PHẦN THỨ BA: ĐỘNG LỰC HỌC

Mở đầu

1. Động lực học là phần cuối cùng của giáo trình Cơ học lý thuyết, nghiên cứu chuyển động của chất điểm và hệ chất điểm cơ học (cơ hệ) dưới tác dụng của lực.

Chất điểm là điểm hình học mang khối lượng, cơ hệ là tập hợp hai hay nhiều chất điểm mà chuyển động của chất điểm bất kỳ bị ràng buộc bởi chuyển động của các chất điểm còn lại thuộc cơ hệ. Vật rắn tuyệt đối là trường hợp đặc biệt của cơ hệ, nó gần với thực tế và có áp dụng nhiều trong kỹ thuật.

2. Lực là đại lượng đo tác dụng cơ học của vật thể này lên vật thể khác, được đặc trưng bằng đại lượng véctơ, ký hiệu: $\overrightarrow{F}$. Trong phần Tĩnh học ta gặp lực không biến đổi (lực tĩnh). Trong phần động lực học, ta gặp lực biến đổi, hoặc phụ thuộc vào thời gian t (như lực kéo của đầu máy, áp lực của động cơ lên nền – móng), hoặc phụ thuộc vào vị trí $\vec{r}$ (như lực hấp dẫn, lực đàn hồi của lò xo), hoặc phụ thuộc vào vận tốc (lực cản của môi trường). Nói chung, trong trường hợp tổng quát lực $\overrightarrow{F}$ là hàm của thời gian, vị trí, vận tốc và đương nhiên có thể cả gia tốc. Ta có thể biểu thị:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

Hệ lực tác dụng lên cơ hệ có hai cách phân loại: Hoặc chia thành nội lực và ngoại lực; hoặc chia thành lực hoạt động (lực chủ động) và phản lực liên kết.

- Nội lực là các lực tác dụng tương hỗ giữa các chất điểm thuộc cơ hệ, ký hiệu $\overrightarrow{F}^i$. Ngoại lực là lực ngoài cơ hệ tác dụng lên các chất điểm thuộc cơ hệ khảo sát, ký hiệu $\overrightarrow{F}^e$.

- Phản lực liên kết là lực đặc trưng cho tác dụng của các vật gây liên kết lên các chất điểm thuộc cơ hệ khảo sát, ký hiệu $\overrightarrow{N}$. Các lực không phải là phản lực liên kết tác dụng lên cơ hệ khảo sát gọi là lực hoạt động, ký hiệu $\overrightarrow{F}^a$.

3. Năm 1687, I. Niutơn xuất bản cuốn "Những nguyên lý toán học của triết học tự nhiên". Công trình này trình bày cơ sở của Cơ học cổ điển. Ông đã đưa ra các khái niệm lực, gia tốc và chứng minh rằng chuyển động của các hành tinh có thể được giải thích bằng tương tác hấp dẫn. Sự tiếp cận ngày càng chặt chẽ về mặt định lượng của cơ học được tiếp tục suốt trong các thế kỷ XVI – XIX và tạo thành Lý thuyết Cơ học (Cơ học cổ điển) áp dụng cho mọi vật thể thông thường.

4. Nội dung nghiên cứu:

Nội dung nghiên cứu của phần động lực học là giải quyết hai bài toán cơ bản.

a. Bài toán I (bài toán thuận): Cho quy luật chuyển động của chất điểm hay cơ hệ, xác định lực tác dụng lên chúng.

b. Bài toán II (bài toán ngược): Cho lực tác dụng lên chất điểm hay cơ hệ và các điều kiện ban đầu của chuyển động, xác định quy luật chuyển động của chất điểm hay cơ hệ đó.

Như sẽ thấy rõ trong chương tiếp theo, do các lực được biểu diễn theo hàm số của vị trí, các vận tốc, gia tốc và thời gian, nên chuyển động của chất điểm, cơ hệ được mô tả bởi một hệ phương trình vi phân cấp II. Ta thừa nhận rằng: Với các điều kiện ban đầu (các vị trí và vận tốc) cho trước thì nghiệm là duy nhất. Như vậy, nghiệm của các phương trình vi phân và thỏa mãn các điều kiện ban đầu sẽ là nghiệm của bài toán cơ học vì tính duy nhất.

CHƯƠNG I: CÁC ĐỊNH LUẬT CƠ BẢN CỦA CƠ HỌC NIUTƠN - PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

1.1. Các định luật của cơ học Niutơn

1.1.1. Định luật 1 (Định luật quán tính)

Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

$$\text{Nếu } \overrightarrow{F} = 0 \text{ thì } \overrightarrow{V} = \overrightarrow{const}$$

Chất điểm không chịu bất kỳ một tác dụng cơ học nào được gọi là cô lập và chuyển động thẳng đều của nó được dặc trưng bởi một véctơ vận tốc không đổi. Từ đó có thể suy ra:

Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm gọi là *chuyển động theo quán tính* của nó (chất điểm cân bằng). Quán tính ở đây được hiểu là sức cản lại sự biến đổi vận tốc.

Như vậy, Định luật 1 khẳng định rằng: Lực là nguyên nhân phá vỡ trạng thái cân bằng của chất điểm.

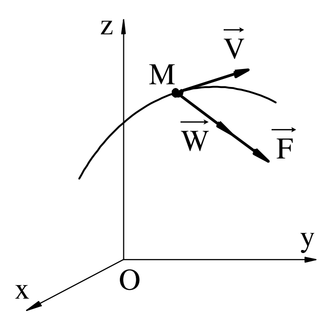
1.1.2. Định luật 2 (Định luật cơ bản của động lực học)

Dưới tác dụng của lực, chất điểm chuyển động có gia tốc cùng hướng với hướng của lực và có độ lớn tỷ lệ với độ lớn của lực.

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{W} \qquad (1\text{-}1)$$

$$F = m.W \qquad (1\text{-}2)$$

Trong đó: $\overrightarrow{W}$ là gia tốc của chất điểm nhận được dưới tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$; m là khối lượng của chất điểm, là đại lượng dương, bất biến theo thời gian và không phụ thuộc vào hệ quy chiếu.



Hình 1-1

Từ định luật 2, ta thấy:

– Lực là nguyên nhân làm cho chất điểm chuyển động có gia tốc.

– Định luật đã thiết lập mối quan hệ định lượng giữa các đại lượng cơ bản của cơ học: Lực, khối lượng và gia tốc (mối quan hệ giữa không gian, thời gian và vật chất).

– Nếu tác dụng lên chất điểm một lực có trị số không đổi, từ (1-2) suy ra: Khối lượng của chất điểm càng lớn thì trị số của gia tốc càng nhỏ, nghĩa là càng khó thay đổi vận tốc của nó. Từ đó cho thấy khối lượng là độ đo quán tính của chất điểm.

– Trường hợp chất điểm chịu tác dụng đồng thời một số lực $\left(\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, ..., \overrightarrow{F}_n\right)$ thì có thể thay chúng bởi hợp lực $\vec{R}$. Hệ thức (1-1) trở thành:

$$m\overrightarrow{W} = \vec{R} \quad \text{hay} \quad m\overrightarrow{W} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k \tag{1-3}$$

(1-3) gọi là *phương trình cơ bản của động lực học chất điểm* dưới tác dụng của nhiều lực đồng thời. Hệ thức (1-3) là cơ sở để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động, các định lý tổng quát của động lực học và những nguyên lý cơ học sau này.

– Ở lân cận bề mặt trái đất, một vật thể có khối lượng m phải chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$. Theo hệ thức (1-1) thì:

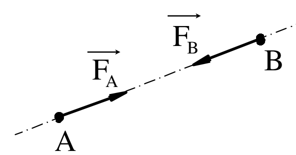
$$\overrightarrow{P} = m\vec{g} \tag{1-4}$$

Trong gần đúng bậc nhất, trọng lượng P bằng trị số của lực hút trái đất tác dụng lên chất điểm. Lực này gần như đồng đều trong một phạm vi mà khoảng cách tới mặt đất còn nhỏ so với bán kính trái đất. Giá trị của g xấp xỉ g ≈ 9,81 m/s^2, đường thẳng đứng là phương của $\vec{g}$.

1.1.3. Định luật 3 (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm là hai lực có cùng giá, cùng cường độ và ngược chiều nhau".

Cho hai chất điểm A và B tương tác với nhau. Các lực tương tác $\overrightarrow{F_A}$ và $\overrightarrow{F_B}$ (hình 1-2).



Hình 1-2

Ta có hệ thức: $\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B}$ (1-5)

Hơn nữa: $\overrightarrow{F_A} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{F_B} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$

Dễ thấy rằng, khác với định luật 1 và định luật 2 chỉ phát biểu cho chất điểm, định luật 3 phát biểu cho hệ hai chất điểm. Do đó nó là cơ sở để nghiên cứu động lực học cơ hệ.

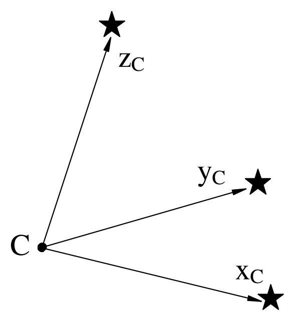
1.2. Hệ quy chiếu quán tính và hệ đơn vị cơ học

1.2.1. Hệ quy chiếu quán tính

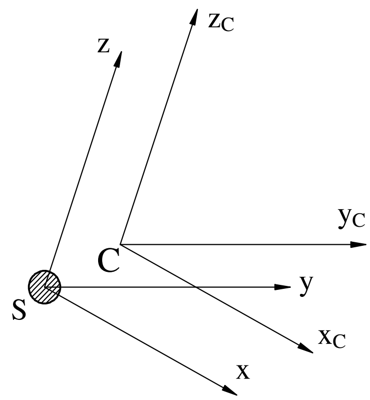
Từ định luật quán tính ta thấy: Tồn tại một lớp các hệ quy chiếu, mà đối với chúng một chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ chuyển động thẳng đều. Hệ quy chiếu đó là hệ quy chiếu quán tính (hay hệ quy chiếu Galilê). Các định luật của cơ học niutơn chỉ nghiệm đúng trong hệ quy chiếu quán tính. Hệ quy chiếu không thỏa mãn các điều kiện vừa nêu sẽ là hệ quy chiếu không quán tính.

Hệ quy chiếu quán tính thường dùng trong cơ học niutơn.

- Hệ quy chiếu Côpecnic (hình 1-3). Hệ quy chiếu Côpecnic được xác định nhờ sử dụng hệ tọa độ $Cx_cy_cz_c$, trong đó C là khối tâm của hệ mặt trời và các trục Cx_c, Cy_c, Cz_c hướng về ba ngôi sao đủ xa để có thể được coi là cố định. Đối với các chất điểm chuyển động trong hệ mặt trời, với độ chính xác cao, hệ quy chiếu này là hệ quy chiếu quán tính.



Hình 1-3



Hình 1-4

- Hệ quy chiếu Kêple (hình 1-4). Hệ quy chiếu Kêple được suy ra từ hệ quy chiếu Côpernic nhờ phép tịnh tiến. Gốc của nó là khối tâm S của mặt trời, các trục Sx, Sy, Sz chọn song song với các trục Cx_c, Cy_c, Cz_c. Thực tế C và S rất gần nhau. Sai số trong tính toán giữa hai hệ quy chiếu trên là không đáng kể.

Một hệ quy chiếu gắn với mặt đất, khi tính đến các chuyển động quay quanh trục của nó và chuyển động tịnh tiến trên quỹ đạo của trái đất, không phải là hệ quy chiếu quán tính. Tuy nhiên với những tính toán trong thực tế với sai số cho phép, hệ quy chiếu gắn với mặt đất được coi như hệ quy chiếu quán tính.

1.2.2. Hệ thống đơn vị cơ học

Trong tính toán kỹ thuật, ta thường dùng hệ đơn vị quốc tế SI. Ở nước ta đã ban hành hệ đơn vị đo lường hợp pháp dựa vào hệ đơn vị quốc tế SI.

Các *đại lượng cơ bản* của Cơ học là độ dài, khối lượng và thời gian.

Các đơn vị cơ bản tương ứng: Độ dài là mét, ký hiệu là m; khối lượng là kilôgam, ký hiệu là kg; thời gian là giây, ký hiệu là s.

Các đại lượng còn lại là những *đại lượng dẫn xuất*. Chẳng hạn, lực được tính từ công thức: F = mW là đơn vị dẫn xuất.

Nếu lấy m = 1 kg; W = 1 m/s^2 thì F = mW = $1kg.1m/s^2$ = 1 $kgms^{-2}$ và gọi là 1 niutơn, ký hiệu là N; 1 N = 1 kgm/s^2.

Thứ nguyên của các đại lượng cơ bản là: [độ dài] = L; [khối lượng] = M; [thời gian] = T khi đó thứ nguyên của lực là:

[lực] = [khối lượng][gia tốc] = MLT^{-2}

1.3. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính

1.3.1. Dạng véctơ

Gọi $\vec{r}$ là véctơ xác định vị trí của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính, ta có:

$$\overrightarrow{W} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \tag{1-6}$$

Từ (1-3): $m\overrightarrow{W} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k$, suy ra: $$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F}_k \tag{1-7}$$

(1-7) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng véctơ.

1.3.2. Dạng toạ độ

a. Toạ độ Đề các

Trong toạ độ đề các vuông góc Oxyz, phương trình (1-7) tương đương với hệ:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} X_k \;;\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \;;\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

$$\text{hay } m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} X_k \;;\quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \;;\quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} Z_k \tag{1-8}$$

Ở đây: x, y, z là tọa độ của chất điểm trong hệ Oxyz; X_k, Y_k, Z_k là các thành phần chiếu của lực $\overrightarrow{F_k}$ lên các trục toạ độ Ox, Oy, Oz.

(1-8) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng toạ độ đề các.

b. Toạ độ tự nhiên

Nếu biết trước quỹ đạo của chất điểm, chiếu (1-3) lên hệ trục tọa độ tự nhiên Mτnb, ta có:

$$mW_\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} \;;\quad mW_n = \sum_{k=1}^{n} F_{kn} \;;\quad mW_b = \sum_{k=1}^{n} F_{kb}$$

Theo kết quả của phần động học: $W_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$; $W_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$; $W_b = 0$. Do đó, phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng toạ độ tự nhiên có dạng:

$$m\ddot{s} = \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} \quad ; \quad m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum_{k=1}^{n} F_{kn} \quad ; \quad 0 = \sum_{k=1}^{n} F_{kb} \qquad (1\text{-}9)$$

c. Toạ độ cực

Chất điểm chuyển động trong mặt phẳng, có thể dùng toạ độ cực. Chiếu (1-3) lên trục hướng theo bán kính véctơ $\vec{r}$ và trục vuông góc với nó về phía tằng của góc φ, ta được:

$$m(\ddot{r} - \dot{r}\dot{\varphi}^2) = \sum_{k=1}^{n} F_{kr} \quad ; \qquad \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \sum_{k=1}^{n} F_{k\varphi} \qquad (1\text{-}10)$$

(1-10) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong toạ độ cực.

Áp dụng các phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở trên ta có thể giải hai bài toán cơ bản của động lực học chất điểm.

1.4. Hai bài toán cơ bản của động lực học chất điểm

1.4.1. Bài toán 1 *(Bài toán thuận)*

Cho biết quy luật chuyển động của chất điểm và khối lượng của nó. Xác định lực tác dụng lên chất điểm đó.

Trên cơ sở các phương trình vi phân đã biết thiết lập ở trên, đạo hàm theo thời gian phương trình chuyển động của chất điểm với số lần cần thiết, sau đó nhân với khối lượng của chất điểm, ta sẽ tìm được lực tác dụng lên chất điẻm.

1.4.2. Bài toán 2 *(Bài toán ngược)*

Cho biết lực tác dụng lên chất điểm, khối lượng của nó và điều kiện ban đầu của chuyển động. Xác định quy luật chuyển động của chất điểm ấy.

Như đã nêu ở phần mở đầu, để tìm quy luật chuyển động của chất điểm (nghiệm của bài toán cơ học) phải giải các hệ phương trình vi phân cấp II: (1-7) đến (1-10) thoả mãn các điều kiện ban đầu (vị trí và vận tốc ban đầu của chất điểm) cho trước.

Trong trường hợp tổng quát, việc tìm tích phân đại số các hệ phương trình vi phân trên nói chung là không thể thực hiện được. Chỉ có thể tìm được nghiệm của các hệ phương trình này trong các trường hợp riêng.

Ta minh hoạ một trường hợp có tính định hướng các bước tìm nghiệm duy nhất của bài toán cơ học:

Giả sử chất điểm chuyển động được biểu diễn bởi phương trình (1-7):

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}\left(t, \vec{r}, \vec{v}\right) \qquad (1)$$

Giả thiết rằng: Tìm được tích phân tổng quát của nó: $\vec{r} = \vec{r}\left(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2\right)$ (2)

Ở đây: $\vec{C}_1$ và $\vec{C}_2$ là các hằng tích phân tùy ý, như vậy số quy luật chuyển động của chất điểm xác định được sẽ là vô số. Điều đó không mất ý nghĩa vật lý, vì chuyển động của chất điểm phụ thuộc không chỉ lực tác dụng lên nó mà còn phụ thuộc vào điều kiện đầu của chuyển động, như vận tốc ban đầu, vị trí ban đầu.

Chẳng hạn, tại thời điểm ban đầu cho biết vị trí và vận tốc của chất điểm là:

$$\vec{r}\Big|_{t=t_0} = \vec{r}_0 \text{ và } \vec{v}\Big|_{t=t_0} = \vec{v}_0 \tag{3}$$

Đạo hàm (2) theo thời gian ta có:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \tag{4}$$

Thay (3) vào (2) và (4), ta có:

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}(t_0, \vec{C}_1, \vec{C}_2) \end{cases} \tag{5}$$

Hệ (5) cho phép giải được các hằng tích phân $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$ phụ thuộc vào các thông số ban đầu cho trước, nghĩa là:

$$\begin{cases} \vec{C}_1 = \vec{C}_1(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0) \\ \vec{C}_2 = \vec{C}_2(t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0) \end{cases} \tag{6}$$

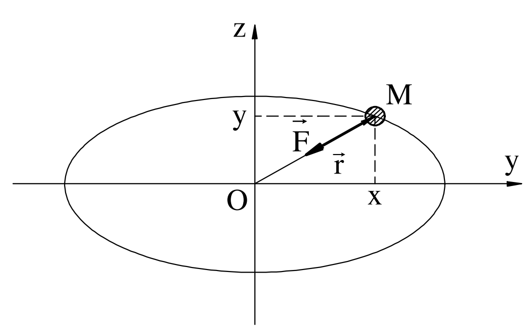
Thay (6) trở lại (2), ta nhận được phương trình chuyển động của chất điểm là duy nhất ở dạng véctơ:

$$\vec{r} = \vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0) = \vec{r}_*(t) \tag{7}$$

Ví dụ 1. Chất điểm có khối lượng m chuyển động trong mặt phẳng Oxy có phương trình chuyển động dạng:

$$x = a\cos kt;\ \ y = b\sin kt$$

Trong đó a, b, k là các hằng số. Xác định lực tác dụng lên chất điểm đó.



Hình 1-5

Bài giải:

Phương trình quỹ đạo của chất điểm có dạng: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Đó là một ellíp có các bán trục tương ứng là a, b (hình 1-5). Áp dụng phương trình vi phân chuyển động dạng toạ độ đề các (1-8), ta có:

$$\sum X_k = m\ddot{x} = -mk^2 a\cos kt = -mk^2 x$$
$$\sum Y_k = m\ddot{y} = -mk^2 a\sin kt = -mk^2 y$$

Độ lớn của lực tác dụng lên chất điểm sẽ bằng:

$$\mathrm{F} = \sqrt{(\Sigma \mathrm{Y_k})^2 + (\Sigma \mathrm{Y_k})^2} = \mathrm{mk}^2\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2} = \mathrm{mk}^2\mathrm{r}$$

trong đó r = OM.

Hướng của lực $\vec{F}$ được xác định bởi:

$$\cos\left(\vec{F}, Ox\right) = -\frac{\sum X_k}{F}; \quad \cos\left(\vec{F}, Oy\right) = -\frac{\sum Y_k}{F}$$

Suy ra lực $\vec{F}$ hướng ngược chiều với $\vec{r}$ và luôn luôn đi qua O cố định, ta có:

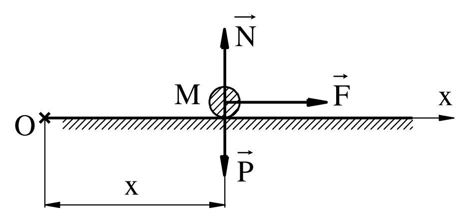
$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{mk}^2\vec{\mathrm{r}}$$

Ví dụ 2. *(chuyển động thẳng, lực phụ thuộc vào thời gian)*

Một vật trọng lượng P bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên trên mặt ngang nhẵn dưới tác dụng của lực $\vec{F}$ nằm ngang có giá trị tỷ lệ với thời gian t với hệ số tỷ lệ k. tìm quy luật chuyển động của vật.

Bài giải:

Xét vật như một chất điểm ở vị trí bất kỳ. Lực tác dụng lên nó bao gồm: Trọng lực $\vec{P}$; lực tác dụng $\vec{F}$, có giá trị là $F = kt$ và phản lực pháp tuyến của mặt ngang $\vec{N}$ (hình 1-6). Theo (1-3), ta có:



Hình 1-6

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$$

Chọn trục Ox theo hướng chuyển động của chất điểm, có gốc O trùng với vị trí ban đầu của nó. Chiếu hệ thức trên lên trục Ox, ta có:

$$m\ddot{x} = F \quad hay \quad m\frac{dV}{dt} = kt$$

Từ đó ta có: mdV = kt.dt

Tích phân hai vế hệ thức trên ta nhận được: $mV = \dfrac{kt^2}{2} + C_1$ (1)

Ta có: $V = \dfrac{dx}{dt}$, nên $mdx = \left(\dfrac{kt^2}{2} + C_1\right)dt$

Tiếp tục tích phân, ta có: $mx = \frac{kt^3}{6} + C_1 t + C_2$ (2)

Các hằng số tích phân C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện ban đầu:

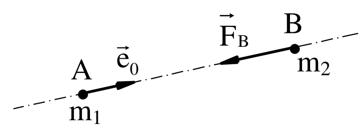
$$x\big|_{t=t_0} = 0 \text{ và } \dot{x}\big|_{t=t_0} = 0 \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) và (2), ta được: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

Vậy quy luật chuyển động của chất điểm là: $x = \frac{kt^3}{6m} = \frac{kgt^3}{6P}$

Ví dụ 3. *(chất điểm chuyển động thẳng, lực tác dụng phụ thuộc vào vị trí)*

Một vật khối lượng m được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $\vec{V}_0$. Vật chuyển động dưới tác dụng của lực hút của trái đất theo định luật hấp dẫn niutơn. Xác định sự phụ thuộc của giá trị vận tốc V vào khoảng cách từ vật tới tâm trái đất.



Hình 1-7

Bài giải:

Hai chất điểm A, B có khối lượng m_1, m_2 cách nhau một khoảng r, tác dụng lên nhau một lực hút, gọi là lực hấp dẫn sao cho (hình 1-7):

$$\overrightarrow{F}_B = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_0 \quad (1\text{-}11)$$

Trong đó G = $6{,}672.10^{-11}$ Nm^2kg^{-2} là một hằng số vũ trụ, $\vec{e}_0$ là véctơ đơn vị của trục AB (định hướng từ A đến B).

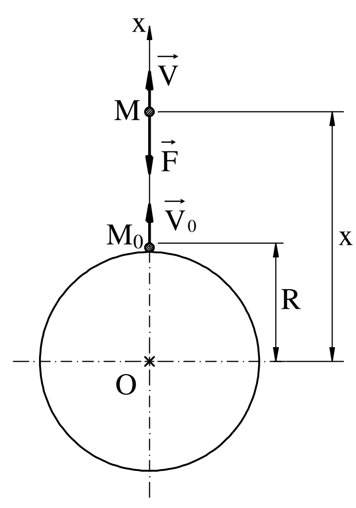
Bây giờ ta xét vật như chất điểm ở vị trí bất kỳ, dưới tác dụng của lực hấp dẫn $\vec{F}$ (hình 1-8). Chọn trục Ox theo hướng chuyển động của vật, gốc tọa độ trùng với tâm trái đất. Từ hệ thức cơ bản của động lực học, chiếu trên trục Ox, ta có;

$$m\ddot{x} = -F$$

Trong đó, theo (1-11) thì F viết bằng: $F = \frac{k}{x^2}$

Khi chất điểm ở trên mặt đất (tại M_0 , x = R) thì F = P, do đó k = mgR^2. Từ đó nhận được phương trình:

$$\ddot{x} = -\frac{gR^2}{x^2}$$



Hình 1-8

Để tìm vận tốc V là hàm của x của chất điểm, ta giải phương trình vi phân trên thoả mãn các điều kiện ban đầu:

$$x\big|_{t=t_0} = R \text{ và } \dot{x}\big|_{t=t_0} = V_0$$

Phương trình vi phân nhận được có biến phân ly. Thật vậy:

$$\ddot{x} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dt} = V\frac{dV}{dx} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

Hay: $$VdV = -gR^2\frac{dx}{x^2}$$

Tích phân đẳng thức trên, chú ý đến điều kiện ban đầu: $\int_{V_0}^{V} VdV = -gR^2\int_{R}^{x}\frac{dx}{x^2}$

Suy ra: $$V = \sqrt{V_0^2 + 2gR\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R}\right)}$$

Khi V = 0, vật ở độ cao nhất. Ta có: $x\big|_{V=0} = x_{max} = \dfrac{2gR^2}{2gR - V_0^2}$

Kết quả trên chỉ ra rằng: x_{max} tăng khi V_0 tăng. Nếu V_0 đạt tới giá trị $V_0^* = V_{gh} = \sqrt{2gR}$ thì $x \to \infty$ nghĩa là vật thoát khỏi lực hút của trái đất.

Lấy g = 9,81 m/s^2, bán kính của trái đất R ≈ 6,4.10^{6}m, ta có:

$$V_{gh} = \sqrt{2.9,81.6,4.10^6} = 11,2 \text{ Km/s}$$

Giá trị vận tốc V_{gh} trên gọi là vận tốc vũ trụ cấp II.

Ví dụ 4 *(chất điểm chuyển động thẳng, lực phụ thuộc vào vận tốc)*

Một quả cầu trọng lượng P rơi xuống theo phương thẳng đứng không có vận tốc ban đầu. Lực cản của không khí tỷ lệ với khối lượng và vận tốc của quả cầu theo quy luật R = k.m.V; k là hằng số. Tìm vận tốc giới hạn và phương trình chuyển động của quả cầu.

Bài giải:

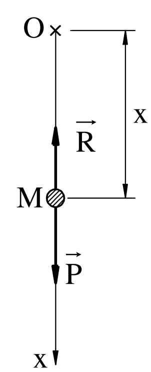
Trước khi giải bài toán, ta lưu ý một vài vấn đề sau:

Cho đến nay không có một định luật tổng quát biểu thị lực ma sát, nhưng có các định luật gần đúng áp dụng cho từng trường hợp. Thực tế thường sử dụng hai định luật tương ứng với hai trường hợp giới hạn:

a. Lực ma sát tỷ lệ với V đối với các vận tốc nhỏ.

b. Lực ma sás tỷ lệ với V^2 đối với các vận tốc lớn.

Khi giải các phương trình vi phân biểu diễn chuyển động của chất điểm, nếu tồn tại một nghiệm (vận tốc) không đổi và mặc dù các điều kiện ban đầu thế nào đi nữa thì tất cả các nghiệm (vận tốc) đều hội tụ về vận tốc này, gọi là vận tốc giới hạn.



Hình 1-9

Bây giờ ta xét quả cầu như một chất điểm ở vị trí bát kỳ, chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ và lực cản $\vec{R}$, R = k.m.V (hình 1-9).

Ta có: $$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R}$$

Chọn trục Ox thẳng đứng hướng xuống dưới, gốc O trùng với vị trí ban đầu của quả cầu. Chiếu hệ thức trên lên trục Ox, ta được:

$$m\ddot{x} = P - R = P - km\dot{x} = m(g - \dot{k})$$

Hay: $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = g - k\dot{x}$ suy ra: $\dfrac{d\dot{x}}{g - k\dot{x}} = dt$

Tích phân đẳng thức trên, ta có: $\displaystyle\int \frac{d(g - k\dot{x})}{g - k\dot{x}} = -k\int dt \Rightarrow g - k\dot{x} = C_1 e^{-kt}$

Từ điều kiện ban đầu $\dot{x}\big|_{t=t_0} = V_0 = 0$, ta nhận được C_1 = g. Do đó: $V = \dot{x} = \dfrac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})$

Rõ ràng khi $t \to \infty$ thì $V \to \dfrac{g}{k}$. Ta gọi $V_{gh} = \dfrac{g}{k}$.

