KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 22

Quảng Ngãi, 7-13/4/2014

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC PHẠM VĂN ĐỒNG

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
PHẠM VĂN ĐỒNG

KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN
LẦN THỨ 22

BIÊN TẬP

Trần Nguyên An
Trường ĐH Sư phạm, ĐH Thái Nguyên

Đoàn Trung Cường
Hội Toán học Việt Nam & Viện Toán học

Trịnh Thanh Đèo
Trường ĐH KHTN, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh

Vũ Nhật Huy
Trường ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội

Liên Vương Lâm
Trường ĐH Phạm Văn Đồng

Nguyễn Văn Ninh
Trường ĐH Sư phạm, ĐH Thái Nguyên

QUẢNG NGÃI, 7-13/4/2014

GIỚI THIỆU

Kỳ thi Olympic Toán dành cho sinh viên các trường đại học, cao đẳng và học viên trong cả nước đã diễn ra tại Trường đại học Phạm Văn Đồng, Quảng Ngãi trong khoảng thời gian một tuần, từ 07-13/4/2014. Quyển kỷ yếu này chủ yếu dành để tập hợp lại một số bài đề xuất của các trường tham dự kỳ thi với mong muốn cung cấp thêm một tài liệu tham khảo cho các sinh viên quan tâm. Do thời gian khá ngắn nên ngoài một số bài được biên tập tương đối kỹ càng, có một số bài chúng tôi giữ nguyên cách trình bày như đề xuất, công tác biên tập trong trường hợp đó là đánh máy lại, kiểm tra tính chính xác về nội dung và chính tả.

Quyển kỷ yếu chắc chắn còn rất nhiều lỗi trình bày, chúng tôi đề nghị người đọc luôn để ý điều này.

Nhóm biên tập

Mục lục

III HƯỚNG DẪN GIẢI 59

Phần I

KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN LẦN THỨ 22

MỘT SỐ THÔNG TIN VỀ KỲ THI

Trường đại học Phạm Văn Đồng - đón các đoàn tham dự kỳ thi. *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

1 Thông tin chung

Kỳ thi Olympic Toán dành cho sinh viên năm 2014 được tổ chức từ 7-13/4/2014 tại Trường đại học Phạm Văn Đồng, thành phố Quảng Ngãi, tỉnh Quảng Ngãi. Kỳ thi là hoạt động phối hợp hàng năm giữa Hội Toán học Việt Nam cùng với một cơ sở đào tạo, 2014 là năm thứ 22 kỳ thi diễn ra.

Đã có 85 trường đại học, cao đẳng, học viện tham dự kỳ thi Olympic Toán học sinh viên lần thứ 22. Có 719 lượt sinh viên dự thi hai môn Đại số và Giải tích.

Bên cạnh hoạt động chính là việc tổ chức thi, chấm thi và trao giải, Ban tổ chức kỳ thi phối hợp với Trường đại học Phạm Văn Đồng đã tổ chức một hội thảo về “Đổi mới nội dung giảng dạy toán ở trường kỹ thuật” và một buổi "Giao lưu giữa các nhà toán học và sinh viên" tại trường đại học Phạm Văn Đồng.

Cơ quan tổ chức

- Bộ Giáo dục và Đào tạo
- Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam
- Trung ương Hội Sinh viên Việt Nam
- Hội Toán học Việt Nam
- Trường đại học Phạm Văn Đồng

Ban tổ chức

Trưởng ban: GS. TS. Nguyễn Hữu Dư (Hội Toán học) và PGS. TS. Phạm Đăng Phước (Trường ĐH Phạm Văn Đồng).

Phó trưởng ban: GS. TSKH. Phạm Thế Long (Hội Toán học), GS. TSKH. Phùng Hồ Hải (Hội Toán học), Th.S. Châu Văn Lương (Trường ĐH Phạm Văn Đồng).

Ủy viên: TS. Đoàn Trung Cường (Hội Toán học), TS. Lê Cường (Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội), TS. Nguyễn Thanh Hải (Trường ĐH Phạm Văn Đồng).

2 Kết quả

Với kết quả thi của thí sinh, Hội đồng thi đã thống nhất cơ cấu và mức trao giải. Số lượng giải được trao cụ thể như sau:

a. **Môn Đại số**
   - Giải nhất: 27 giải.
   - Giải nhì: 42 giải.
   - Giải ba: 100 giải.
   - Khuyến khích: 30 giải.

b. **Môn Giải tích**
   - Giải nhất: 28 giải.
   - Giải nhì: 44 giải.
   - Giải ba: 95 giải.
   - Khuyến khích: 27 giải.

c. **Giải đặc biệt**
   Ban tổ chức kỳ thi đã quyết định trao 11 giải đặc biệt cho các sinh viên hoặc đạt điểm cao nhất của một môn hoặc đạt hai giải nhất của cả hai môn.

Thứ trưởng Bộ GD&ĐT Bùi Văn Ga và ông Cao Khoa - Chủ tịch UBND tỉnh Quảng Ngãi - trao các giải đặc biệt. *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

DIỄN VĂN TỔNG KẾT KỲ THI **Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc lần thứ 22** [1]

GS. TS. Nguyễn Hữu Dư
Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam
Đồng Trưởng ban tổ chức kỳ thi

Suốt chặng đường 22 năm qua, cũng là lúc bắt đầu của mùa hè cháy bỏng ở Miền Trung, Olympic Toán sinh viên đã đồng hành cùng với các trường đại học, cao đẳng và học viện và đã trở thành sự kiện quan trọng thúc đẩy phong trào học tập, giảng dạy Toán của sinh viên và các thầy, các cô ở các trường.

Có lẽ còn nhiều tranh luận với nhau để khẳng định vai trò của toán học trong chương trình giảng dạy, trong nền giáo dục của nước nhà cũng như sự ảnh hưởng của nó đến sự phát triển kinh tế, xã hội, an ninh quốc phòng của đất nước. Chỉ có một điều không thể ai phủ nhận là ở tất cả các nước tiên tiến trên thế giới, toán học có một vị trí đặc biệt quan trọng từ bậc giáo dục phổ thông cơ sở đến đào tạo tiến sỹ. Toán học cung cấp một công cụ mạnh mẽ giúp cho các chuyên gia giải quyết các vấn đề chuyên môn của tất cả các ngành, ngay cả những ngành thuộc lĩnh vực tưởng chừng xa lạ như khoa học xã hội và nghệ thuật. Ngoài ra, một vai trò không kém quan trọng, nếu chưa nói là quan trọng hơn, là toán học trang bị cho người học một tư duy logic, tư duy sáng tạo cần thiết cho cuộc sống và nghề nghiệp sau này. Đó là chưa nói đến nếu ai say mê toán học sẽ thấy được sức hút mạnh mẽ của nó, sẽ thấy đó là thế giới kỳ diệu kích thích chúng ta khám phá, sáng tạo. Chính vì vậy ngay ở một đất nước thực dụng như Hoa Kỳ, khi đã bước chân vào đại học thì bất cứ học ngành gì, các sinh viên đều phải trải qua các môn học về Toán.

Sự nghiệp giáo dục và đào tạo của nước nhà đang trong thời kỳ chuyển biến với những bước ngoặt mang tính quyết định và đang được toàn xã hội quan tâm. Việc định hướng đúng chương trình giảng dạy trong các trường học, học viện là công việc đầu tiên để nâng cao chất lượng đào tạo. Những ai đó nghĩ rằng các trường có thể đào tạo ra những con người có chuyên môn cao và trách nhiệm xã hội bởi một chương trình đào tạo theo phương châm giảm thiểu vai trò môn toán, thậm chí bỏ hẳn môn toán ra khỏi chương trình giảng dạy, thì có lẽ đó là những người không thực tế và nhiều thế hệ sinh viên ra trường sẽ phải trả giá bởi những nhầm lẫn tai hại đó.

1. Trích nội dung bài phát biểu tại lễ tổng kết và trao giải Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc lần thứ 22, ngày 12/4/2014, tại Tp. Quảng Ngãi, Tỉnh Quảng Ngãi

Cũng may là xu hướng muốn bỏ môn toán trong các chương trình đào tạo chỉ mới xẩy ra rải rác ở một số trường nặng về lợi nhuận kinh doanh. Chính vì thế, dù giáo dục ở các bậc ĐH và cao đẳng ở VN đang có những thăng trầm thì kỳ thi Olympic toán sinh viên vẫn nhận được sự hưởng ứng nhiệt tình của các thầy các cô và sinh viên. Sự nhiệt tình đó đã giúp cho kỳ thi Toán Olympic sinh viên hàng năm đã trở thành ngày hội của đông đảo sinh viên và giáo viên các trường và các học viện.

Mục tiêu chính của kỳ Olympic Toán sinh viên đương nhiên là tạo ra cuộc hội ngộ và tranh tài ở đỉnh cao trí tuệ của các sinh viên yêu thích toán của các trường đại học và cao đẳng để chắp cánh ước mơ cho những em có hoài bão trở thành nhà toán học sau này, là dịp để các trường khẳng định được đẳng cấp và thương hiệu quốc gia về đào tạo của mình. Tuy nhiên, vượt lên những điều đó còn có nhiều mục đích cao đẹp khác. Cuộc thi Olympic sẽ là nơi gặp gỡ của các thầy cô để tăng cường sự hiểu biết, cùng nhau học tập kinh nghiệm giảng dạy, đặc biệt là giảng dạy môn Toán. Đó cũng là nơi những người yêu thích nghiên cứu toán học gặp gỡ và trao đổi nhau, cũng là dịp hiếm có cho các sinh viên các trường có thể giao lưu gặp gỡ với các nhà toán học nước nhà để thắp mãi ngọn lửa đam mê toán học và sẽ lựa chọn toán học như là nghề nghiệp tương lai của mình. Nhờ đó, kỳ thi Olympic toán chắc chắc sẽ góp phần thúc đẩy sự phát triển của của nền Toán học Việt nam nói riêng cũng nền giáo dục nước nhà nói chung.

Kỳ thi Olympic toán học sinh viên toàn quốc lần thứ 22 diễn ra từ ngày 08 đến ngày 12 tháng 4 năm 2014 tại Trường Đại học Phạm Văn Đồng, trên vùng đất Quảng Ngãi giàu truyền thống lịch sử, văn hóa và tình người. Dù rằng mới có 6 năm phát triển nhưng Trường đã có những bước trưởng thành của những trường có bề dày đào tạo. Kỳ thi cũng được đặt ở Quảng Ngãi, một tỉnh đang vươn ra tầm hiện đại của quốc tế mà vẫn giữ được nét đặc trưng của một thành phố Miền Trung. Những ai đến với kỳ thi lần này đã có dịp để đi qua từng góc phố lặng ngắm nhìn Thành phố Quảng ngãi đang đổi mới với sự kế thừa của nền văn hóa Sa Huỳnh, đã được biết các di tích lịch sử, danh lam thắng cảnh Mỹ Khê, khu du lịch văn hoá Thiên Ấn, núi Cà Đam, đảo Lý Sơn..., nơi đã sinh ra các lãnh tụ kiệt xuất Trương Công Định, Phạm Văn Đồng... Chúng ta cũng hiểu được tình người với sự giòn tan, vị ngọt thanh, thấm dịu của đường phèn xứ Quảng.

Chỉ với năm ngày của kỳ thi, chúng ta được chứng kiến sự nỗ lực tranh tài của những sinh viên tài năng yêu thích Toán học ở kỳ thi Olympic với quy mô lớn. Hơn 700 lượt thi của các sinh viên từ 85 trường đại học, cao đẳng và học viện từ mọi miền Tổ quốc tụ hội về tranh tài hai môn Đại số và Giải tích toán học. Các em đã cho mọi người cảm nhận được toán học là điều huyền diệu và chứng minh tài năng cùng với lòng say mê toán học tuyệt vời của mình. Số lượng đông đảo các đoàn và các sinh viên tham gia kỳ thi minh chứng hùng hồn cho vai trò của Toán học trong đào tạo và sự quan tâm đặc biệt của các trường đại học và cao đẳng. Sự thành công của kỳ thi không chỉ phát hiện ra những nhân tài toán học của đất nước mà chắc chắn còn góp phần vào việc nâng cao chất lượng giảng dạy, đặc biệt là giảng dạy môn Toán học ở các bậc giáo dục ở Việt Nam.

Các thi sinh (trái) và Ban giám khảo (phải). *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

Ban giám khảo đã làm việc hết sức công minh, khẩn trương, chính xác. Chúng ta đã có đề thi phù hợp trình độ để xếp loại được sinh viên. Kỳ tranh tài cũng có 11 em đạt giải nhất đồng thời cả hai môn thi, trong đó có 2 em đạt 30 điểm môn Giải tích. Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội dẫn đầu kết quả thi với thành tích 7 giải nhất. Đó là kết quả đáng tự hào mà các em đã đạt được và chúng ta tin tưởng rằng nếu các em giữ vững được ngọn lửa đam mê, các em sẽ trở thành những nhà Toán học lớn trong tương lai. Hãy để chúng ta bày tỏ sự ngưỡng mộ đến tài năng toán học của các em-những ngôi sao mới đang xuất hiện trên bầu trời toán học Việt Nam.

Cuộc thi đã giành được sự quan tâm sâu sắc của Bộ Giáo dục và Đào tạo, của Liên hiệp hội KH và Kỹ thuật. Chúng ta vui mừng với sự có mặt của Thứ trưởng Bùi Văn Ga, người đang hàng ngày chỉ đạo công tác đào tạo đại học của các trường và học viện.

Chúng ta cũng thật ngỡ ngàng trước sự nhiệt thành và phương thức tổ chức khoa học của Trường đăng cai. Sự chỉ đạo cẩn thận đến từng chi tiết của Ban Giám hiệu Nhà trường đã giúp cho cuộc tranh tài thành công rất tốt đẹp. Kỳ thi cũng nhận được sự quan tâm đặc biệt của Lãnh đạo tỉnh Quảng Ngãi, các sở ngành liên quan thực hiện các công việc giúp cho kỳ thi thành công. Cộng đồng Toán học Việt Nam xin gửi lời cám ơn sâu sắc tới Bộ Giáo dục và Đào tạo, Tỉnh ủy và Ủy ban nhân dân tỉnh Quảng Ngãi và Trường Đại học Phạm Văn Đồng.

