ cm	J_{yx} cm⁴	z_0 cm
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,53	776	4,89

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. С. Д. Пономарев и Других,Расчеты На Прочность В Машиностроении, T_1, Машгиз – 1956.
2. А. А. Yманский, Строительная Механика Самолета, М. 1961.
3. В. И. Феодосьев,Сопротивление Материалов. М. 1970.
4. В. И. Феодосьев, Избранные Задачи И Вопросы по Сопротивлению Материалов. М. 1973.
5. I. Mirolioubov et les autres, Résistance des materiaux – Manuel de résolution des problemes – Mir, 1977.
6. Serge Laroze, Résistance des matériaux et structures T_1, Eyrolles Masson, 1984.
7. Williams Nash, Strength of Materials. 4^{th} Editions, Mc Graw–Hill. New York, 1998.
8. Đặng Việt Cương và đồng nghiệp,

   Sức bền vật liệu T_1, T_2. NXB Khoa học và Kỹ thuật. 2002.
9. Nguyễn Trọng Hiệp – Chi tiết máy. NXB Giáo dục, 2003.
10. Hội Cơ học Việt Nam, Sức bền vật liệu – đề thi – đáp án 1989–2003 và bài tập chọn lọc. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội – 2003.
11. Thái Thế Hùng và đồng nghiệp,

    Bài tập Sức bền vật liệu, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2004.
12. Lều Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên,

    Bài tập cơ học kết cấu T_1. NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2004.
13. Đặng Việt Cương,

    Cơ ứng dụng trong kỹ thuật, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2005.
14. Đặng Việt Cương, Cơ học kết cấu. NXB Khoa học và kỹ thuật, 2005.

MỤC LỤC