Để tìm quy luật chuyển động của quả cầu. Từ (*), ta có: $dx = \dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt$

Tích phân hai vế hệ thức trên ta có: $x = \dfrac{g}{k}t + \dfrac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2$

Theo điều kiện ban đầu: $x\big|_{t=t_0} = 0$, ta được: $C_2 = -\dfrac{g}{k^2}$

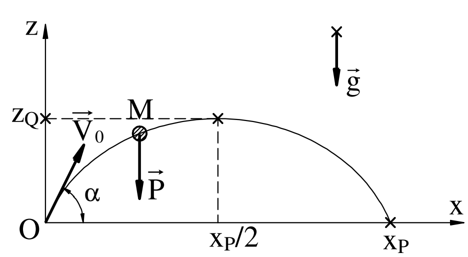
Vậy: $$x = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} - \frac{g}{k^2} = \frac{g}{k}\left(t + \frac{e^{-kt}}{k} - \frac{1}{k}\right)$$

Ví dụ 5 *(chuyển động của một viên đạn gần mặt đất)*

Một viên đạn khối lượng m được bắn lên từ mặt đất với vận tốcban đầu $\vec{V}_0$ lập với phương ngang một góc α. Bỏ qua sức cản của không khí.

a. Xác định quỹ đạo của viên đạn.

b. Giả sử cho trước vận tốc $\vec{V}_0$ song song với mặt phẳng Oxz. Tính các giá trị góc α để viên đạn tới được một bia nằm ở C (có tọa độ x_C, 0, z_C). từ đó suy ra tập hợp các điểm mà viên đạn với $\vec{V}_0$ cho trước có thể tới được.



Hình 1-10

Bài giải:

a. Giả thiết trường trọng lực $\vec{g} = -g\vec{k}$ là đều. Chọn gốc tọa độ O trùng với vị trí ban đầu của viên đạn, mặt phẳng xOz chứa véctơ $\vec{V}_0$ (hình 1-10). Từ (1-3) ta có:

$$\ddot{x} = 0;\ \ddot{y} = 0;\ \ddot{z} = -g$$

Khi kể đến các điều kiện ban đầu:

$$x\big|_{t=0} = 0;\ y\big|_{t=0} = 0;\ z\big|_{t=0} = 0;\ \dot{x}\big|_{t=0} = V_0\cos\alpha;\ \dot{y}\big|_{t=0} = 0;\ \dot{z}\big|_{t=0} = V_0\sin\alpha$$

ta nhận được: $\ddot{x} = 0;\ \dot{x} = V_0\cos\alpha;\ x = V_0\cos\alpha.t$

$$\ddot{y} = 0;\ \dot{y} = 0;\ y = 0$$

$$\ddot{z} = -g;\ \dot{z} = V_0\sin\alpha - gt;\ z = -\frac{gt^2}{2} + V_0\sin\alpha.t$$

Quỹ đạo của viên đạn ở trong mặt phẳng thẳng đứng xOz chứa vận tốc ban đầu $\vec{V}_0$. Đó là một parabol, phương trình có dạng:

$$z = -\frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x.\mathrm{tg}\alpha$$

Một số giá trị khác:

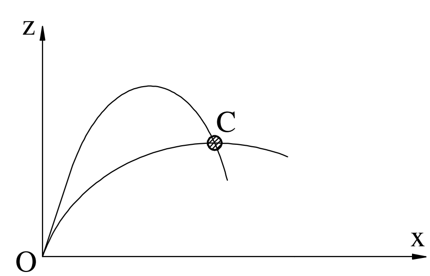
- Tầm bắn x_P là giá trị của x khi viên đạn rơi về z = 0: $x_P = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$

- Độ cao nhất viên đạn có được tại $\frac{x_P}{2}$ và bằng: $z_Q = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha$

Độ cao cực đại nếu $\alpha = 90^0$.

b. Để tới một bia C thì x_C, z_C phải nghiệm đúng phương trình quỹ đạo của viên đạn:

$$z_C = -\frac{gx_C^2}{2V_0^2\cos^2\alpha} + \mathrm{tg}\alpha.x_C$$



Hình 1-11

Vậy α là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{gx_C^2}{2V_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha + x_C\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx_C^2}{2V_0^2} - z_C = 0$$

Biệt số: $\Delta = x_C^2 - \frac{4gx_c^2}{2V_0^2}\left(\frac{gx_C^2}{2V_0^2} + z_C\right)$

Từ đó: – Δ < 0: Bài toán không có nghiệm, không thể tới được bia C.

– Δ = 0: Bài toán có một nghiệm.

– $\Delta > 0$: Bài toán có hai nghiệm.

Vậy, có thể tới C nếu $\Delta \geq 0$, nghĩa là (hình 1-11): $z_C = -\frac{g}{2V_0^2}x_C^2 + \frac{V_0^2}{2g}$

Suy ra: Các điểm có thể tới được của viên đạn trong mặt phẳng Oxz đều nằm dưới đường parabol an toàn có phương trình:

$$z = -\frac{g}{2V_0^2}x^2 + \frac{V_0^2}{2g}$$

Có thể giải bài toán trên trong trường hợp có kể đến lực cản không khí, giả thiết rằng lực cản tỷ lệ với vận tốc $\vec{R} = -km\vec{V}$, k là hằng số.

1.5. Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ

Phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ trong hệ quy chiếu quán tính dạng véctơ. Để thiết lập hệ phương trinh này ta dựa vào phương trình cơ bản của động lực học (1-3) và viết cho từng chất điểm của cơ hệ.

Dạng của phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ tuỳ thuộc vào cách phân loại lực tác dụng lên cơ hệ.

Cho cơ hệ n chất điểm. Xét chất điểm thứ k thuộc cơ hệ M_k, có khối lượng m_k.

- Nếu phân loại lực tác dụng lên cơ hệ thành nội lực và ngoại lực, gọi $\overrightarrow{F_k^i}$ và $\overrightarrow{F_k^e}$ tương ứng là hợp các nội lực và hợp các ngoại lực tác dụng lên chất điểm thứ k, theo (1-3) ta có:

$$m_k \overrightarrow{W}_k = \overrightarrow{F_k^i} + \overrightarrow{F_k^e}$$

Trong đó: $\overrightarrow{W_k} = \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$, $\vec{r}_k$ là véctơ xác định vị trí của chất điểm M_k trong hệ quy chiếu quán tính.

Tương tự đối với các chất điểm khác thuộc hệ ta thu được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{W}_1 = \overrightarrow{F_1^i} + \overrightarrow{F_1^e} \\ m_2 \overrightarrow{W}_2 = \overrightarrow{F_2^i} + \overrightarrow{F_2^e} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n \overrightarrow{W}_n = \overrightarrow{F_n^i} + \overrightarrow{F_n^e} \end{cases}$$

Hay: $$m_k \overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{F_k^i} + \overrightarrow{F_k^e} \quad (k = \overline{1, n}) \qquad (1\text{-}12)$$

- Nếu phân loại lực tác dụng lên cơ hệ thành lực hoạt động và phản lực liên kết, gọi $\overrightarrow{F_k^a}$ và $\overrightarrow{N_k}$ tương ứng là hợp các lực hoạt động và hợp các phản lực liên kết tác dụng lên chất điểm thứ k. Tương tự như trên, ta nhận được:

$$\begin{cases} m_1\overrightarrow{W}_1 = \overrightarrow{F_1^a} + \overrightarrow{N_1} \\ m_2\overrightarrow{W}_2 = \overrightarrow{F_2^a} + \overrightarrow{N_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\overrightarrow{W}_n = \overrightarrow{F_n^a} + \overrightarrow{N_n} \end{cases}$$

Hay: $$m_k\overrightarrow{W}_k = \overrightarrow{F_k^a} + \overrightarrow{N_k} \quad (k = \overline{1, n}) \tag{1-13}$$

Do chưa có phương pháp tổng quát tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân (1-11) và (1-12); mặt khác thực tế nhiều trường hợp không cần thiết phải xác định chuyển động của các chất điểm thuộc cơ hệ, nên khi giải các bài toán động lực học cơ hệ, thường ta không tích phân trực tiếp hệ phương trình (1-11) và (1-12), mà đi tìm các tích phân đầu của chúng. Việc tìm các tích phân đầu của hệ (1-11) sẽ được phân tích kỹ trong chương các định lý tổng quát của động lực học. Hệ phương trình (1-12) sẽ được sử dụng trong phần "Cơ học giải tích" sau này. Các phương trình vừa thiết lập đóng vai trò cơ bản là xuất phát từ chúng để nhận được các định lý tổng quát và nhiều nguyên lý cơ học.

CHƯƠNG II: CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

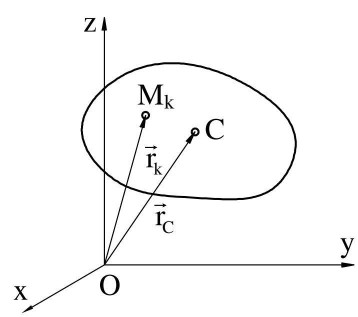
A. Hình học khối lượng

Khảo sát chuyển động của chất điểm, khối lượng là độ đo quán tính của nó. Khảo sát chuyển động của cơ hệ, ngoài khối lượng, còn phải tính đến sự phân bố của khối lượng của hệ trong không gian, nó có ảnh hưởng trực tiếp đến chuyển động cơ học của cơ hệ.

2.1. Khối tâm của cơ hệ

Khối tâm C của cơ hệ là một điểm hình học được xác định bởi hệ thức:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k}{M} \qquad (2\text{-}1)$$



Hình 2-1

Trong đó: O là một điểm bất kỳ; m_k, $\vec{r}_k$ là khối lượng và véctơ định vị của chất điểm thứ k thuộc cơ hệ, còn: $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ là khối lượng toàn cơ hệ (hình 2-1).

Hệ thức (2-1) tương ứng với các hệ thức trong hệ tọa độ đề các Oxyz:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}; \; y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}; \; z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M} \qquad (2\text{-}2)$$

Trong đó: x_k, y_k, z_k là tọa độ của chất điểm thứ k thuộc cơ hệ.

Bây giờ ta xét sự tổng hợp các khối tâm: Giả sử có nhiều cơ hệ (chẳng hạn hai cơ hệ) với khối tâm tương ứng C_1, C_2 và khối lượng tương ứng M_1, M_2. Khối tâm C của các hệ trên xác định bằng:

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C = \frac{M_1.\overrightarrow{OC_1} + M_2.\overrightarrow{OC_2}}{M} = \frac{M_1 \vec{r}_{C_1} + M_2 \vec{r}_{C_2}}{M} \qquad (2\text{-}3)$$

Ở đây: $M = M_1 + M_2$ là khối lượng tổng cộng các hệ.

Cần lưu ý rằng: Nếu hệ là vật rắn nằm trong trường trọng lực, khối tâm của vật rắn trùng với trọng tâm của vật trùng với trọng tâm của nó. Tuy nhiên khái niệm khối tâm rộng hơn khái niệm trọng tâm. Khối tâm của vật luôn luôn tồn tại, còn trọng tâm của nó chỉ tồn tại trong trường trọng lực.

Ví dụ 1. Cho cơ cấu thước vẽ ellíp gồm hai con chạy A, B có cùng trọng lượng Q, tay quay OC_1 có trọng lượng P và thước AB có trọng lượng 2P. Biết $OC_1 = AC_1 = BC_1 = \ell$. Coi tay quay và thước là các thanh đồng chất. Xác định tọa độ khối tâm của cơ cấu theo góc φ (hình 2-2).

Bài giải:

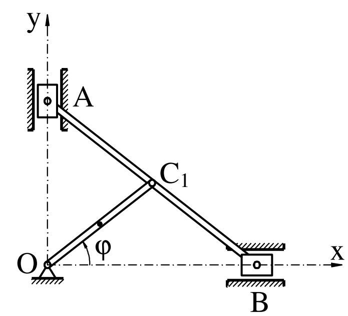
Có cấu thước vẽ ellíp gồm 4 vật rắn: Thanh AB, OC_1 và các con chạy A, B. Khối lượng và khối tâm của chúng xác định đối với hệ Oxy được xác định lần lượt như sau:

$$m_1 = \frac{2P}{g};\ C_1\begin{cases} x_1 = \ell cos\varphi \\ y_1 = \ell \sin\varphi \end{cases}$$

$$m_2 = \frac{P}{g};\ C_2\begin{cases} x_2 = \dfrac{\ell}{2} cos\varphi \\ y_2 = \dfrac{\ell}{2} \sin\varphi \end{cases}$$

$$m_3 = \frac{Q_A}{g} = \frac{Q}{g};\ C_3\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 2\ell \sin\varphi \end{cases}$$

$$m_4 = \frac{Q_B}{g} = \frac{Q}{g};\ C_4\begin{cases} x_4 = 2\ell cos\varphi \\ y_4 = 0 \end{cases}$$



Hình 2-2

Gọi khối tâm của cơ cấu là C. Khi đó theo các công thức (2-2) ta có:

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{5P + 4Q}{3P + 2Q}\frac{\ell}{2}cos\varphi$$

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{5P + 4Q}{3P + 2Q}\frac{\ell}{2}\sin\varphi$$

2.2. Mômen quán tính

2.2.1. Định nghĩa

− *Mômen quán tính của cơ hệ đối với trục z ký hiệu J_z là đại lượng vô hướng bằng tổng các tích các khối lượng m_k của mỗi chất điểm thuộc hệ với bình phương khoảng cách d_k từ chất điểm đến trục:*

$$J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2 \qquad (2\text{-}4)$$

Đối với một chất điểm cách một khoảng d đến trục z thì: $J_z = md^2$

− Trong tính toán kỹ thuật thường sử dụng khái niệm bán kính quán tính, ký hiệu ρ_z, đo bằng độ dài để tính mômen quán tính của hệ đối với trục z:

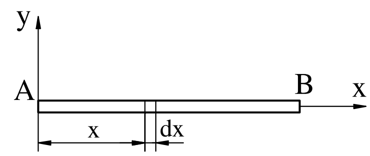
$$J_z = M\rho_z^2 \qquad (2\text{-}5)$$

Trong đó: M là khối lượng toàn cơ hệ.

Đơn vị của mômen quán tính là kgm^2, thứ nguyên của nó [J] = ML^2.

2.2.2. 2. Mômen quán tính của một số vật đồng chất

Thanh mỏng đồng chất dài ℓ, khối lượng M. Ta sẽ tìm mômen quán tính của thanh đối với trục Az thẳng góc với thanh (hình 2-3). Hướng trục Ax như hình vẽ, phân tố thanh dx cách A một khoảng x, có khối lượng $dm = \rho dx$, $\rho = \dfrac{M}{\ell}$ là khối lượng của một đơn vị chiều dài của thanh.



Hình 2-3

Ta có:

$$J_{Az} = \int_0^\ell x^2 dm = \rho\int_0^\ell x^2 dx = \rho\frac{\ell^3}{3}, \text{ vì } M = \rho\ell$$

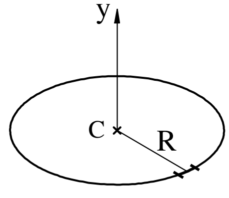
Từ đó: $$J_{Az} = \frac{1}{3}M\ell^2 \qquad (2\text{-}6)$$

– Vành tròn mảnh đồng chất bán kính R, khối lượng M. Ta tìm mômen quán tính của nó đối với trục Cz thẳng góc với mặt phẳng vành tròn và đi qua tâm của nó (hình 2-4). Tất cả các điểm của vành tròn đều cách Cz khoảng R, nên:

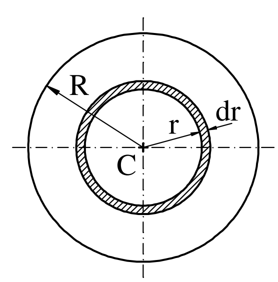
$$J_{Cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k R^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right)R^2 = MR^2$$

Vậy: $$J_{Cz} = MR^2 \qquad (2\text{-}7)$$

Công thức (2-7) cũng được dùng để tính mômen quán tính của vỏ trụ đồng chất bán kính R, khối lượng M đối với trục của nó.



Hình 2-4



Hình 2-5

– Tấm tròn đồng chất và khối trụ đồng chất bán kính R, khối lượng M. Ta tính mômen quán tính của tấm tròn đối với trục Cz thẳng góc với mặt tấm và đi qua tâm của nó (hình 2-5). Tách ra một vành tròn yếu tố bán kính r, rộng dr. Diện tích vành tròn: $2\pi rdr$, khối lượng $dm=\rho 2\pi rdr$ trong đó: $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$ là khối lượng đơn vị của diện tích tấm. Đối với vành tròn trên:

$$dJ_{Cz} = r^2 dm = 2\pi\rho r^3 dr$$

Khi đó: $$J_{Cz} = 2\pi\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho R^4, \text{ vì } M = \rho.\pi R^2$$

Do đó: $$J_{Cz} = \frac{1}{2}MR^2 \qquad (2\text{-}8)$$

Công thức (2-8) cũng dùng để tính mômen quán tính của khối trụ đồng chất nói trên đối với trục của nó.

− Hình chữ nhật đồng chất, hình nón, hình cầu:

a. Tấm chữ nhật đồng chất, khối lượng M, các cạnh là a và b. Trục x hướng dọc cạnh a, trục y hướng dọc cạnh b:

$$J_x = \frac{1}{3}Mb^2;\ J_y = \frac{1}{3}Ma^2 \qquad (2\text{-}9)$$

b. Nón tròn xoay đồng chất khối lượng M, bán kính đáy R. Trục z hướng dọc trục nón.

$$J_z = 0,3MR^2 \qquad (2\text{-}10)$$

c. *Hình cầu đồng chất, khối lượng M, bán kính R*. Trục z hướng dọc đường kính:

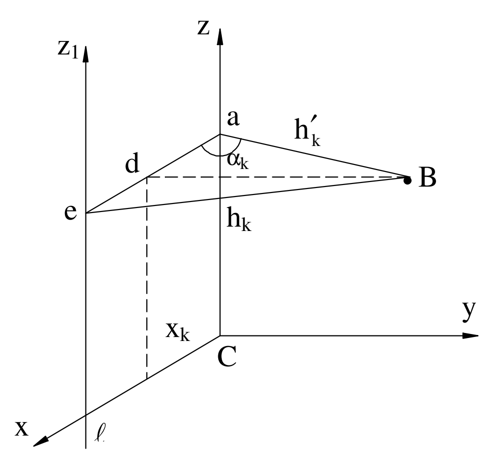
$$J_z = 0,4MR^2 \qquad (2\text{-}11)$$

2.2.3. Mômen quán tính đối với trục song song

Định lý Huyghen

Mômen quán tính của vật đối với trục khác nhau sẽ khác nhau. Ta chỉ ra hệ thức: Khi biết mômen quán tính của vật đối với một trục nào đó dẫn qua vật, tìm mômen quán tính đối với trục bất kỳ song song với nó.

Giả thiết trục Cz qua khối tâm C của vật và song song với trục Oz_1. Khoảng cách giữa hai trục là d (hình 2-6). Theo định nghĩa:



Hình 2-6

$$J_{Oz_1} = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2;\ J_{Cz} = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k'^2$$

Trong đó: h_k, h'_k tương ứng là khoảng cách từ chất điểm bất kỳ B đến trục Oz_1, Cz.

Từ ΔBae, ta có: $h_k^2 = h_k'^2 + d^2 - 2dh'_k cos\alpha_k$

Dẫn từ C hệ tọa độ có trục Cx, Cy thẳng góc trục Cz và trục Cx cắt trục Oz_1, như thế Cx // ae. Ta gọi tọa độ của B là x_k, y_k, z_k, nhận được:

$$h'_k cos\alpha_k = x_k \quad \text{và} \quad h_k^2 = h_k'^2 + d^2 - 2d.x_k$$

Thay h_k^2 vào biểu thức tính J_{Oz_1}, ta có:

$$J_{Oz_1} = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k'^2 + d^2\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) - 2d\left(\sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right)$$

Từ hệ thức (2-2): $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = Mx_C$. Do C là gốc tọa độ, nên $x_C = 0$ và $\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0$; cuối cùng ta có hệ thức:

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + Md^2 \qquad (2\text{-}12)$$

Hệ thức (2-12) biểu thị *định lý Huyghen*:

Mômen quán tính của vật đối với trục đã cho bằng mômen quán tính của vật đối với trục song song với nó đi qua khối tâm C của vật, cộng với tích khối lượng của toàn vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

B. Các định lý tổng quát của động lực học trong hệ quy chiếu quán tính

Việc giải nhiều bài toán *động lực học* thuận tiện hơn khi thay phương pháp tích phân trực tiếp phương trình vi phân chuyển động, bằng các định lý - gọi là *các định lý tổng quát của động lực học*. Các định lý tổng quát của Động lực học là hệ quả của phương trình cơ bản động lực học, cho mối quan hệ giữa các đặc trưng động lực cơ bản (động lượng, mômen động lượng, động năng) với các đại lượng cơ bản do tác dụng của lực (xung lượng của lực, mômen của lực và công của lực).

2.3. Định lý động lượng và định lý chuyển dời khối tâm

2.3.1. Định lý động lượng

a. Định nghĩa động lượng và công thức tính động lượng

Động lượng của chất điểm là đại lượng véctơ, ký hiệu $\vec{q}$, bằng tích khối lượng m của chất điểm với véctơ vận tốc $\vec{v}$ của nó.

$$\vec{q} = m\vec{v} \qquad (2\text{-}13)$$

Véctơ động lượng $\vec{q}$ hướng theo hướng véctơ $\vec{v}$, nghĩa là hướng tiếp tuyến với quỹ đạo chất điểm.

Động lượng của cơ hệ, ký hiệu là $\vec{Q}$, là tổng hình học động lượng các chất điểm thuộc cơ hệ:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k \qquad (2\text{-}14)$$

Nếu cơ hệ gồm nhiều vật rắn chuyển động, động lượng của cơ hệ bằng tổng hình học động lượng của các vật rắn chuyển động thuộc cơ hệ.

Đơn vị đo động lượng là kg.m/s, thứ nguyên của nó [Động lượng] = M$\frac{L}{T}$.

Động lượng của cơ hệ còn có thể tính qua khối lượng toàn hệ và vận tốc tâm khối lượng của nó.

Định lý

Động lượng của cơ hệ bằng động lượng của khối tâm của hệ, tại đó tập trung toàn bộ khối lượng của cơ hệ:

$$\vec{Q} = M\,\overrightarrow{V_C} \qquad (2\text{-}15)$$

Chứng minh:

Thật vậy, từ định nghĩa khối tâm của cơ hệ ta có: $\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_C$. Đạo hàm theo thời gian hệ thức trên, thu được: $\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\vec{r}}_k = M\dot{\vec{r}}_C$ *hay* $\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{V_k} = M\,\overrightarrow{V}_C$

Nghĩa là: $\vec{Q} = M\,\overrightarrow{V_C}$

b. Định nghĩa xung lượng của lực

− Xung lượng yếu tố của lực là đại lượng véctơ, ký hiệu là $d\vec{S}$, bằng tích véctơ lực $\vec{F}$ với khoảng thời gian yếu tố dt:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \qquad (2\text{-}16)$$

Hướng của $d\vec{S}$ theo hướng tác dụng của lực.

− Xung lượng của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian hữu hạn từ t_0 đến t_1 là:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt \qquad (2\text{-}17)$$

Nếu lực $\vec{F}$ không đổi cả về môđun và hướng thì: $\vec{S} = \vec{F}(t_1 - t_0)$ (2-18)

Đơn vị đo xung lượng của lực kgm/s. Thứ nguyên của nó là: [xung lượng] = M$\frac{L}{T}$.

c. Các định lý động lượng đối với chất điểm

Định lý 1

Đạo hàm theo thời gian động lượng của chất điểm bằng tổng hình học các lực tác dụng lên chất điểm ấy:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = \sum \vec{F}_k \tag{2-19}$$

Chứng minh:

Xét chất điểm khối lượng m, chịu tác dụng của các lực ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$), $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}$ và chuyển động với gia tốc $\vec{W}$. Theo (1-3), ta có: $m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}$

Do khối lượng m của chất điểm không đổi theo thời gian t, ta có:

$$m\vec{W} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right) = \vec{R}$$

Định lý 2

Biến thiên động lượng của chất điểm trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng hình học xung lượng của các lực tác dụng lên chất điểm trong khoảng thời gian ấy.

$$m\vec{V_1} - m\vec{V_0} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S_k} \tag{2-20}$$

Chứng minh: Từ (2-19), ta có: $d\left(m\vec{V}\right) = \vec{R}dt = \left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F_k}\right)dt$

Tích phân hai vế của hệ thức với cá cận tương ứng:

$$\int_{m\vec{V_0}}^{m\vec{V_1}} d\left(m\vec{V}\right) = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=1}^{n} \vec{F_k}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1} \vec{F_k}dt$$

Hay: $$m\vec{V_1} - m\vec{V_0} = \sum_{k=1}^{n} \vec{S_k}$$

d. Các định lý động lượng đối với cơ hệ

Định lý 3

Đạo hàm theo thời gian động lượng của cơ hệ bằng véctơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{Q}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k^e} \tag{2-21}$$

Chứng minh:

Xét cơ hệ n chất điểm. Gọi hợp các ngoại lực và hợp các nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k thuộc hệ tương ứng là $\overrightarrow{F_k^e}$ và $\overrightarrow{F_k^i}$. Áp dụng (2-19) cho chất điểm thứ k, ta có:

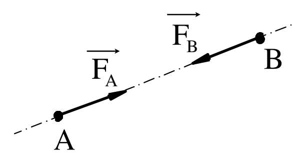
$$\frac{d}{dt}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\right) = \overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{F_k^i}$$

Viết các hệ thức tương tự cho các chất điểm của cơ hệ rồi cộng vế lại, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e} + \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^i}$$

Vế trái của hệ thức bằng: $\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\right) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\right)\right] = \frac{d}{dt}\overrightarrow{Q} = \dot{\overrightarrow{Q}}$

Do đó chỉ cần chứng minh: $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^i} = 0$, nghĩa là véctơ chính của hệ nội lực tác dụng lên cơ hệ triệt tiêu. Thậy vậy, xét hai chất điểm A, B bất kỳ thuộc cơ hệ. Các lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm theo định luật 3 niutơn:



Hình 2-7

$$\overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B} \text{ nên } \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = 0 \text{ (hình 2-7)}$$

Vì A, B bất kỳ, ta suy ra $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^i} = 0$.

Định lý 4

Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian nào đó bằng tổng hình học xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian ấy.

$$\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_0} = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{S_k^e} \qquad (2\text{-}22)$$

Chứng minh: Từ (2-21), ta có: $d\overrightarrow{Q} = \left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e}\right)dt$

Tích phân hai vế hệ thức trên với cận tương ứng: $\int_{\overrightarrow{Q_0}}^{\overrightarrow{Q_1}} d\overrightarrow{Q} = \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\overrightarrow{F_k^e}dt$

hay: $\overrightarrow{Q_1} - \overrightarrow{Q_0} = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{S_k^e}$

Nhận xét:

Các công thức (2-19), (2-20), (2-21), và (2-22) khi viết dưới dạng tọa độ Đềcác, tương ứng có dạng:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \sum X_k; \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \sum Y_k; \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = \sum Z_k \qquad (2\text{-}19a)$$

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \sum S_{kx};\ m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 = \sum S_{ky};\ m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 = \sum S_{kz}; \qquad \text{(2-20a)}$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum X_k^e;\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum Y_k^e;\ \frac{dQ_z}{dt} = \sum Z_k^e; \qquad \text{(2-21a)}$$

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e;\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e;\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e; \qquad \text{(2-22a)}$$

e. Định luật bảo toàn động lượng

Ta chỉ trình bày trường hợp đối với cơ hệ, còn chất điểm là cơ hệ đặc biệt gồm có một chất điểm.

Từ (2-21) suy ra: Nếu $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k^e} = 0$ thì: $\vec{Q} = \overrightarrow{const}$, nghĩa là nếu véctơ chính của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không thì véctơ động lượng của cơ hệ sẽ không đổi.

Từ (2-21a) suy ra: $\sum X_k^e = 0$ thì Q_x = const, nghĩa là nếu tổng chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trên một trục nào đó (trục Ox) luôn luôn triệt tiêu thì chiếu động lượng của hệ lên trục đó sẽ không đổi.

Định luật bảo toàn động lượng giúp ta giải thích một số hiện tượng cơ học trong thực tế, chẳng hạn:

- *Chuyển động nhờ chân vịt của tàu thuỷ hay nhờ cánh quạt của máy bay*

Xét tàu thuỷ chuyển động từ trạng thái nghỉ. Khi chân vịt quay, nó đẩy một khối nước chuyển động dọc trục về phía sau. Quan sát chuyển động của cơ hệ gồm khối nước trên và tàu thuỷ. Nếu bỏ qua tác dụng của lực cản và tổng chiếu các ngoại lực lên phương ngang bằng không. Lực tác dụng tương hỗ giữa chân vịt và khối nước là nội lực, chúng không làm biến đổi động lượng của hệ. Do động lượng của hệ được bảo toàn, nên khi khối nước bị đẩy về phía sau, thì tàu thuỷ phải chuyển động về phía trước.