Chúng ta cũng tự hào nhấn mạnh rằng sự tài trợ lớn nhất mà các trường và học viện dành cho Kỳ thi là tạo điều kiện cho các em sinh viên có lòng yêu thích toán học được đến với toán học. Vì thế, BTC cám ơn đặc biệt ban giám hiệu các trường, ban giám đốc các học viện. Chúng ta cũng cám ơn các thầy các cô đã động viên, dạy dỗ các em sinh viên giúp các em thắp sáng ngọn lửa say mê để chinh phục đỉnh cao trí tuệ. Lời cám ơn tiếp theo chắc chắn phải dành cho các em sinh viên. Các em đã phấn đấu hết mình để chứng minh khả năng sáng tạo Toán học của chính mình. Chính các em là nguồn động lực chính đảm bảo cho sự thành công tốt đẹp của kỳ thi và thắp sáng ngọn lửa Olympic Toán sinh viên. Chúng ta cũng cảm phục các em sinh viên về khát vọng đạt được đỉnh cao vinh quang. Mong các em giữ mãi khát vọng vươn lên để khi trở về chúng ta sẽ là những sinh viên xuất sắc trong học tập, sau này trở thành nhân tài của đất nước.

Ban Tổ chức Hội thi cũng đã nhận được sự cổ vũ về tinh thần và sự ủng hộ về vật chất của các cơ quan, đơn vị, các tổ chức chính trị xã hội. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Đài truyền hình Việt Nam đã giúp đỡ chúng tôi thực hiện chương trình. Chúng tôi cũng chân thành cám ơn sự góp sức của Tập đoàn Viettel, Tổng công ty Đường sắt Việt Nam Ngân hàng Nông nghiệp quận Tây Hồ, Hà Nội; Nhà máy lọc dầu Dung Quất, Nhà máy nước khoáng Thạch Bích, chi nhánh Ngân hàng Việt tin Bank, Chi nhánh ngân hang nông nghiệp và phát triển nông thôn, Chi nhánh ngân hàng BIDV, Chi nhánh ngân hang VietComBank, Nhà máy Vina Soy tại Quảng ngãi. Sự giúp đỡ này của quý cơ quan đã là niềm khích lệ lớn đã góp phần cho Olymlic lần thứ 22 thành công tốt đẹp.

Các sinh viên được trao giải nhất môn Giải tích. *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

Cuộc thi tranh tài của chúng ta đã kết thúc nhưng ngọn lửa nhiệt tình của kỳ thi Olympic lần thứ 22 sẽ mãi mãi thắp sáng trong lòng những giảng viên, sinh viên và người dân xứ Quảng. Tuy nhiên, cũng như bất cứ cuộc tranh tài khác, lúc kết thúc sẽ có nhiều em tự hào về những thành tích mình đạt được và lẽ dĩ nhiên vẫn còn một vài em vì lý do nào đó mà chưa thể hài lòng với kết quả của mình chỉ vì một chút thiếu may mắn. Dù thế, các em hãy giữ vững niềm tin và chắc chắn ngày nào đó các em sẽ được thành tích cao trong những lần tranh tài tiếp theo cũng như toàn bộ sự nghiệp của mình.

Lá cờ Olympic Sinh viên Toán học đã được chuyển về cho Đơn vị đăng cai năm 2015- Trường Đại học Kinh tế, Đại học Huế nhưng những tình cảm tốt đẹp mà Trường Đại học Phạm Văn Đồng và nhân dân Quảng Ngãi dành cho những người tham dự kỳ tranh tài Olympic Toán học Sinh viên vẫn còn đọng mãi trong tâm trí mọi người.

DIỄN VĂN TỔNG KẾT KỲ THI
Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc lần thứ 22 [1]

PGS. TS. NGƯT. Phạm Đăng Phước
Hiệu trưởng Trường đại học Phạm Văn Đồng
Đồng Trưởng ban tổ chức kỳ thi

Kính thưa quý vị đại biểu, quý vị khách quý, các thầy cô giáo và các em sinh viên thân mến.

Kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ XXII, năm 2014 được tổ chức từ ngày 7 tháng 4 năm 2014 đến ngày 12 tháng tư năm 2014 tại trường Đại học Phạm Văn Đồng tỉnh Quảng Ngãi đã kết thúc và thành công tốt đẹp. Đến tham dự kỳ thi năm nay có 85 đoàn từ các trường Đại học và cao đẳng trên toàn quốc. Có 719 lượt các sinh viên dự thi hai môn Đại số và Giải tích, có gần 200 thầy cô giáo là trưởng, phó đoàn và tham gia Ban Giám khảo.

Thay mặt Ban tổ chức, các Thầy cô giáo và sinh viên trường Đại học Phạm Văn Đồng, tôi nhiệt liệt chào mừng và cám ơn sự có mặt của các đồng chí lãnh đạo, của tất cả quý vị đại biểu, các Thầy cô giáo và các em sinh viên đã đến dự lễ bế mạc và trao giải của kỳ thi.

Kính thưa Quý vị !

Trường Đại học Phạm Văn Đồng hân hạnh là đơn vị đăng cai tổ chức kỳ thi lần này. Trong một tuần hoạt động, kỳ thi đã diễn ra đúng kế hoạch:

Trong hai ngày mùng 7 và 8 tháng tư, Ban Tổ chức đã đón tiếp các đoàn từ các Học viện, các trường đại học, cao đẳng từ mọi miền của Tổ quốc về đăng ký dự thi. Công tác đón tiếp được trường Đại học Phạm Văn Đồng chuẩn bị chu đáo, trong không khí thân tình và nồng ấm. Đội sinh viên tình nguyện của trường đại học Phạm Văn Đồng đã hỗ trợ các đoàn dự thi, đón các đoàn, giới thiệu chỗ ăn, ở, hướng dẫn đường đi. Trong điều kiện Tỉnh Quảng Ngãi còn nhiều khó khăn, nhưng các đoàn cũng đã sớm ổn định chỗ ở, yên tâm tham gia kỳ thi. Thành phố Quảng Ngãi và trường Đại học Phạm Văn Đồng ít có dịp được đón tiếp một số lượng lớn người từ các tỉnh thành trong cả nước đến tập trung trong một tuần đông như vậy. Đây là lần đầu nhà trường đăng cai tổ chức một sự kiện lớn, do đó, để chuẩn bị cho kỳ thi được diễn ra suôn sẽ, an toàn, nhà trường đã phối hợp với chính quyền địa phương, các sở, ngành liên quan của tỉnh, đảm bảo an ninh trật tự địa bàn và khu vực

1. Trích nội dung bài phát biểu tại lễ tổng kết và trao giải Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc lần thứ 22, ngày 12/4/2014, tại Tp. Quảng Ngãi, Tỉnh Quảng Ngãi

thi; đảm bảo vệ sinh an toàn thực phẩm, đảm bảo công tác thông tin, điện, nước, y tế, . . . , để kỳ thi được diễn ra thành công.

Các hoạt động bên lề của kỳ thi cũng đã được chuẩn bị và tổ chức chu đáo. Chiều ngày 8 tháng tư năm 2014, Ban tổ chức kỳ thi đã tổ chức Hội thảo về "Phương pháp giảng dạy toán ở các trường Kỹ thuật". Đã có gần 200 các Thầy cô giáo dạy toán của các học viện, trường đại học và cao đẳng đến tham dự. Hội thảo đã trao đổi, thảo luận sôi nổi về chương trình đào tạo, biên soạn sách giáo khoa, giáo trình và các phương pháp dạy toán hiện nay trong các trường kỹ thuật; Hội thảo cho thấy sự cần thiết đối với việc biên soạn Bộ sách toán để các trường kỹ thuật thống nhất sử dụng, cần đổi mới chương trình giảng dạy toán ở bậc đại học và cao đẳng của các ngành kỹ thuật cho phù hợp hơn với hình thức đào tạo tín chỉ và phương pháp giảng dạy mới. Chuyển từ phương pháp truyền thụ kiến thức sang đào tạo kỹ năng, khả năng tự nghiên cứu cho sinh viên trong điều kiện số tiết giảng ngày càng thu gọn.

Sinh viên Trường đại học Phạm Văn Đồng. *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

Hoạt động "Giao lưu giữa các nhà toán học với sinh viên" cũng đã được đông đảo các em học sinh, sinh viên hào hứng tham gia. Khách mời đêm giao lưu là các Nhà khoa học, Giáo sư toán đầu ngành của cả nước và các Giảng viên toán nhiều kinh nghiệm của các trường đại học, cao đẳng. Đây là dịp để các em sinh viên yêu thích môn toán được tiếp cận các Nhà khoa học, các Thầy cô giáo dạy toán. Được trao đổi những vấn đề chuyên môn, những tâm tư, kinh nghiệm trong việc học toán và nghiên cứu môn toán. Đêm giao lưu đã đem lại không khí phấn khởi và niềm tin cho các sinh viên yêu thích môn toán, mang lại sự động viên to lớn cho các sinh viên Việt Nam tiếp tục có những cống hiến, thành công trong lĩnh vực toán học.

Ngày 09 tháng tư năm 2014, sinh viên của các trường chính thức dự thi hai môn Đại số và Giải tích. Ban Tổ chức đã chuẩn bị tốt các điều kiện về cơ sở vật chất để tổ chức kỳ thi. Trong những ngày này, thời tiết tại Quảng Ngãi khá nóng nhưng các thí sinh đã khắc phục khó khăn, tham gia các buổi thi một cách đầy đủ và nghiêm túc. Các Thầy cô giáo làm công tác coi thi đã thể hiện tinh thần trách nhiệm cao, coi thi nghiêm túc và khách quan. Ban Giám khảo đã khẩn trương triển khai việc chấm thi, lên kết quả.

Ngày 11 tháng tư, Ban tổ chức đã họp các trưởng đoàn để thống nhất kết quả kỳ thi. Ban tổ chức nhiệt liệt chúc mừng thành tích của các đoàn và đánh giá rất cao tinh thần học tập toán học của tất cả các sinh viên tham dự kỳ thi này, vì các em đều là những sinh viên xuất sắc của các trường được cử đi, các em đều xứng đáng đạt giải. Với kết quả thi của thí sinh, Hội đồng thi đã thống nhất cơ cấu và kết quả giải cụ thể như sau: Có 55 giải nhất (môn đại số có 27 SV, môn giải tích có 28 SV), có 87 giải nhì (môn đại số có 43 SV, môn giải tích có 44 SV), có 184 giải ba (môn đại số có 99 SV, môn giải tích có 95 SV), có 57 giải khuyến khích (môn đại số có 30 SV, môn giải tích có 27 SV). Trong số các em đạt giải nhất, có 11 sinh viên đạt giải đặc biệt - đó là những sinh viên đạt thủ khoa môn Đại số hoặc Giải tích hoặc đạt giải nhất cả 2 môn.

Tối ngày 11 tháng 4 năm 2014, Trường Đại học Phạm Văn Đồng tổ chức đêm giao lưu, gặp gỡ thân mật các Thầy Cô giáo cũng như sinh viên của tất cả các đoàn. Đêm giao lưu đã diễn ra vui vẻ, thân tình, đã để lại nhiều tình cảm tốt đẹp giữa sinh viên các nhà trường, học viện.

Trong những ngày lưu lại Quảng Ngãi, đặc biệt là ngày 10 và 11/4, hầu hết các đoàn đã có dịp được tham quan các danh thắng và di tích lịch sử tại Quảng Ngãi: như thăm nhà máy lọc dầu Bình Sơn tại Khu kinh tế Dung Quất, thăm mộ cụ Huỳnh Thúc Kháng, Khu chứng tích Sơn Mỹ, biển Mỹ Khê; Khu lưu niệm Bác Phạm Văn Đồng, Bệnh xá mang tên anh hùng liệt sỹ - Bác sỹ Đặng Thùy Trâm, Khu Du lịch Sa Huỳnh,...., được thưởng thức các đặc sản của quê hương Núi Ấn, Sông Trà. Quảng Ngãi chắc chắn đã để lại những ấn tượng đẹp trong lòng du khách.

Trong suốt thời gian diễn ra kỳ thi, không có sự cố đáng tiếc nào xẩy ra; an ninh trật tự, an toàn giao thông, sức khỏe của các thí sinh và quý Thầy cô giáo đều được đảm bảo.

Kính thưa quý vị !

Để tổ chức một kỳ thi lớn, quy mô toàn quốc, Hội Toán học Việt Nam và trường Đại học Phạm Văn Đồng đã có nhiều cố gắng để phối hợp công tác cũng như tranh thủ sự giúp đỡ từ nhiều phía.

Ban Tổ chức và trường Đại học Phạm Văn Đồng chân thành cám ơn Bộ Giáo dục và Đào tạo đã có nhiều quan tâm chỉ đạo và đã tặng Bằng khen cho nhà trường trong công tác tổ chức kỳ thi. Đặc biệt, sự có mặt của GS.TSKH Bùi Văn Ga, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo trong buổi lễ bế mạc và trao giải hôm nay chính là sự khích lệ, động viên to lớn đối với phong trào dạy và học toán trong các học viện, trường đại học và cao đẳng của cả nước. Xin trân trọng cám ơn Thứ trưởng.

Xin chân thành cám ơn lãnh đạo Tỉnh ủy và UBND tỉnh Quảng Ngãi đã có sự chỉ đạo sâu sát, sự giúp đỡ tận tình trong việc tổ chức kỳ thi tại trường đại học Phạm Văn Đồng, đã động viên và tặng bằng khen cho Hội Toán học Việt Nam. Cám ơn sự hỗ trợ của các sở, ngành và chính quyền địa phương để kỳ thi diễn ra an toàn và đạt kết quả tốt.