Chuyển động của máy bay cánh quạt từ trạng thái tĩnh cũng được giải thích tương tự.

- *Chuyển động bằng phản lực của máy bay hay tên lửa trong chân không và theo phương nằm ngang.*

Nhiên liệu của máy bay phản lực hay tên lửa bị đốt cháy thành hơi phụt ra phía sau với vận tốc lớn. Xét máy bay hay tên lửa và khối nhiên liệu là một cơ hệ. Động lượng của cơ hệ ấy luôn luôn không đổi và bằng không. Khi buồng hơi của nhiên liệu đã cháy có động lượng hướng về phía sau, nên máy bay hay tên lửa phải chuyển động về phía trước.

Nhận xét: Để áp dụng các định lý động lượng của chất điểm hay của cơ hệ cần hoàn thành các tích phân vế phải các hệ thức (2-20) hay (2-22). Nghĩa là tích phân theo thời gian các hàm biểu diễn lực tác dụng lên chất điểm hay cơ hệ. Do đó các định lý động lượng dùng giải thuận lợi đối với các bài toán mà các lực tác dụng là không đổi hoặc chỉ phụ thuộc vào thời gian.

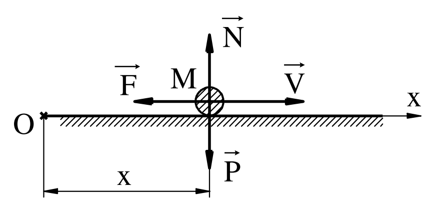
Đối với cơ hệ, định lý động lượng không có mặt nội lực. Nên cần chọn cơ hệ sao cho tất cả hoặc một số lực chưa biết trở thành nội lực và việc giải bài toán trở nên dễ dàng hơn.

Đối với các bài toán mà cơ hệ là môi trường chất lỏng hay chất khí, đặc biệt bài toán về va chạm, việc áp dụng định lý động lượng rất hiệu quả.

Ví dụ 2. Một tải trọng khối lượng m nằm trên mặt phẳng ngang và nhận vận tốc ban đầu $\overrightarrow{V_0}$. Sau đó tải trọng chuyển động theo quán tính và chịu lực cản $\vec{F}$ không đổi. Xác định thời gian vật dừng lại và quãng đường đi được của nó.

Bài giải:

Coi tải trọng như một chất điểm M. Lực tác dụng lên nó: Trọng lực $\vec{P}$, lực cản $\vec{F}$ và phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ của nền (hình 2-8). Chọn trục toạ độ Ox hướng theo chiều chuyển động của tải trọng, gốc O trùng với vị trí ban đầu của nó.



Hình 2-8

Áp dụng định lý biến thiên động lượng của chất điểm trên trục Ox, ta có:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = \int_0^t (-F)dt$$

Trong đó $\dot{x}_0 = V_0$, khi tải trọng dừng lại thì $\dot{x} = 0$. Do $\vec{F}$ không đổi, ta thu được:

$$-mV_0 = -Ft \Rightarrow t = \frac{mV_0}{F}$$

Mặt khác, cũng từ hệ thức trên, ta được: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = V_0 - \dfrac{F}{m}t \Rightarrow dx = V_0 dt - \dfrac{F}{m}tdt$

Tích phân hệ thức vừa nhận được với cận tương ứng: $\displaystyle\int_0^x dx = \int_0^t (V_0 - \frac{F}{m}tdt)$

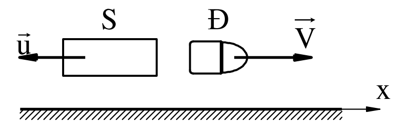
Suy ra: $x = V_0 t - \dfrac{F}{m}.\dfrac{t^2}{2}$

Thay giá trị t tìm được vào, ta nhận được quãng đường vật đi được:

$$S = V_0\frac{mV_0}{F} - \frac{F}{2m}\left(\frac{mV_0}{F}\right)^2 = \frac{mV_0^2}{2F}$$

Ví dụ 3. Một viên đạn khối lượng m được bắn khỏi nòng súng theo phương nằm ngang với vận tốc $\vec{V}$, khối lượng của súng bằng M. Hãy tìm vận tốc giật lùi của súng. Bỏ qua ma sát (hình 2-9).

Bài giải:



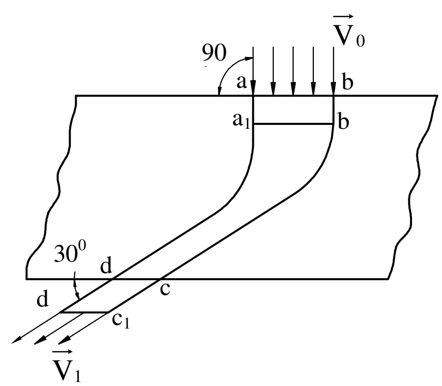
Hình 2-9

Để loại trừ áp lực chưa biết của khí hơi ta khảo sát cơ hệ gồm đạn và súng. Bỏ qua ma sát, nên ngoại lực tác dụng lên cơ hệ: Trọng lực của đạn $\vec{P} = m\vec{g}$, trọng lực của súng $\vec{Q} = M\vec{g}$ và phản lực pháp tuyến $\vec{N}$ của mặt đất lên đế súng. Khi đó tổng chiếu các lực này lên phương ngang (chọn Ox) bằng không. Ta có sự bảo toàn động lượng của hệ theo trục Ox: Q_x = const. Trước khi đạn bay ra khỏi nòng súng hệ cố định và $Q_{0x} = 0$, nên tại bất kỳ thời điểm nào thì $Q_x = 0$. Gọi vận tốc giật lùi của súng là $\vec{u}$, thì động lượng của hệ tại thời điểm đạn có vận tốc $\vec{V}$ là:

$$Q_x = -Mu + mV = 0 \quad \text{suy ra:} \quad u = \frac{mV}{M}$$

Ví dụ 4. Nước chảy với vận tốc V_0 = 2m/s vào ống dẫn có tiết diện biến đổi, đối xứng với mặt thẳng đứng (hình 2-10). Diện tích tiết diện ống dẫn vào là F = 0,02m^2. Vận tốc của nước chảy ra khỏi ống là V_1 = 4m/s và nghiêng với đường nằm ngang góc $\alpha = 30^0$. Giả thiết dòng chảy là ổn định (dừng), xác định thành phần nằm ngang của phản lực tổng hợp do thành của đoạn ống dẫn tác dụng lên khối nước chảy trong đó.

Bài giải:



Hình 2-10

Khảo sát chuyển động của cơ hệ là khối nước abcd trong khoảng thời gian dt. Khi bỏ qua ma sát giữa khối nước và thành ống, ngoại lực tác dụng lên cơ hệ gồm: Trọng lực $\vec{P}$, phản lực $\vec{R}$ của thành ống được phân làm hai thành phần: Thành phần nằm ngang $\vec{N}$ và thành phần thẳng đứng $\vec{Q}$ theo phương $\vec{P}$, và áp lực (áp suất khí quyển) hai đầu ống $\vec{\phi_1}$ và $\vec{\phi_2}$ vuông góc với ab và cd.

Áp dụng định lý động lượng của cơ hệ trên trục Ox nằm ngang, ta có:

$$\frac{dQ_x}{dt} = N + P_x + Q_x + \phi_{1x} + \phi_{2x} = N \qquad \text{(a)}$$

Tại thời điểm t hệ chiếm vị trí abcd, tại thời điểm $t_1 = t + dt$ hệ chiếm vị trí $a_1b_1c_1d_1$. Các thể tích yếu tố abb_1a_1 và cdd_1c_1 bằng nhau (lượng nước chảy vào và chảy ra trong cùng khoảng thời gian dt). Do đó khối lượng của chúng:

$$m_0 = m_1 = \rho F V_0 dt = 1000.0,02.2.dt = 40dt$$

Mặt khác, biến thiên động lượng của cơ hệ trong thời gian dt bằng hiệu động lượng các khối nước cdd_1c_1 và abb_1a_1. Thành phần chiếu trên trục Ox bằng:

$$dQ_x = m_1V_{1x} - m_0V_{0x}$$

Trong đó $V_{0x} = 0$, $V_{1x} = -V_1 cos\alpha$ như vậy:

$$dQ_x = -m_1V_1cos30^0 = -160cos30^0 dt \quad \text{(b)}$$

Thay (b) vào (a), ta được: $N = \dfrac{dQ_x}{dt} = -160cos30^0 = -80\sqrt{3}\ (N)$

Phản lực $\overrightarrow{N}$ nằm ngang có hướng ngược chiều trục Ox.

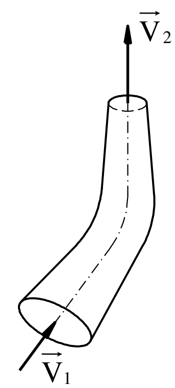
Định lý Ơ-le

Ta xét một khối chất lỏng giới hạn bởi mặt bên ống và hai tiết diện ngang phẳng thẳng góc với thành ống (hình 2-11).

Gọi: S_1, S_2 là diện tích các tiết diện ngang của 1 và 2; ρ_1, ρ_2 là mật độ khối của chất lỏng ở 1 và 2; $\overrightarrow{V_1}$ và $\overrightarrow{V_2}$ là vận tốc của chất lỏng ở 1 và 2.

Trong trạng thái chảy ổn định (dừng), nghĩa là vận tốc tại mỗi thời điểm của dòng chất lỏng không phụ thuộc vào thời gian, thì khối lượng M của khối chất lỏng chảy trong một đơn vị thời gian qua bất kỳ mặt cắt của ống là không đổi:

$$M = \rho_1V_1S_1 = \rho_2V_2S_2 \quad \text{(2-23)}$$



Hình 2-11

Ký hiệu $M\overrightarrow{V_1}$, $M\overrightarrow{V_2}$ là véctơ động lượng của khối chất lỏng ở tiết diện 1, 2 trong một đơn vị thời gian, khi đó có định lý Ơ-le, phát biểu:

"Tổng véctơ chính của các lực mặt, lực khối và các véctơ động lượng của chất lỏng chảy qua hai mặt cắt 1 và 2 bằng không".

$$\overrightarrow{R}_m + \overrightarrow{R}_k + M\overrightarrow{V_1} + \left(-M\overrightarrow{V_2}\right) = 0 \quad \text{(2-24)}$$

Trong đó: $\overrightarrow{R}_m$ là véctơ chính các lực mặt (các lực tác dụng lên các phần tử chất lỏng nằm trên mặt ngoài khối chất lỏng: Phản lực thành ống, ...); $\overrightarrow{R}_k$ là véctơ chính các lực khối (các lực tác dụng lên các phần tử chất lỏng thuộc khối chất lỏng: Trọng lực, ...)

2.3.2. Định lý chuyển động của khối tâm

a. Định lý chuyển động của khối tâm

Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm, có khối lượng bằng khối lượng của cơ hệ và chịu tác dụng của các lực được biểu diễn bằng véctơ chính của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$M\overrightarrow{W}_C = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e} \qquad (2\text{-}25)$$

Hoặc viết dưới dạng tọa độ Đềcác:

$$M\ddot{x}_C = \sum_k X_k^e;\ M\ddot{y}_C = \sum_k Y_k^e;\ M\ddot{z}_C = \sum_k Z_k^e \qquad (2\text{-}25a)$$

Chứng minh: Dễ dàng thấy, từ các hệ thức (2-15) và (2-21): $\vec{Q} = M\vec{V}_C$, $\dfrac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e}$

Suy ra: $$M\overrightarrow{W}_C = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e}$$

b. Định luật bảo toàn chuyển động khối tâm

Từ (2-25), nếu $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e} = 0$ thì $\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{const}$. Vậy, nếu véctơ chính của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không thì khối tâm của cơ hệ hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Tương tự, nếu $\sum_{k=1}^{n} X_k^e = 0$, theo (2-25a) ta có $\dot{x}_C = const\ (V_{Cx} = const)$. Nghĩa là: Nếu tổng chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trên một trục nào đó (trục Ox) luôn luôn bằng không thì hình chiếu của khối tâm của cơ hệ trên trục đó sẽ đứng yên hay chuyển động đều.

Áp dụng các định luật bảo toàn chuyển động khối tâm có thể giải thích một số hiện tượng trong thực tế:

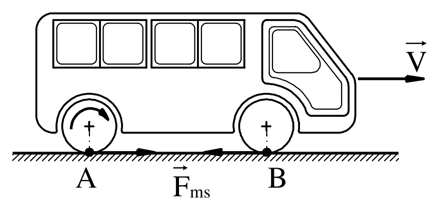
- *Chuyển động của khối tâm hệ mặt trời:* Các lực hấp dẫn giữa các ngôi sao là nội lực, nên có thể nói: Hệ mặt trời không có các ngoại lực tác dụng. Do đó có thể coi gần đúng: Khối tâm hệ chuyển động thẳng đều trong không gian vũ trụ.

- *Tác dụng của ngẫu lực lên vật.* Vật rắn tự do dưới tác dụng của ngẫu lực $(\vec{F}, \vec{F}')$ có: $\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^e} = \vec{F} + \vec{F}' \equiv 0$. Nếu ban đầu vật đứng yên, khối tâm C của nó sẽ đứng yên dưới tác dụng của ngẫu. Vì vậy, vật rắn chỉ có thể bắt đầu chuyển động quay quanh C dưới tác dụng của ngẫu.

- *Chuyển động theo mặt nằm ngang*

- Nếu không có ma sát, ngoại lực tác dụng lên người gồm trọng lượng và phản lực pháp tuyến mặt đường có tổng chiếu lên trục x theo phương ngang bằng không. Do đó nếu ban đầu người đứng yên, thì dù có sự cố gắng của bắp thịt (nội lực) cũng không giúp cho người có thể đi lại được. Lực ma sát có tác dụng làm cho người đi lại. Khi bước chân trái lên phía trước, chân phải có xu hướng trượt về phía sau và lập tức xuất hiện lực ma sát hướng về phía trước, chính lực đó giúp người đi về phía trước.

- Xe Ô-tô hay đầu máy xe lửa có thể di chuyển được là nhờ có lực ma sát trượt đặt vào điểm tiếp xúc B giữa bánh chủ động và mặt đường. Áp lực hơi hay khí từ máy phát sẽ truyền một mômen quay tới bánh chủ động và nó có hướng quay về phía sau, lực ma sát trượt hướng về phía trước. Khi lực này không có hoặc không đủ để thắng sức cản của bánh bị động (lực ma sát ở bánh bị động tại A hướng về phía sau), xe Ô-tô hay đầu máy không chuyển động hay tăng tốc được (hình 2-12). Bánh chủ động sẽ quay tại chỗ, ta gọi hiện tượng pan xe.



Hình 2-12

- *Hãm xe.* Để hãm xe ta tắt máy và cho má phanh áp chặt váo bánh xe. Lực ma sát giữa má phanh và bánh xe là nội lực. Lực này làm bánh xe quay chậm lại và lực ma sát ở điểm tiếp xúc giữa bánh xe và mặt đường là ngoại lực, ngược chiều chuyển động của xe có tác dụng hãm xe.

Nhận xét. Từ (2-21), và (2-25) khi chú ý đến (2-15) ta thấy, thực chất định lý động lượng và định lý chuyển động khối tâm là hai dạng của cùng một định lý. Tuy vậy, (2-25) chỉ sử dụng thuận tiện đối với vật rắn và hệ vật rắn. Khi khảo sát môi trường lỏng hay khí, hệ thức (2-25) sẽ mất ý nghĩa.

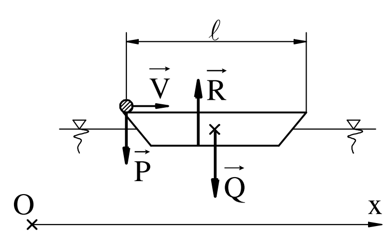
Ví dụ 5

Một người trọng lượng P ngồi ở mũi một chiếc thuyền trọng lượng Q dài ℓ. Thuyền đứng yên trên mặt nước. Bỏ qua sức cản của nước. Xác định độ dịch chuyển d của thuyền khi người đi tới mũi kia của thuyền.

Bài giải:

Xét cơ hệ gồm có người và thuyền, chịu tác dụng các ngoại lực: Trọng lực $\vec{P}, \vec{Q}$ và phản lực $\vec{R}$ của nước, chúng đều có phương thẳng đứng. Chọn trục Ox nằm ngang (hình 2-13). Áp dụng định lý chuyển động khối tâm trên trục Ox, ta có:

$$M\ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = const$$



Hình 2-13

Do lúc đầu hệ đứng yên, $\dot{x}_C^0 = 0$, nên suy ra x_C = const.

Giả sử ban đầu người và thuyền có tọa độ khối tâm trên trục x là x_1^0 và x_2^0, thì vị trí khối tâm ban đầu của hệ là:

$$x_C^0 = \frac{Px_1^0 + Qx_2^0}{P+Q} \qquad \text{(a)}$$

Khi người đi tới mũi kia của thuyền, thuyền dịch chuyển ngược lại một đoạn d. Khối tâm của người và thuyền trên trục Ox, khi này có tọa độ: $x_1 = x_1^0 + \ell - d;\ x_2 = x_2^0 - d$

Khối tâm của hệ có hoành độ bằng:

$$x_C = \frac{Px_1 + Qx_2}{P+Q} = \frac{P(x_1^0 + \ell - d) + Q(x_2^0 - d)}{P+Q} \qquad \text{(b)}$$

Do x_C = const hay $x_C = x_C^0$, từ (a) và (b) suy ra: $d = \dfrac{P\ell}{P+Q}$

2.4. Định lý mômen động lượng

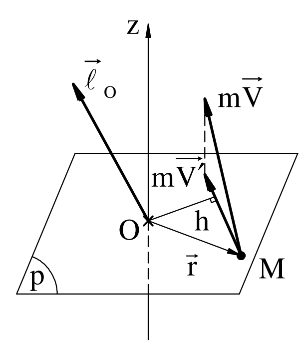
2.4.1. Mômen động lượng

a. Định nghĩa

Mômen động lượng của chất điểm đối với tâm O nào đó là đại lượng véctơ, là mômen của véctơ động lượng ($m\vec{V}$) của chất điểm lấy đối với tâm ấy, ký hiệu: $\vec{\ell}_O$.

Theo định nghĩa ta có (hình 2-14):

$$\overrightarrow{\ell_O} = \overrightarrow{m}_O(m\vec{V}) = \vec{r} \wedge m\vec{V} \qquad \text{(2-26)}$$



Hình 2-14

Mômen động lượng của chất điểm lấy đối với một trục z là đại lượng đại số, là mômen của véctơ động lượng của chất điểm lấy đối với trục ấy, ký hiệu ℓ_z:

$$\ell_z = m_z(m\vec{V}) = \pm mV'h \qquad \text{(2-27)}$$

Trong đó: $\vec{V'}$ là hình chiếu của $\vec{V}$ trên mặt phẳng (π) vuông góc với trục z, h là khoảng cách từ giao điểm của mặt phẳng (π) với trục z tới giá của véctơ $\vec{V'}$. Giá trị ℓ_z lấy dấu dương (+) nếu nhìn từ ngọn trục z xuống mặt phẳng (π) thấy $\vec{V'}$ có chiều quay vòng quanh trục z ngược chiều kim đồng hồ, ℓ_z lấy dấu âm (-) trong trường hợp ngược lại.

Mômen động lượng của cơ hệ lấy đối với một tâm O hay trục z là tổng hình học hay đại số mômen động lượng của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ đối với cùng tâm hay cùng trục ấy, ký hiệu $\overrightarrow{L_0}$ hay L_z :

$$\overrightarrow{L}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\ell}_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O(m_k \overrightarrow{V_k}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge m_k \overrightarrow{V_k} \tag{2-28}$$

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} \ell_{zk} = \sum_{k=1}^{n} m_z(m_k \overrightarrow{V_k}) = \sum_{k=1}^{n} (\pm m_k V'_k h_k) \tag{2-29}$$

Nếu cơ hệ gồm một số các vật rắn chuyển động thì mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm hay một trục, bằng tổng mômen động lượng của các vật thuộc cơ hệ đối với cùng tâm hay cùng trục ấy.

Dễ dàng chứng minh định lý liên hệ sau:

Chiếu véctơ mômen động lượng của chất điểm hay cơ hệ đối với một tâm O lên trục z đi qua tâm ấy bằng mômen động lượng của chất điểm hay cơ hệ đối với trục ấy.

$$ch_{Oz}\overrightarrow{\ell_O} = \ell_z; \;\; ch_{Oz}\overrightarrow{L}_O = L_z \tag{2-30}$$

Đơn vị tính mômen động lượng: kg.m^2/s, thứ nguyên: [mômen động lượng] = $\dfrac{ML^2}{T}$.

b. Tính mômen động lượng của chất điểm, cơ hệ đối với các trục tọa độ

Giả sử tại thời điểm khảo sát chất điểm có tọa độ x, y, z; có vận tốc $\overrightarrow{V}(\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$, còn O là gốc tọa độ của hệ Oxyz. Ta có:

$$\vec{\ell}_O = \vec{r} \wedge m\overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức và chú ý tới hệ thức đầu (2-30), ta được:

$$\ell_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \; \ell_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \; \ell_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) \tag{2-31}$$

Từ đó, suy ra đối với cơ hệ:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k); \; L_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k); \; L_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) \tag{2-32}$$

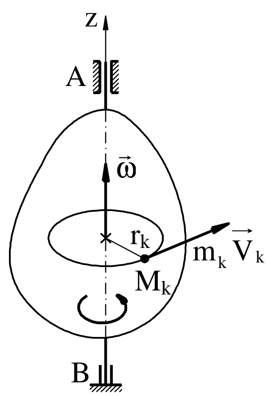
c. Mômen động lượng của vật rắn quay xung quanh trục cố định

Giả sử vật rắn quay xung quanh trục cố định Oz với vận tốc góc ω. Ta coi $\vec{\omega} \uparrow\uparrow z$. Xét một phần tử M_k thuộc vật có khối lượng m_k, vận tốc $\vec{V}_k$ và cách trục quay khoảng r_k (hình 2-15) theo định nghĩa: $L_z = \sum_{k=1}^{n} m_k V_k' r_k$

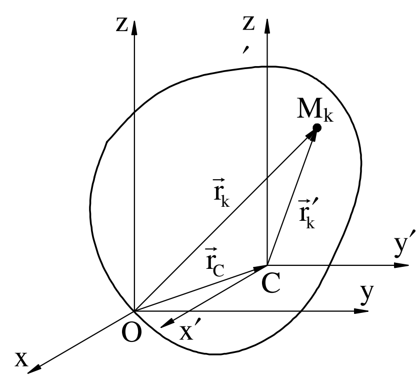
Do $V_k' = V_k = \omega . r_k$ nên:

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (\omega r_k) r_k = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^{\,2} = \omega . J_z$$

Khi $\vec{\omega} \uparrow\downarrow z$, ta có: $L_z = -\omega . J_z$ vậy: $L_z = \pm \omega J_z$ (2-33)



Hình 2-15



Hình 2-16

d. Tính mômen động lượng của hệ

Trong (2-28) đã đưa ra công thức định nghĩa tính mômen động lượng của hệ đối với một tâm (O). Bây giờ ta sẽ biến đổi nó, có áp dụng thuận tiện sau này.

Dựng hệ Cx′y′z′ qua khối tâm C của cơ hệ, chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu quán tính gốc tại O là Oxyz. M_k là chất điểm bất kỳ thuộc cơ hệ, ta có (hình 2-16):

$$\vec{r}_k = \vec{r}_c + \vec{r}_k'$$

Đạo hàm hệ thức trên theo thời gian: $\vec{V}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{V}_C + \vec{V}'_k$

Hệ thức (2-28) trở thành: $\vec{L}_O = \sum_{k=1}^{n} (\vec{r}_C + \vec{r}_k') \wedge m_k (\vec{V}_C + \vec{V}'_k)$

Khai triển và chú ý rằng: $\vec{r}_C'$ là véctơ có ngọn và gốc trùng nhau, nên $\vec{r}_C' = 0$, do đó $\vec{V}'_C = 0$, ta thu được: $\vec{L}_O = \vec{r}_C \wedge M\vec{V}_C + \vec{L}'_C$ (2-34)

Trong đó: $\overrightarrow{L'}_C = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}'_k \wedge m_k \overrightarrow{V'}_k$, là mômen động lượng của cơ hệ trong chuyển động tương đối lấy đối với khối tâm.

Định lý Cơ-níc 1

Mômen động lượng của cơ hệ lấy đối với một tâm O nào đó bằng mômen động lượng của khối tâm tại đấy tập trụng toàn bộ khối lượng của cơ hệ lấy đối với tâm O, cộng với mômen động lượng của cơ hệ trong chuyển động tương đối đối với khối tâm lấy đối với khối tâm.

2.4.2. Định lý mômen động lượng

a. Định lý đạo hàm mômen động lượng của chất điểm

Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của chất điểm đối với một tâm O (hay trục z) bằng tổng hình học (hay đại số) mômen của các lực tác dụng lên chất điểm đối với tâm (hay trục) ấy.

$$\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \dot{\vec{\ell}}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}(\overrightarrow{F_k})$$
$$\frac{d\ell_z}{dt} = \dot{\ell}_z = \sum_{k=1}^{n} m_z(\overrightarrow{F_k}) \qquad (2\text{-}35)$$

Chứng minh: Ta có: $\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{V}) = \vec{V} \wedge m\vec{V} + \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt}$

Vì $\vec{V} \wedge m\vec{V} = 0,\ m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}$

Do đó: $\frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_k} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F_k}\right)$

Để có hệ thức thứ hai của (2-35), ta chiếu hệ thức đầu lên trục z đi qua tâm O.

b. Định lý đạo hàm mômen động lượng của cơ hệ

Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với tâm O (hay trục z) bằng tổng hình học (hay đại số) mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm (hay trục) ấy..

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_O}\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)$$
$$\frac{dL_z}{dt} = \dot{L}_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \qquad (2\text{-}36)$$

Chứng minh:

Áp dụng định lý mômen động lượng cho chất điểm thứ k của cơ hệ n chất điểm, ta có:

$$\frac{d\vec{\ell}_{Ok}}{dt} = \dot{\vec{\ell}}_{Ok} = \vec{m}_O\left(\vec{F_k^e}\right) + \vec{m}_O\left(\vec{F_k^i}\right)$$

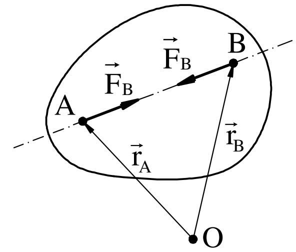
Trong đó: $\vec{F_k^e}$, $\vec{F_k^i}$ là hợp các ngoại lực, nội lực tác dụng lên chất điểm thứ k thuộc cơ hệ. Lập hệ thức trên cho n chất điểm và cộng vế với vế lại, ta được:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^e}\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^i}\right)$$

Hay $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^e}\right) + \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^i}\right)$

Để nhận được hệ thức thứ nhất của định lý, ta cần chỉ ra: $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^i}\right) = 0$, nghĩa là: Véctơ mômen chính của hệ nội lực tác dụng lên cơ hệ triệt tiêu.

Thật vậy, xét hai chất điểm A, B bất kỳ thuộc hệ. Lực tác dụng tương hỗ giữa chúng $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ với $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$ (hình 2-17). Lấy O làm tâm lấy mômen, ta có:



Hình 2-17

$$\vec{m}_O\left(\vec{F}_A\right) + \vec{m}_O\left(\vec{F}_B\right) = \vec{r}_A \wedge \vec{F}_A + \vec{r}_B \wedge \vec{F}_B$$

Thay $\vec{F_A} = -\vec{F_B}$, ta được: $\vec{m}_O\left(\vec{F_A}\right) + \vec{m}_O\left(\vec{F_B}\right) = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \wedge \vec{F}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_B \equiv 0$

Do A, B bất kỳ, suy ra: $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^i}\right) = 0$. Từ đó suy ra: $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F}_k^e\right)$

Chiếu hệ thức này lên trục z đi qua O, ta nhận được hệ thức thứ hai của (2-36) và định lý được chứng minh.

2.4.3. Định luật bảo toàn mômen động lượng

Từ hệ thức đầu của (2-36), nếu $\sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O\left(\vec{F_k^e}\right) \equiv 0$, thì suy ra: $\vec{L}_O = \overrightarrow{const}$.

Vậy, nếu véctơ mômen chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không, thì mômen động lượng của hệ đối với tâm ấy không đổi.

Tương tự: Nếu tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ với một trục luôn luôn bằng không, thì mômen động lượng của hệ với trục ấy không đổi, nghĩa là:

$$\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{F_k^e}\right) \equiv 0 \text{ suy ra: } L_z = \text{const}$$

Có thể áp dụng định luật bảo toàn mômen động lượng để giải thích nhiều hiện tượng, chẳng hạn: Xét chuyển động lên thẳng của máy bay lên thẳng:

Cánh quạt đặt lên máy bay khi quay đều không những đẩy không khí xuống phía dưới mà còn truyền cho nó chuyển động xoáy cùng chiều với chiều quay của cánh quạt. Gọi C_z là trục thẳng đứng đi qua trọng tâm C của máy bay. Bỏ qua tác dụng của khối lượng khí đứng yên bao quanh khối không khí đang chuyển động xoáy, ta sẽ có:

$$\sum_{k=1}^{n} m_{Cz}\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \equiv 0$$

Suy ra: $L_{z(\text{hệ})} = L_{z(\text{máy bay})} + L_{z(\text{cánh quạt + khối không khí nén})} = \text{const}$

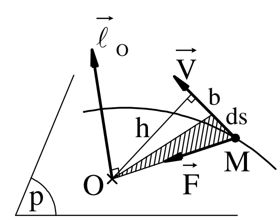
Do ban đầu hệ khảo sát đứng yên, nên $L_{z(\text{hệ})} \equiv 0$. Nên khi cánh quạt của máy bay quay thì thân máy bay phải quay quanh trục Cz ngược chiều với chiều quay của cánh quạt. Để làm mất hiện tượng không mong muốn này, người ta đặt tại đuôi máy bay một cánh quạt nhỏ, gọi là cánh quạt lái.

Nhận xét:

- Cũng giống như định lý động lượng, định lý mômen động lượng khi nghiên cứu chuyên động quay của hệ cho phép loại trừ các nội lực chưa biết tác dụng lên hệ.

- Áp dụng định lý mômen động lượng ngoài việc khảo sát chuyển động quay của hệ đối với trục cố định, mà còn sử dụng nó cả trong lý thuyết con quay, lý thuyết va chạm và mở rộng hơn đối với các vật rắn chuyển động tự do (chẳng hạn như: Chuyển động của máy bay, của đạn, tên lửa, ...).

2.4.1. Chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm



Hình 2-18

Cho một điểm O cố định của một hệ quy chiếu quán tính. Một chất điểm M sẽ chịu tác dụng của một trường lực xuyên tâm có tâm ở O nếu tại mỗi thời điểm, lực $\overrightarrow{F}$ được đặt vào M ở trên cùng một đường thẳng với OM.

Trong trường hợp một lực xuyên tâm thì $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F}\right) \equiv 0$. Như vậy, tại mỗi thời điểm, $\overrightarrow{OM}$ vuông góc với véctơ $\overrightarrow{\ell}_O$ không đổi. Quỹ đạo của M là phẳng, mặt phẳng quỹ đạo vuông góc với véctơ $\overrightarrow{\ell}_O$ và chứa điểm O (hình 2-18). Ngoài ra, ta cũng có:

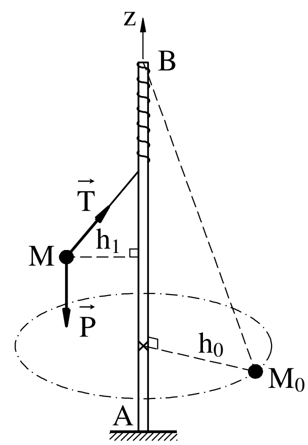
$\left|\overrightarrow{\ell}_O\right| = \left|\overrightarrow{m}_O(m\vec{v})\right| = const$. Do m không đổi, suy ra: $\left|\overrightarrow{m}_O(m\vec{v})\right| = v.h = const$. Có thể giải thích kết quả này bằng hình học như sau: $vh = \dfrac{ds}{dt}h;\ ds.h = 2d\sigma$.

Trong đó: dσ là diện tích tam giác quạt yếu tố Omb. Từ đó:

$$vh = 2\frac{d\sigma}{dt} = const,\ \ hay:\ \frac{d\sigma}{dt} = const$$

$\frac{d\sigma}{dt}$ được gọi là vận tốc diện tích, là không đổi đối với một chuyển động do lực xuyên tâm. Kết quả này tạo ra định luật các diện tích, tồn tại trong chuyển động các hành tinh và là một trong số các định luật Kêple.

Ví dụ 6. Quả cầu M được buộc vào sợi dây BM mềm nhẹ không giãn nhận được vận tốc ban đầu $\overrightarrow{V}_O$ vuông góc với mặt phẳng ABM. Quả cầu chuyển động sao cho dây cuốn vào trục AB thẳng đứng và có vận tốc luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đi qua trục và nó. Khoảng cách ban đầu từ quả cầu tới trục là h_0. Bỏ qua kích thước của trục. Tìm vận tốc của quả cầu khi khoảng cách từ nó đến trục quay là h_1 ?.



Hình 2-19

Bài giải:

Chọn trục z trùng với AB. Quả cầu coi như chất điểm chịu tác dụng các lực gồm: Trọng lực $\vec{P}$ và phản lực của dây $\vec{T}$.

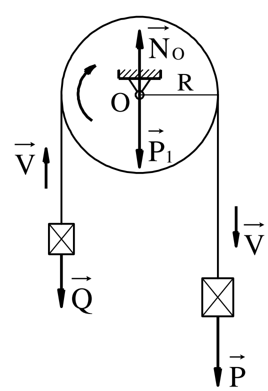
Áp dụng định lý đạo hàm mômen động lượng của chất điểm, ta có:

$$\frac{d\ell_z}{dt} = m_z\left(\vec{P}\right) + m_z\left(\vec{T}\right) \equiv 0$$

Suy ra $\ell_z = const$, nghĩa là: $\ell_z^{(1)} = \ell_z^{(0)}$

Do: $\ell_z^{(0)} = mv_0h_0$; $\ell_z^{(1)} = mv_1h_1$. Thay vào hệ thức trên, ta nhận được: $v_1 = v_0\frac{h_0}{h_1}$

Ví dụ 7. Một sợi dây mềm nhẹ không dãn, hai đầu buộc hai tải trọng, trọng lượng P và Q, vắt qua ròng rọc đồng chất bán kính R trọng lượng P_1, bỏ qua ma sát ở ổ trục. Xác định gia tốc các tải trọng khi hệ chuyển động.



Hình 2-20

Bài giải:

Khảo sát cơ hệ bao gồm: Các tải trọng, dây và ròng rọc. Các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ là: Trọng lượng của ròng rọc và các tải trọng: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}$ và phản lực $\vec{N}_O$ của trục ròng rọc (hình 2-20).

Áp dụng định lý mômen động lượng của cơ hệ đối với trục quay của ròng rọc Ox, ta có: $\frac{dL_x}{dt} = \sum_k m_x\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)$

Trong đó: $\sum_k m_x\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = m_x\left(\overrightarrow{P_1}\right) + m_x\left(\overrightarrow{P}\right) + m_x\left(\overrightarrow{Q}\right) + m_x\left(\overrightarrow{N_O}\right) = (P-Q)R$

Đại lượng L_x bao gồm mômen động lượng của tải trọng và ròng rọc, bằng:

$$L_x = J_x\omega + \frac{P}{g}V.R + \frac{Q}{g}V.R$$

Ở đây: $\omega = \frac{V}{R}$ là vận tốc góc của ròng rọc; R là bán kính của nó; V là vận tốc của tải trọng; $J_x = 0,5\frac{P_1}{g}R^2$, do đó: $L_x = \left(\frac{P_1}{2} + P + Q\right)\frac{R}{g}V$

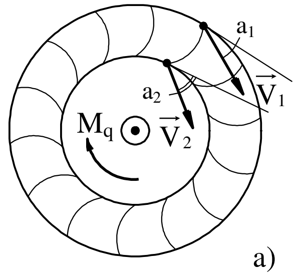
Thay các giá trị vừa tìm được vào (a), ta được: $(P_1 + 2P + 2Q)\frac{R}{2g}.\frac{dV}{dt} = (P-Q)R$

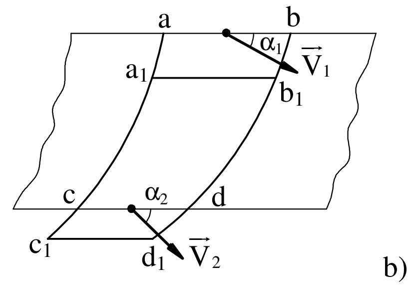
Từ đó: $w = \frac{dV}{dt} = \frac{2(P-Q)}{P_1 + 2P + 2Q}g$

Ví dụ 8. Bánh công tác của tuabin thuỷ lực quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc không đổi ω. Vận tốc tuyệt đối của phần tử nước tại tiết diện nước chảy vào là $\overrightarrow{V_1}$ hợp với tiếp tuyến của vòng tròn ngoài của vành bánh một góc α_1. Ở tiết diện nước thoát ra, phần tử nước có vận tốc $\overrightarrow{V_2}$ hợp với tiếp tuyến của vòng tròn trong của vành bánh một góc α_2. Bán kính của vòng ngoài và vòng trong của vành bánh là r_1, r_2. Giả thiết nước chảy dừng trong các đường dẫn. Xác định mômen quay do nước chảy ở khoảng giữa các cánh truyền cho bánh công tác (hình 2-21a).

Bài giải:

Xét cơ hệ gồm: Khối nước chứa đầy trong tất cả các đường dẫn giữa các cánh. Ngoại lực tác dụng lên hệ: Trọng lực $\overrightarrow{P}$ của khối nước, các phản lực $\overrightarrow{R_k}$ của các thành đường dẫn lên khối nước. Chọn trục z là trục quay thẳng đứng và hướng xuống phía dưới.





Hình 2-21

Áp dụng định lý mômen động lượng của cơ hệ đối với trụ z, ta có:

$$\frac{dL_z}{dt} = m_z\left(\vec{P}\right) + m_z\left(\vec{R}_k\right) \qquad (1)$$

Trong đó: $m_z\left(\vec{P}\right) = 0$ vì $\vec{P}$ song song cùng chiều với trục z. Xét một đường dẫn, giả sử tại thời điểm t có khối nước abcd, còn tại thời điểm t + dt khối nước đó chiếm vị trí $a_1b_1c_1d_1$ (hình 2-21b). Các thể tích nguyến tố abb_1a_1 và cdd_1c_1 bằng nhau vì lượng nước chảy vào và thoát ra trong đường dẫn trong cùng khoảng thời gian dt bằng nhau. Do đó khối lượng của chúng cũng bằng nhau. Ta có:

$$m_1 = m_2 = m = \frac{Q}{ng}dt$$

Trong đó: n là số đường dẫn; Q là trọng lượng của nước chảy qua tất cả các đường dẫn trong một đơn vị thời gian.

Do chuyển động của dòng nước là dừng, biến thiên mômen động lượng của khối nước abcd đối với trục z trong khoảng thời gian dt bằng hiệu mômen động lượng của khối nước cdd_1c_1 và abb_1a_1 đối với trục z, nghĩa là:

$$dL_{zk} = m_2V_2h_2 - m_1V_1h_1 \qquad (2)$$

Ở đây: m = m_1 = m_2; h_1 và h_2 là khoảng cách từ các véctơ động lượng $m_1\vec{V_1}$ và $m_2\vec{V_2}$ tới trục z và: $h_1 = r_1 cos\alpha_1$; $h_2 = r_2 cos\alpha_2$.

Thay các giá trị vào (2) ta có: $dL_{zk} = \left(\frac{Q}{ng}r_2V_2cos\alpha_2 - \frac{Q}{ng}r_1V_1cos\alpha_1\right)dt$

Biến thiên mômen động lượng của toàn hệ đối với trục z trong khoảng thời gian dt bằng:

$$dL_z = \sum_k dL_{zk} = n\frac{Q}{ng}\left(r_2V_2cos\alpha_2 - r_1V_1cos\alpha_1\right)dt$$

Thay các kết quả trên vào (1), thu được: $\frac{Q}{g}\left(r_2V_2cos\alpha_2 - r_1V_1cos\alpha_1\right) = \sum_k m_z\left(\vec{R}_k\right)$

Các áp lực của nước lên thành đường dẫn có độ lớn bằng độ lớn của $\vec{R}_k$, chiều ngược lại. Do đó, nước sẽ tác dụng lên rôto một mômen quay:

$$M_q = -\sum_k m_z\left(\vec{R}_k\right) = \frac{Q}{g}\left(r_1V_1cos\alpha_1 - r_2V_2cos\alpha_2\right)$$

Chính nhờ mômen quay này mà rôto của tuốcbin phản lực quay được.

2.5. Định lý động năng

2.5.1. Động năng

a. Định nghĩa

- *Động năng của chất điểm là đại lượng vô hướng dương bằng nửa tích khối lượng (m) của chất điểm với bình phương vận tốc (v) của nó.*

$$T = \frac{1}{2} m V^2$$

- *Động năng của cơ hệ, ký hiệu T, là tổng động năng của tất cả các chất điểm thuộc cơ hệ đó:*

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k v_k^2 \qquad (2\text{-}37)$$

- *Trường hợp cơ hệ gồm một số vật rắn chuyển động, thì động năng của cơ hệ là tổng động năng của các vật rắn chuyển động thuộc cơ hệ đó.*

Thứ nguyên của động năng $[T] = M \frac{L^2}{T^2}$, đơn vị thường dùng là Jun (J), $1\text{J} = 1\text{kg}\frac{\text{m}^2}{s^2}$.

b. Tính động năng của cơ hệ

Tính động năng của cơ hệ chuyển động bất kỳ ngoài việc dùng công thức định nghĩa (2-37), còn có thể dùng công thức biểu thị bằng định lý sau:

Định lý Cơ-níc 2

Động năng của cơ hệ chuyển động bất kỳ, bằng tổng động năng của khối tâm tại đó tập trung toàn bộ khối lượng của cơ hệ và động năng của cơ hệ trong chuyển động tương đối đối với khối tâm.

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + T'_C \qquad (2\text{-}38)$$

Chứng minh:

Tương tự như việc dẫn ra công thức (2-34) (*định lý Cơ-níc 1*), thay $\overrightarrow{V}_k = \overrightarrow{V}_C + \overrightarrow{V'_k}$ vào (2-37), ta có:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k \overrightarrow{V_k^2} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \left(\overrightarrow{V_C} + \overrightarrow{V'_k}\right)^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k \overrightarrow{V_C^2} + \sum_k \frac{1}{2} m_k \overrightarrow{V'_k}^2 + \sum_k m_k \overrightarrow{V_C}.\overrightarrow{V'_k}$$

Xét từng thành phần: $\sum_k \frac{1}{2} m_k V_C^2 = \frac{1}{2} V_C^2 \sum_k m_k = \frac{1}{2} M V_C^2$

$\sum_k \frac{1}{2} m_k V'^2_k = T'_C$, là động năng của cơ hệ trong chuyển động tương đối đối với khối tâm.

$$\sum_k m_k \overrightarrow{V_C}.\overrightarrow{V'_k} = \overrightarrow{V_C}.\sum_k m_k \overrightarrow{V'_k} = \overrightarrow{V_C}.M\overrightarrow{V'_C} = 0$$

(vì $\overrightarrow{V'_C}$ là vận tốc của điểm C đối với hệ quy chiếu có gốc tại C, nên $\overrightarrow{V'_C} = 0$)

Vậy, ta được: $T = \frac{1}{2} M V_C^2 + T'_C$

c. Động năng của vật rắn

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến: Vật rắn chuyển động tịnh tiến thì vận tốc của mọi điểm thuộc vật đều bằng nhau và bằng vận tốc khối tâm $\overrightarrow{V_C}$ của nó, nên:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k V_k^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k V_C^2 = \frac{1}{2} M V_C^2 \qquad (2\text{-}39)$$

- Vật rắn quay xung quanh trục cố định: Vật rắn quay xung quanh trục cố định z với vận tốc góc ω, thì một điểm M_k thuộc vật cách trục quay khoảng r_k sẽ có vận tốc $V_k = \omega.r_k$. Động năng của vật rắn bằng:

$$T = \sum_k \frac{1}{2} m_k V_k^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k (\omega.r_k)^2 = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \qquad (2\text{-}40)$$

- Vật rắn chuyển động song phẳng: Trong chuyển động song phẳng, mọi dịch chuyển của vật đều có thể thực hiện được bằng một chuyển động tịnh tiến cùng với cực và một chuyển động quay quanh trục qua cực và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.

Nếu chọn cực là khối tâm C của vật rắn, áp dung định lý Cơ-níc 2 với chú ý đến (2-39) và (2-40), ta được:

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + T'_C = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 \qquad (2\text{-}41)$$

Trong đó J_{Cz} là mômen quán tính của vật rắn đối với trục Cz đi qua khối tâm và vuông góc với mặt phẳng cơ sở.

2.5.2. Công của lực

a. Định nghĩa

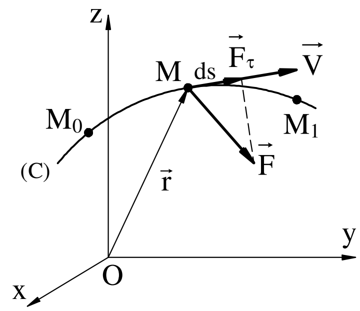
- *Công yếu tố của lực:* Cho lực $\vec{F}$ biến đổi, có điểm đặt M dời chỗ trên đường cong (C). Gọi α là góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và véctơ vận tốc $\vec{V}$ của điểm đặt lực M; ds là dịch chuyển yếu tố của M theo đường cong (C) (hình 2-22).

Công yếu tố của lực $\vec{F}$, ký hiệu dA, khi điểm đặt lực M dời chỗ trên đường cong (C) là đại lượng vô hướng, xác định bởi hệ thức:

$$dA = Fcos\alpha.ds \qquad (2\text{-}42)$$

Từ (2-42) suy ra:

$$dA = \begin{cases} Fds & khi \quad \alpha = 0 \\ 0 & khi \quad \alpha = 90^0 \\ -Fds & khi \quad \alpha = 180^0 \end{cases}$$



Hình 2-22

Có thể biểu thị hệ thức (2-42) ở các dạng:

– Dạng véctơ: $dA = F\cos\alpha.ds = F.|d\vec{r}|cos\alpha = \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\vec{V}dt$ (2-43)

– Dạng tọa độ đề các: $dA = \vec{F}.d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz$ (2-44)

– Dạng tọa độ tự nhiên: $dA = Fcos\alpha.ds = F_\tau ds$ (2-45)

- *Công của lực trên quãng đường hữu hạn:*

Công của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt M dời chỗ trên đường cong (C) từ M_0 đến M_1 là:

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}}(\vec{F}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} dA_k$$

Tổng trên là tích phân đường từ M_0 đến M_1, nghĩa là:

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = \int_{\overset{\frown}{M_0M_1}} dA = \int_{(M_0)}^{(M_1)} Fcos\alpha.ds \qquad (2\text{-}46)$$

Thứ nguyên của công $[A] = M\dfrac{L^2}{T^2}$, đơn vị thường dùng là Jun(J), 1J = 1Nm = 1 kgm^2/s^2.

– Công suất: Công suất, ký hiệu là N, là công sinh ra trong một đơn vị thời gian. Ta có:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau ds}{dt} = F_\tau V \qquad (2\text{-}47)$$

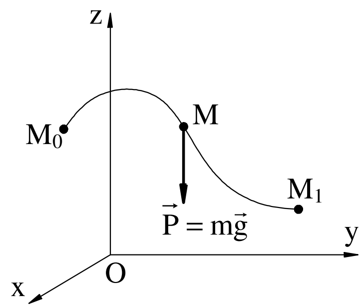
Đơn vị thường dùng: Oát (ký hiệu W), 1W = 1J/s

Trong kỹ thuật hay lấy đơn vị là mã lực để chỉ công suất, 1 mãlực bằng 736 oát.

b. Một số ví dụ tính công của lực

- *Công của trọng lực:* Giả sử chất điểm M chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ dời chuyển từ vị trí $M_0(x_0, y_0, z_0)$ đến vị trí $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (hình 2-23). Ở gần mặt đất, coi $\vec{P} = m\vec{g}$ không đổi và hướng thẳng đứng xuống dưới, song song với trục Oz. Ta có:

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M_1}} Xdx + Ydy + Zdz = \int\limits_{z_0}^{z_1} (-mg)dz = P(z_0 - z_1)$$



Hình 2-23

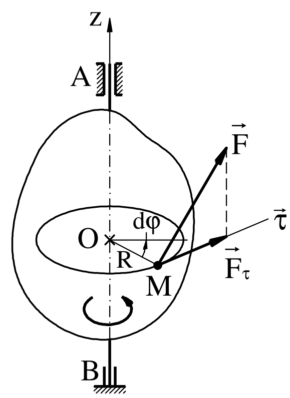
Đặt $h = |z_0 - z_1|$ là độ dời thẳng đứng của điểm đặt lực, ta được:

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = \pm Ph \qquad (2\text{-}48)$$

Trong đó: Công lấy dấu dương (+) nếu điểm đặt trọng lực hạ xuống, lấy dấu âm (–) nếu điểm đặt trọng lực nâng lên.

Vậy, công của trọng lực không phụ thuộc vào quãng đường đi của điểm đặt lực, mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của điểm đặt lực.

- *Công của lực đặt lên vật rắn quay xung quanh trục cố định* (hình 2-24):



Hình 2-24

Giả sử vật rắn quay xung quanh trục cố định z, dưới tác dụng của lực $\vec{F}$. Ta tính công của lực $\vec{F}$ khi vật quay được một góc φ.

Ta có: $dA = F_\tau ds = F_\tau R.d\varphi$; do: $F_\tau.R = m_z(\vec{F})$, nên $dA = m_z(\vec{F})d\varphi$.

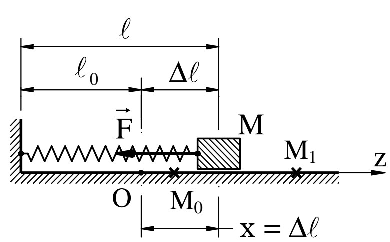
Khi vật quay được một góc φ, công của lực $\vec{F}$ bằng: $A = \int\limits_0^{\varphi} m_z(\vec{F})d\varphi$

(2-49)

Nếu $m_z(\vec{F}) = M_z = const$ thì $A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = M_z\varphi$

Khi vật quay dưới tác dụng của ngẫu, thì M_z ở hệ thức trên được hiểu là gía trị của ngẫu lực đã cho.

- *Công của lực đàn hồi:* Xét tải trọng M trên mặt ngang và gắn vào lò xo (hình 2-25). Hướng trục Ox theo phương ngang, gốc O trùng với vị trí mút của lò xo chưa biến dạng. Khi M ở vị trí bất kỳ, thì tải trọng chịu tác dụng lực đàn hồi $\vec{F}$ hướng về O. Theo định luật Húc, ta có:



Hình 2-25

$F = C|\Delta\ell| = C|x|$, C là độ cứng của lò xo.

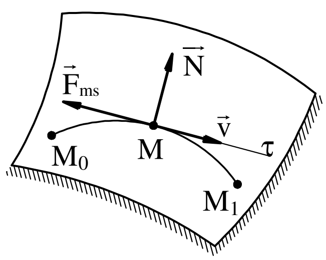
Công của lực đàn hồi $\overrightarrow{F}$ khi tải trọng dịch chuyển từ $M_0(x_0)$ đến $M_1(x_1)$ bằng:

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-Cx)dx = -C\int_{x_0}^{x_1} xdx = \frac{C}{2}(x_0^2 - x_1^2) \qquad (2\text{-}50)$$

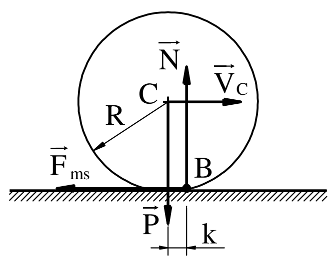
- *Công của lực ma sát:* Do $F_{ms} = fN$ và có hướng ngược chiều vận tốc $\overrightarrow{V}$, do đó (hình 2-26):

$$A_{\overset{\frown}{M_0M_1}} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{ms}ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fNds \qquad (2\text{-}51)$$

Công của lực ma sát $\overrightarrow{F}_{ms}$ luôn luôn âm.



Hình 2-26



Hình 2-27

- *Công của lực ma sát tác dụng lên vật lăn.*

Xét bánh xe lăn không trượt trên mặt phẳng ngang (hình 2-27). Công của lực ma sát trượt $\overrightarrow{F}_{ms}$ bằng:

$$dA = -F_{ms}dS_B = -F_{ms}V_Bdt$$

Do B là tâm vận tốc tức thời: $V_B = 0$, nên suy ra: dA = 0. Theo cách giải thích này thì công yếu tố của phản lực pháp tuyến $\overrightarrow{N}$ cũng bằng không.

Tuy nhiên, đối với ngẫu ma sát lăn tạo bởi $\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{N}\right)$ có $M_\ell = kN$ (k là hệ số ma sát lăn), thì:

$$dA\left(\overrightarrow{M}_\ell\right) = -M_\ell d\varphi = -kNd\varphi = -kN\frac{dS_C}{R} \qquad (2\text{-}52)$$

Trong đó: dS_C là dịch chuyển yếu tố của tâm bánh xe. Khi N không đổi, ta có:

$$A\left(\overrightarrow{M}_\ell\right) = -kN\varphi = -\frac{k}{R}NS_C$$

2.5.3. Định lý động năng

a. Định lý vi phân động năng của chất điểm:

Vi phân động năng của chất điểm bằng tổng công yếu tố của các lực tác dụng lên chất điểm ấy.

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\sum_k dA_k \tag{2-53}$$

Chứng minh: Xét chất điểm có khối lượng m, chuyển động dưới tác dụng của các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$. Theo phương trình cơ bản của động lực học, ta có:

$$m\overrightarrow{W}=\sum_k \overrightarrow{F_k} \text{ hay } m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}=\sum_k \overrightarrow{F_k}$$

Gọi $d\vec{r}$ là véctơ di chuyển yếu tố của chất điểm trong hệ quy chiếu quán tính. Nhân vô hướng $d\vec{r}$ với hệ thức trên, ta được:

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}.d\vec{r}=\sum_k \overrightarrow{F_k}.d\vec{r} \;\; hay \;\; m\overrightarrow{V}d\overrightarrow{V}=\sum_k dA_k$$

Chú ý rằng $\overrightarrow{V}^2=V^2$, hệ thức trên viết được: $d\left(\frac{mV^2}{2}\right)=\sum_k dA_k$

b. Định lý biến thiên động năng của chất điểm:

Biến thiên động năng của chất điểm trên một chuyển dời nào đó bằng tổng đại số công của các lực tác dụng lên chất điểm trên cùng chuyển dời ấy.

$$\frac{1}{2}mV_1^2-\frac{1}{2}mV_0^2=\sum_k A_k^{M_0M} \tag{2-54}$$

Chứng minh:

Tích phân hai vế hệ thức (2-53) theo các cận tương ứng của các biến tại M_0 và M_1 ta nhận được hệ thức (2-54).

c. Định lý vi phân động năng của cơ hệ:

Vi phân động năng của cơ hệ bằng tổng công yếu tố của các nội lực và ngoại lực tác dụng lên cơ hệ ấy.

$$dT=\sum_k dA_k^i+\sum_k dA_k^e \tag{2-55}$$

Chứng minh:

Xét cơ hệ n chất điểm. Gọi công yếu tố của hợp các nội lực và hợp các ngoại lực tác dụng vào chất điểm thứ k là dA_k^i và dA_k^e. Áp dụng định lý vi phân động năng cho chất điểm này, ta có:

$$d\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dA_k^i + dA_k^e$$

Lập các hệ thức trên cho từng chất điểm của hệ và lấy tổng từng vế, ta được:

$$d\left(\sum_k \frac{1}{2} m_k V_k^2\right) = dT = \sum_k dA_k^i + \sum_k dA_k^e$$

d. Định lý biến thiên động năng của cơ hệ:

Biến thiên động năng của cơ hệ trên một chuyển dời nào đó bằng tổng đại số công của các nội lực và ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trên cùng chuyển dời ấy.

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^i + \sum_k A_k^e \qquad (2\text{-}56)$$

Chứng minh:

Gọi công của nội lực và ngoại lực tác dụng vào chất điểm thứ k của cơ hệ trên một chuyển dời nào đó là A_k^i và A_k^e. Áp dụng định lý biến thiên động năng cho chất điểm này trên cùng chuyển dời, ta có:

$$\frac{1}{2} m_k V_{1k}^2 - \frac{1}{2} m_k V_{0k}^2 = A_k^i + A_k^e$$

Lập hệ thức trên cho từng chất điểm thuộc cơ hệ và cộng từng vế lại, thu được:

$$\sum_k \frac{1}{2} m_k V_{1k}^2 - \sum_k \frac{1}{2} m_k V_{0k}^2 = \sum_k A_k^i + \sum_k A_k^e$$

Hay: $T_1 - T_0 = \sum_k A_k^i + \sum_k A_k^e$

e. Định lý biến thiên động năng đối với vật rắn

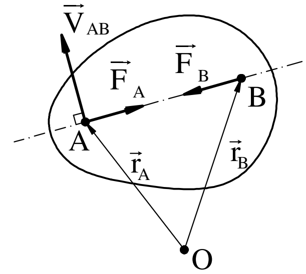
Biến thiên động năng của vật rắn chuyển động trên một chuyển dời nào đó bằng tổng đại số công của các ngoại lực tác dụng lên vật rắn trên cùng chuyển dời ấy.