Ban tổ chức trân trọng cám ơn các cơ quan, doanh nghiệp đã tham gia tài trợ: Nhà máy lọc hóa dầu Bình Sơn - Quảng Ngãi, Chi nhánh Ngân hàng ViettinBank tỉnh Quảng Ngãi, Chi nhánh Ngân hàng Nông nghiệp tỉnh Quảng Ngãi, Chi nhánh Ngân hàng đầu tư và phát triển tỉnh Quảng Ngãi, Chi nhánh Ngân hàng VietComBank tỉnh Quảng Ngãi, Nhà máy nước khoáng Thạch Bích - Cty đường Quảng Ngãi, Nhà máy sữa Vinasoy - Cty đường Quảng Ngãi, Nhà máy Bia Quảng Ngãi - Cty đường Quảng Ngãi, Công ty Quảng Cáo Thời Nay; Tại Hà Nội có các nhà tài trợ: Tập đoàn Viettel, Tập đoàn Dầu khí Việt Nam và Ngân hàng Nông nghiệp quận Tây Hồ, thủ đô Hà Nội. Qua sự quan tâm của các nhà tài trợ đã khích lệ phong trào học tập môn Toán của sinh viên Việt Nam.

Xin cám ơn Đài truyền hình Việt Nam, Trung tâm truyền hình Việt Nam tại Thành phố Đà Nẵng, Đài phát thanh và truyền hình Quảng Ngãi đã đưa tin trong các chương trình thời sự và tổ chức truyền hình trực tiếp lễ khai mạc và bế mạc Kỳ thi. Cám ơn các phóng viên báo đài tại địa phương và cả nước đã đến dự và đưa tin về các hoạt động của kỳ thi diễn ra trong tuần qua.

Các sinh viên được trao giải nhất môn Đại số. *Nguồn: ĐH Phạm Văn Đồng*

Trường Đại học Phạm Văn Đồng trân trọng cám ơn Hội Toán học Việt Nam đã tin tưởng chọn trường Đại học Phạm Văn Đồng làm đơn vị đăng cai cũng như sự phối hợp tổ chức thành công các hoạt động của kỳ thi.

Xin cám ơn sự có mặt của 85 đoàn của các trường đại học, cao đẳng trong cả nước đã về tham dự kỳ thi Olympic Toán lần thứ XXII, năm 2014 tại trường Đại học Phạm Văn Đồng Quảng Ngãi, góp phần làm nên thành công của kỳ thi.

Với tư cách là đơn vị đăng cai, trường Đại học Phạm Văn Đồng đã có rất nhiều cố gắng trong công tác chuẩn bị, tổ chức kỳ thi, tuy nhiên vẫn không thể tránh được các thiếu sót; rất mong được sự thông cảm và lượng thứ của tất cả quý vị và các em sinh viên.

Có thể nói, Kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ XXII tại Quảng Ngãi đã kết thúc tốt đẹp, xin hẹn gặp lại tại kỳ thi lần thứ 23, năm 2015 - tại Trường đại học Kinh tế, Đại học Huế.

Trường Đại học Phạm Văn Đồng xin gửi lời chào tạm biệt đến tất cả các Thầy cô giáo và sinh viên các trường, xin hẹn gặp lại tại Quảng Ngãi trong những dịp khác.

Xin kính chúc các đồng chí lãnh đạo, quý vị đại biểu, các vị khách quý, các Thầy cô giáo và các em sinh viên luôn dồi dào sức khỏe, hạnh phúc và thành công trong cuộc sống !

Phần II

ĐỀ THI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bài 1. a) Chứng minh rằng:

$$\det\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1(a_1-1) & a_1(a_1-1)(a_1-2)\\ 1 & a_2 & a_2(a_2-1) & a_2(a_2-1)(a_2-2)\\ 1 & a_3 & a_3(a_3-1) & a_3(a_3-1)(a_3-2)\\ 1 & a_4 & a_4(a_4-1) & a_4(a_4-1)(a_4-2)\end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i).$$

b) Giả thiết a_1, a_2, a_3, a_4 là các số nguyên, chứng minh $\prod\limits_{1\le i<j\le 4}(a_j-a_i)$ chia hết cho 12.

Bài 2. Cho các số thực phân biệt a_1, a_2, a_3. Chứng minh rằng với mọi bộ số thực b_1, b_2, b_3 tồn tại duy nhất một đa thức $P(x)$ bậc không quá 5 thỏa mãn: $P(a_i) = P'(a_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3$, ở đây P' ký hiệu đạo hàm của đa thức P.

Bài 3. a) Ký hiệu V_4 là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực với bậc không quá 4. Định nghĩa ánh xạ $e : V_4 \to V_4$ như sau: với mỗi đa thức $f \in V_4$, $e(f) := \sum\limits_{i=0}^{4}\dfrac{f^{(i)}}{i!}$, trong đó $f^{(i)}$ ký hiệu đạo hàm bậc i của f, ($f^{(0)} = f$). Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ V_4 vào chính nó.
b) Ký hiệu V là không gian véctơ các đa thức với hệ số thực. Với mỗi đa thức f, đặt $e(f) := \sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{f^{(i)}}{i!}$. Chứng minh rằng e là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch từ không gian V vào chính nó.

Bài 4. a) Cho ma trận khối $X = \begin{pmatrix} E_m & B\\ C & E_n\end{pmatrix}$ được tạo thành từ các ma trận đơn vị E_m, E_n cấp m, n tương ứng và các ma trận B, C với kích thước $m\times n$ và $n\times m$ tương ứng. Chứng minh rằng

$$\det(X) = \det(E_n - CB) = \det(E_m - BC).$$

b) Tổng quát, cho ma trận khối $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, trong đó A, D là các ma trận vuông, A khả nghịch, chứng minh rằng $\det(X) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

Thí sinh chọn một trong hai câu của bài sau:

Bài 5. a) Cho P là một đa thức bậc n với hệ số hữu tỷ. Giả sử số thực a là một nghiệm của P với bội $> n/2$. Chứng minh rằng a là một số hữu tỷ.

b) Trên hình vuông $ABCD$ ta định nghĩa đường đi giữa hai đỉnh X, Y (không nhất thiết phân biệt) là một dãy các đỉnh kề nhau $XX_1X_2 \dots X_{n-1}Y$. Như vậy $X_0 = X, X_1, \dots, X_{n-1}, X_n = Y$ là các đỉnh của hình vuông và X_iX_{i+1} là cạnh của hình vuông, số n được gọi là độ dài của đường đi. Với mỗi số tự nhiên n, gọi x_n, y_n, z_n tương ứng là số các đường đi độ dài n giữa: một đỉnh và chính nó, một đỉnh và một đỉnh cố định kề nó, một đỉnh và đỉnh đối diện (đỉnh đối xứng qua tâm). Ví dụ, $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0, x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0, x_2 = 2, y_2 = 0, z_2 = 2$.

1. Thiết lập công thức truy hồi cho x_n, y_n, z_n.
2. Tìm công thức tổng quát của x_n, y_n, z_n.

2 GIẢI TÍCH

Thời gian làm bài: 180 phút.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + a^n}, \forall\, n \geq 1$, trong đó $a \geq 0$. Tìm a sao cho (u_n) hội tụ và tìm giới hạn đó.

Bài 2. Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$\Big(f(x) - f(y)\Big)\Big(g(x) - g(y)\Big) = 0,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh ít nhất một trong hai hàm f hoặc g là hàm hằng.

Bài 3. 1) Cho hàm số f đơn điệu trên $[0, \infty)$ và

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt = +\infty.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2) Kết luận trên còn đúng không khi f là hàm liên tục trên $[0, \infty)$ nhưng không đơn điệu trên khoảng đó? Tại sao?

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[0, 1]$, khả vi trong khoảng $(0, 1)$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(0) = f(1) = \frac{2015}{2014}; \quad 2013f'(x) + 2014f(x) \geq 2015 \quad \forall\, x \in (0, 1).$$

Bài 5. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n},\ \ n \geq 0$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ với điều kiện $x_0 \geq 4;\ x_1 \geq 4$.

Bài 6. Thí sinh chọn một trong hai câu:
<u>**6a.**</u> Cho (a_n) là dãy số xác định bởi

$$a_1 = 3 - \sqrt{6}, a_2 = 3 - \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \ldots, a_n = 3 - \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + ... + \sqrt{6}}}}_{n \text{ lần}}.$$

Hãy chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

6b. Cho f là hàm số liên tục trên $[0, +\infty)$. Giả sử rằng

$$\int_0^x f^2(t)\, dt \leq \frac{x^3}{3}, \forall x \geq 0.$$

Chứng minh rằng $\displaystyle\int_0^x f(t)dt \leq \frac{x^2}{2}$ với mọi $x \geq 0$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH An Giang). Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Hãy tìm tất cả các ma trận $X \in M_3(\mathbb{R})$ sao cho X giao hoán với A.

Bài 1.2 (ĐH An Giang). Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hãy tính A^{2014}.

Bài 1.3 (ĐH An Giang). Cho K là một trường và $A, B \in M_n(K)$ thỏa mãn $A^2 = A + B + BA$. Chứng minh rằng $AB = BA$.

Bài 1.4 (ĐH Bạc Liêu). Cho ma trận $A \in M_2(\mathbb{R})$ có hai giá trị riêng phân biệt là α và β. Chứng minh rằng tồn tại $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho với mọi số tự nhiên n, $A^n = \alpha^n X + \beta^n Y$.

Bài 1.5 (ĐH Bạc Liêu). Cho $M, N \in M_3(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$MN = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chứng minh NM khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của NM.

Bài 1.6 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Cho A là ma trận vuông cấp n và A^* là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng, nếu A là ma trận khả nghịch và A có một hàng gồm toàn số 1 thì tổng tất cả các phần tử của A^* là khác 0.

Bài 1.7 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{14}.

Bài 1.8 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $AB = 0, B \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại $C \in M_n(\mathbb{R})$ khác 0 thỏa mãn $AC = CA = 0$.

Bài 1.9 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Tìm tất cả các ma trận $A \in M_2(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A = A^\top = A^{-1}$.

Bài 1.10 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho $A \in M_n(\mathbb{Z})$ (các phần tử nguyên) thỏa mãn $I + A + A^2 + \cdots + A^{100} = 0$. Tìm tất cả các số nguyên dương $k \leq 100$ thỏa mãn $\det(A^k + A^{k+1} + \cdots + A^{100}) = \pm 1$.

Bài 1.11 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ là hai ma trận đối xứng thực. Chứng minh rằng: nếu tồn tại hai ma trận X, Y thỏa $AX + BY$ khả nghịch thì $A^2 + B^2$ khả nghịch.

Bài 1.12 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho ma trận $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ và $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a. Tính $(AB)^2$.
b. Chứng minh rằng ma trận BA khả nghịch.
c. Tìm ma trận BA.

Bài 1.13 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho A, B là hai ma trận đối xứng cấp n, chứng minh rằng $\mathrm{Tr}((AB)^2) \leq \mathrm{Tr}(A^2B^2)$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 1.14 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n sao cho $AB = A + B$. Chứng minh rằng $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

Bài 1.15 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho A là ma trận vuông cấp $n \geq 2$ sao cho A khả nghịch và có các hệ số đều dương. Gọi z_n là số hệ số 0 của ma trận A^{-1}. Chứng minh rằng $z_n \leq n^2 - 2n$.

Bài 1.16 (Dự bị). Ma trận thực $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ được gọi là ma trận thực sự ngẫu nhiên nếu thoả mãn các tính chất sau:
1) $a_{ij} > 0$ với mọi i, j;
2) $a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ với mọi $1 \leq i \leq n$.
Gọi A là một ma trận như vậy. Gọi $\epsilon > 0$ là giá trị nhỏ nhất của các hệ số của A.

1. Chứng minh rằng A^k là một ma trận thực sự ngẫu nhiên với mọi $k \geq 1$;

2. Với mọi $k \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, kí hiệu $\alpha_j^{(k)}$ (tương ứng, $\beta_j^{(k)}$,) là giá trị nhỏ nhất (tương ứng, giá trị lớn nhất) của các hệ số trên cột thứ j của A^k. Chứng minh rằng:

$$\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)},$$
$$\text{và } \beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k+1)} \leq (1-2\epsilon)(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}).$$

3. Chứng minh rằng $\lim\limits_{k\to\infty} A^k$ tồn tại và giới hạn cũng là một ma trận ngẫu nhiên.

Bài 1.17 (ĐH Đồng Tháp)**.** Cho A, B là hai ma trận thực vuông cấp n. Chứng minh rằng nếu ma trận $I + AB$ khả nghịch thì ma trận $I + BA$ cũng khả nghịch.

Bài 1.18 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các ma trận $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với các phần tử thực sao cho với mọi số nguyên dương k, ta có $A^k = \begin{pmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{pmatrix}$.

Bài 1.19 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Tìm tất cả ma trận nghịch đảo của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 0 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.20 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Giả sử $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R}), B \in M_{4\times2}(\mathbb{R}), C \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ sao cho $ABC = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính CAB và chứng minh $(BCA)^2 = BCA$.

Bài 1.21 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Chứng minh

$$A^{2014} = (2^{2013} - 1)A^2 + (2 - 2^{2013})A.$$

Bài 1.22 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp n. Chứng minh rằng $\operatorname{rank}(AB - I) \leq \operatorname{rank}(A - I) + \operatorname{rank}(B - I)$.

Bài 1.23 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$ là các dãy số thực được xác định bởi $u_0 = v_0 = w_0$, và:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 7v_n + 5w_n, \\ v_{n+1} = -2u_n - 8v_n + 6w_n, \\ w_{n+1} = -4u_n - 16v_n + 12w_n. \end{cases}$$

a. Hãy tính số hạng tổng quát của các dãy số $\{u_n\}, \{v_n\}, \{w_n\}$.
b. Chứng minh rằng $v_n - 2$ chia hết cho 2^n với mọi số nguyên dương n.

Bài 1.24 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Cho số nguyên dương n. Gọi A là ma trận vuông cấp n có các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 0 và các phần tử còn lại bằng 1 hoặc $n-1$. Hãy tìm tất cả các giá trị có thể xảy ra đối với hạng ma trận A.

Bài 1.25 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Cho $A \in M_2(\mathbb{Q})$ (tập hợp các ma trận vuông cấp 2 với hệ số hữu tỷ) thỏa mãn: tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $A^n = -I_2$. Chứng minh rằng $A^2 = -I_2$ hoặc $A^3 = -I_2$.