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^e \qquad (2\text{-}57)$$

Chứng minh:

Vật rắn là trường hợp đặc biệt của cơ hệ. Để chứng minh hệ thức (2-57), ta chỉ cần chứng minh: Tổng công nội lực của vật rắn trên một chuyển dời bất kỳ bằng không, nghĩa là: $\sum_k A_k^i = 0$.

Xét hai chất điểm A, B bất kỳ thuộc vật rắn. Các nội lực tác dụng lên chúng tạo nên từng cặp trực đối nhau theo định luật tác dụng và phản tác dụng của Niutơn (hình 2-28). Ta có:



Hình 2-28

$$\sum_k dA_k^i = dA(\vec{F}_A) + dA(\vec{F}_B) = \vec{F}_A.d\vec{r}_A + \vec{F}_B.d\vec{r}_B$$

Do $d\vec{r}_A = \vec{V}_A dt$, $d\vec{r}_B = \vec{V}_B dt$, do đó:

$$dA(\vec{F}_A) + dA(\vec{F}_B) = \vec{F}_A.\left(\vec{V}_A - \vec{V}_B\right)dt = \vec{F}_A.\vec{V}_{AB}dt = 0$$

Vì $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$ vuông góc với AB (theo định lý cơ bản của động học vật rắn). Do A, B bất kỳ, suy ra: $\sum_k A_k^i = 0$

Nhận xét:

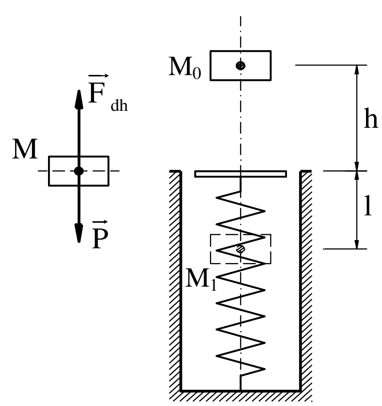
Đối với cơ hệ bất kỳ, trong các định lý động lượng và mômen động lượng của hệ, không có mặt của nội lực trong các hệ thức biểu thị các định lý. Còn nội lực có mặt trong các hệ thức biểu thị các định lý động năng. Tuy nhiên, ẩn phản lực liên kết như là ngoại lực vẫn có mặt trong các hệ thức biểu thị các định lý trên, còn đối với các định lý động năng, nếu bỏ qua ma sát ẩn phản lực liên kết sẽ bị loại trừ trong các hệ thức của định lý.

Ví dụ 9:

Vật có trọng lượng P rơi không có vận tốc ban đầu vào một lò xo từ độ cao h. Tìm độ co lớn nhất của lò xo λ, nếu độ co tĩnh của nó dưới tác dụng của vật này bằng λ_t. Bỏ qua khối lượng của lò xo.

Bài giải:

Khảo sát vật như chất điểm M. Lực tác dụng lên chất điểm: Trọng lượng $\vec{P}$ trên độ chuyển dời từ M_0 đến M_1 và lực đàn hồi lò xo $\vec{F}_{dh}$ trên độ chuyển dời từ M đến M_1 (hình 2-29). Áp dụng định lý biến thiên động năng của chất điểm khi nó chuyển dời từ M_0 đến M_1, ta có:



Hình 2-29

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{1}{2}mV_0^2 = \sum_k A_k^{M_0M_1}$$

Trong đó: $V_0 = 0$; $V_1 = 0$;

$$\sum_k A_k^{M_0M_1} = A\left(\vec{P}\right) + A\left(\vec{F}_{dh}\right)$$

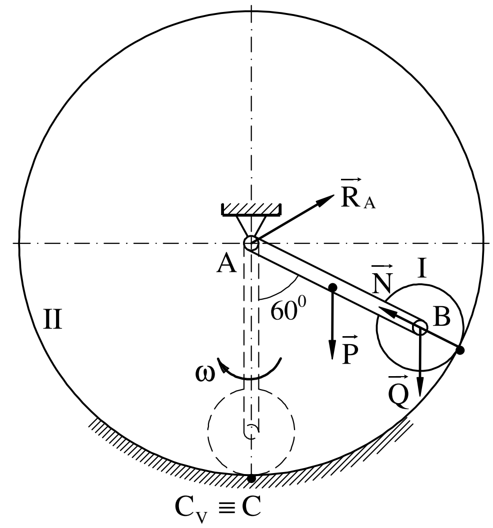
Hay: $\sum_k A_k^{M_0 m_1} = P(h+\lambda) - \frac{1}{2} C\lambda^2$

Ở đây: C là độ cứng của lò xo, được tính từ hệ thức: $P = C\lambda_t$. Thay các kết quả vào hệ thức trên, ta được phương trình xác định λ: $\lambda^2 - 2\lambda_t.\lambda - 2\lambda_t h = 0$

Giải phương trình này ta được: $\lambda = \lambda_t + \sqrt{\lambda_t^2 + 2\lambda_t h}$

Rõ ràng: $\lambda > \lambda_t$; khi h = 0, ta có: $\lambda = 2\lambda_t$.

Ví dụ 10. Bánh xe I trọng lượng Q, bán kính r lăn không trượt trong bánh xe II cố định trong mặt phẳng thẳng đứng và truyền chuyển động cho tay quay AB trọng lượng P. Tại thời điểm đầu tay quay ở vị trí lập một góc $\alpha = 60^0$ so với phương thẳng đứng và không có vận tốc ban đầu. Xác định vận tốc góc của tay quay tại thời điểm nó đi qua vị trí cân bằng. Bỏ qua ma sát ở ổ trục, tay quay AB coi là thanh đồng chất dài ℓ, bánh xe I coi như đĩa đồng chất (hình 2-30).



Hình 2-30

Bài giải:

- Khảo sát cơ hệ bao gồm tay quay AB và bánh xe I.
- Ngoại lực tác dụng lên cơ hệ: $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{N}$, $\vec{R}_A$.
- Nội lực tác dụng lên cơ hệ: Tại B có 1 đôi nội lực.
- Áp dụng định lý biến thiên động năng đối với cơ hệ ta có:

$$T_1 - T_0 = \sum_1^n A_k^e + \sum_1^n A_k^i \qquad (*)$$

- Tính $\sum_1^n A_k^i$: Vì dịch chuyển của điểm đặt của đôi nội lực này như nhau, hai lực này lại trực đối (cùng giá, cùng cường độ, ngược chiều) nên công sinh ra của chúng có trị số tuyệt đối bằng nhau nhưng ngược dấu nên: $\sum_1^n A_k^i = 0$.

- Tính $\sum_1^n A_k^e$: $\sum_1^n A_k^e = A(\vec{P}) + A(\vec{Q}) + A(\vec{N}) + A(\vec{R}_A)$

$$A(\vec{P}) = P.h_P = \frac{P\ell}{2}(1-\cos 60^0) = \frac{P\ell}{4}$$

$$A\left(\vec{Q}\right) = P.h_Q = Q\ell(1-\cos 60^0) = \frac{Q\ell}{2}$$

$A\left(\vec{N}\right) = 0$ (do phương của lực $\vec{N}$ $\perp$ phương dịch chuyển của điểm đặt lực).

$A\left(\vec{R}_A\right) = 0$ (do điểm đặt của $\vec{R}_A$ đứng yên).

Ta có: $\sum_1^n A_k^e = \frac{P\ell}{4} + \frac{Q\ell}{2} = \frac{P+2Q}{4}\ell$

- Tính T_0: $T_0 = 0$ (tại thời điểm ban đầu cơ hệ đứng yên).
- Tính T_1: $T_1 = T_1^{AB} + T_1^I$

Giả sử khi qua vị trí cân bằng tay quay AB có vận tốc góc ω, vận tốc góc của bánh xe I là ω_I, ta có: $\omega_I = \frac{\omega\ell}{r}$.

Ta có: $$T_1^{AB} = \frac{1}{2}\omega^2 J_{Az} = \frac{1}{2}\omega^2.\frac{P}{g}.\frac{\ell^2}{3} = \frac{P\ell^2}{6g}\omega^2$$

$$T_1^I = \frac{Q}{2g}V_{B_I}^2 + \frac{1}{2}\omega_I^2 J_{B_I z} = \frac{Q}{2g}(\omega\ell)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega\ell}{r}\right)^2 \frac{Q}{2g}r^2 = \frac{3Q\ell^2}{4g}\omega_I^2$$

Suy ra: $$T_1 = \frac{P\ell^2}{6g}\omega^2 + \frac{3Q\ell^2}{4g}\omega^2 = \frac{(2P+9Q)\ell^2}{12g}\omega^2$$

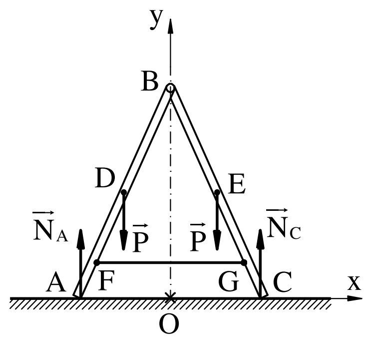
Thay các kết quả vàp (*) ta có:

$$\frac{(2P+9Q)\ell^2}{12g}\omega^2 = \frac{P+2Q}{4}\ell \quad \text{suy ra} \quad \omega = \sqrt{\frac{3g(P+2Q)}{(2P+9Q)\ell}}$$

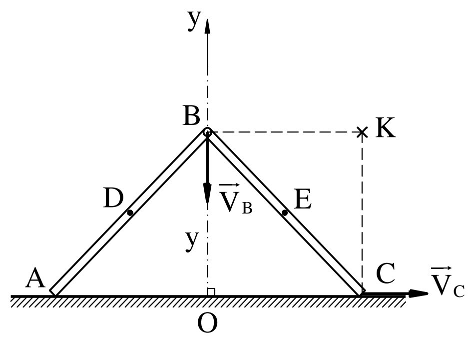
Ví dụ 11. Hai thanh đồng chất AB và BC nối với nhau bằng bản lề B. Mỗi thanh dài 2ℓ và có bán kính quán tính đối với trục đi qua khối tâm và vuông góc với thanh là ρ. Chúng được dựng trên nền nhẵn nằm ngang nhờ dây FG. Tại thời điểm nào đó dây bị đứt. Bỏ qua ma sát ở bản lề. Tính vận tốc của điểm B là hàm của khoảng cách OB (hình 2-31a).

Bài giải:

Xét cơ hệ là hai thanh AB và BC. Do tính chất đối xứng, thanh chuyển động dưới tác dụng của trọng lực, nên điểm B sẽ chuyển động theo phương thẳng đứng. Ngoại lực tác dụng lên hệ gồm: Các trọng lực $\vec{P}$ và phản lực pháp tuyến tại A, C là $\vec{N}_A$ và $\vec{N}_C$. Nội lực chỉ có ở bản lề B không có ma sát.



Hình 2-31a



Hình 2-31b

Áp dụng định lý biến thiên động năng của cơ hệ, ta có: $T_1 - T_0 = \sum_k A_k^i + \sum_k A_k^e$

Do bỏ qua ma sát ở bản lề B, nên: $\sum_k A_k^i = 0$; $T_0 = 0$ vì ban đầu hệ đứng yên. Hệ thức trên trở thành: $T_1 = \sum_k A_k^e$ (a)

Trong đó: $\sum_k A_k^e = A\left(\vec{P}\right) + A\left(\vec{P}\right) + A\left(\vec{N}_A\right) + A\left(\vec{N}_C\right)$

Ở đây $A\left(\vec{N}_A\right) = A\left(\vec{N}_C\right) = 0$ vì $\vec{N}_A$, $\vec{N}_C$ vuông góc với phương dịch chuyển của điểm đặt lực, còn khi B có tọa độ (0, y) (hình 2-31b) thì:

$$A\left(\vec{P}\right) + A\left(\vec{P}\right) = 2P\frac{h-y}{2} = P(h-y)$$

Vậy: $$\sum_k A_k^e = P(h-y) \qquad \text{(b)}$$

Động năng của hệ khi B(0, y) bằng: $T_1 = T_{AB} + T_{BC} = 2T_{BC} = 2\left(\frac{P}{2g}V_E^2 + \frac{1}{2}J_{Ez}\omega^2\right)$

K là tâm vận tốc tức thời của BC, nên:

$$V_E = V_B\frac{KE}{KB} = V_B\frac{\ell}{\sqrt{4\ell^2 - y^2}};\ J_{Ez} = \frac{P}{g}\rho^2;\ \omega = \frac{V_B}{KB} = \frac{V_B}{\sqrt{4\ell^2 - y^2}}$$

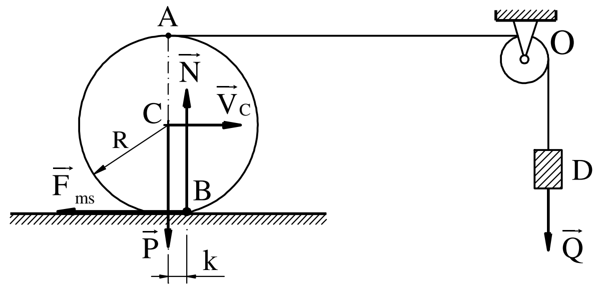
Do đó, ta được:

$$T_1 = 2T_{BC} = 2.\frac{P}{2g}V_B^2\left(\frac{\ell^2}{4\ell^2 - y^2} + \frac{\rho^2}{4\ell^2 - y^2}\right) = \frac{\ell^2 + \rho^2}{4\ell^2 - y^2}.\frac{P}{g}V_B^2 \qquad \text{(c)}$$

Thay (b), (c) vào (a), suy ra: $V_B = \sqrt{\frac{g(h-y)(4\ell^2 - y^2)}{\ell^2 + \rho^2}}$

khi B rơi tới nền thì y = 0, nên vận tốc của nó bằng: $V_B = 2\ell\sqrt{\dfrac{gh}{\ell^2+\rho^2}}$

Ví dụ 12. Trên con lăn hình trụ bán kính R trọng lượng P, người ta quấn sợi dây mềm nhẹ không dãn và vắt qua ròng rọc O rồi buộc vào tải trọng D trọng lượng Q (hình 2-32). Xác định vận tốc và gia tốc khối tâm C của con lăn khi nó dời được quãng đường S, ban đầu hệ đứng yên. Hệ số ma sát lăn giữa con lăn và mặt phẳng ngang là k, bán kính quán tính của nó đối với trục quay bằng ρ. Bỏ qua khối lượng ròng rọc O, giả thiết con lăn lăn không trượt trên mặt ngang.



Hình 2-32

Bài giải:

Xét hệ gồm con lăn, tải trọng D, dây và ròng rọc O. Để xác định V_C, ta áp dụng định lý biến thiên động năng của cơ hệ:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^i + \sum_k A_k^e \qquad \text{(a)}$$

Trong trường hợp này: $T_0 = 0$ và $\sum_k A_k^i = 0$;

$$T_1 = T_D + T_{c\ell}$$

$$T_D = \frac{Q}{2g}V_D^2,\ \text{còn}\ \ T_{c\ell} = \frac{P}{2g}V_C^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\rho^2\right)\omega^2$$

Do điểm B của con lăn là tâm vận tốc tức thời, nên: $\omega = \dfrac{V_C}{R}$ và $V_D = V_A = 2V_C$. Do đó:

$$T_1 = \frac{1}{2g}\left[4Q + P\left(1+\frac{\rho^2}{R^2}\right)\right]V_C^2$$

Tổng công các ngoại lực được thực hiện chỉ do lực $\vec{Q}$ và ngẫu lực $\left(\vec{N}, \vec{P}\right)$. Do $V_D = 2V_C$, nên dịch chuyển thẳng đứng h của tải trọng D là $h = 2S$ và $A\left(\vec{Q}\right) = Q.2S$. Mặt khác vì N = P = const, công của ngẫu lực ma sát lăn $M_\ell = kN$ bằng: $A\left(\vec{M}_\ell\right) = -\dfrac{k}{R}PS$. Vậy:
$$\sum_k A_k^e = 2QS - \frac{k}{R}PS$$

Thay các giá trị tìm được vào phương trình (a), nhận được:

$$\frac{1}{2g}\left[4Q+P\left(1+\frac{\rho^2}{R^2}\right)\right]V_C^2=\left(2Q-\frac{k}{R}P\right)S$$

Suy ra: $V_C=\sqrt{\dfrac{2gS\left(2QR-kP\right)R}{4QR^2+P\left(R^2+\rho^2\right)}}$ (b)

Để xác định W_C, đạo hàm (b) theo t và chú ý rằng $V_C=\dfrac{dS}{dt}$, ta tìm được:

$$W_C=\frac{\left(2QR-kP\right)R}{4QR^2+P(R^2+\rho^2)}g$$

2.5.4. Định luật bảo toàn cơ năng

a. Định nghĩa

- *Trường lực:* Phần không gian trong đó mỗi chất điểm chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí của nó gọi là trường lực. Theo định nghĩa:

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F}\left(x,\ y,\ z\right)=X\left(x,\ y,\ z\right).\overrightarrow{i}+Y\left(x,\ y,\ z\right).\overrightarrow{j}+Z\left(x,\ y,\ z\right).\overrightarrow{k}$$

- *Trường lực thế:* Trong trường lực nếu tồn tại hàm: $U=U\left(x,\ y,\ z\right)$ sao cho thỏa mãn điều kiện:

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\ Y=\frac{\partial U}{\partial y};\ Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

(2-58)

thì trường lực đó gọi là trường lực thế. Hàm $U=U\left(x,\ y,\ z\right)$ được gọi là hàm lực.

Trong trường lực thế, công của lực không phụ thuộc vào dạng đường đi của điểm đặt lực, mà chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của nó.

Thật vậy, ta có: $A_{M_0M}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\limits_{M_0}^{M}Xdx+Ydy+Zdz=\int\limits_{M_0}^{M}\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$

$$=\int\limits_{M_0}^{M}dU=U\left(M\right)-U\left(M_0\right)=U\left(x,\ y,\ z\right)-U\left(x_0,\ y_0,\ z_0\right)$$

hay viết đơn giản là: $A=U-U_0$ (2-59)

- *Thế năng:* Trong trường lực thế, ta chọn điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ cố định. Giá trị của điểm M_0 là U_0. Thế năng của trường lực thế tại vị trí M(x, y, z), ký hiệu là π; π =

π(x, y, z) là công của lực sinh ra khi chất điểm dịch chuyển từ vị trí M(x, y, z) bất kỳ đến vị trí $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Gọi giá trị hàm tại vị trí M(x, y, z) bất kỳ là U, khi đó:

$$\pi = U_0 - U \tag{2-60}$$

π được gọi là hàm thế; lực $\overrightarrow{F}$ trong trường lực thế gọi là lực thế. Từ (2-58) và (2-60) suy ra:

$$X = -\frac{\partial \pi}{\partial x};\ Y = -\frac{\partial \pi}{\partial y};\ Z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} \tag{2-61}$$

Do đó: $$A_{M_0M}\left(\overrightarrow{F}\right) = A = \pi_0 - \pi \tag{2-62}$$

b. Định luật bảo toàn cơ năng

Giả sử các nội lực và ngoại lực tác dụng lên cơ hệ khảo sát là những lực thế, khi đó, mỗi điểm của cơ hệ công của các lực đặt lên nó bằng:

$$A_k = A_k\left(\overrightarrow{F_k^i}\right) + A_k\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = U_k - U_{0k} = \pi_{0k} - \pi_k$$

Đối với tất cả các nội và ngoại lực tác dụng lên các chất điểm thuộc hệ, ta có:

$$\sum_k A_k = \sum_k A_k\left(\overrightarrow{F_k^i}\right) + \sum_k A_k\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = \sum_k \pi_{0k} - \sum_k \pi_k = \pi_0 - \pi$$

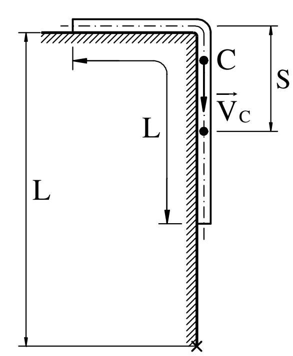
Áp dụng định lý biến thiên động năng của cơ hệ trong trường hợp này thì:

$$T - T_0 = \sum_k A_k = \pi_0 - \pi$$

Suy ra: $$T + \pi = const \tag{2-63}$$

Ký hiệu: $E = T + \pi$, gọi là cơ năng. Hệ thức (2-63) trở thành E = const. Cơ hệ thỏa mãn điều kiện này gọi là hệ bảo toàn. Hệ thức (2-63) là tích phân năng lượng, nó biểu thị định luật bảo toàn cơ năng và được phát biểu như sau: *"Trong trường lực thế, tổng động năng và thế năng của hệ không đổi"*.

Ví dụ 13. Sợi dây đồng chất có chiều dài L, một phần nằm trên bàn nhẵn nằm ngang, chuyển động được dưới tác dụng của trọng lượng phần kia của dây treo lửng ngoài bàn. Hãy xác định khoảng thời gian để dây trượt khỏi bàn. Biết rằng tại thời điểm ban đầu chiều dài đoạn dây treo lửng bằng ℓ, còn vận tốc ban đầu bằng không.



Hình 2-33

Bài giải:

Xét hệ là dây đồng chất chiều dài L. Gọi $\vec{V}_C$ là vận tốc trọng tâm của dây, còn S là quãng đường đi được của trọng tâm phần treo lửng ngoài bàn (hình 2-33). Ta có:

$$T = \frac{mV_C^2}{2};\ V_C = \dot{S}$$

Chọn vị trí mút dưới dây khi tuột khỏi bàn làm gốc tính thế năng, khi đó:

$$\pi = mg\frac{2S(L-S)}{L} + mg\frac{(L-2S)L}{L}$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, ta được:

$$T + \pi = const = C \ \Rightarrow\ \dot{S}^2 + \frac{g}{2L}\left(L^2 - 2S^2\right) = C$$

Tại thời điểm ban đầu: t = 0: $\dot{S} = 0;\ S = \frac{\ell}{2}$. Nên suy ra: $C = \frac{g}{4L}\left(2L^2 - \ell^2\right)$ do đó:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{C + \frac{g}{2L}\left(2S^2 - L^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{L/g}}.\sqrt{S^2 + \left(\frac{LC}{g} - \frac{L^2}{2}\right)}$$

Từ đó, ta nhận được: $t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dS}{\sqrt{S^2 - \ell^2/4}} = \sqrt{\frac{L}{g}}\ln\frac{L + \sqrt{L^2 - \ell^2}}{\ell}$

Chú ý:

Các định lý tổng quát của động lực học trong hệ quy chiếu quán tính được thiết lập trên cơ sở phương trình cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu quán tính (1-3).

Một cách tương tự, các định lý tổng quát của động lực học trong hệ quy chiếu không quán tính (trong chuyển động tương đối) cũng được thiết lập dựa vào phương trình cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu không quán tính. Trong trường hợp này, lực tác dụng lên chất điểm và cơ hệ phải kể thêm vào lực quán tính kéo theo và lực quán tính Corriôlít. Tuy nhiên, đối với định lý động năng do công của lực quán tính Corriôlít luôn luôn bằng không, nên lực này không có mặt trong các hệ thức biểu thị định lý.

PHẦN PHỤ LỤC

(Dành riêng cho Sinh viên các ngành Công trình và Cơ khí)

CHƯƠNG I: ĐỘNG LỰC HỌC VẬT RẮN

1.1. Chuyển động tịnh tiến của vật rắn

Vật rắn chuyển động tịnh tiến thì mọi điểm thuộc vật sẽ chuyển động như nhau, do đó phương trình vi phân chuyển động của tâm khối lượng sẽ là phương trình vi phân chuyển động của vật rắn chuyển động tịnh tiến:

$$M\overrightarrow{W}_C = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k^e} \qquad (1\text{-}1)$$

Trong đó: M và $\overrightarrow{W}_C$ là khối lượng của vật rắn và gia tốc của tâm khối lượng, $\left\{\overrightarrow{F_k^e}\right\}$ là hệ ngoại lực đặt lên vật rắn.

(1-1) viết dưới dạng tọa độ đề các:

$$M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} X_k^e;\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} Y_k^e;\ M\ddot{z}_C = \sum_{k=1}^{n} Z_k^e \qquad (1\text{-}1)'$$

Dựa vào (1-1) hay (1-1)′ có thể giải được hai bài toán cơ bản của động lực học vật rắn.

Chú ý: Điều kiện cần và đủ để vật rắn chuyển động tịnh tiến là $\overrightarrow{M}_C^e = 0$ và $\vec{\omega}_0 = 0$.

1.2. Chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định

1.2.1. Phương trình vi phân chuyển động

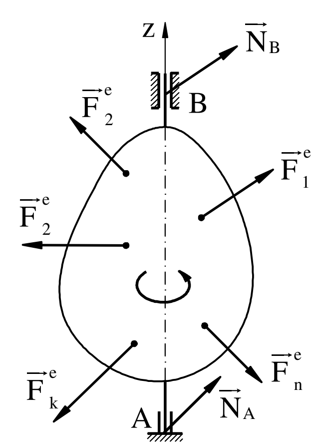
Xét vật rắn chuyển động quay xung quanh một trục cố định dưới tác dụng của hệ ngoại lực gồm $\left(\overrightarrow{F_1^e}, \overrightarrow{F_2^e}, ..., \overrightarrow{F_n^e}\right)$ và phản lực liên kết ở hai ổ trục là $\overrightarrow{N}_A, \overrightarrow{N}_B$ (hình 1-1).

Áp dụng định lý đạo hàm mômen động lượng đối với trục ta có:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \qquad (1\text{-}2)$$

Hay

$$\ddot{\varphi} J_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \qquad (1\text{-}3)$$



Hình 1-1

Từ đó rút ra: $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)}{J_z}$

– Nếu $\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)$ đã cho thì J_z càng lớn, ε sẽ càng nhỏ và ngược lại, cho nên vật rắn chuyển động quay xung quanh trục cố định thì J_z đóng vai trò như khối lượng của vật rắn chuyển động tịnh tiến. Vì thế người ta coi J_z – số đo quán tính của vật rắn chuyển động quay xung quanh trục cố định.

– Nếu $\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = 0$ thì $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0 \Rightarrow \omega = const$, vật quay đều quanh trục. Phương trình chuyển động có dạng: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$

– Nếu $\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = const$ thì ε = const, vật rắn quay biến đổi đều, phương trình chuyển động có dạng: $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\varepsilon t^2$

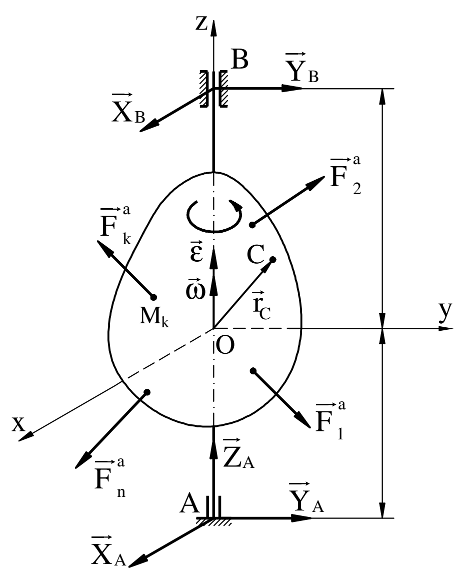
Trong đó: φ_0, ω_0 là góc quay và vận tốc góc ban đầu. Từ (1-2) ta có thể giải được hai bài toán cơ bản của động lực học vật rắn.

1.2.2. Xác định phản lực động lực ở hai gối đỡ của trục quay cố định

Dưới tác dụng của hệ lực hoạt động $\left(\overrightarrow{F_1^a}, \overrightarrow{F_2^a}, ..., \overrightarrow{F_n^a}\right)$ vật rắn chuyển động quay xung quanh trục z cố định với $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ như hình vẽ (hình 1-2).

Xác định phản lực $\overrightarrow{N_A}, \overrightarrow{N_B}$ ở các gối đỡ tại thời điểm khảo sát.

Theo nguyên lý Đalămbe đối với vật rắn thì hệ ngoại lực đặt lên vật cùng với lực quán tính của các điểm thuộc vật lập thành hệ lực cân bằng. Ta có hệ phương trình cân bằng:



Hình 1-2

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k^a}+\overrightarrow{N}_A+\overrightarrow{N}_B+\overrightarrow{R^{qt}}=0\\&\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k^a}\right)+\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_A\right)+\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_B\right)+\overrightarrow{M}_O^{qt}=0\end{aligned}\tag{1-3}$$

Ta chọn trục Ox, Oy gắn chặt với vật rắn, $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$ là ba véctơ đơn vị trên ba trục Ox, Oy, Oz. Xác định $\overrightarrow{R^{qt}}$, $\overrightarrow{M}_O^{qt}$ và $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_A\right)$, $\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_B\right)$:

Ta có: $$\overrightarrow{R}^{qt}=-M\overrightarrow{W}_C=M\left(\varepsilon y_C+\omega^2x_C\right)\vec{i}+M\left(\omega^2y_C-\varepsilon x_C\right)\vec{j}\tag{a}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M}_O^{qt}&=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k^{qt}}\right)=-\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k\wedge m_k\overrightarrow{W}_k\right)\\&=\left(\varepsilon J_{xz}-\omega^2J_{yz}\right)\vec{i}+\left(\varepsilon J_{yz}+\omega^2J_{xz}\right)\vec{j}-\varepsilon J_z\vec{k}\end{aligned}\tag{b}$$

$$\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_A\right)=aY_A\vec{i}-aX_A\vec{j}\tag{c}$$

$$\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{N}_B\right)=-bY_B\vec{i}+bX_B\vec{j}\tag{d}$$

Thay (a), (b), (c) và (d) vào (1-3) rồi chiếu hệ phương trình này lên ba trục tọa độ đã chọn ta có:

$$\begin{cases}\sum X_k^e+X_A+X_B+Mx_C\omega^2+My_C\varepsilon=0\\\sum Y_k^e+Y_A+Y_B+My_C\omega^2-Mx_C\varepsilon=0\\\sum Z_k^e+Z_A=0\\\sum m_x\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)+aY_A-bY_B+\varepsilon J_{xz}-\omega^2J_{yz}=0\\\sum m_y\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)-aX_A+bX_B+\varepsilon J_{yz}+\omega^2J_{xz}=0\\\sum m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right)-\varepsilon J_z=0\end{cases}\tag{1-4}$$

Vì hệ tọa độ Oxyz gắn chặt vào vật, nên x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} và J_z không đổi. Phương trình cuối của (1-4) không chứa phản lực chính là phương trình vi phân chuyển động quay của vật quanh trục cố định. 5 phương trình còn lại xác định 5 thành phần phản lực ở hai gối đỡ A và B, các thành phần phản lực không chỉ phụ thuộc vào ngoại lực mà còn phụ thuộc vào $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ của vật.

Thành phần phản lực phụ thuộc vào ω và ε được gọi là các thành phần phản lực động lực. Từ (1-4) cho $\omega_0 = \varepsilon = 0$ ta có phản lực tĩnh.

Để tìm các phản lực động lực ta cho $\sum X_k^e = 0$, $\sum Y_k^e = 0$, $\sum m_x\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = 0$ và $\sum m_z\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = 0$ ở các phương trình (1), (2), (4), (5) của hệ (1-4) ta có:

$$\begin{cases} X_A^d + X_B^d + Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon = 0 \\ Y_A^d + Y_B^d + My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon = 0 \\ aY_A^d - bY_B^d + \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz} = 0 \\ -aX_A^d + bX_B^d + \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz} = 0 \end{cases} \quad (1\text{-}5)$$

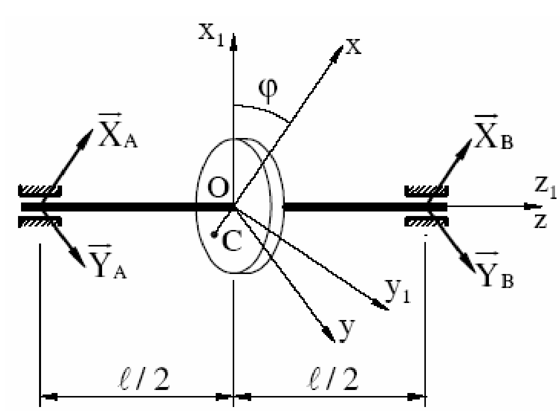
Từ (1-5) ta thấy: Nếu ω và ε lớn thì thành phần phản lực động lực lớn, cho nên trong kỹ thuật ta muốn nó triệt tiêu, khi đó ta có:

$$\begin{cases} Mx_C\omega^2 + My_C\varepsilon = 0 \\ My_C\omega^2 - Mx_C\varepsilon = 0 \\ \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz} = 0 \\ \varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{xz} = 0 \end{cases} \quad (1\text{-}6)$$

Từ (1-6) nếu $\omega^4 + \varepsilon^2 \neq 0$ thì từ hai phương trình đầu ta có $x_C = y_C = 0$ do đó trục Oz phải đi qua tâm khối lượng C và từ hai phương trình cuối ta có $J_{xz} = J_{yz} = 0$ do đó trục Oz là trục quán tính chính đối với điểm O của vật.

Vậy điều kiện để các thành phần phản lực động lực triệt tiêu khi trục quay Oz là trục quán tính chính trung tâm.

Ví dụ 1. Bánh xe nặng 300KN có trọng tâm ở cách trục nằm ngang một khoảng 1mm. Tìm các phản lực tại ổ đỡ, khoảng cách giữa bánh xe và hai ổ đỡ bằng nhau, cho biết trục quay đều với n = 1200 v/p, bánh xe có mặt phẳng đối xứng vuông góc với trục quay (hình 1-3).



Hình 1-3

Bài giải:

Chọn gốc tọa độ O là giao điểm tâm bánh xe với trục quay. Trục Ox của hệ động đi qua tâm khối lượng C, trục Oz và Oz_1 trùng với trục quay.

Do đó $x_C = -1$ và $y_C = 0$.

Vì bánh xe có mặt phẳng đối xứng vuông góc với trục quay nên mômen quán tính ly tâm bằng không: $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Vì $\dot{\varphi} = 1200\ v/p = 40\pi\ \dfrac{1}{s}$ do đó: $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ ta có: $z_A = -\dfrac{\ell}{2};\ z_B = \dfrac{\ell}{2}$

Phản lực tĩnh học sẽ bằng: $X_A^T = \dfrac{P}{2} = 150KN;\ X_B^T = 150KN$. Dựa vào (1-5) ta có:

$$\begin{cases} -\dfrac{P}{g}x_C\dot{\varphi}^2 = X_A^d + X_B^d \\ 0 = Y_A^d + Y_B^d \\ 0 = -\dfrac{\ell}{2}Y_A^d - \dfrac{\ell}{2}Y_B^d \\ 0 = -\dfrac{\ell}{2}X_A^d + \dfrac{\ell}{2}X_B^d \end{cases}$$

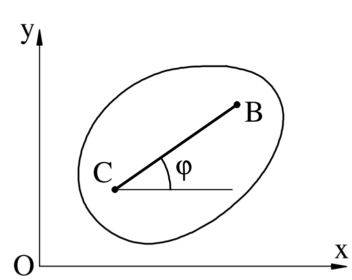
Giải hệ phương trình ta có: $X_A^d = X_B^d = -\dfrac{P}{2g}x_C\dot{\varphi}^2 = -240KN;\ Y_A^d = Y_B^d = 0$

Ta thấy phản lực động lực lớn bằng 1,6 lần phản lực tĩnh học. Hướng của chúng trong các thời điểm theo hướng vécto $\overrightarrow{OC}$.

1.3. Chuyển động song phẳng của vật rắn

Dưới tác dụng của hệ ngoại lực $\left(\overrightarrow{F_1^e}, \overrightarrow{F_2^e}, ..., \overrightarrow{F_n^e}\right)$ vật rắn chuyển động song phẳng.

Để tiện cho việc khảo sát ta chọn tâm khối lượng C của vật rắn làm cực, hệ quy chiếu Oxy cố định trùng với mặt phẳng cố định của hình phẳng (hình 1-4).



Hình 1-4

Phương trình chuyển động của vật rắn là:

$$x_C = x_C(t);\ y_C = y_C(t);\ \varphi = \varphi(t) \qquad (1\text{-}7)$$

Áp dụng định lý chuyển dời khối tâm và định lý đạo hàm mômen động lượng của cơ hệ theo thời gian ta có phương trình vi phân chuyển động song phẳng của vật rắn:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{n} X_k^e \\ M\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{n} Y_k^e \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \end{cases} \qquad (1\text{-}8)$$

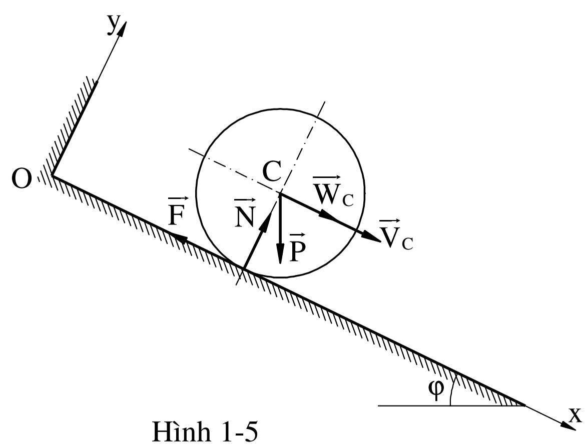
Từ hệ (1-8) có thể giải được hai bài toán cơ bản của động lực học vật rắn.

Nếu biết trước quỹ đạo tâm khối lượng thì hệ phương trình (1-8) có thể viết dưới dạng tọa độ tự nhiên:

$$\begin{cases} M\ddot{s}_C = \sum_{k=1}^{n} F_k^{e\tau} \\ M\dfrac{V_C^2}{\rho_C} = \sum_{k=1}^{n} F_k^{en} \\ J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} m_{Cz}\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) \end{cases} \qquad (1\text{-}9)$$

Trong đó: s_C, V_C, ρ_C là toạ độ cong, vận tốc và bánh kính cong của tâm khối lượng.

Ví dụ 2. Một con lăn có trọng lượng là P, bán kính là R lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng, nghiêng một góc α so với phương nằm ngang. Tìm gia tốc của tâm con lăn và hệ số ma sát trượt nhỏ nhất để con lăn lăn không trượt, bỏ qua ma sát lăn (hình 1-5).



Hình 1-5

Bài giải:

Con lăn chuyển động song phẳng, chọn tâm khối lượng C làm cực.

Gọi F là trị số lực ma sát trượt nhỏ nhất để con lăn lăn không trượt. Chọn hệ quy chiếu như hình vẽ. Phương trình vi phân chuyển động của con lăn có dạng:

$$\begin{cases} \frac{P}{g}\ddot{x}_C = P\sin\alpha - F \\ 0 = N - Pcos\alpha \\ \ddot{\varphi}J_{Cz} = R.F \end{cases} \quad \text{(a)}$$

Ta có: $V_C = \dot{x}_C = \omega.R$, do đó $\ddot{x}_C = \varepsilon.R$; $J_{Cz} = \frac{PR^2}{2g}$

Thay vào phương trình cuối của (a) ta có:

$$\varepsilon.\frac{PR^2}{2g} = R.F \;\Rightarrow\; F = \frac{P}{2g}\varepsilon R = \frac{P\ddot{x}_C}{2g} \quad \text{(b)}$$

Thay (b) vào phương trình đầu của (a) ta có:

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_C = P\sin\alpha - \frac{P\ddot{x}_C}{2g} \;\Rightarrow\; \ddot{x}_C = W = \frac{2g\sin\alpha}{3}$$

Vậy $F = \frac{P\sin\alpha}{3}$

Từ phương trình (2) của (a) ta có N = Pcosα.

Điều kiện để con lăn không trượt là: $F \le fN$ hay $\frac{P\sin\alpha}{3} \le fPcos\alpha \;\Rightarrow\; f \ge \frac{1}{3}tg\alpha$

Vậy $f_{\min} = \frac{1}{3}tg\alpha$.

1.4. Chuyển động quay quanh một điểm cố định của vật rắn

1.4.1. Mô men động lượng và động năng

a. Mô men động lượng

Vận tốc của điểm bất kỳ thuộc vật: $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Do đó mô men động lượng của vật rắn đối với điểm cố định O bằng:

$$\vec{L}_O = \sum_k \vec{r}_k \wedge m_k\vec{v}_k = \sum_k \vec{r}_k \wedge m_k\left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k\right) = \vec{\omega}\sum_k m_k r_k^{\,2} - \sum_k m_k\vec{r}_k\left(\vec{r}_k \wedge \vec{\omega}\right)$$

Chiếu hệ thức này lên hệ trục động Oxyz (gắn liền với vật rắn), ta được:

$$L_x = \omega_x \sum_k m_k (x_k{}^2 + y_k^2 + z_k^2) - \sum_k m_k x_k (\omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_j z_k) =$$
$$= \omega_k \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) - \omega_y \sum_k m_k x_k y_k - \omega_j \sum_k m_k x_k z_k$$

Hay: $L_x = \omega_x J_{xx} - \omega_y J_{xy} - \omega_z J_{xz}$ tương tự ta có:

$$L_z = -\omega_x J_{zx} - \omega_y J_{zy} + \omega_z J_{zz} \tag{1-10}$$

$$L_z = -\omega_x J_{zx} - \omega_y J_{zy} + \omega_z J_{zz}$$

Nếu hệ Oxyz là hệ trục quán tính chính đối với điểm O thì các mômen tích quán tính (mômen quán tính ly tâm) bằng không và ta có:

$$L_x = \omega_x J_{xx} = Ap;\ L_y = \omega_y J_{yy} = Bq;\ L_z = \omega_z J_{zz} = Cr \tag{1-11}$$

Ở đây ký hiệu: $J_{xx} = A,\ J_{yy} = B,\ J_{zz} = C.$

b. Động năng của vật rắn

Động năng của vật rắn tính theo công thức:

$$T = \frac{1}{2}\sum_k m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_k m_k \vec{v}_k = \frac{1}{2}\sum_k m_k \vec{v}_k \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_k \vec{\omega}\left(\vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k\right) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_k \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k = \frac{1}{2}\vec{\omega}.\vec{L}_O$$

Từ đó, ta có:

$$T = \frac{1}{2}\left[J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2 - 2J_{xz}\omega_x\omega_z - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - 2J_{zx}\omega_z\omega_x\right] \tag{1-12}$$

Nếu hệ Oxyz là hệ trục quán tính chính đối với điểm O thì:

$$T = \frac{1}{2}\left[J_{xx}\omega_x^2 + J_{yy}\omega_y^2 + J_{zz}\omega_z^2\right] = \frac{1}{2}\left[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right] \tag{1-13}$$

1.4.2. Phương trình động lực học Ơ-le

Gọi $\overrightarrow{M}_O$ là vectơ mômen chính của hệ ngoại lực tác dụng lên vật rắn đối với điểm cố định O, ta có:

$$\overrightarrow{M}_O = \sum_k \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F}_k^e\right) \tag{1-14}$$

Theo định lý đạo hàm mômen động lượng ta có: $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{M}_O$ (1-15)

Ký hiệu: $\frac{d\vec{a}}{dt}$ là đạo hàm của véctơ $\vec{a}$ theo t đối với hệ cơ sở (hệ cố định); $\frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt}$ là đạo hàm của véctơ $\vec{a}$ theo t đối với hệ động (đạo hàm cục bộ), thì:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{a} \tag{1-16}$$

Áp dụng công thức (1-16) đối với phần trái của (1-15). Ta có:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{a}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O \tag{1-17}$$

Thay (1-17) vào (1-15) nhận được:

$$\frac{\tilde{d}\vec{L}_O}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}_O = \overrightarrow{M}_O \tag{1-18}$$

Chiếu hệ thức (1-18) lên hệ trục động Oxyz và bỏ dấu ký hiệu đạo hàm cục bộ, ta được:

$$\begin{cases} \frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y = M_x \\ \frac{dL_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z = M_y \\ \frac{dL_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x = M_z \end{cases} \tag{1-19}$$

Nếu hệ trục động Oxyz là hệ trục quán tính chính đối với điểm O thì:

$$L_x = J_{xx}\omega_x = Ap;\ L_y = J_{yy}\omega_y = Bq;\ L_z = J_{zz}\omega_z = Cr$$

Phương trình (1-19) trở thành:
$$\begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = M_x \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp = M_y \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = M_z \end{cases} \tag{1-20}$$

Các hệ thức (1-20) do Ơ-le dẫn ra đầu tiên vào năm 1765 và được gọi là các phương trình động lực học Ơ-le.

Hệ (1-20) kết hợp với ba hệ thức động học Ơle tạo thành hệ sáu phương trình vi phân thường phi tuyến đối với sáu ẩn số: ω_x, ω_y, ω_z và φ, ψ, θ. Tích phân hệ này ta được các hàm tương ứng chứa các hằng số tích phân. Các hằng tích phân được xác định khi cho biết vị trí và vận tốc góc ban đầu của vật rắn. Nói chung M_x, M_y, M_z là hàm của t, φ, ψ, θ, ω_x, ω_y, ω_z, nên thực chất việc tích phân hệ phương trình đã chỉ trên là rất khó khăn ngay cả đối với trường hợp riêng.

Một số bài toán riêng đã được nghiên cứu:

a. Trường hợp Ơle – Poanhxô: Xét khi $\overrightarrow{M}_O = 0$

b. Trường hợp Lagrăng – Poanhxô: Xét khi A=B và trọng tâm của vật rắn nằm trên trục đối xứng động lực.

c. Trường hợp Côvalepxki đã được xét vào năm 1905.

Xét khi A = B = 2C và trọng tâm của vật rắn nằm ở mặt phẳng xích đạo của Ellípxôít quán tính.

Những nghiên cứu tiếp theo của nhiều tác giả khác đã chỉ ra rằng: Ngoài ba trường hợp khảo sát kể trên, đối với các trường hợp khác, không có trường hợp nào tồn tại tích phân đại số.

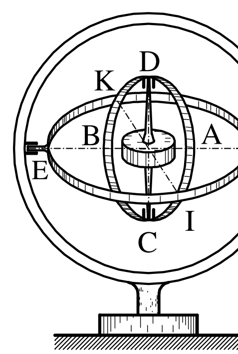
Một số tác giả tiếp theo đã tìm các trường hợp tồn tại tích phân đại số riêng, nghĩa là các tích phân có trong điều kiện ban đầu chọn đặc biệt nào đó, chẳng hạn như: Héc, Chanplưghin, ...

1.5. Lý thuyết gần đúng của hiện tượng con quay

1.5.1. Khái niệm. Mô hình con quay trong giá các đăng

Vật thuần chất quay nhanh quanh trục đối xứng, trục này có thể đổi hướng trong không gian, gọi là con quay.

Người ta tạo ra con quay bằng hình trụ đặc hoặc hình xuyến được liên kết sao cho một trong các điểm của trục quay luôn luôn cố định. Những liên kết như thế được thực hiện, chẳng hạn, nhờ một cái giá và được gọi là giá các đăng. Mô hình con quay (Gyrôxcốp) trong giá các đăng có cấu tạo như sau (hình 1-6):



Hình 1-6

Rôto: Là bánh đà nặng quay rất nhanh quanh trục đối xứng vật chất. Nó là bộ phận chủ yếu của Gyrôxcốp. Rôto được treo trên giá đỡ gọi là giá các đăng.

Khung trong: là vòng tròn A đồng chất mà đường kính CD của nó là trục quay của bánh đà (Rôto). Đường kính IK $\perp$ CD là trục của chính nó.

Khung ngoài: Vòng tròn A được treo vào vòng tròn B mà đường kính EF của nó có thể quay tự do quanh hai ổ trục gắn trên giá đỡ.

Các vòng tròn liên kết sao cho: CD ⊥ IK ⊥ EF và cắt nhau tại O.

Hệ thống giá treo được mô tả trên là giá các đăng. Các khung treo A, B có thể là các hộp kín chân không. Các vòng tròn đồng chất có thể được thay bằng các khung chữ nhật.

Đế: Là vật mang giá các đăng trong đó treo Gyrôxcốp. Nếu đế bất động, Gyrôxcốp rõ ràng có ba bậc tự do. Đế có thể cố định hoặc di động.

1.5.2. Lý thuyết gần đúng của hiện tượng con quay

Những con quay có vận tốc góc quay riêng $\omega_1 = \dot{\varphi}$ rất lớn quanh trục đối xứng vật chất có nhiều áp dụng trong kỹ thuật.

Trong trường hợp này, lý thuyết cơ bản (lý thuyết gần đúng) của hiện tượng con quay phát biểu như sau:

Với con quay nhanh (ω_1 lớn) có thể coi ba hướng quay: Quay riêng, tiến động và chương động gần như trùng nhau. Điều này có nghĩa là: Ở thời điểm bất kỳ vectơ vận tốc góc tức thời $\vec{\omega} \approx \vec{\omega}_1$ và véctơ mômen động lượng hướng theo trục đối xứng vật chất của con quay. Ta có:

$$\vec{L}_O = J\,\vec{\omega}_1 \qquad (1\text{-}21)$$

Giả thiết gần đúng trên, cho phép nói đến sự dịch chuyển của trục con quay so với sự thay đổi hướng của véctơ $\vec{L}_O$.

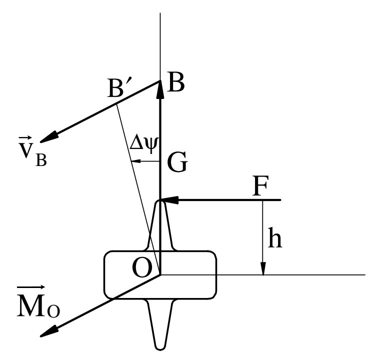
Áp dụng Định lý Mômen động lượng ta có:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \qquad (1\text{-}22)$$

Ở đây: $\vec{M}_O$ là mômen chính của các ngoại lực tác dụng lên con quay đối với điểm O.

Gọi mút véctơ $\vec{L}_O$ là điểm B. Vế trái của (1-22) có thể xem như vận tốc $\vec{v}_B$ của điểm B (Hình 1-7).

$$\vec{v}_B = \vec{M}_O \qquad (1\text{-}23)$$



Hình 1-7

Định lý *(Резаля)*: Vận tốc của mút véctơ mômen động lượng bằng về trị số và hướng mômen chính các ngoại lực đối với điểm O.

Từ đó: Nếu xét con quay đang cân bằng ở thời điểm nào đó trên trục của nó tác dụng một lực $\vec{F}$; mômen của lực này đối với điểm O là $\vec{M}_O$ sẽ vuông góc với trục con quay. Theo (1-23) điểm B sẽ nhận được vận tốc $\vec{v}_B = \overrightarrow{M}_O$ và trục khi đó nhận được góc lệch nhỏ Δψ trong khoảng thời gian Δt trong mặt phẳng góc với lực $\overrightarrow{F}$.

Vậy, dưới tác dụng của lực $\overrightarrow{F}$, trục con quay bắt đầu lệch nhưng không về phía lực tác dụng mà theo hướng của véctơ mômen $\overrightarrow{M}_O$ (thẳng góc với lực $\overrightarrow{F}$). Ta có một đặc tính quan trọng của con quay quay nhanh.

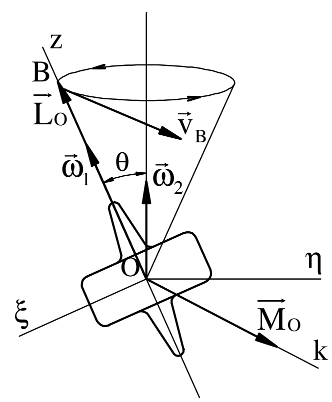
Bây giờ, nếu tại một thời điểm nào đó ngừng tác dụng lực $\overrightarrow{F}$. Trong điều kiện bình thường như đã biết trước, khi ngừng tác dụng lực vật vẫn phải chuyển động theo quán tính. Tuy nhiên trong trường hợp này, khi $\overrightarrow{F} = 0$ thì $\overrightarrow{M}_O = 0$ và do đó $\vec{v}_B = 0$. Nghĩa là: Khi ngừng tác dụng lực thì trục con quay không tiếp tục dịch chuyển. Ta nhận được đặc tính quan trọng nữa của con quay quay nhanh (không có tính quán tính chuyển động của trục của nó).

Những điều mô tả trên có thể đi đến kết luận: Tác dụng các lực tức thời, thực tế không làm thay đổi hướng của trục ở con quay quay nhanh. Những con quay này có tính ổn định bảo toàn hướng của trục của nó. Đây là tính chất rất quan trọng của con quay được áp dụng rộng rãi trong kỹ thuật.

1.5.3. Mômen Gyrôxcốp. Hiệu ứng Gyrô

a. Trước hết ta xét chuyển động của con quay dưới tác dụng của lực. Gọi $\overrightarrow{M}_O$ là Mômen chính của lực đối với điểm cố định O thẳng góc với trục quay riêng (z) của con quay.

Điểm B của trục này có vận tốc: $\vec{v}_B = \overrightarrow{M}_O$ và chính trục sẽ quay quanh điểm cố định O. Khi bỏ qua sự quay chương động (theo lý thuyết cơ bản) thì chuyển động của trục (z) cạnh điểm O là tiến động, nghĩa là quay quanh trục ζ với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$.



Hình 1-8

Ta có: $\vec{v}_B = \vec{\omega}_2 \wedge \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{L}_O = J\vec{\omega}_1$

do đó: $$J\left(\vec{\omega}_2 \wedge \vec{\omega}_1\right) = \overrightarrow{M}_O \qquad (1\text{-}24)$$

Mômen động lượng $\vec{L}_O = J\,\vec{\omega}_1$ được coi là đã cho, nên phương trình (1-24) cho phép: Khi biết $\overrightarrow{M}_O(t)$ xác định $\vec{\omega}_2$ và ngược lại: Khi biết $\vec{\omega}_2$ xác định $\overrightarrow{M}_O(t)$.

b. Ta chuyển xét bài toán: Nếu biết vận tốc góc tiến động $\vec{\omega}_2$ (đại lượng $J\,\vec{\omega}_2$ cũng đã cho) thì từ (1-24) sẽ xác định được $\overrightarrow{M}_O(t)$ - gây nên sự quay tiến động.

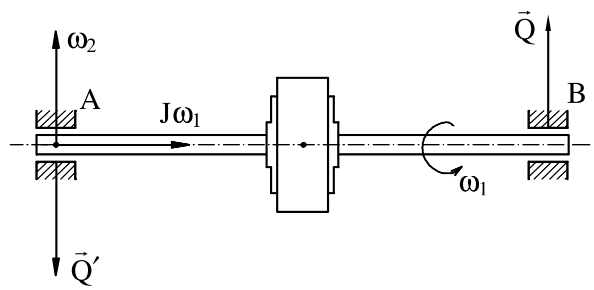
Giả sử con quay thực hiện quay tiến động cưỡng bức với vận tốc góc $\vec{\omega}_2$ thì $\overrightarrow{M}_O$ sẽ gây nên các áp lực lên trục gắn con quay, những lực này cũng tạo thành ngẫu với véctơ Mômen $\overrightarrow{M}_{Gyr«}$ - gọi là Mômen con quay: $\overrightarrow{M}_{Gyro} = -\overrightarrow{M}_O$ (hình 1-9)

Từ (1-24), Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{M}_{Gyro} = J\left(\vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_2\right) \\ M_{Gyro} = J\omega_1\omega_2 \sin\theta \end{cases} \qquad (1\text{-}25)$$

Hiện tượng trên (sự xuất hiện mômen Gyrô) gọi là hiệu ứng Gyrô.

Nó được xác định bằng quy tắc ậúờợõủờốộ sau đây: Nếu một Rôto quay với tốc độ ω_1 lớn quanh trục đối xứng của nó, bị một thiết bị khác buộc phải quay với tốc độ ω_2 quanh một trục khác, khác với trục đối xứng Rôto sẽ sinh ra một ngẫu lực với mômen $\overrightarrow{M}_{Gyro}$ - có xu hướng kéo $\vec{\omega}_1$ đến trùng $\vec{\omega}_2$ theo quãng đường ngắn nhất.



Hình 1-9

Nhận xét:

$\vec{\omega}_1$ có độ lớn gần $10^2 \div 10^4$ rad/s nên J lớn, ω_2 dù rất nhỏ cũng sinh ra $\overrightarrow{M}_{Gyro}$ lớn làm phá hủy rôto. Hơn nữa J nhỏ, nhưng ω_2 lớn cũng sẽ phá hỏng rôto. Do đó trong các thiết bị có khả năng thực hiện cùng một lúc hai chuyển động quay quanh trục cắt nhau thì phải chú ý đến sự suất hiện mômen Gyrôxcốp.

c. *Hiệu ứng Gyrô có lợi:* Ứng dụng hiện tượng xuất hiện mômen Gyrô khi một thiết bị thực hiện hai chuyển động quay quanh 2 trục cắt nhau; người ta chế tạo ô-tô một hệ thống bánh; xe lửa; xe điện một đường ray.

Chế tạo các bộ điều khiển hướng bay cho các dụng cụ bay: Máy bay không người lái, tên lửa, trạm tự động, thuỷ lôi, tàu ngầm, các vũ khí định hướng trên các phương tiện di động: Máy bay, xe tăng, tàu thuỷ ....

d. *Hiệu ứng Gyrô có hại:* Các tuốc bin khi gắn trên giá đỡ bị rung sẽ đưa đến gãy trục, gãy giá đỡ, hỏng bu lông, gãy cánh tuốc bin.