Bài 1.26 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Đặt

$$K_2(\mathbb{Z}) = \{A | A \in M_2(\mathbb{Z}) \quad \text{và} \quad \det A = 1\}.$$

a. Tồn tại hay không $A, B, C \in K_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^2 + B^2 = C^2$?
b. Tồn tại hay không $A, B, C \in K_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^4 + B^4 = C^4$?

Bài 1.27 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội). Ta định nghĩa vết của ma trận vuông $C = (c_{ij})_{n\times n}$, kí hiệu là $\mathrm{tr}(C)$, là tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii}$. Cho A, B là hai ma trận thực vuông cấp n thỏa mãn $AB - BA = A$. Tính vết của ma trận A^{2014}.

Bài 1.28 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho ma trận vuông

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tính A^{2014}.

Bài 1.29 (ĐH Phạm Văn Đồng). Ta gọi vết của ma trận A, kí hiệu bởi $\mathrm{Tr}(A)$, là tổng tất cả các phần tử trên đường chéo chính của A. Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A^{2014} = 0$. Tính $\mathrm{Tr}(A)$.

Bài 1.30 (HV Phòng không Không quân). Cho ma trận vuông cấp n (các phần tử nằm trên đường chéo chính bằng 2015; các phần tử còn lại bằng 2014):

$$A = \begin{pmatrix} 2015 & 2014 & 2014 & \dots & 2014 \\ 2014 & 2015 & 2014 & \dots & 2014 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2014 & 2014 & 2014 & \dots & 2015 \end{pmatrix}$$

Hãy tính A^k, với k là số nguyên cho trước.

Bài 1.31 (ĐH Quảng Nam). Cho các ma trận vuông (cấp n) A, B, C, D thỏa BA^t và DC^t là ma trận đối xứng và $DA^t - CB^t = I$. Chứng minh rằng $D^tA - B^tC = I$.

Bài 1.32 (ĐH Quy Nhơn). a. Với mỗi ma trận $A \in M_2(\mathbb{R})$, xác định ma trận $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho

$$A = B^2 + C^2$$

b. Tồn tại hay không các ma trận $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho $BC = CB$ và $B^2 + C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 1.33 (ĐH Quy Nhơn). Cho A, B là hai ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn $(AB)^2 = 0$. Chứng minh rằng $(BA)^2 = 0$. Khẳng định trên có còn đúng cho trường hợp A, B là các ma trận vuông có cấp lớn hơn 2 không?

Bài 1.34 (ĐH Sao Đỏ). Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ xác định bởi $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ và

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 3y_n + 3z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 5y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = 6x_n - 6y_n + 4z_n. \end{cases}$$

Tìm x_{2014}.

Bài 1.35 (ĐH Sao Đỏ). Cho $A = \begin{pmatrix} \sqrt{10+2\sqrt{5}} & \sqrt{5}-1 \\ 1-\sqrt{5} & \sqrt{10+2\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Tìm A^n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 1.36 (ĐH Sao Đỏ). Cho A là ma trận vuông thỏa mãn $A^m = 0$ với $m \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\text{rank}A = \text{rank}(A + A^2 + ... + A^n).$$

Bài 1.37 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Xác định tất cả các ma trận X, Y thỏa mãn

$$XYX = YXY = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.38 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $A \in M_n(\mathbb{R}), n > 2015$ sao cho trên mỗi dòng của ma trận có đúng 2015 phần tử khác không, trong đó phần tử nằm trên đường chéo chính thuộc vào khoảng $(-\infty, -2014)$ đồng thời các phần tử còn lại đều thuộc vào $(-1, 1)$. Ma trận A có là ma trận khả nghịch hay không?

Bài 1.39 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Tính A^{2014} với A là ma trận

$$\begin{pmatrix} 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.40 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng
a. $\operatorname{tr}(AA^\top) \geq 0$.
b. $\operatorname{tr}(A(A^\top - B^\top)) + \operatorname{tr}(B(B^\top - C^\top)) + \operatorname{tr}(C(C^\top - A^\top)) \geq 0$.

Bài 1.41 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Cho A là ma trận vuông cấp n, thỏa mãn $A^{2014} = 0$. Chứng minh rằng $B = I - A^{1007} - A^{1008} - \cdots - A^{2013}$ là ma trận khả nghịch.

Bài 1.42 (ĐH Tân Trào). Cho A là ma trận cấp $n \times n$ trên trường K. Chứng minh rằng tồn tại hai ma trận U, V cấp $n \times 1$ trên K sao cho $A = UV^\top$ và $\operatorname{Tr}(A) = V^\top U$, $A^2 = \operatorname{Tr}(A)A$.

Bài 1.43 (ĐH Tân Trào). Cho

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ . & . & . & \dots & . & . \\ b & b & b & \dots & a & b \\ b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}).$$

Hãy tính A^n ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$),

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH An Giang). Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$ sao cho

$$\det(A) = d \neq 0 \text{ và } \det(A + dA^*) = 0,$$

trong đó A^* là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng $\det(A - dA^*) = 4$.

Bài 2.2 (HV An ninh nhân dân). Cho các số thực $a_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, thỏa mãn $a_i + a_j \neq -1$ $(\forall i, \forall j = 1, 2, \dots, n)$. Xét ma trận $A = [a_{ij}]$ cấp n với

$$a_{ij} = \frac{1}{1 + a_i + aj}.$$

Chứng minh rằng $\det(A) \geq 0$.

Bài 2.3 (ĐH Bạc Liêu). Tính định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ F_1(\cos\phi_1) & F_1(\cos\phi_2) & \cdots & F_1(\cos\phi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{n-1}(\cos\phi_1) & F_{n-1}(\cos\phi_2) & \cdots & F_{n-1}(\cos\phi_n) \end{vmatrix},$$

với $F_k(x) = a_{0k}x^k + a_{1k}x^{k-1} + \cdots + a_{kk}$.

Bài 2.4 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n và luỹ linh (ma trận A được gọi là lũy linh nếu tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $A^k = 0$). Chứng minh rằng với mọi ma trận B giao hoán với A, ta có $\det(A + B) = \det(B)$.

Bài 2.5 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho ma trận $A = [a_{ij}]$ vuông cấp n có vết bằng 2014 và hạng bằng 1. Tính $\det(A + I)$.

Bài 2.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3 thỏa mãn các điều kiện: $AB = BA$; $AC = CA$; $BC = CB$ và $A + B + C = -I$. Chứng minh rằng

$$\det[A^3 + B^3 + C^3 - 3(A + I)(B + I)(C + I)] = -1.$$

Bài 2.7 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Bài 2.8 (Dự bị). Cho S là một tập hợp có lực lượng n và $X_1, \dots, X_m$ là một họ các tập con đôi một phân biệt của S sao cho các tập $X_i \cap X_j$ có cùng lực lượng $k \geq 1$ với mọi $i \neq j$. Kí hiệu $x_1, \dots, x_n$ là các phần tử của X và $d_1, \dots, d_m$ tương ứng là lực lượng của $X_1, \dots, X_m$. Xây dựng ma trận $A = (a_{i,j}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ như sau: $a_{ij} = 1$ nếu $x_i \in X_j$.

a. Xác định ma trận $A.A^\top$.

b. Tính định thức của ma trận $A^\top A$.

c. Chứng minh rằng $m \leq n$.

Bài 2.9 (ĐH Đồng Tháp). Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $g(x) = x^{2014} + x^2 - 5x + 6$. Tính $\det(g(A))$ và $[f(A)]^{2014}$.

Bài 2.10 (ĐH Đồng Tháp). Cho $a_i, b_i, i = 1, 2, 3, 4$ là các số nguyên. Ký hiệu

$$D(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{vmatrix}$$

Sử dụng tích $D(a_1, a_2, a_3, a_4)D(b_1, b_2, b_3, b_4)$, chứng minh rằng nếu hai số nguyên là tổng các bình phương của bốn số nguyên thì tích của chúng cũng là tổng các bình phương của bốn số nguyên.

Bài 2.11 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho $A = (a_{ij})_{42014 \times 42014}$ là một ma trận vuông cấp 42014 với $a_{ii} \in \{8, 10, 12, 14\}(i = \overline{1, 40214}), a_{ij} \in \{7, 9, 11, 13\}(i \neq j, i, j = \overline{1, 40214})$. Chứng minh rằng $\det A \neq 0$.

Bài 2.12 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $AB - BA = B$. Chứng minh rằng $\det(B) = 0$.

Bài 2.13 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Tính định thức cấp n sau:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Bài 2.14 (HV Phòng không Không quân). Cho A là ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng $\det(A^4 + 4I_n) \geq 0$, trong đó I_n là ma trận đơn vị cấp n. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2.15 (HV Phòng không Không quân). Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2012 & 2013 \\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2011 & 2012 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2013 & 2012 & 2011 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 2.16 (ĐH Quảng Nam)**.** Cho các ma trận thực vuông A, B thỏa mãn $A^\top A = I$ và $B^\top B = I$. Biết $\det A \neq \det B$. Chứng minh rằng $\det(A + B) = 0$.

Bài 2.17 (ĐH Quảng Nam)**.** Cho các ma trận thực vuông A, B, C đôi một giao hoán. Chứng minh rằng tồn tại các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\det(aA + bB + cC) = 0.$$

Bài 2.18 (ĐH Quy Nhơn)**.** Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận vuông cấp n được xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } i^j + j^i = 3k, \\ 1 \text{ nếu } i^j + j^i = 3k + 1, \\ 2 \text{ nếu } i^j + j^i = 3k + 2. \end{cases}$$

Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho $\det(A) \neq 0$.

Bài 2.19 (ĐH Sao Đỏ)**.** Tính định thức

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{2014} & 3^{2014} & \dots & 2014^{2014} \\ 1 & 0 & 1 & 2^{2014} & \dots & 2013^{2014} \\ 2^{2014} & 1 & 0 & 1 & \dots & 2012^{2014} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2014^{2014} & 2013^{2014} & 2012^{2004} & 2011^{2014} & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Bài 2.20 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Cho $A \in M_{2014\times n}(\mathbb{R}), n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\det\left(AA^\top + 4I_{2014}\right) \geq 2^{4028}.$$

Bài 2.21 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Cho $A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_3(\mathbb{R})$. Chứng minh rằng

a. $\det(A) = \dfrac{1}{2}[(\mathrm{tr}(A))^2 - \mathrm{tr}(A^2)]$.

b. $\det(B) = \dfrac{1}{6}[(\mathrm{tr}(B))^3 - 3\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(B^2) + 2\mathrm{tr}(B^3)]$.

Bài 2.22 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Tính định thức

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & a_{2014} \end{vmatrix}$$

Bài 2.23 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp $n(n \geq 2)$ sao cho mỗi phần tử a_{ij} đều có dạng p^2 (p là số nguyên tố lớn hơn 3). Chứng minh rằng $\det(A)$ chia hết cho 24^{n-1}.

Bài 2.24 (ĐH Tân Trào)**.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x & x \\ y & a_2 & x & \dots & x & x \\ y & y & a_3 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a_{n-1} & x \\ y & y & y & \dots & y & a_n \end{vmatrix}.$$

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH An Giang)**.** Cho $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa mãn $A^2 = A$. Hãy giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & -x_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & -x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & -x_n. \end{cases}$$

Bài 3.2 (ĐH Bạc Liêu)**.** Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - kx_5 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 + kx_5 & = & 0 \\ x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & 0 \\ kx_1 + kx_2 - x_3 - x_4 - x_5 & = & 0, \end{cases}$$

trong đó x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các ẩn và k là tham số thuộc $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng, nếu $k \notin \{-1; 3\}$ và (a, b, c, d, e) là một nghiệm của hệ thì $a(3-k) = e(8k-2)$; $b(3-k) = e(k+1)$; $c(3-k) = e(2k-2)$ và $d(k-3) = e(k-1)^2$.

Bài 3.3 (ĐH Bách Khoa Hà Nội)**.** Cho a_{ij} là các số nguyên, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \frac{1}{n}x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & \frac{1}{n}x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \frac{1}{n}x_n \end{cases}$$

Bài 3.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 2013 \\ x_2 & +x_3 & +x_4 & = 2013 \\ x_3 & +x_4 & +x_5 & = 2013 \\ x_4 & +x_5 & +x_6 & = 2013 \\ \multicolumn{4}{l}{\dotfill} \\ x_{2011} & +x_{2012} & +x_{2013} & = 2013 \\ x_{2012} & +x_{2013} & +x_{2014} & = 2013 \\ x_{2013} & +x_{2014} & +x_1 & = 2013 \\ x_{2014} & +x_1 & +x_2 & = 2013 \end{cases}$$

Bài 3.5 (CĐ Ngô Gia Tự). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \cdots + 2014x_{2014} = 1 \\ x_2 + 2x_3 + \cdots + 2014x_1 = 2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{2014} + 2x_1 + \cdots + 2014x_{2013} = 2014 \end{cases}$$

Bài 3.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Cho các số thực $a_{ij} + a_{ji} = 0$, với $i, j = 1, 2, ..., 2014$. Hãy giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} (a_{11} + 2014)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,2014}x_{2014} = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} + 2014)x_2 + ... + a_{2,2014}x_{2014} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{2014,1}x_1 + a_{2014,2}x_2 + ... + (a_{2014,2014} + 2014)x_{2014} = 0 \end{cases}$$

Bài 3.7 (ĐH Sao Đỏ). Cho $3n$ số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n; b_1, b_2, ..., b_n; c_1, c_2, ..., c_n$ thỏa mãn $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = 0$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau luôn có nghiệm

$$\begin{cases} a_1b_1x + a_2b_2x + ... + a_nb_nx = c_1 - x_1 \\ a_2b_1x + a_2b_2x + ... + a_2b_nx = c_2 - x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nb_1x + a_nb_2x + ... + a_nb_nx = c_n - x_n \end{cases}$$

Bài 3.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + 2014x_{2014} = \frac{1}{2014}x_1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 2014x_{2014} = \frac{1}{2014}x_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 + 2^{2014}x_2 + \ldots + 2014^{2014}x_{2014} = \frac{1}{2014}x_{2014} \end{cases}$$

Bài 3.9 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Cho đa thức

$$P(x) = (x-2)(x-3)...(x-2014).$$

Giả sử $P(x) = a_1 + a_2x + ... + a_{2014}x^{2013}$. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a_1x_1 & +a_2x_2 & +... & +a_{2013}x_{2013} & +a_{2014}x_{2014} = & 0 \\ a_{2014}x_1 & +a_1x_2 & +... & +a_{2012}x_{2013} & +a_{2013}x_{2014} = & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_2x_1 & +a_3x_2 & +... & +a_{2014}x_{2013} & +a_1x_{2014} = & 0 \end{cases}$$

Bài 3.10 (ĐH Tân Trào)**.** Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & = 2a_1 \\ x_2 & +x_3 & = 2a_2 \\ x_3 & +x_4 & = 2a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} & +x_n & = 2a_{n-1} \\ x_n & +x_1 & = 2a_n \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $n = 4$, $n = 5$
b. Giải hệ phương trình với mọi $n \in \mathbb{N}$.

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (HV An ninh Nhân dân)**.** Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ như sau

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0\dots & 0 & 0 & \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Hãy tìm một véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho hệ véc tơ $\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x\}$ độc lập tuyến tính.
b. Giả sử ma trận A đồng dạng với ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Chứng tỏ rằng các số $b_1, b_2, \dots, b_n$ khác nhau từng đôi một.

Bài 4.2 (ĐH Bách Khoa Hà Nội)**.** Cho V_1 và V_2 là hai không gian con của không gian vectơ V hữu hạn chiều. Chứng minh rằng, nếu $\dim(V_1 + V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 1$ thì $V_1 \cup V_2$ là không gian con của V.

Bài 4.3 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho H là tập các ma trận thực cấp 3 có tổng các phần tử trên mỗi hàng bằng nhau và bằng tổng các phần tử trên mỗi cột. Chứng mình rằng H là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tìm số chiều của H.

Bài 4.4 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Cho 3 véc tơ $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ độc lập tuyến tính. Tìm tất cả các ma trận thực A thỏa $AX_1 = X_2, AX_2 = X_3, AX_3 = X_1$.

Bài 4.5 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho $P_1(x), P_2(x), ..., P_r(x)$ là các đa thức bậc $n_1, n_2, ..., n_r$. Chứng minh rằng nếu

$$n_1 + n_2 + ... + n_r < \frac{r(r-1)}{2}$$

thì $P_1(x), P_2(x), ..., P_r(x)$ phụ thuộc tuyến tính.

Bài 4.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho A là ma trận đường chéo cấp n trên $\mathbb{R}$ có đa thức đặc trưng là

$$p(t) = (x - c_1)^{r_1}(x - c_2)^{r_2} \dots (x - c_k)^{r_k},$$

với $c_i \neq c_j, \forall i \neq j$. Gọi V là không gian các ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho $AB = BA$. Chứng minh rằng $\dim V = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_k^2$.

Bài 4.7 (Dự bị). Một đa thức theo n biến $x_1, x_2, \dots, x_n$ được gọi là thuần nhất bậc d nếu tổng các số mũ của các biến trong từng đơn thức của đa thức đó bằng d. Ví dụ $x_1^2 x_2^3 + x_3^5$ là đa thức thuần nhất bậc 5 theo ba biến x_1, x_2, x_3. Tìm số chiều của không gian véc tơ thực bao gồm đa thức 0 và các đa thức thuần nhất bậc d theo n biến với hệ số thực.

Bài 4.8 (Dự bị). Cho V là một không gian véctơ n chiều trên trường số thực và f là một tự đồng cấu tuyến tính của V. Với mỗi số nguyên không âm k, kí hiệu f^k hợp thành k lần của f với chính nó (như vậy $f^0 = Id_V, f^1 = f, f^2 = f \circ f, \dots$. Chứng minh rằng

1. Tồn tại một số nguyên không âm $m \leq n$ sao cho

$$Im\ f^0 \supsetneq Im\ f^1 \supsetneq Im\ f^2 \supsetneq \cdots \supsetneq Im\ f^m = Im\ f^{m+1} = Im\ f^{m+2} = \cdots$$

$$\ker\ f^0 \subsetneq \ker\ f^1 \subsetneq \ker\ f^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker\ f^m = \ker\ f^{m+1} = \ker\ f^{m+2} = \cdots$$

2. $\{\dim\ker f^{k+1} - \dim\ker f^k\}_{k=0,1,\dots}$ là một dãy số giảm;
3. $V = \ker f^m \oplus Im\ f^m$;

4. Mọi ma trận vuông cấp n với hệ số thực đều tương đương với một ma trận có dạng $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, trong đó N là ma trận vuông luỹ linh và C là ma trận vuông khả nghịch.

Bài 4.9 (Dự bị)**.** Cho một tập hợp X. Ta trang bị cho không gian $F(X, \mathbb{R})$ cấu trúc $\mathbb{R}$-không gian véctơ cảm sinh từ cấu trúc không gian véctơ của $\mathbb{R}$. Cho $n \geq 1$ phần tử $f_1, \ldots, f_n \in F(X, \mathbb{R})$. Chứng minh rằng $f_1, \ldots, f_n$ là một họ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại n phần tử $x_1, \ldots, x_n \in X$ sao cho ma trận $(f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ là khả nghịch.

Bài 4.10 (Dự bị)**.** 1. Cho f là một tự đồng cấu tuyến tính của không gian $\mathbb{C}^n$. Chứng minh rằng hai điều kiện sau là tương đương

i) f chéo hoá được;

ii) f^2 chéo hoá được và $\ker f = \ker f^2$.

2. Tìm điều kiện cần và đủ trên bộ các số phức $(a_1, \ldots, a_n)$ để ma trận

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

chéo hoá được?

Bài 4.11 (ĐH Đồng Tháp)**.** Cho V là một không gian véc tơ trên một trường K. Cho $F_1, F_2, \ldots, F_n (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$ là các không gian con hữu hạn sinh của V. Chứng minh rằng

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_n.$$

Hơn nữa, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ là tổng trực tiếp trong V.

Bài 4.12 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Cho V_1, V_2, V_3 là ba không gian véc tơ con của không gian véc tơ 2014 chiều V trên trường số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $\dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 > 4028$ thì $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq 0$.

Bài 4.13 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)**.** Cho E là một $\mathbb{R}$-không gian véctơ hữu hạn chiều và một tự đồng cấu u của E gọi là lũy linh nếu có số nguyên dương k để $u^k = 0$. Ta định nghĩa bậc lũy linh của một tự đồng cấu lũy linh u là số nguyên dương p bé nhất mà $u^p = 0$.
Cho u là một tự đồng cấu lũy linh bậc p. Chứng minh rằng tồn tại một véctơ x của E sao cho hệ véctơ $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$ độc lập tuyến tính.

Bài 4.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho E là không gian véc tơ trên trường số thực, một tự đồng cấu tuyến tính f của E được gọi là tự đồng cấu tuyến tính lũy linh nếu tồn tại một số $k \in \mathbb{N}$ sao cho $f^k = 0$ là tự đồng cấu tuyến tính không (số k nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện này được gọi là cấp lũy linh của f). Chứng minh rằng nếu f là tự đồng cấu tuyến tính lũy linh cấp p của E thì hệ $\{id_E, f, \dots, f^{p-1}\}$ là độc lập tuyến tính trong không gian véc tơ $\mathrm{End}(E)$.

Bài 4.15 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Xét V là không gian các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b]$ và giả sử $f_1, f_2, \dots, f_n \in V$ sao cho

$$\det\Big(\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx\Big) = 0.$$

Chứng minh rằng hệ véctơ $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ phụ thuộc tuyến tính trên V.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Cho A, B là hai ma trận vuông cấp n, trong đó B lũy linh và $AB = BA$. Chứng minh rằng λ là trị riêng của A khi và chỉ khi λ là trị riêng của $A + \lambda B$.

Bài 5.2 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Cho ma trận $A = (a_{ij})$ vuông cấp n, trong đó $a_{ij} = \begin{cases} b^{i-j}, & \text{nếu } i \neq j \\ 0, & \text{nếu } i = j \end{cases}$ với $b \neq 0$. Tìm các trị riêng của A và tính $\det(A)$.

Bài 5.3 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho A, B là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn $A - A^2 + B - B^2 = AB$. Chứng minh rằng $A + B$ có giá trị riêng là 1 khi và chỉ khi A hoặc B có giá trị riêng là 1.

Bài 5.4 (ĐH Sao Đỏ). Cho A, B là các ma trận vuông cấp n.
a. Chứng minh rằng tập các giá trị riêng của AB và BA trùng nhau.
b. A, B là hai ma trận giao hoán và lũy linh thì $A + B$ lũy linh.

Bài 5.5 (ĐH Tân Trào). Giả sử A là một ma trận vuông trên $\mathbb{C}$ có tính chất: $A^*A = AA^*$ (A^* là ma trận liên hợp của ma trận A). Chứng minh rằng nếu x là một véc tơ riêng của A ứng với giá trị riêng λ thì x cũng là véc tơ riêng của A^* ứng với giá trị riêng $\overline{\lambda}$ ($\overline{\lambda}$ là số phức liên hợp của số phức λ).

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Cho đa thức $f(x)$ bậc n, thỏa mãn $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $\sum\limits_{i=1}^{n} f^{(k)}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.2 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Cho đa thức hệ số thực $P(x) = x^{2014} + a_{2013}x^{2013} + ... + a_1x + a_0$ chỉ có các nghiệm thực là $x_1, x_2, ..., x_{2014}$. Chứng minh rằng với mọi số thực a lớn hơn tất cả các nghiệm thực ấy thì ta có bất đẳng thức

$$P'(a) - 2014(P(a))^{\frac{2013}{2014}} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Bài 6.3 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$.

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên sao cho

$$P(P'(x)) = P'(P(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.5 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực biết: $P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1)$.

Bài 6.6 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực biết: $P(x)P(x-1) = P(x^2)$.

Bài 6.7 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Cho đa thức

$$f(x) = x^3 + *x^2 + *x + *.$$

Hai người chơi trò chơi như sau: Ở mỗi lượt chơi, người chơi viết một số nguyên khác 0 bất kỳ vào một vị trí có dấu $*$. Nếu sau khi thay xong các dấu $*$ bởi các số nguyên mà $f(x)$ có 3 nghiệm nguyên thì người đi trước thắng, nếu ngược lại thì người đi sau thắng. Hãy chỉ ra cách chơi để người đi trước luôn thắng.

Bài 6.8 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)**.** Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn:

$$P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + 2P(x) + (x^2 + 3x + 1)^2\right]^2. \quad (1)$$

Bài 6.9 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Cho đa thức $P(x) = x^n + x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ có n nghiệm thực $x_1, ..., x_n$ đôi một phân biệt. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^n}{P'(x_1)} + \frac{x_2^n}{P'(x_2)} + ... + \frac{x_n^n}{P'(x_n)} = -1,$$

trong đó $P'(x)$ là đạo hàm của $P(x)$.

Bài 6.10 (HV Phòng không Không quân). Cho các đa thức với hệ số phức:

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$$Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

biết rằng $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ và tồn tại k $(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ sao cho $|b_k| > 2014^k C_m^k$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2013$

Bài 6.11 (ĐH Quảng Nam). Cho các đa thức $P(x), Q(x)$ có các hệ số nguyên và $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ trên vành $\mathbb{Z}[x]$. Chứng minh rằng nếu đa thức $P(x) - 2014$ có 33 nghiệm nguyên phân biệt thì $\deg Q(x) \geq 5$.

Bài 6.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Có tồn tại hay không đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 4x + 2014.$$

Bài 6.13 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho $P(x)$ là đa thức khác hằng với hệ số thực. Giả sử rằng tất cả các nghiệm của $P(x)$ đều là thực. Chứng minh rằng

$$(P'(x))^2 \geq P(x)P''(x) \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.14 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Cho đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc 2014 có 2014 nghiệm thực. Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ có ít nhất 2014 nghiệm thực. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, đa thức $F(x) + \alpha f(x)$ có 2015 nghiệm thực.

Bài 6.15 (ĐH Tân Trào). Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn điều kiện

$$xP(x-a) = (x-b)P(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Cho dãy số

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k}{(k+1)!}$$

với $k = 1, 2, \cdots, 2014$. Tìm giới hạn

$$I = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2014}^n}.$$

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** .
a) Tìm

$$\lim_{n \to \infty} \left(\prod_{i=1}^{2n} \frac{i - n + \sqrt{n^2 + (i-n)^2}}{n^{2n}} \right).$$

b) Cho hai dãy số $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ được xác định như sau

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & a \\ a_{n+1} & = & \frac{a_n + b_n}{2} \end{array} \right. \quad \text{và} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} b_1 & = & b \\ b_{n+1} & = & \frac{a_{n+1} + b_n}{2} \end{array} \right.$$

Chứng minh rằng

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Bài 1.3 (Dự bị)**.** Cho dãy số thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 & = -1, \\ x_{n+1} & = 2x_n + 3n + 2^n, \text{ với } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Hãy tìm số hạng x_{2013}.

Bài 1.4 (Dự bị)**.** Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$

1. Chứng minh rằng a_n là dãy giảm và tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n$.
2. Tìm giới hạn $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Bài 1.5 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = 2013\ln(x_n^2 + 2014^2) - 2014^2, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn trong khoảng $(-2014^2; 0)$.

Bài 1.6 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho dãy số u_n xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1} + 1}{2u_{n-1}} \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát và tính $\lim u_n$.

Bài 1.7 (ĐH Quảng Bình). Tính giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}}.$$

Bài 1.8 (ĐH Quảng Nam). Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) u_n - \frac{1}{n+1} u_{n-1}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Hãy tính u_n theo n.

Bài 1.9 (ĐH Quy Nhơn). Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_m$ thoả mãn

$$\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + ... + \sqrt[n]{2014} = \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + ... + \sqrt[n]{a_m}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Hãy tính

$$P = a_1 a_2 ... a_m.$$

Bài 1.10 (ĐH Sao Đỏ). Tính

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right).$$

Bài 1.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $x_1, x_2 > 0$ và

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dãy này có hội tụ hay không? Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nếu nó hội tụ.