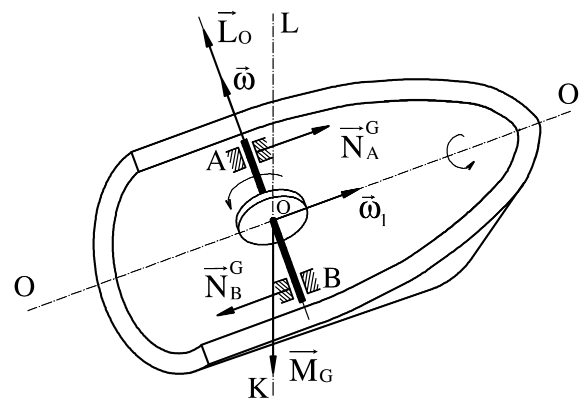
Các loại phương tiện vận tải khi chạy trên những quỹ đạo cong dễ bị lật đổ, ổ bi ở các ổ trục treo bánh xe dễ bị phá hỏng, các trục bánh xe bị hỏng.

Cánh quạt của các loại quạt có tuốc năng cần cho quay theo tuốc năng với tốc độ thấp nhất để hạn chế gãy cánh, hỏng bạc, hỏng trục.

Khi treo quạt trần, các loại mũi khoan tốc độ lớn v.v... phải treo vào ổ đỡ có thể quay tự do, tránh Mômen Gyrôxcốp phát sinh khi tác động buộc chúng phải đổi hướng quay.

1.5.4. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1. Một rôto của động cơ điện đặt trên tầu có trục quay nằm ngang AB. Trục AB thẳng góc với trục của tầu O_1O_2 và chúng cắt nhau ở trọng tâm rôto. Mômen quán tính của rôto đối với trục AB bằng J, $\vec{\omega}$ là vận tốc góc quay của rôto. Xác định giá trị lớn nhất của áp lực động lực lên các gối A và B khi sự lắc bên của tầu xảy ra quanh trục O_1O_2 theo quy luật điều hoà $\varphi_1 = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; khoảng cách giữa các gối AB = h (hình 1-10).



Hình 1-10

Bài giải:

Khi tàu lắc ngang trục AB của Rôto thay đổi hướng của nó. Do đó xảy ra hiện tượng con quay. Rôto của động cơ điện là con quay với trục đối xứng AB. Ta biểu diễn véctơ $\vec{\omega}$ dọc AB và Mômen chính động lượng $\vec{L}_O = J\,\vec{\omega}$.

Khi lắc ngang tại thời điểm đã cho, véctơ $\vec{\omega}_1$ hướng dọc trục O_1O_2 từ O_1 đến O_2. Ta có:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{d\omega_1}{dt} = \dfrac{2\pi\varphi_0}{T}\cos\dfrac{2\pi}{T}t \\ \omega_{1\max} = \dfrac{2\pi\varphi_0}{T} \end{cases}$$

Mômen con quay xác định theo công thức (1-25): $\vec{M}_G = J\left(\vec{\omega} \wedge \vec{\omega}_1\right)$

$\vec{M}_G$ Trong trường hợp này hướng theo phương thẳng đứng xuống dưới. Mômen con quay tạo nên áp lực động lực con quay lên các gối đỡ A và B.

Các áp lực này ($\vec{N}_A^G$ và $\vec{N}_B^G$) tạo thành ngẫu nằm trong mặt phẳng vuông góc với $\vec{M}_G$ như hình vẽ. Do đó ta có:

$$N_A^G = N_B^G = \frac{M_G}{h} = \frac{J\omega\omega_1 \sin\left(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1\right)}{h}$$

Thay: $\sin(\vec{\omega},\vec{\omega}_1) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$; $\omega_{1\max} = \dfrac{2\pi\varphi_0}{T}$, nhận được:

$$N^G_{A\max} = N^G_{B\max} = \frac{2\pi\varphi_0 J\omega}{T}$$

Ví dụ 2. Giải bài toán trên trong trường hợp tầu thực hiện chuyển động xoắn quanh trục thẳng đứng KL với vận tốc góc $\vec{\omega}_1$.

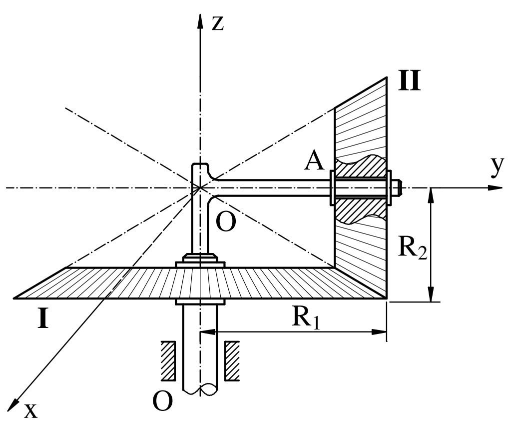
Trả lời: Các áp lực ($\overrightarrow{N}^G_A$ và $\overrightarrow{N}^G_B$) tạo thành ngẫu lực nằm trong mặt phẳng thẳng đứng và: $N^G_{A\max} = N^G_{B\max} = \dfrac{M_G}{h} = \dfrac{J\omega\omega_1}{h}$.

Ví dụ 3. Bánh xe răng nón II bán kính R_2 = 20cm lồng tự do trên thanh OA. Thanh này nối cứng ở điểm O với trục thẳng đứng OO_1 (hình 1-11). Khi quay trục OO_1 với vận tốc góc ω = 4π rad/s, bánh xe răng nón II lăn theo bánh răng nón I bán kính: R_1 = 1,2 m. Xác định tỷ số phản lực động lực của bánh răng I với phản lực tĩnh của nó nếu bán kính quán tính bánh II bằng ρ = 18cm, bỏ qua khối lượng thanh OA.

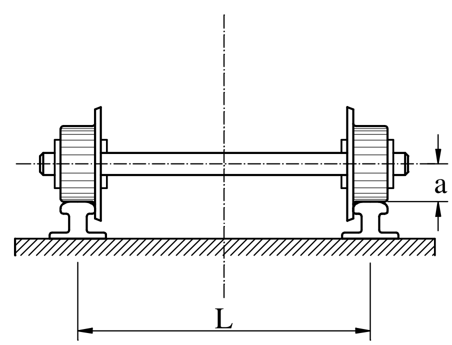
Trả lời: $\dfrac{R^d}{R^t} = \dfrac{R^G}{R^t} \cong 2,6$.

Ví dụ 4. Bộ bánh xe có trọng lượng P = 14000N, bán kính a = 75cm và bán kính quán tính đối với trục của nó $\rho = \sqrt{0,55}\,a$, chuyển động đều với vận tốc V = 20m/s theo đường vòng có bán kính R = 200m nằm trên mặt phẳng nằm ngang (hình 1-12). Hãy xác định áp lực của bánh xe lên đường ray nếu như khoảng cách giữa chúng L = 1,5m.

Trả lời: R = (7000 ± 2210) N.



Hình 1-11



Hình 1-12

CHƯƠNG II: LÝ THUYẾT VA CHẠM

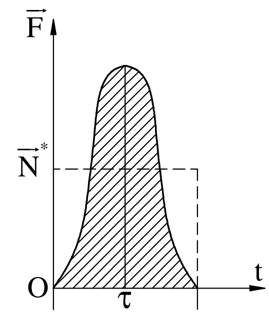
2.1. Va chạm và các giả thiết gần đúng

2.3.1. Định nghĩa: Va chạm là quá trình động lực đặc biệt mà vận tốc của các chất điểm thuộc cơ hệ thay đổi một lượng hữu hạn trong khoảng thời gian vô cùng bé. Ví dụ: Quả bóng va chạm vào nền rồi nẩy lên; búa va đập vào đe....

2.3.2. Lực và xung lực va chạm

Gọi τ là thời gian va chạm, $\Delta\vec{V}$ là lượng biến thiên vận tốc của chất điểm M trong thời gian va chạm.

Do đó: $\vec{W}_{tb} = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\tau}$ là gia tốc trung bình của chất điểm , nó có giá trị rất lớn.



Hình 2-1

Sở dĩ như vậy là vì trong quá trình va chạm, ngoài lực thông thường tác dụng lên các chất điểm còn có phản lực liên kết mới xuất hiện khi bắt đầu va chạm và mất đi sau khi va chạm đặt lên chất điểm, phản lực này được gọi là lực va chạm và ký hiệu là $\vec{N}$.

Lực va chạm có trị số rất lớn và biến thiên rất nhanh trong thời gian va chạm, nên để đánh giá tác dụng của nó ta dùng xung lượng $\vec{S}\left(\vec{N}\right)$ của nó hay giá trị trung bình của nó $\vec{N}^*$ trong thời gian va chạm (hình 2-1).

Ta có: $$\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{N} d\tau = \vec{N}^*.\tau \qquad (2\text{-}1)$$

2.3.3. Giả thiết gần đúng của lý thuyết va chạm

a. Bỏ qua tác dụng của lực thông thường

Theo định lý biến thiên động lượng của chất điểm trong thời gian va chạm ta có:

$$m\Delta\vec{V} = \int_0^{\tau} \vec{F} d\tau + \int_0^{\tau} \vec{N} d\tau \qquad (2\text{-}2)$$

Trong đó: $\vec{F}$ là lực thông thường đặt lên chất điểm M.

Ta có: $\left|\int_0^{\tau}\vec{F}d\tau\right| \le F_{max}.\tau$; F_{max} là đại lượng hữu hạn thường không lớn, còn τ thì là đại lượng rất nhỏ, nên xung lượng của lực thông thường rất bé so với xung lượng va chạm mà ta có thể bỏ qua.

Phương trình (2-2) được viết: $$m\Delta\vec{V} = \int_0^{\tau}\vec{N}d\tau = \vec{S} \qquad (2\text{-}3)$$

Đó là phương trình cơ bản của lý thuyết va chạm

b. Bỏ qua dịch chuyển của chất điểm

Gọi s là dịch chuyển của chất điểm trong va chạm, ta có: $s = \left|\int_0^{\tau}Vd\tau\right| \le V_{max}.\tau$

Vì V_{max} là đại lượng giới hạn mà τ là đại lượng rất nhỏ, cho nên ta có thể bỏ qua dịch chuyển của chất điểm trong va chạm.

Vậy lực va chạm chỉ làm thay đổi vận tốc của chất điểm M trong va chạm mà không làm thay đổi vị trí của nó.

c. Biến dạng và hệ số khôi phục

Thực tế ta thấy quá trình va chạm được chia làm hai giai đoạn: Biến dạng và khôi phục.

– Giai đoạn biến dạng kéo dài τ_1 giây kể từ khi hai vật thể va chạm tiếp xúc nhau cho đến khi kết thúc biến dạng.

– Giai đoạn khôi phục kéo dài $(\tau_2 - \tau_1)$ giây kể từ khi kết thúc biến dạng đến kết thúc va chạm. Giai đoạn này các vật thể va chạm dần dần lấy lại hình dạng cũ.

Người ta chia va chạm ra hai loại:

– Nếu không có giai đoạn khôi phục, va chạm được gọi là va chạm mềm. Đặc điểm của loại này khi kết thúc va chạm thì những phần tử của hai vật thể ở vùng tiếp xúc có cùng thành phần vận tốc pháp tuyến.

– Nếu có giai đoạn khôi phục thì va chạm gọi là va chạm đàn hồi.

Để biểu thị đặc điểm khôi phục ta đưa ra khái niệm hệ số khôi phục k và xác định bằng biểu thức:

$$k = \frac{S_2}{S_1} \qquad (2\text{-}4)$$

Trong đó: $S_1 = \int_0^{\tau_1} Nd\tau$ là xung lượng va chạm ở giai đoạn biến dạng.

$S_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} Nd\tau$ là xung lượng va chạm ở giai đoạn khôi phục.

Rõ ràng nếu: k = 0 thì va chạm là va chạm mềm.

k = 1 thì va chạm hoàn toàn đàn hồi.

0 < k < 1 thì va chạm đàn hồi.

Hệ số k phụ thuộc vào bản chất vật liệu đàn hồi của hai vật thể va chạm và xác định bằng thực nghiệm.

2.2. Các định lý tổng quát của động lực học áp dụng vào va chạm

Dựa vào giả thiết về lực, dịch chuyển và biến dạng, trên cơ sở phương trình cơ bản $m\Delta\vec{V} = \vec{S}$ ta sẽ xây dựng các định lý tổng quát cho lý thuyết va chạm.

2.2.1. Định lý biến thiên động lượng

Biến thiên động lượng của cơ hệ trong thời gian va chạm bằng tổng xung lượng va chạm của ngoại lực đặt lên cơ hệ trong thời gian đó.

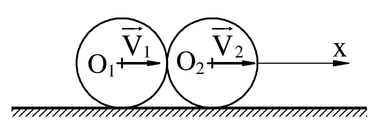
Chứng minh:

Áp dụng định lý biến thiên động lượng của cơ hệ, ta có: $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{S_k^e}$

hay
$$M\vec{V}_C - M\vec{V}_{C0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{S_k^e} \qquad (2\text{-}5)$$

Trong đó $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{S_k^e}$ là xung lượng va chạm của ngoại lực.

Ví dụ 1. Hai quả cầu có khối lượng là m_1, m_2 chuyển động trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn với vận tốc $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ va chạm vào nhau. Giả thiết va chạm mềm (k = 0) tìm vận tốc chung $\vec{V}$ của hai quả cầu sau khi va chạm.



Hình 2-2

Bài giải:

Cơ hệ gồm hai quả cầu. Bỏ qua tác dụng các lực thông thường ($\vec{P}_1, \vec{P}_2$ và $\vec{N}_1, \vec{N}_2$).

Áp dụng định lý biến thiên động lượng của cơ hệ chiếu lên trục x ta có:

$$M\dot{x}_C - M\dot{x}_{C0} = 0$$

hay $(m_1 + m_2)V - m_1V_1 + m_2V_2 = 0 \Rightarrow V = \dfrac{m_1V_1 + m_2V_2}{m_1 + m_2}$

2.2.2. Định lý biến thiên mômen động lượng

Biến thiên mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm hay một trục trong thời gian va chạm bằng tổng mômen xung lượng va chạm ngoại lực đặt lên cơ hệ cùng lấy đối với một tâm hay một trục đó trong thời gian va chạm.

Chứng minh:

Theo định lý đạo hàm mômen động lượng:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F_k^e}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F_k^e}\right)$$

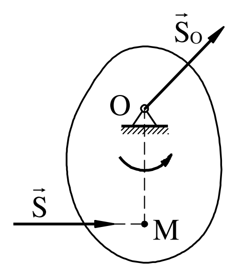
Tích phân hai vế ta có:

$$\vec{L}_O - \vec{L}_O^{(0)} = \int_0^{\tau}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F_k^e}\right)dt = \sum_{k=1}^{n}\left(\vec{r}_k \wedge \int_0^{\tau}\overrightarrow{F_k^e}dt\right) = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{S_k^e}\right) \qquad (2\text{-}6)$$

Chiếu đẳng thức này lên trục Oz ta có:

$$L_{Oz} - L_{Oz}^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{S_k^e}\right) \text{ hay } \left(\omega_1 - \omega_0\right)J_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{S_k^e}\right) \qquad (2\text{-}7)$$

Ví dụ 2. Vật rắn chuyển động quay xung quanh trục cố định Oz với vận tốc góc ω_0. Tác dụng lên vật xung lượng $\vec{S}$ như hình vẽ. Tìm vận tốc góc của vật sau va chạm (hình 2-3).



Hình 2-3

Bài giải:

Áp dụng (2-7) tacó: $\omega J_z - \omega_0 J_z = m_z\left(\vec{S}\right)$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{m_z\left(\vec{S}\right)}{J_z} \Rightarrow \omega = \omega_0 + \frac{m_z\left(\vec{S}\right)}{J_z}$$

2.2.3. Định lý mất động năng (định lý Cácnô)

Trong va chạm không dùng được định luật bảo toàn cơ năng vì một phần động năng của cơ hệ biến thành nhiệt năng, mặt khác không dùng được định lý biến thiên động năng vì không tính được công của các ngoại lực va chạm.

Ở đây ta có định lý Cácnô:

$$\Delta T = \begin{cases} T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k\left(\vec{V}_k - \vec{V}_{k0}\right)^2 \text{ ở trường hợp tức thời bỏ liên kết} \\ T_0 - T_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}m_k\left(\vec{V}_{k0} - \vec{V}_k\right)^2 \text{ ở trường hợp tức thời đặt liên kết} \end{cases} \qquad (2\text{-}8)$$

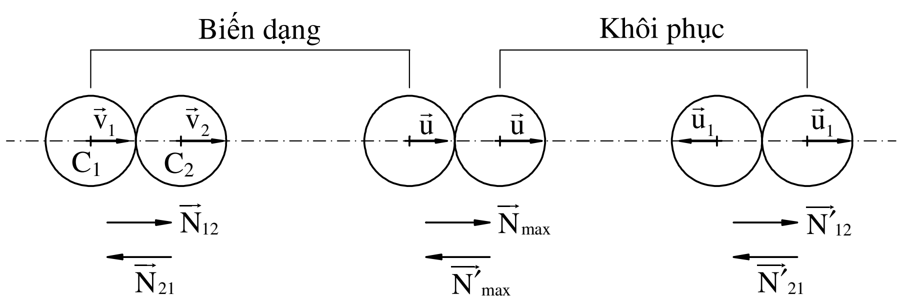
Nguyên nhân mất động năng là do biến dạng dư và kèm theo biến đổi nội năng của cơ hệ. Trong thực tế: Người ta sử dụng va chạm gây biến dạng để rèn kim loại và nghiền vật liệu. Đồng thời làm giảm biến dạng đến mức tối thiểu để tăng dịch chuyển như đóng đinh và đóng cọc.

2.3. Áp dụng các định lý tổng quát vào một số bài toán

2.3.1. Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến

Va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến là va chạm sao cho pháp tuyến của hai mặt tiếp xúc đi qua tâm khối lượng C_1, C_2 và trùng với phương vận tốc của hai tâm.

a. Bài toán: Xét va chạm thẳng xuyên tâm của hai quả cầu có khối lượng m_1 và m_2 chuyển động tịnh tiến có vận tốc trước khi va chạm là $\vec{v}_1$ và $\vec{v}_2$, hệ số khôi phục là k. Tìm vận tốc $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ sau khi va chạm, xung lượng va chạm và lượng mất động năng ΔT trong va chạm (hình 2-4).



Hình 2-4

Áp dụng định lý biến thiên động lượng cho mỗi quả cầu ở giai đoạn biến dạng:

$$\begin{cases} m_1(u - v_1) = S_{21} = -S \\ m_2(u - v_2) = S_{12} = S \end{cases} \tag{a}$$

Trong đó u là vận tốc chung của hai quả cầu khi kết thúc biến dạng.

Ở giai đoạn khôi phục:

$$\begin{cases} m_1(u_1 - u) = S'_{21} = -S' \\ m_2(u_2 - u) = S'_{12} = S' \end{cases} \tag{b}$$

Phương trình xác định hệ số khôi phục là: $k = \dfrac{S'}{S}$ (2-9)

Giải hệ (a), (b) và (2-9) ta có:

$$
\begin{cases}
u = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \\
u_1 = v_1 - (1+k).\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \\
u_2 = v_2 + (1+k).\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \\
S = \dfrac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|v_1 - v_2\right| \\
S' = \dfrac{m_1.m_2}{m_1 + m_2}\left|u_2 - u_1\right|
\end{cases} \qquad (2\text{-}10)
$$

b. Xác định hệ số khôi phục bằng thực nghiệm

Từ (2-10) ta có: $$k = \frac{S'}{S} = \left|\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}\right| = \frac{u_r}{v_r} \qquad (2\text{-}11)$$

Trong đó: u_r, v_r là vận tốc tương đối của hai quả cầu va chạm thẳng xuyên tâm sau và trước va chạm.

Thí nghiệm: Thả viên bi xuống không vận tốc ban đầu từ độ cao h_1 xuống sàn nằm ngang cố định. Sau khi rơi viên bi bị bật lại với độ cao h_2 rồi lại rơi xuống. Tìm hệ số khôi phục k.

Theo (2-11) vì $v_2 = u_2 = 0$, nên ta có: $0 \le k = \dfrac{u_r}{v_r} = \dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}} \le 1$

Vậy $0 \le k = \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}} \le 1$

c. Xác định ΔT trong va chạm thẳng xuyên tâm của hai vật chuyển động tịnh tiến

Ở trường hợp tức thời đặt liên kết, theo (2-8), ta có:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1}{2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(v_2^2 - u_2^2\right) \qquad (a)$$

Thay giá trị u_1, u_2 từ (2-10) vào (a), rút gọn ta có:

$$\Delta T = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)(v_1 - v_2)^2 \qquad (2\text{-}12)$$

Áp dụng (2-12) vào hai bài toán thực tế:

– *Búa rèn kim loại:* Ta có v_1 là vận tốc ban đầu của búa, $v_2 = 0$ là vận tốc tấm kim loại chịu rèn.

Vậy từ (2-12) ta có: $\Delta T = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(1 - k^2)v_1^2$

Gọi $T_0 = \dfrac{1}{2}m_1 v_1^2$ là động năng của búa trước khi va đập.

Gọi $\eta = \dfrac{\Delta T}{T_0} = \dfrac{(1 - k^2)}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}$ là hệ số hữu ích. Rõ ràng muốn tăng η thì phải giảm tỷ số $\dfrac{m_1}{m_2}$ hay khối lượng của búa phải nhỏ nhiều lần so với khối lượng của đe và vật.

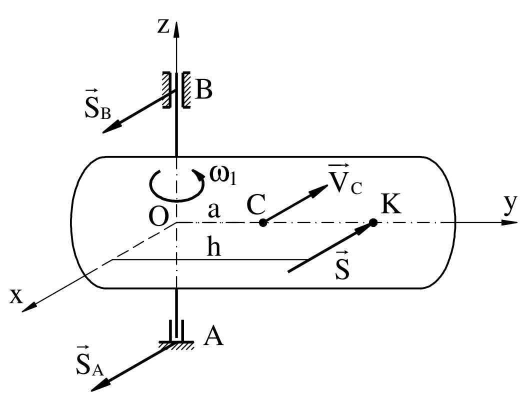
– *Búa đóng cọc:* Khi búa đóng cọc thì ΔT là vô ích, người ta gọi hệ số hữu ích là:

$$\eta = \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{1 - k^2}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}}$$

Muốn tăng η thì phải tăng tỷ số $\dfrac{m_1}{m_2}$, do đó phải tăng khối lượng của búa.

2.3.2. Tâm va chạm của vật rắn quay xung quanh một trục cố định

Dưới tác dụng của xung lượng va chạm $\vec{S}$, vật rắn chuyển động quay xung quanh trục cố định AB, thường tại ổ đỡ A và B xuất hiện xung lượng phản lực $\vec{S}_A, \vec{S}_B$ làm tiêu hao năng lượng và phá hỏng gối đỡ, trục quay. Cho nên phải tìm điều kiện để khi tác dụng xung lượng va chạm lên vật chuyển động quay thì sẽ không xuất hiện xung lượng phản lực $\vec{S}_A, \vec{S}_B$ tại ổ đỡ (hình 2-5).



Hình 2-5

Ta xét vật có mặt phẳng đối xứng Oxy và vật gắn vào trục quay AB vuông góc với mặt phẳng này.

Chọn Oy đi qua tâm khối lượng C của vật rắn với OC = a.

Giả sử trước lúc va chạm vật rắn đứng yên (ω_0 = 0). Khi tác dụng xung lượng va chạm $\vec{S}$ nằm trong mặt phẳng Oxy thì xung lượng phản lực $\vec{S}_A, \vec{S}_B$ xuất hiện tại ổ đỡ A, B.

Theo định lý biến thiên động lượng ta có: $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \vec{S} + \vec{S}_A + \vec{S}_B$ (a)

Trong đó: $\vec{Q}_0 = 0; \vec{Q} = M\vec{V}_C$

$\vec{V}_C$ là vận tốc tâm khối lượng của vật sau va chạm.

Từ (a) điều kiện để $\vec{S}_A = \vec{S}_B = 0$, nếu $\vec{S} = M\vec{V}_C$ suy ra xung lượng va chạm $\vec{S}$ có hướng cùng với $\vec{V}_C$ hay $\perp$ với OC (trục Oy).

Ta có: $S = MV_C = M.a\omega_1$ (b)

Mặt khác từ (2-7), ta có: $(\omega_1 - \omega_0)J_z = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\vec{S_k^e}\right)$ đối với bài toán này ta có:

$$\omega_1 J_z = m_z\left(\vec{S}\right) \Rightarrow \omega_1 = \frac{m_z\left(\vec{S}\right)}{J_z} = \frac{S.h}{J_z} \quad \text{(c)}$$

Từ (b) và (c) ta có: $h = \dfrac{J_z}{M.a}$ (2-13)

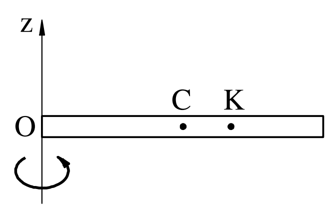
Các điều kiện khi xung lượng va chạm $\vec{S}$ tác dụng lên vật quay xung quanh một trục cố định mà không xuất hiện xung lượng phản lực tại ổ trục là:

– Xung lượng va chạm đặt ở trong mặt phẳng Oxy và mặt phẳng này là mặt phẳng đối xứng của vật.

– Xung lượng va chạm $\vec{S}$ cùng hướng với $\vec{V}_C$ và vuông góc với mặt phẳng chứa trục z và tâm khối lượng C của vật.

– Xung lượng va chạm $\vec{S}$ đặt cách trục quay Oz một khoảng $h = \dfrac{J_z}{M.a}$ (ở về phía có tâm khối lượng C). Điểm K là tâm va chạm khi xung lượng va chạm $\vec{S}$ đặt tại K thì không xuất hiện xung lượng phản lực tại ổ đỡ.

Ví dụ 3. Tìm tâm va chạm của thanh đồng chất chiều dài ℓ đối với trục quay qua đầu thanh và vuông góc với thanh ấy (hình 2-6).



Hình 2-6

Bài giải:

Trục quay Oz là trục quán tính chính của thanh tại điểm O của nó.

Tâm khối lượng C của thanh ở tại trung điểm của thanh, nên $a = \dfrac{\ell}{2}$.

Vậy: $$OK = \frac{J_z}{M.a} = \frac{\frac{M\ell^2}{3}}{M.\frac{\ell}{2}} = \frac{2\ell}{3}$$

CHƯƠNG III: ĐỘNG LỰC HỌC CỦA CHUYỂN ĐỘNG TƯƠNG ĐỐI

Trong các chương trước, ta đã khảo sát chuyển động của vật thể (chất điểm và cơ hệ; vật rắn và hệ vật rắn) trong hệ quy chiếu quán tính (cố định). Tuy nhiên, các thí nghiệm cho phép ta nghiệm lại rằng: Một hệ quy chiếu chuyển động có gia tốc đối với hệ quy chiếu quán tính không phải là hệ quy chiếu quán tính. Chuyển động của vật thể đối với hệ quy chiếu trên gọi là chuyển động tương đối (chuyển động đối với hệ quy chiếu không quán tính). Nhiều bài toán thực tế kỹ thuật cần phải khảo sát trong hệ quy chiếu này và cho ta lời giải đơn giản hơn.

3.1. Phương trình via phân chuyển động của chất điêm trong hệ quy chiếu không quán tính

3.1.1. Thiết lập phương trình vi phân chyển động tương đối của chất điểm

Chất điểm M, khối lượng m, chịu tác dụng các lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ chuyển động trong hệ quy chiếu quán tính với gia tốc $\vec{W}$. Ta xét chuyển động của chất điểm M trong hệ quy chiếu không quán tính chuyển động bất kỳ có gia tốc đối với hệ quy chiếu quán tính.

Phương trình cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu quán tính: $m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$

Từ định lý hợp gia tốc: $\vec{W} = \vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_C$

Ta thu được: $m\vec{W}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + (-m\vec{W}_e) + (-m\vec{W}_C)$

Đặt: $\vec{F}_e^{qt} = -m\vec{W}_e$ gọi là lực quán tính kéo theo;

$\vec{F}_C^{qt} = -m\vec{W}_C = -2m\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r$ gọi là lực quán tính Cơriôlít. Lực này chỉ tồn tại nếu chất điểm chuyển động đối với hệ quy chiếu không quán tính và hệ này chuyển động quay đối với hệ quy chiếu quán tính.

Như vậy, trong một hệ quy chiếu không quán tính chuyển động có gia tốc đối với hệ quy chiếu quán tính, phương trình vi phân chuyển động của chất điểm có dạng:

$$m\vec{W}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_C^{qt} \qquad (3\text{-}1)$$

Gọi $\vec{r}$ là véctơ định vị của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính, ta có:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt} + \vec{F}_C^{qt} \tag{3-2}$$

(3-2) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính ở dạng véctơ.