Bài 1.12 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn:

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n^2(u_{n-1}+1)}{u_{n-1}} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Tính các giới hạn sau:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_1 + u_2 + \cdots + u_n).u_n}{2u_{n+1}+1}$$

Bài 1.13 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Cho dãy số $\{x_n\}_n$ xác định bởi

$$x_n = \frac{n^3 + 6n^2 + 11n + 5}{(n+3)!}$$

Tính $\lim \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Tìm số hạng tổng quát của dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$n(a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}) = -2(a_{n-1} - a_{n-2}),$$

với mọi $n \geq 3$, trong đó a_1, a_2 là hai số thực cho trước.

Bài 1.15 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Cho dãy số $\{u\}_n$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2014} - \dfrac{1}{2}\arctan u_n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho hội tụ.

Bài 1.16 (ĐH Tân Trào). Cho dãy số $\{a_n\}$ với $\frac{3}{2} < a_n < \frac{5}{2}$ và

$$a_{n+1} = 1 - \frac{n-1}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^{2n+1}} + (1 + \frac{n}{2^n})a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Bài 1.17 (ĐH Tân Trào). Cho dãy số (u_n) với mọi $n = 1, 2, ...$xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \ldots u_n, \quad \text{với mọi } n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. Tìm

$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$

2 HÀM SỐ

Bài 2.1 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \sin(x^{2014})$ không tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Bài 2.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội). a) Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $g(x)$ là hàm số tuần hoàn trên $\mathbb{R}$, $f(x) + g(x)$ tăng trên $[0; +\infty)$. Chứng minh rằng $g(x)$ là hằng số.

b) Áp dụng: Tìm tất cả các hàm số $\varphi(x)$ xác định, tăng trên $[0; +\infty)$, thoả mãn

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = e^{-x},\ \forall x \in [0; +\infty).$$

Bài 2.3 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho f là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$. Tính giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^1 x^n f(x)dx$.

Bài 2.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho $f(x)$ là một hàm số dương liên tục trên $\mathbb{R}$. Đặt

$$\varphi(x) = \frac{\int\limits_0^x tf(t)dt}{\int\limits_0^x f(t)dt} \quad (x > 0).$$

1) Chứng minh rằng $\varphi(x)$ là hàm tăng trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.

2) Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=1}^{2015} \Big(\varphi(\dfrac{2014n + i}{n}) - \varphi(\dfrac{2014n + i - 1}{n}) \Big)$.

Bài 2.5 (ĐH Quảng Nam). Cho các hàm số $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa

$$(f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)) = 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng một trong hai hàm số là hàm hằng.

Bài 2.6 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho $f(x) = x\ln(1+x)$

a) Chứng minh rằng: với mọi $x > 0$ tồn tại duy nhất $c(x) \in (0, x)$ sao cho $f'(c(x)) = \ln(1+x)$.

b) Tính giới hạn

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{c(x)}{x}.$$

Bài 2.7 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^{2012}} \tan \sqrt[1006]{t}dt}{x^{2014}}$.

Bài 2.8 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Tìm a, b để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ với

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{nếu} \quad -\infty < x \leq 1 \\ \dfrac{ax^2-x}{x-1} - b & \text{nếu} \quad 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Bài 2.9 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho $f : [0,1] \to [0,1]$ là hàm liên tục khác hằng. Chứng minh rằng tồn tại $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 \neq x_2$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|^{2014}.$$

Bài 2.10 (ĐH Tân Trào). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục và xác định trên khoảng $[0,1]$ thỏa mãn:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \in [0;1] \text{ và } f(0) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Cho

$$c = \int_0^1 f(x)dx, F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng:

a.

$$\begin{cases} F(x) \leq x & \text{khi } 0 \leq x \leq c \\ F(x) \leq c & \text{khi } c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

b.

$$\int_0^1 F(x)dx < c - \frac{c^2}{2}.$$

3 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 3.1 (HV An ninh nhân dân). Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên khoảng mở $(0,1)$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$ và tồn tại số $k \in (0,1)$ sao cho

$$|f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}| \geq \frac{\sqrt{1-k}}{2}.$$

Chứng minh rằng tồn tại các số x_1, x_2 phân biệt thuộc khoảng $(0,1)$sao cho

$$f^{`}(x_1).f^{`}(x_2) = k.$$

Bài 3.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$, có đạo hàm trên $(0; +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Chứng minh rằng tồn tại $c > 0$ sao cho $f'(c) = 0$.

Bài 3.3 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho hàm $f(x)$ khả vi trên $[0, +\infty]$ và

$$\lim_{x\to+\infty} f^{'}(x) = 0.$$

Chứng minh rằng:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Bài 3.4 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Chứng minh rằng phương trình

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx = 0$$

có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0, \pi)$ với mọi số thực a_i, $i = 1, 2, ..., n$ cho trước.

Bài 3.5 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Giả sử hàm số f khả vi đến cấp 2 trên đoạn $[-1, 1], |f(x)| \leq 1$, $\forall x \in [-1, 1]$ và $f^2(0) + f'^2(0) = 3$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in [-1, 1]$ sao cho $f(c) + f''(c) = 0$.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Cho hàm f liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$ thỏa mãn $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0; 1)$ để

$$x_0.f'(x_0) + 2014 = \frac{1}{x_0^{2013}.e^{f(x_0)}}.$$

Bài 3.7 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Chứng minh rằng nếu hàm số f khả vi liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn các điều kiện: $f(0) = 1, f(2) = 3; |f'(x)| \leq 2, \forall x \in [0; 2]$ thì

$$\int\limits_0^2 f(x)dx > 2.$$

Bài 3.8 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Giả sử hàm số f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 251$, $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = -\dfrac{3}{4}$. Chứng minh rằng

$$\max_{x\in[0;1]} f''(x) \geq 2014.$$

Bài 3.9 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và khả vi trên khoảng $(a; b)$ thỏa mãn $f(a) = \dfrac{a-b}{2}, f(b) = \dfrac{b-a}{2}; f(\dfrac{a+b}{2}) \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại các số $c_1, c_2, c_3 \in (a; b)$ sao cho

$$f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3) = 1.$$

Bài 3.10 (ĐH Nông nghiệp). Cho $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp 3 trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại số thực a sao cho $f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0$.

Bài 3.11 (HV Phòng không Không quân). Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tới cấp 2 trên khoảng $[0; +\infty)$. Biết rằng

$$f(x) > 0, f^{'}(x) > 0, \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2} \leq 2$$

với mọi $x > 0$. Hãy tính giới hạn

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f^{'}(x)}{[f(x)]^2}.$$

Bài 3.12 (ĐH Quảng Bình). Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh

$$P(x) + P'(x) + \cdots + P^{(n)}(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 3.13 (ĐH Quảng Nam). Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_{2014} \cos 2014x$$

với $a_0, a_2, \cdots, a_{2014} \in \mathbb{R}$, $|a_0| < 1$ có thể nhận những giá trị dương và cũng có thể nhận những giá trị âm trong khoảng $[0, 2\pi)$.

Bài 3.14 (ĐH Quảng Nam). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu hàm số

$$g(x) = f(x) \int_0^x f(t)dt$$

là hàm giảm thì $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.15 (ĐH Quy Nhơn). Cho hàm liên tục trên $f : [0; \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ thoả mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ sao cho

$$x_0 - \frac{x_0^3}{6} \leq f(x_0) \leq x_0.$$

Bài 3.16 (ĐH Sao Đỏ). Cho $f(x)$ là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$|f(x)| \leq \frac{1}{e^{x^2} - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f^{'}(c) = -\frac{2c}{e^{c^2 - 1}}.$$

Bài 3.17 (ĐH Sao Đỏ). Cho f là một hàm số khả vi liên tục đến cấp 2 trên $[0,\pi]$ và thỏa mãn: $f(0)=f(\pi)=0$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,\pi)$ sao cho

$$f^{''}(c)=-f(c).$$

Bài 3.18 (ĐH Sao Đỏ). Cho hàm số $f\in C^2([0,1]), f(0)=f(1)=0$ và $f^{'}(0)=2014$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\int_0^1 (f^{''}(x))^2dx.$$

Bài 3.19 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hàm f xác định, liên tục trên $[0,1]$ khả vi trên $(0,1)$ và $f(0)=0$. Chứng minh với mọi $\epsilon>0$ tồn tại số tự nhiên n_ϵ và số thực dương $x_\epsilon<\epsilon$ sao cho:

$$f^{`}(x_\epsilon)=\frac{n_\epsilon^2x_\epsilon f(x_\epsilon)}{2014(2014-n_\epsilon x_\epsilon)}.$$

Bài 3.20 (CĐ Sư phạm Nam Định). $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$ sao cho

$$\int\limits_0^1 \left(f'(x)+(1-2x)f(x)\right)dx=5$$

Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho $f'(c)=6$.

Bài 3.21 (CĐ Sư phạm Nam Định). Cho $f:[0,1]\to[-1,1]$ khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$ thỏa mãn $f(0)=f(1)=0$.
Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho $f'(c)=2c\tan f(c)$

Bài 3.22 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Cho hàm số f liên tục trên $[2013;2015]$ và $\displaystyle\int_{2013}^{2015} f(x)dx=0$. Chứng minh rằng tồn tại số $c\in(2013;2015)$ sao cho

$$2014\int_{2013}^{c} f(x)dx=cf(c).$$

Bài 3.23 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ liên tục sao cho $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại $c\in(0,1)$ sao cho

$$f(c)=2014\int_0^c f(x)dx.$$

Bài 3.24 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$ với $a > 0$ và $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (a;b)$ sao cho

$$2014c\int_a^c f(x)dx - 2013cf(c) + 2012\int_a^c f(x)dx = 0.$$

Bài 3.25 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Cho hàm số $f : [-1;1] \to \mathbb{R}$ liên tục . Chứng minh rằng phương trình

$$xf^{2014}(x) - 2014f(x) = -2013x$$

có nghiệm trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 3.26 (ĐH Tân Trào)**.** Cho hàm số $\varphi(x)$ có đạo hàm cấp một trên đoạn $[1,2]$, có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(1,2)$ và

$$\int_1^2 \varphi(x)dx = 2\varphi(2) - \varphi(1) - 1, \varphi^{'}(1) = 1.$$

Chứng minh rằng phương trình

$$x\varphi^{''}(x) + \varphi^{'}(x) = 0$$

luôn có nghiệm trong khoảng $(1,2)$.

4 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 4.1 (HV An ninh nhân dân)**.** Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn

$$\int_0^1 xf(x)dx = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\Big|\int_0^1 x^2 f(x)dx\Big| \leq \frac{2-\sqrt{2}}{6}\max_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Bài 4.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Bài 4.3 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ có giá trị nhỏ nhất $m > 0$ và giá trị lớn nhất M. Chứng minh rằng:

$$1 \leq \int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Bài 4.4 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho hai hàm số f và g liên tục trên đoạn [0;1], $g(x) > 0 \quad \forall x \in [0;1]$ và

$$\int_0^1 g(x)dx = m.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in [0;1]$sao cho

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \frac{1}{m}f(c).$$

Bài 4.5 (HV Bưu chính Viễn thông). Cho $0 < \alpha < \beta$. Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}dx.$$

Bài 4.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Cho hàm số f dương, khả vi liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(0) = 1, f'(0) = 0$ và $f''(0) = -1$. Tìm

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^x.$$

Bài 4.7 (Dự bị). Tính

$$\lim_{x\to 0^+} \int\limits_x^{2013x} \frac{(\sin t)^{2012}}{t^{2013}}dt$$

Bài 4.8 (Dự bị). Giả sử f là hàm số liên tục và dương, xác định trên đoạn $[0,1]$. Chứng minh với mỗi $\alpha \in [0,2]$, phương trình (ẩn là α)

$$\int\limits_0^{x^2} f(t)dt + \int\limits_{1-x^2}^{1} f(t)dt = \alpha \int\limits_0^1 f(t)dt,$$

có nghiệm duy nhất $x(\alpha) \in [0;1]$. Tìm giới hạn

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{x^2(\alpha)}{\alpha}.$$

Bài 4.9 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Chứng minh rằng nếu tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và bằng J thì tích phân $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)dx$ cũng hội tụ và bằng J.

Bài 4.10 (ĐH Ngoại thương Hà Nội). Cho hàm lõm, liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, có $f(0) = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3}\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2$$

Bài 4.11 (ĐH Ngoại thương HN). Cho $a \in \mathbb{R}_+^*, f : [0, a] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ khả vi lớp C^1 sao cho

$$\forall x \in [0, a], f'(x) > 0 \text{ và } f(0) = 0.$$

a) Chứng minh rằng

$$\forall x \in [0, a]\,, \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$$

ở đó, ký hiệu $f^{-1} : [0, f(a)] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ ngược của f.
b) Từ đó suy ra

$$\forall (x, y) \in [0, a] \times [0, f(a)]\,, \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt \geq xy.$$

Bài 4.12 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho $a > 0, b \geq 0$ và $a > b$ đặt

$$f(x) = \min\{a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\}.$$

Tính $\displaystyle\int_0^{\frac{2014}{3}} f(x)dx$.

Bài 4.13 (CĐ Ngô Gia Tự). Cho $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ sao cho $f''(x) > 0$ với mọi $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng

$$2\int_0^1 f(t)dt > 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0).$$

Bài 4.14 (ĐH Nông nghiệp). Một bể nước có thể tích 2400 lít đựng đầy nước. Người ta mở một vòi nước ở đáy bể để tháo nước ra ngoài. Biết lưu lượng chảy là $r(t) = 100 - 2t$ (lít/phút). Hỏi sau bao lâu bể cạn nước.

Bài 4.15 (ĐH Nông Nghiệp). Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên tục trên đoạn $[0,2]$ và $f(1)=0$. Chứng minh rằng

$$\int_0^2 [f'(x)]^2 dx \geq \frac{3}{2}\Big[\int_0^2 f(x)dx\Big]^2.$$

Bài 4.16 (HV Phòng không Không quân). Tính tích phân

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} x}{1 - x + \sqrt{x^2+1}} dx.$$

Bài 4.17 (HV Phòng không Không quân). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{1}{1 + e^{\cos 2014x}} dx.$$

Bài 4.18 (HV Phòng không Không quân). Cho f(x) là hàm nhận giá trị dương, liên tục trên và là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2014$. Chứng minh rằng:

$$\int_0^{2014} \frac{f(x)}{f(x + \frac{2014}{n})} dx \geq 2014, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Bài 4.19 (ĐH Quảng Bình). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x.\sin x dx}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Bài 4.20 (ĐH Quảng Bình). Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[0;1]$, $\int\limits_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0,1]$ và F là một nguyên hàm của f trên $[0,1]$.

a) Chứng minh rằng:

$$F(1) = \int\limits_0^1 xf(x)dx + \int\limits_0^1 F(x)dx.$$

b) $\int\limits_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$ và $\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

Bài 4.21 (ĐH Quảng Nam). Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$$

Bài 4.22 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). a) Cho hàm f liên tục trên $(0; +\infty)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2014$. Tính

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

b) Cho f liên tục trên $[a; b]$ và $|\displaystyle\int_a^b f(x)dx| = \int_a^b |f(x)|dx$. Chứng minh rằng f không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$.

Bài 4.23 (ĐH Quy Nhơn). Tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^{2014}}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^{2014}}{2014!}} dx$$

Bài 4.24 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Tính tích phân

$$\int_2^4 \frac{\sqrt[22]{ln(9-x)}}{\sqrt[22]{ln(9-x)} + \sqrt[22]{ln(x+3)}} dx.$$

Bài 4.25 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hàm số f khả vi liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) = 0$. Chứng minh rằng

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f^{`}(x)]^2 dx.$$

Bài 4.26 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho hàm f liên tục, khả vi trên $[0, 1]$ sao cho $\int_{1/3}^{2/3} f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng $\int_0^1 (f'(x))^2 dx \ge 27\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2$.

Bài 4.27 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Cho hàm số $f : [0; 1] \to [0; 1]$ là hàm đơn điệu tăng và liên tục. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 f(x^{2014})dx \le \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2015}.$$

Bài 4.28 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Cho $f \in C^1([0; 1])$ và $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng

$$(\int_0^1 f(x)dx)^2 \le \frac{1}{12} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

5 CHUỖI SỐ

Bài 5.1 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Bài 5.2 (HV Bưu chính Viễn thông). Chứng minh rằng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)} = \int_0^1 \frac{e^x-1}{x}dx.$$

Bài 5.3 (Dự bị). Cho x_n là dãy số đơn điệu và $\lim_{n\to\infty} x_n = a > 0$. Chứng minh rằng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right),$$

hội tụ.

Bài 5.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Giả sử $\{a_n\}$ là dãy cho bởi $a_1 = 4; a_{n+1} = a_n^2 - 3.a_n + 4$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{2}.$$

Bài 5.5 (HV Phòng không Không quân). Cho hàm số $f(x)$ được khai triển dưới dạng chuỗi luỹ thừa:

$$f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Giả sử hàm

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

cũng được khai triển thành chuỗi luỹ thừa và giả thiết rằng tất cả các hệ số của khai triển có giá trị tuyệt đối không vượt quá 2. Chứng minh rằng:

$$|a_n| \le n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 5.6 (ĐH Quy Nhơn). a) Cho dãy số giảm $\{a_n\}_n$ thoả mãn chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

hội tụ. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0.$

b) Kiểm tra sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt[3]{n^3+n}.$$

Bài 5.7 (ĐH Sao Đỏ). Cho (a_n) là một dãy số thực không âm thỏa mãn các điều kiện sau:

$$a_{2n} - a_{2n+1} \leq a_n^2, a_{2n+1} - a_{2n+2} \leq a_n a_{n+1}$$

với mọi $n \geq 1$ và

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, na_n < \frac{1}{4}.$$

Chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Bài 5.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Chứng minh rằng nếu chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$$

cũng hội tụ.

Bài 5.9 (CĐ Sư phạm Nam Định). Xét sự hội tụ và tính tổng chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Cho $0 \leq a \leq 2$ và $\{a_n\}$ là dãy số thực xác định bởi $a_1 = a$, $a_{n+1} = 2^n - \sqrt{2^n(2^n - a_n)}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục trên [0;1] thỏa mãn

$$f(2015x + 2014) = 2015f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tìm hàm $f(x)$.

Bài 6.2 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** .
a) Cho $\alpha > 0$, tìm hàm số $f : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ thoả mãn điều kiện

$$f\left(f(x)\right) + \alpha f(x) = 2\alpha^2 x,\ \forall x \in [0,\ +\infty).$$

b) Tìm hàm số f xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện

$$(x+y)f\left(\frac{x+y}{2}\right) = xf(x) + yf(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Tìm tất cả các hàm f liên tục trên $[0;1]$, có đạo hàm trên khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn 2 điều kiện:

$$\begin{cases} 18.f'(x) - 1.f(x) + 2014 \le 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) = f(1) = 2014. \end{cases}$$

Bài 6.4 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Tìm tất cả các hàm số f xác định trên $[0;1]$ khả vi trong khoảng $(0;1)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 1 \\ 2013f'(x) + 2014f(x) \ge 2014 \end{cases}$$

Bài 6.5 (ĐH Nông nghiệp)**.** Tìm tất cả các hàm $f \in C^2[0,1]$, tức hàm $f(x)$ có đạo hàm tới cấp 2 và $f''(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn:

$$f(0) = f'(0) = 1, f''(x) \ge 0, \forall x \in (0,1) \text{ và } \int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}.$$

Bài 6.6 (ĐH Quảng Bình)**.** Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ biết rằng:

$$2f(x) = f(\frac{x}{2}) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.7 (ĐH Sao Đỏ)**.** Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn

$$f(x+y) = f(x)e^{\frac{f(y)}{2014}-1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Chứng minh không tồn tại hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với $f(0) > 0$ và

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.9 (CĐ Sư phạm Nam Định). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(2y)}{3}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.10 (CĐ Sư phạm Nam Định). Tìm hàm $f : [0,1] \to (0; +\infty)$ khả vi liên tục trên đoạn $[0,1]$ thỏa mãn $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ và

$$\int\limits_0^1 \frac{(f'(x))^2 dx}{f(x)} \leq 4.$$

Bài 6.11 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Tìm tất cả các hàm số thực $f(x)$ liên tục thỏa mãn

$$\begin{cases} f(0) = 2014 \\ f(2014x) - f(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bài 6.12 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x+1}{x^2+2}; \\ f(x+y) &\geq \frac{[(xy-2)^2 + 2(x+y)^2]f(x)f(y)}{(x+y)^2+2} \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6.13 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2014^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.14 (ĐH Tân Trào). Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2+y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Phần III

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

1 ĐẠI SỐ

Bài 1. a) Gọi $C_1, \dots, C_4$ là các cột của ma trận đã cho. Đặt

$$C_i' = (a_1^{i-1}, \dots, a_4^{i-1}).$$

Dễ thấy rằng $C_i = C_i' +$ tổ hợp tuyến tính của các $C_1', \dots, C_{i-1}'$.

Từ đó suy ra định thức cần tính bằng định thức của ma trận được tạo thành từ các cột $C_1', \dots, C_4'$.

Đây là định thức Vandermonde quen thuộc và do đó giá trị cần tìm bằng

$$\det(C_1', \dots, C_4') = \prod_{1 \le i < j \le 4} (a_j - a_i).$$

b) Trong ma trận ban đầu, mỗi hệ số trên cột thứ $3, 4$ tương ứng là tích của $2, 3$ số nguyên liên tiếp, do đó chia hết cho $2!, 3!$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2. Giả thiết $P(x) = \sum_{i=0}^{5} c_i x^i$. Từ các điều kiện của bài toán ta suy ra một hệ 6 phương trình tuyến tính với 6 ẩn là $c_0, \dots, c_5$:

$$\sum_{i=0}^{5} a_k^i c_i = b_k, \quad \sum_{i=1}^{5} i a_k^{i-1} c_i = b_k, \quad k = 1, 2, 3$$

Nếu $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ thì đa thức 0 là đa thức duy nhất thỏa mãn. Thật vậy, từ giả thiết suy ra $P(x) = \prod_i (x - a_i) Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức bậc không quá 2. Từ hệ thức $P'(a_i) = 0$ ta suy ra $Q(a_i) = 0$. Do đó $Q \equiv 0$. Theo trên, khi các hệ số b_k đều bằng 0 thì hệ có nghiệm duy nhất. Do đó ta suy hệ có nghiệm duy nhất với mọi bộ b_k.

Cách khác:
- Xét ánh xạ ϕ từ không gian các đa thức bậc ≤ 5 với hệ số thực vào $\mathbb{R}^6$ gửi mỗi đa thức P lên $(P(a_1), P'(a_1), \dots, P(a_3), P'(a_3))$. Bài toán yêu cầu chứng minh ϕ là một song ánh. Hiển nhiên ϕ là ánh xạ tuyến tính giữa các không gian có cùng số chiều bằng 6. Dễ dàng kiểm tra được rằng $\ker \phi = 0$ và bài toán được chứng minh.
- Cũng có thể xây dựng trực tiếp đa thức $P(x)$ bằng phương pháp nội suy.

– Thiết lập công thức nội suy Lagrange
– Xác định được đa thức bậc 2 nhận giá trị tại a_i
– Kết thúc bài toán

Bài 3. a) Trước hết thiết lập ma trận ánh xạ đạo hàm trong hệ cơ sở $1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \frac{x^4}{4!}$. Do ma trận của e theo cơ sở trên là ma trận đường chéo với các giá trị riêng khác 0 nên ánh xạ là khả nghịch.

b) Theo công thức Taylor, ta có, với mọi $f \in \mathbb{R}[x]$ thì

$$f(x+1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}.$$

Nói cách khác, $e(D)$ gửi đa thức $f(x)$ lên $f(x+1)$. Hiển nhiên đây là một ánh xạ tuyến tính khả nghịch.

Ghi chú:
Thí sinh có thể dùng phương pháp của câu a) để giải câu b).
Thí sinh có thể chứng minh câu b) trước, từ đó suy ra câu a).

Bài 4. Sử dụng biến đổi sơ cấp theo hàng ta có

$$\det(X) = \det \begin{pmatrix} E_m & B \\ 0 & E_n - CB \end{pmatrix}$$

Từ đó sử dụng khai triển Laplace ta có điều phải chứng minh.
b) Với A khả nghịch, ta có khai triển

$$X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Sử dụng các biến đổi sơ cấp đối với ma trân $\begin{pmatrix} E_m & A^{-1}B \\ C & D \end{pmatrix}$ như trong câu a) ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. a. Sử dụng phản chứng. Giả sử a là số vô tỷ. Giả sử $P = P_1 \cdots P_k$ với $P_1, \ldots, P_k$ là các đa thức hệ số hữu tỷ và bất khả qui trên $\mathbb{Q}$. Bởi vì a là nghiệm của P, dĩ nhiên a là nghiệm của một số đa thức P_i. Không mất tổng quát, giả sử $P_1, \ldots, P_m$ nhận a làm nghiệm. Do $P_1, \ldots, P_m$ có hệ số hữu tỷ và nhận số vô tỷ a làm nghiệm ta suy ra chúng có bậc ≥ 2. Ta nhắc lại kết quả quen biết sau đây: mọi đa thức bất khả qui trên $\mathbb{Q}$ chỉ có nghiệm đơn trong $\mathbb{R}$ (trong bất kì trường chứa $\mathbb{Q}$). Từ đó suy ra bội của a trong P bằng m. Suy ra

$$\deg P \geq \deg P_1 P_2 \ldots P_m \geq 2m > 2\frac{n}{2} = n.$$

Đây là điều mâu thuẫn cần tìm và bài toán được giải quyết.

Nhận xét: Bài toán còn có nhiều tiếp cận khác: qui nạp theo bậc của P, xét iđêan của $\mathbb{Q}[x]$ gồm các đa thức nhận a làm nghiệm, v.v...

b. 1) Theo định nghĩa x_n là số đường đi độ dài n giữa A và A. Một đường đi bắt đầu từ A và kết thúc tại A, ngay trước khi kết thúc phải dừng lại tại B hoặc D. Điều này cho thấy một đường đi độ dài n giữa A và chính nó được tạo thành từ một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới B và cạnh BA hoặc một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới D và cạnh DA. Từ đó suy ra

$$x_n = 2y_{n-1}.$$

Tương tự, một đường đi độ dài n từ A tới B được tạo thành từ một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới A và cạnh AB hoặc một đường đi độ dài $n-1$ từ A tới C và cạnh CB. Do đó

$$y_n = x_{n-1} + z_{n-1}.$$

Tương tự ta có

$$z_n = 2y_{n-1}.$$

Một cách tương đương, ta có

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

2) Ta có $x_n = z_n = 2y_{n-1}$ với mọi n. Từ đó $y_n = 2x_{n-1} = 4y_{n-2}$. Quan hệ $y_n = 4y_{n-2}$ cùng với giá trị ban đầu $y_0 = 0, y_1 = 1$ chứng tỏ $y_{2k} = 0, y_{2k+1} = 2^{2k}$. Từ đây, ta suy ra $x_{2k} = z_{2k-1} = 2y_{2k-1} = 2^{2k-1}, z_{2k+1} = x_{2k+1} = 0$.

2 GIẢI TÍCH

Bài 1. Ta có $u_{n+1}^2 = u_n^2 + a^n$ vì vậy

$$u_n^2 = 1 + a + \cdots + a^{n-1}.$$

– Tính được công thức $u_n = \sqrt{\frac{a^n-1}{a-1}}$ khi $a \neq 1$ và $u_n = \sqrt{n}$ khi $a = 1$.

– Chỉ ra khi $a < 1$ dãy có giới hạn và giới hạn đó là $\sqrt{\frac{1}{1-a}}$.