Các trường hợp đặc biệt:

– Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến: $\omega_e = 0$ khi đó $W_C = 0$, suy ra $\vec{F}_C^{qt} = 0$, phương trình (3-2) có dạng:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k + \vec{F}_e^{qt}$$

– Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến thẳng và đều, hoặc chất điểm đứng yên trên hệ động ta có những trường hợp đặc biệt được xét riêng ở các phần dưới đây:

3.1.2. Phương trình cân bằng tương đối của chất điểm (điều kiện cân bằng tương đối)

Chất điểm không chuyển động đối với hệ không quán tính $\overrightarrow{V_r} \equiv 0$, khi đó vế trái của (3-1) và lực quán tính Coriôlít triệt tiêu. Ta nhận được:

$$\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k} + \overrightarrow{F}_e^{qt} = 0 \tag{3-3}$$

(3-3) là phương trình cân bằng tương đối. Như thế, cân bằng của chất điểm trong hệ quy chiếu không quán tính chỉ có thể giải thích bằng cách đưa thêm vào lực quán tính kéo theo.

3.1.3. Nguyên lý tương đối của cơ học cổ điển

Chất điểm M chuyển động trong hệ quy chiếu không quán tính dưới tác dụng của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Hệ quy chiếu này chuyển động tịnh tiến thẳng và đều đối với hệ quy chiếu quán tính, khi đó: $\overrightarrow{F}_e^{qt} = 0,\ \overrightarrow{F}_C^{qt} = 0$. Hệ thức (3-1) trở thành:

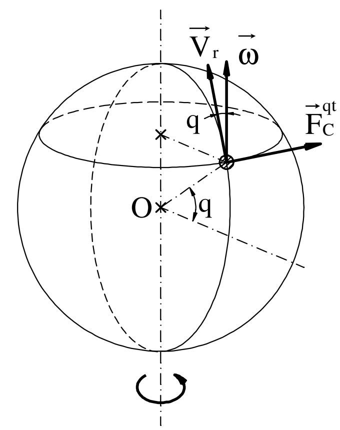
$$m\overrightarrow{W_r} = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{F_k}$$

Hệ thức nhận được trùng với hệ thức (1-3). Như thế hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến thẳng đều đối với hệ quy chiếu quán tính cũng là hệ quy chiếu quán tính và đương nhiên tồn tại một lớp các hệ quy chiếu quán tính. Tất cả các hiện tượng cơ học xảy ra trong hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến thẳng đều đối với hệ quy chiếu quán tính cũng hoàn toàn giống như chúng xảy ra trong hệ quy chiếu quán tính.

3.1.4. Ảnh hưởng sự quay của trái đất

– *Sự bào mòn các đường ray:* Xét một tàu hoả khối lượng m tiến về phía bắc dọc theo kinh tuyến với vận tốc $\overrightarrow{V_r}$ trong một vùng có vĩ độ θ thuộc bán cầu bắc (hình 3-1). Trái đất quay quanh trục từ tây sang đông, một vòng trong 23 giờ 56 phút 4 giây, nghĩa là vận tốc góc của nó bằng:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729\, s^{-1}$$



Hình 3-1

Coi tàu như chất điểm, gia tốc Cơriôlít của nó là:

$$\overrightarrow{W_C} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$$

Gia tốc này hướng về phía tây theo tiếp tuyến của vĩ tuyến. Áp lực của tầu thông qua các bánh xe do lực quán tính Cơriôlít gây ra hướng về phía đông (bên phải) theo hướng tàu chạy và bằng:

$\overrightarrow{F_C^{qt}} = -2m\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$; độ lớn: $F_C^{qt} = 2m\omega V_r \sin\theta$

Thay số với: m = 2.10^6 kg; V_r = 100 km/h; θ = 45^0 ta được $F_C^{qt} = 5{,}7KN$.

Áp lực này phải bị khử bởi các đường ray, ray bên phải sẽ bị bào mòn hơn.

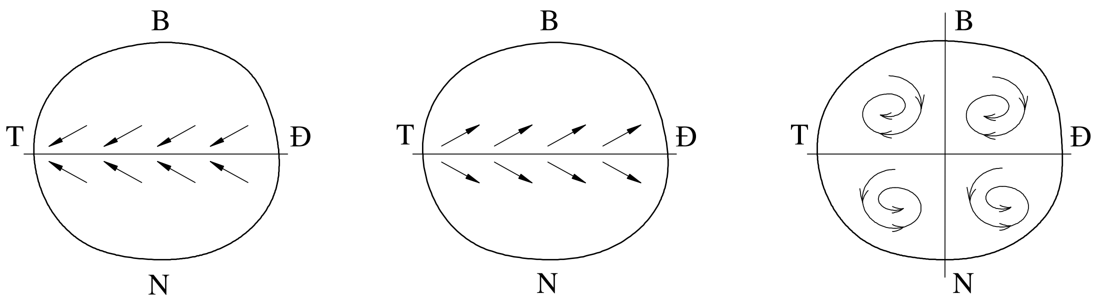
– *Hiện tượng Berer (lở bờ sông):* Giải thích tương tự đối với các dòng sông chảy trên bắc bán cầu. Do dòng chảy không lệch ngang, nên ở các dòng sông chảy từ xích đạo lên bắc bán cầu, dòng nước tác dụng vào bờ sông một lực từ trái sang phải và bờ bên phải các sông này bị xói lở nhiều hơn. Hiện tượng ngược lại đối với các tàu chạy và dòng sông chảy từ xích đạo về Nam bán cầu.

– *Sự lệch hướng của vật rơi tự do gần mặt đất:* Do vận tốc góc $\vec{\omega}$ của trái đất có giá trị rất bé, nên độ lớn của lực quán tính Cơriôlít và lực quán tính kéo theo đặt lên vật rơi cũng khá bé so với lực hấp dẫn. Ta coi một cách gần đúng: Vận tốc tương đối $\overrightarrow{V_r}$ của vật rơi hướng theo đường thẳng đứng vào tâm trái đất. Khi đó gia tốc Cơriôlít hướng về phía tây và lực quán tính Cơriôlít hướng về phía đông. Do tác dụng của lực này, vật rơi tự do gần mặt đất sẽ lệch về phía đông so với đường thẳng đứng. Độ lệch đó có thể tính theo công thức xấp xỉ:

$$\Delta = \frac{\omega g cos\theta}{3}\left(\frac{2H}{g}\right)^{3/2}$$

Trong đó θ là vĩ độ địa phương; H là độ cao rơi của vật.

– *Nhiều hiện tượng cơ học khác, như:* Ở Bắc bán cầu, gió bắc có khuynh hướng thổi lệch về phía tây, sự lệch hướng chuyển động trong mặt phẳng ngang, sự thay đổi gia tốc trọng trường theo vĩ độ, ... cũng được giải thích và đưa ra hệ thức xấp xỉ bằng cách tương tự. Ta có thể minh hoạ: Hướng lệch của gió mùa; hướng chảy vòng của các dòng nước biển và dòng khí; cũng như chiều xoáy của gió bão và gió lốc trên các hình vẽ (hình 3-2).



a) Gió mùa đông:

- Bắc bán cầu: Gió mùa Đông – Bắc.
- Nam bán cầu: Gió mùa Đông – Nam.

b) Gió mùa hạ:

- Bắc bán cầu: Gió mùa Đông – Bắc.
- Nam bán cầu: Gió mùa Đông – Nam.

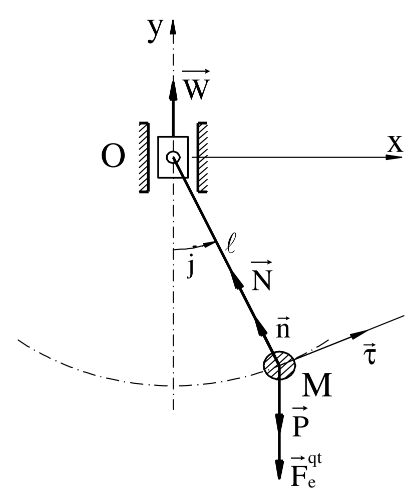
c)

- Dòng nước biển, dòr khí.
- Chiều xoáy của gió bão.

Hình 3-2

Ví dụ 1

Điểm treo của con lắc toán học chuyển động trên đường thẳng đứng với gia tốc không đổi $\overrightarrow{W}$. Hãy khảo sát chuyển động của con lắc đó đối với hệ trục toạ độ tịnh tiến cùng với điểm treo (hình 3-3).



Hình 3-3

Bài giải:

Khảo sát chuyển động của chất điểm M đối với hệ trục tọa độ Oxy, gốc O gắn vào điểm treo.

Các lực tác dụng lên chất điểm gồm: Trọng lực $\vec{P}$; phản lực $\vec{N}$ của dây và lực quán tính theo $\overrightarrow{F_e^{qt}}$, hướng cùng chiều với lực $\vec{P}$, $\overrightarrow{F_e^{qt}} = -m\overrightarrow{W}$. Do hệ động chuyển động tịnh tiến, nên $\vec{F}_C^{qt} = 0$.

Hệ thức cơ bản của động lực học trong hệ quy chiếu không quán tính viết cho chất điểm M:

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_e^{qt}}$$

Để khử N, chiếu phương trình trên trục tiếp tuyến, ta có:

$$m\ddot{s} = -P\sin\varphi - F_e^{qt}\sin\varphi$$

Do $s = \ell\varphi$ nên $\ddot{s} = \ell\ddot{\varphi}$: Phương trình trên sau khi rút gọn, nhận được:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g+W}{\ell}\sin\varphi = 0$$

Khi φ khá bé, $\sin\varphi \approx \varphi$, ta nhận được: $\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0,\ k = \sqrt{\dfrac{g+W}{\ell}}$

Con lắc thực hiện dao động điều hoà với chu kỳ: $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g+W}}$

Trường hợp điểm treo của con lắc có gia tốc $\overrightarrow{W}$ hướng xuống dưới. Giả thiết W ≤ g, ta có phương trình dao động bé của con lắc:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g-W}{\ell}\varphi = 0$$

– Nếu W < g, chu kỳ dao động của con lắc: $T = \dfrac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g-W}}$

– Nếu W = g, ta có: $\ddot{\varphi} = 0,\ \dot{\varphi} = C_1,\ \varphi = C_1 t + C_2$

Cho rằng, tại thời điểm ban đầu t = 0, con lắc lệch khỏi vị trí thẳng đứng một góc $\varphi_0 = \alpha$ và không có vận tốc tương đối ban đầu $\dot{\varphi}(0) = 0$, khi đó φ = α.

Như vậy, nếu điểm treo của con lắc rơi tự do thì con lắc ở cân bằng tương đối. Áp dụng (1-14) ta được: $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_e^{qt} = 0$

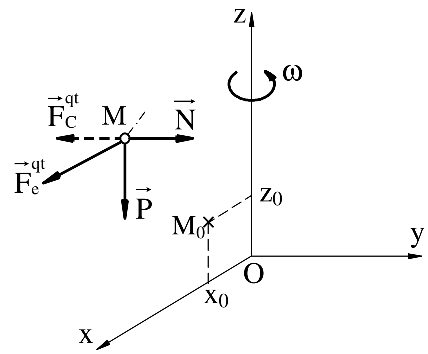
Do $\vec{P} = m\vec{g}$, $\overrightarrow{F}_e^{qt} = -m\vec{g}$, suy ra $\overrightarrow{N} = 0$, chất điểm M ở trạng thái mất trọng lượng.

Trường hợp điểm treo của con lắc có gia tốc $\overrightarrow{W}$ hướng xuống dưới và giả sử W > g, ta có con lắc ngược. Chu kỳ dao động của con lắc:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+W}}$$

Ví dụ 2

Một chất điểm khối lượng m, có thể chuyển động không ma sát trong mặt phẳng xOz. Mặt phẳng đó quay xung quanh trục thẳng đứng Oz, với vận tốc góc không đổi ω. Tìm quy luật chuyển động tương đối của chất điểm, nếu tại thời điểm ban đầu nó đứng yên tương đối tại điểm $M_0(x_0, z_0)$. Xác định phản lực $\overrightarrow{N}$ của mặt (hình 3-4).



Hình 3-4

Bài giải:

Xét chất điểm M chuyển động trong mặt phẳng xOz. Lực tác dụng gồm: Trọng lượng $\overrightarrow{P}$, phản lực pháp tuyến của mặt $\overrightarrow{N}$ và các lực quán tính $\overrightarrow{F}_e^{qt}$, $\overrightarrow{F}_C^{qt}$. Hệ thức cơ bản của động lực học chất điểm trong hệ không quán tính, trong trường hợp khảo sát có dạng:

$$m\overrightarrow{W}_r = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_e^{qt} + \overrightarrow{F}_C^{qt}$$

Trong đó: $\overrightarrow{P} \uparrow\uparrow Oz$, $\overrightarrow{N}$ vuông góc với mặt phẳng xOz và cùng chiều với trục Oy; $\overrightarrow{F}_e^{qt} = \overrightarrow{F}_{en}^{qt} = -m\overrightarrow{W}_{en}$; $\left|\overrightarrow{F}_{en}^{qt}\right| = mx\omega^2$, chiều hướng cùng chiều trục Ox; $\overrightarrow{F}_C^{qt} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{V}_r$ hướng ngược chiều trục Oy, có độ lớn: $\left|\overrightarrow{F}_C^{qt}\right| = 2m\omega|\dot{x}|$

Chiếu hệ thức cơ bản lên hệ Oxyz, thu được:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mx\omega^2 \\ m\ddot{y} = 0 = N - F_C^{qt} \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ trên cho ta giải N: $N = F_C^{qt} = 2m\omega|\dot{x}|$

Hai phương trình còn lại, sau khi tích phân, ta có:

$$x = C_1e^{\omega t} + C_2e^{-\omega t}$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + C_3t + C_4$$

Khi chú ý điều kiện ban đầu tại t = 0, suy ra: $C_1 = C_2 = \dfrac{x_0}{2}; C_3 = 0; C_4 = z_0$. Phương trình chuyển động của chất điểm M trong mặt phẳng xOz là:

$$\begin{cases} x = x_0 ch(\omega t) \\ z = z_0 - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Phản lực $\overrightarrow{N}$ của mặt có độ lớn: $N = 2m\omega|\dot{x}| = 2mx_0\omega^2 sh(\omega t)$

3.2. Các định lý tổng quát của động lực học trong chuyển động tương đối

Các định lý động lượng, mômen động lượng và động năng thiết lập mối quan hệ giữa các độ đo cơ bản của chuyển động với các độ đo cơ bản tác dụng lực trong hệ quy chiếu quán tính được dẫn ra trên cơ sở phương trình cơ bản:

$$m\overrightarrow{W} = \sum_k \overrightarrow{F}_k \qquad (1)$$

Vì $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_r + \overrightarrow{W}_e + \overrightarrow{W}_C$ thay vào (1) và đặt: $-m\overrightarrow{W}_e = \overrightarrow{F}_e^{qt}$, $-m\overrightarrow{W}_C = \overrightarrow{F}_C^{qt}$, ta có phương trình động lực học Coriôlít:

$$m\overrightarrow{W}_r = \sum_k \overrightarrow{F}_k + \overrightarrow{F}_e^{qt} + \overrightarrow{F}_C^{qt} \qquad (2)$$

Điều này có nghĩa là: Ngoài lực đã cho, cần thêm vào các lực quán tính kéo theo và lực quán tính Coriôlít của chất điểm.

Dựa vào nhận xét trên, ở đây ta không thực hiện các phép biến đổi toán học chặt chẽ, mà chỉ đưa ra dạng các định lý tổng quát của Động lực học cơ hệ trong hệ quy chiếu không quán tính sau:

3.2.1. Định lý động lượng

$$\frac{d\overrightarrow{Q}^r}{dt} = \sum_k \overrightarrow{F}_k^e + \sum_k \overrightarrow{F}_{ek}^{qt} + \sum_k \overrightarrow{F}_{Ck}^{qt} \qquad (3\text{-}4)$$

3.2.2. Định lý mômen động lượng

$$\frac{d\overrightarrow{L}_O^r}{dt} = \sum_k \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F}_k^e\right) + \sum_k \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F}_{ek}^{qt}\right) + \sum_k \overrightarrow{m}_O\left(\overrightarrow{F}_{Ck}^{qt}\right) \qquad (3\text{-}5)$$

Nếu hệ quy chiếu động có gốc trùng với khối tâm C của cơ hệ và các trục Cx // O_1x_1, Cy // O_1y_1, Cz // O_1z_1 của hệ quy chiếu quán tính $O_1x_1y_1z_1$ (hình 3-5) thì do $\overrightarrow{\omega}_e = 0$, nên:

$$\overrightarrow{F}_{Ck}^{qt} = -2\overrightarrow{\omega}_e \wedge \overrightarrow{V}_k^r = 0$$

Suy ra: $\sum_k \overrightarrow{m}_C\left(\overrightarrow{F}_{Ck}^{qt}\right)=0$

Mặt khác:

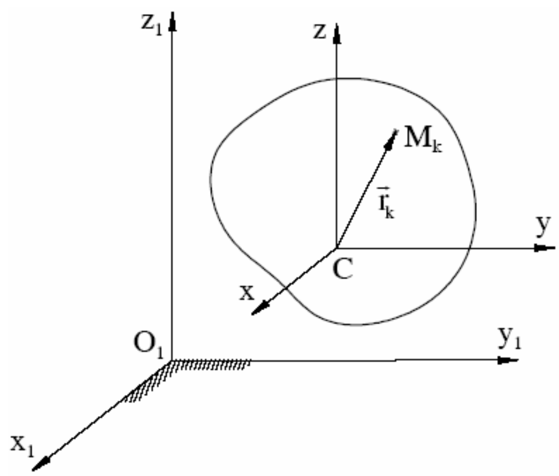
$$\sum_k \overrightarrow{m}_C\left(\overrightarrow{F}_{ek}^{qt}\right)=\sum_k \vec{r}_k \wedge \overrightarrow{F}_{ek}^{qt}=\sum_k \vec{r}_k \wedge\left(-m_k \overrightarrow{W}_k^{e}\right)=\sum_k \vec{r}_k \wedge\left(-m_k \overrightarrow{W}_e\right)$$

$$=\overrightarrow{W}_e \wedge \sum_k m_k \vec{r}_k=\overrightarrow{W}_e \wedge M\vec{r}_C=0 \qquad (do\ \vec{r}_C=0)$$

Do đó, nhận được:

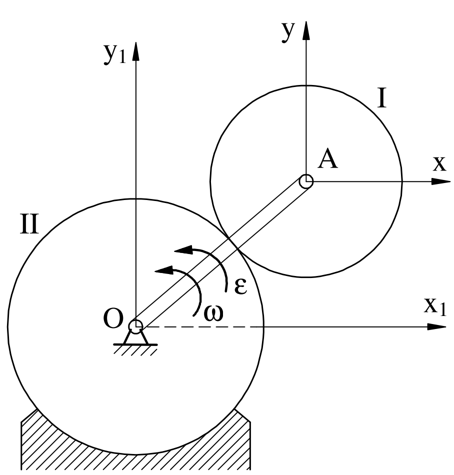
$$\frac{d\overrightarrow{L}_C^{r}}{dt}=\sum_k \overrightarrow{m}_C\left(\overrightarrow{F}_k^{e}\right) \qquad (3\text{-}6)$$

Kết luận: Trong hệ quy chiếu động (không quán tính) có gốc trùng với khối tâm của cơ hệ và chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định (quán tính), thì định lý mômen động lượng của cơ hệ đối với khối tâm C có dạng tương tự như trong hệ quy chiếu quán tính.

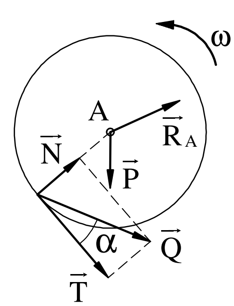


Hình 3-5

Ví dụ 3. Tính lực ăn khớp giữa hai bánh răng hành tinh. Cơ cấu đặt trong mặt phẳng nằm ngang, tay quay OA quay với vận tốc góc ω và gia tốc góc ε. Bánh xe động II coi như đĩa đồng chất trọng lượng P_2. Biết góc ăn khớp là α, bán kính các bánh răng là R_1 và R_2 (hình 3-6).



Hình 3-6



Hình 3-7

Bài giải

Khảo sát chuyển động của bánh răng động II. Hệ quy chiếu động gắn vào khối tâm A là Axy, chuyển động tịnh tiến đối với hệ quy chiếu cố định Ox_1y_1.

Lực tác dụng lên bánh răng II gồm: $\vec{P}_2$, phản lực tại A: $\vec{R}_A$, lực ăn khớp $\vec{Q} = \vec{T} + \vec{N}$ (hình 3-7).

Áp dụng định lý biến thiên mômen động lượng đối với hệ quy chiếu động:

$$\frac{d\vec{L}^r_{Az}}{dt} = \sum_k \vec{m}_{Az}\left(\vec{F}^e_k\right) = T.R_2 = Q.R_2\cos\alpha \qquad (1)$$

Ta có: $$L^r_{Az} = J_{Az}\omega_2 = \frac{1}{2}.\frac{P}{g}R_2^2.\frac{R_1+R_2}{R_2}\omega = \frac{P_2R_2(R_1+R_2)}{2g}\omega \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta nhận được: $Q = \dfrac{P_2(R_1+R_2)}{2g\cos\alpha}\omega$

3.2.3. Định lý động năng

$$dT^r = \sum_k dA^r\left(\vec{F}_k\right) + \sum_k dA^r\left(\vec{F}^{qt}_{ek}\right) + \sum_k dA^r\left(\vec{F}^{qt}_{Ck}\right)$$

Vì $dA^r\left(\vec{F}^{qt}_{Ck}\right) = \vec{F}^{qt}_{Ck}.\vec{V}_r.dt = -2m\left(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r\right).\vec{V}_r.dt = 0$

Suy ra: $$dT^r = \sum_k dA^r\left(\vec{F}_k\right) + \sum_k dA^r\left(\vec{F}^{qt}_{ek}\right) \qquad (3\text{-}7)$$

Như vậy, trong định lý động năng không có mặt của lực quán tính Cơriôlít (nghĩa là khi áp dụng, không cần tính công của lực này).

3.3. Phương trình Lagrăng loại II trong hệ quy chiếu không quán tính

Từ phương trình Lagrăng loại II trong hệ quy chiếu cố định, suy tương tự, ta viết được phương trình Lagrăng loại II trong chuyển động tương đối đối với hệ chịu liên kết giữ, lý tưởng, hôlônôm có N bậc tự do:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_r}{\partial q_i} = Q^r_i\left(\vec{F}_k\right) + Q^r_i\left(\vec{F}^{qt}_{ek}\right) + Q^r_i\left(\vec{F}^{qt}_{Ck}\right) \qquad (3\text{-}8)$$

$$(i = \overline{1,\,N})$$

Trong đó:

$q_i, \dot{q}_i$ - Toạ độ suy rộng và vận tốc suy rộng của cơ hệ trong hệ quy chiếu không quán tính.

$Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_k\right)$; $Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_{ek}^{qt}\right)$; $Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_{Ck}^{qt}\right)$ - Các lực suy rộng của các lực hoạt động, các lực quán tính theo và các lực quán tính Cơriôlít ứng với các toạ độ suy rộng q_i trong hệ quy chiếu không quán tính.

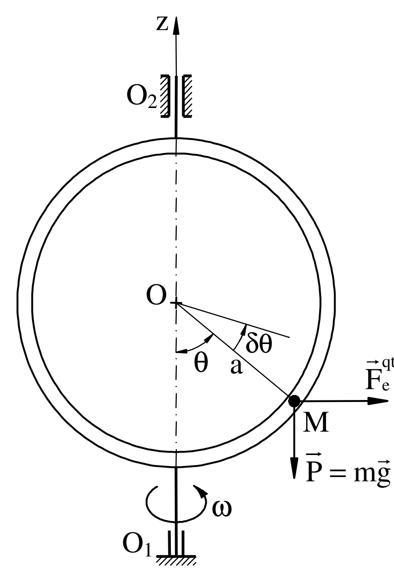
T_r - Động năng của cơ hệ trong chuyển động tương đối.

Khi cơ hệ cân bằng $(\overrightarrow{V}_{rk} = 0)$, thì $T_r = 0$, và $Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_{Ck}^{qt}\right) = 0$. Do đó suy ra điều kiện cân bằng tương đối:

$$Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_k\right) + Q_i^r\left(\overrightarrow{F}_{ek}^{qt}\right) = 0;\ \ i = \overline{1, N} \qquad (3\text{-}9)$$

Một cách tương tự, độc giả có thể viết phương trình tổng quát của Động lực học trong chuyển động tương đối.

Ví dụ 4. Một chất điểm có khối lượng m chuyển động theo ống vòng tròn bán kính a, đồng thời vòng tròn quay đều quanh trục thẳng đứng với vận tốc góc ω. Bỏ qua ma sát, thành lập phương trình vi phân chuyển động của chất điểm (hình 3-8).



Hình 3-8

Bài giải

Để nhận được lời giải của bài toán, có thể viết phương trình Lagrăng loại II đối với hệ quy chiếu cố định, trong đó đặt điều kiện ống tròn quay đều.

Ở đây, ta sử dụng phương trình Lagrăng loại II trong chuyển động tương đối.

Khảo sát quả cầu M như chất điểm. Do bỏ qua ma sát nên liên kết đặt lên M là lý tưởng.

Các lực hoạt động tác dụng vào chất điểm là $\overrightarrow{P} = m\vec{g}$, các lực quán tính theo $\overrightarrow{F}_e^{qt} = \overrightarrow{F}_{er}^{qt}$ (do vòng tròn quay đều) và lực quán tính Cơriôlít $\overrightarrow{F}_C^{qt}$ hướng vuông góc với mặt phẳng hình vẽ, ra phía ngoài.

Vị trí chất điểm được xác định đối với hệ động bởi một toạ độ suy rộng đủ q = θ.

Phương trình Lagrăng loại II có dạng:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial \theta}=Q_\theta\left(m\vec{g}\right)+Q_\theta\left(\vec{F}_{en}^{qt}\right)+Q_\theta\left(\vec{F}_{C}^{qt}\right) \tag{1}$$

Trong đó: $T_r=\frac{1}{2}mV_r^2$; $V_r=\dot{s}=a\dot{\theta}$; suy ra $T_r=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$.

Ta có: $\frac{\partial T_r}{\partial \theta}=0$; $\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\theta}}=ma^2\dot{\theta}$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\theta}}\right)=ma^2\ddot{\theta}$ (2)

Để tính các lực suy rộng ở vế phải của phương trình (1), ta cho chất điểm một di chuyển có thể với góc δθ và có:

$$Q_\theta(m\vec{g})=\frac{\delta A(m\vec{g})}{\delta\theta}=-\frac{mg\sin\theta.a\,\delta\theta}{\delta\theta}=-mga\sin\theta \tag{3}$$

$$Q_\theta\left(\vec{F}_{en}^{qt}\right)=\frac{\delta A\left(\vec{F}_{en}^{qt}\right)}{\delta\theta}=\frac{F_{en}^{qt}\cos\theta.a\,\delta\theta}{\delta\theta}=ma^2\sin\theta\cos\theta.\omega^2 \tag{4}$$

$$Q_\theta\left(\vec{F}_{C}^{qt}\right)=0 \tag{5}$$

Thay (2), (3), (4), (5) vào (1), nhận được phương trình vi phân chuyển động tương đối của chất điểm là:

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{a}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Бухгольц.Н.Н. Основной курс теоретической механики. Часть I и II. Издательство “наука”. Москва .1969.
2. Голубева О. В. Теоретическая Механика Издательство “Высшая школа”. Москва .1968.
3. Добронравов В. В. никитин н.н. Дворников А. Л. Курс теоретической механики. ицд. 4.е. “Высшая школа”. Москва .1976.
4. Мецерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. Издательство “наука”. Москва .1967.
5. Тарг С. М. краткий курс теоретической механики. изд. 2.е физик-мат. Москва .1961.
6. Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Trọng Truyền, Nguyễn Thế Tiến, Ngô Văn Thảo. Cơ học lý thuyết, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1969.
7. Bộ môn Cơ học lý thuyết - ĐH Thuỷ lợi. Cơ học lý thuyết, tập 1. Tĩnh học và động học. Hà nội 1977.
8. Bộ môn Cơ học lý thuyết - ĐH Thuỷ lợi. Cơ học lý thuyết, tập 2. Động lực học. Hà nội 1977.
9. Bộ môn Cơ học lý thuyết - ĐH Thuỷ lợi. Bài tập Cơ học lý thuyết, tập 1 và 2. Hà nội 1976.
10. Bộ môn Cơ học lý thuyết - ĐH Thuỷ lợi. Bài tập Cơ học lý thuyết. Hà nội 2004.