Bài 2. Giả sử f không phải là hàm hằng. Khi đó tồn tại các số a, b sao cho $f(b) - f(a) \neq 0$. Điều này kéo theo $g(a) = g(b) = m$.
Lần lượt lấy $y = a$ và $y = b$ ta có hệ

$$\Big(f(x) - f(a)\Big)\Big(g(x) - m\Big) = 0; \quad \Big(f(x) - f(b)\Big)\Big(g(x) - m\Big) = 0.$$

Trừ các phương trình của hệ cho nhau ta thu được $(f(a) - f(b))(g(x) - m) = 0$ với mọi x. Do $f(a) - f(b) \neq 0$ nên $g(x) = m \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Nếu f đơn điệu giảm thì $f(x) \leq f(0)\ \forall\, x \in [0, +\infty)$. Do vậy, $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq f(0)$. Điều này trái với giả thiết.
Vậy $f(x)$ là hàm không giảm trên $[0, \infty)$. Khi đó, $f(t) \leq f(x)\ \forall t \leq x$. Do đó $\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(x)dt = f(x)$ với mọi $x > 0$. Điều này kéo theo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt \leq \lim_{x\to\infty} f(x).$$

2) Kết luận không còn đúng. Ta xét thí dụ sau: xét hàm số $f(x) = |sinx|x^2$. Ta có

$$\int_0^{2n\pi} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin x\,dx = \sum_{k=1}^{n} (4k+1) = n(2n+3)$$

Do đó,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \geq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{[x/2\pi]2\pi + 2\pi}\int_0^{[x/2\pi]2\pi} f(t)\,dt = \infty.$$

Dễ thấy không tồn tại $lim_{x\to\infty} f(x)$.

Bài 4. Chia hai vế cho 2013 ta nhận được

$$f'(x) + kf(x) \geq \frac{2015}{2013};\ \text{ với } k = \frac{2014}{2013}.$$

Đặt $g(x) = e^{kx}(f(x) - m)$ với $m = \frac{2015}{2014}$ ta có

$$g'(x) = e^{kx}[k(f(x) - m) + f'(x)] \geq 0.$$

Từ đó suy ra g là hàm không giảm.
Mặt khác, $g(0) = g(1) = 0$ nên ta suy ra $g(x) \equiv 0$. Từ đó $f(x) \equiv m.$

Bài 5. **Cách 1:**
Bằng quy nạp chứng minh được $x_n \geq 4$.
Xét dãy $b_{n+1} = 2\sqrt{b_n}$ với $b_0 = \max\{4, x_0, x_1\}$. Do $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{b_n}{b_{n-1}}}$ và $b_1 \leq b_0$ nên ta suy ra là dãy không tăng và bị chặn dưới, do đó $\lim_n b_n = 4$. Ta chứng minh $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq b_n$ với mọi n.
Với $n = 1$ ta có $x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{\max\{x_1, x_0\}} \leq 2\sqrt{b_0} = b_1$.
$x_3 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \leq 2\sqrt{\max\{x_2, x_1\}} \leq 2\sqrt{\max\{b_1, b_0\}} \leq b_1$
Giả thiết $\max\{x_{2k}, x_{2k+1}\} \leq b_k$ với mọi $k = 0, 1, ..., n-1$. Khi đó,
$x_{2n} = \sqrt{x_{2n-1}} + \sqrt{x_{2n-2}} \leq 2\sqrt{\max\{x_{2n-1}, x_{2n-2}\}} \leq 2\sqrt{b_{n-1}} = b_n$.
$x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}} + \sqrt{x_{2n-1}} \leq 2\sqrt{\max\{x_{2n}, x_{2n-1}\}} \leq 2\sqrt{\max\{b_n, b_{n-1}\}} \leq b_n$.
Tổng kết lại, ta có $4 \leq \max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq b_n$ với mọi n và $\lim_n b_n = 4$. Vậy $\lim_n x_n = 4$.

Cách 2:
Giả thiết $x_1 \leq x_0$. Khi đó

$$x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{x_0} \leq x_0,$$

do $x_0 \geq 4$.

$$x_3 = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} = x_2.$$

Như vậy bằng quy nạp ta chứng minh được

$$x_{2n+2} \leq 2\sqrt{x_{2n}} \leq x_{2n};$$
$$x_{2n+1} \leq x_{2n}.$$

Như thế dãy (x_{2n}) là dãy không tăng bị chặn dưới bởi 4. Từ đó suy ra tồn tại giới hạn $\lim x_{2n} = a \leq 2\sqrt{a}$. Hay là $a \leq 4$. Kết hợp với điều kiện $x_{2n} \geq 4$ ta có $a = 4$.
Kết hợp điều này với bất đẳng thức thứ 2 ở trên ta được $\lim x_{2n+1} = 4$.
Vậy $\lim x_n = 4$.
Nếu $x_1 \geq x_0$ ta thấy $x_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_0} \leq 2\sqrt{x_1} \leq x_1$ và lý luận như trên khi thay x_0 bởi x_1 còn x_1 bởi x_2.

Bài 6. **6a.**

Đặt $b_n = \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+...+\sqrt{6}}}}_{n \text{ lần}}$. Do $b_{n+1} = \sqrt{6+b_n}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được b_n là dãy tăng bị chặn trên bởi 3 và $b_n \uparrow 3$.
Mặt khác,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3-b_{n+1}}{3-b_n} = \frac{3-\sqrt{6+b_n}}{3-b_n} = \frac{1}{3+\sqrt{6+b_n}} \to \frac{1}{6}.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alambert chuỗi số hội tụ.

6b.
Từ giả thiết

$$\int_0^x f^2(t)\,dt \le \int_0^x t^2\,dx.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwartz ta có

$$\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2 \le \int_0^x t^2\,dt \int_0^x f^2(t)\,dt \le \left(\int_0^x t^2\,dt\right)^2.$$

Vì vậy

$$\int_0^x tf(t)\,dt \le \int_0^x t^2\,dt \quad \text{hay là } F(x) = \int_0^x t(t-f(t))\,dt \ge 0.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-f(t))\,dt &= \int_0^x \frac{1}{t}t(t-f(t))\,dt\\ &= \int_0^x \frac{1}{t}dF(t) = \frac{F(x)}{x} + \int_0^x \frac{F(t)}{t^2}\,dt \ge 0.\end{aligned}$$

Từ đó, $\int_0^x (t-f(t))\,dt \ge 0$ hay là $\int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$.

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: ĐẠI SỐ

1 MA TRẬN

Bài 1.1 (ĐH An Giang)**.** Xét $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. Khi đó

$$AX - XA = \begin{bmatrix} d & e-a & 2c+f-b \\ g & h-d & 2f+i-e \\ -2g & -2h-g & -h \end{bmatrix},$$

nên X giao hoán với A khi và chỉ khi $d = g = h = 0, e = a, f = 2c - b, i = 4c - 2b + a$, nghĩa là X có dạng

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2c-b \\ 0 & 0 & 4c-2b+a \end{bmatrix}.$$

Bài 1.2 (ĐH An Giang)**.** Đa thức đặc trưng của A là

$$p(t) = t^4 - 3t^2 + 1 = (t^2 - t - 1)(t^2 + t - 1).$$

Do đó A có 4 giá trị riêng đơn phân biệt là $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
Cơ sở của các không gian riêng tương ứng với từng trị riêng là:
– $E(\alpha_1)$ có cơ sở $\{u_1 = (\alpha_1, 1, 1, \alpha_1)\}$;
– $E(\alpha_2)$ có cơ sở $\{u_2 = (\alpha_2, 1, 1, \alpha_2)\}$;
– $E(\alpha_3)$ có cơ sở $\{u_3 = (\alpha_3, -1, 1, -\alpha_3)\}$;
– $E(\alpha_4)$ có cơ sở $\{u_4 = (\alpha_4, -1, 1, -\alpha_4)\}$.
Do đó A chéo hóa được, với dạng chéo là $B = P^{-1}AP$, trong đó

$$B = \operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4),\ P = (u_1^\top\ u_2^\top\ u_3^\top\ u_4^\top).$$

Suy ra $A^{2014} = P.B^{2014}.P^{-1}$. Từ đây ta thu được kết quả.
Chú ý. Đây là bài toán đơn thuần tính toán, tuy nhiên việc tính toán rất phức tạp.

Bài 1.3 (ĐH An Giang)**.** Ta có $(A-B-2I)(A+I) = A^2 - A - B - BA - 2I = -2I$ Suy ra $(A+I)(A-B-2I) = -2I$, nghĩa là $A^2 = A + B + AB$. Như vậy $AB = BA$.
Chú ý. Trong lời giải có sử dụng tính chất "*Nếu $A, B \in M_n(K)$ sao cho $AB = I$ thì $BA = I$*".

Bài 1.4 (ĐH Bạc Liêu)**.** Đa thức đặc trưng của A là $p(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$. Chia x^n cho $p(x)$ ta được dạng biểu diễn

$$x^n = p(x).q(x) + ax + b.$$

Lần lượt thay x bởi α và β trong đẳng thức trên, ta được $\alpha^n = a\alpha + b$ và $\beta^n = a\beta + b$. Suy ra $a = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ và $a = \dfrac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}$. Do $p(A) = 0$ nên bằng cách thay x bởi A vào đẳng thức trên, ta được

$$A^n = a.A + b.I = \alpha^n\Big(\frac{1}{\alpha-\beta}(A - \beta I)\Big) + \beta^n\Big(\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha I - A)\Big).$$

Nghĩa là tồn tại

$$X = \frac{1}{\alpha-\beta}(A - \beta I);\ Y = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha I - A)$$

thỏa mãn $A^n = \alpha^n X + \beta^n Y$.

Bài 1.5 (ĐH Bạc Liêu)**.** Ta có $\det(NM) = \det(MN) = 1$. Do đó NM khả nghịch và M, N khả nghịch. Hơn nữa $(MN)^2 = I$, nên $MN = (MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$. Do đó $(NM)^2 = N(MN)M = N(N^{-1}M^{-1})M = I$, nghĩa là $(NM)^{-1} = NM$.

Bài 1.6 (ĐH Bách Khoa Hà Nội)**.** Giả sử hàng thứ i của A gồm toàn số 1. Khi đó hàng i của AA^* có hệ số ở mỗi cột là tổng tất cả các hệ số ở cột đó của A^*. Do đó tổng tất cả các phần tử của A^* bằng tổng tất cả các phần tử hàng thứ i của AA^*. Mà $A.A^* = \det(A).I_n$, nên tổng này chính bằng $\det(A)$. Do đó ta được kết quả cần chứng minh.

Bài 1.7 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh)**.** Đa thức đặc trưng của A là $P(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$ do đó $(A - I)^3 = 0$. Phân tích

$$x^{14} = (x-1)^3 q(x) + ax^2 + bx + c. \qquad (*)$$

Ta có

$$\begin{cases} 1^{14} = a + b + c \\ 14.1^{13} = 2a + b \\ 14.13.1^{2012} = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} a = 91 \\ b = -168 \\ c = 78. \end{cases}$$

Thay A vào $(*)$ ta được: $A^{14} = aA^2 + bA + cI = \begin{pmatrix} 1 & 14 & -14 \\ -14 & -90 & 91 \\ -14 & -91 & 92 \end{pmatrix}$.

Bài 1.8 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh)**.** Nếu A khả nghịch thì $B = A^{-1}.AB = 0$ vô lý. Do đó $\det(A) = 0$. Điều này chứng tỏ tồn tại $x, y \in M_{n,1}$ khác 0 thỏa $Ax = A^\top y = 0$.
Xét $C = xy^\top$ là ma trận cấp n khác 0 thỏa

$$AC = Axy^\top = 0.y^\top = 0; CA = xy^\top A = x.(A^\top y)^\top = 0.$$

Bài 1.9 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh)**.** Vì $A = A^\top$ nên $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Dẫn đến $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix} = I$. Từ đó suy ra

$$\begin{cases} b(a+c) = 0 & (1) \\ a^2+b^2 = 1 & (2) \\ b^2+c^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b = 0 \vee c = -a$

1. $b = 0 \Longrightarrow a = \pm 1 \Longrightarrow c = \pm 1$. Ta có 4 ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Thử lại thỏa.

2. $b \neq 0 \Longrightarrow c = -a \in (0,1) \Longrightarrow b = \pm\sqrt{1-a^2}$. Ta có 4 ma trận dạng ma trận

$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & -a \end{pmatrix}$$

Bài 1.10 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh)**.** Ta có

$$A^{101} - I = (A - I)(I + A + \cdots + A^{100}) = 0$$

và A không có trị riêng bằng 1. Đặt

$$f(A) = I + A + \cdots + A^{k-1} = -(A^k + A^{k+1} + \cdots + A^{100}).$$

Suy ra $f(A)$ khả nghịch. Vì 101 nguyên tố nên luôn tồn tại $s, t \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $sk - t101 = 1$.
Đặt $p(x) = 1 + x^k + \cdots + x^{(s-1)k}$. Ta có

$$f(A).p(A) = \sum_{i=0}^{sk-1} A^i = \sum_{i=0}^{t101} A^i = I.$$

Chú ý A có phần tử nguyên nên cả $f(A)$ và $p(A)$ đều nguyên nên có định thức nguyên. Điều phải chứng minh đã rõ.

Bài 1.11 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Phản chứng, ta giả sử $|A^2 + B^2| = 0 \Longrightarrow \exists 0 \neq x \in R_n : (A^2 + B^2)x = 0 \Longrightarrow x^\top A^2 x + x^\top B^2 x = 0 \Longleftrightarrow (Ax)^\top Ax + (Bx)^\top Bx = 0 \Longleftrightarrow ||Ax||^2 + ||Bx||^2 = 0 \Longleftrightarrow Ax = Bx = 0$.
Lúc này mọi ma trận X, Y, ta có $(AX + BY)^\top x = X^\top Ax + Y^\top Bx = 0 \Longrightarrow \det(AX + BY) = 0$. Điều này là không đúng với giả thiết.

Bài 1.12 (HV Bưu chính Viễn thông). a) Ta có $ABAB = 9AB$
b) $2 = r(AB) = r(9AB) = r(ABAB) \leq r(BA) \leq 2$. Ma trận BA vuông cấp 2 có $r(BA) = 2$, do đó khả nghịch
c) $ABAB = 9AB \Rightarrow B(ABAB)A = B(9AB)A \Rightarrow (BA)(BA)(BA) = 9(BA)(BA)$. Sử dụng tính khả nghịch của ma trận BA và đẳng thức trên suy ra $BA = 9I_2$.

Bài 1.13 (HV Bưu chính Viễn thông). Dễ dàng thấy rằng nếu $AB = BA$ thì bất đẳng thức trên có dấu "=".
Gọi T là ma trận rực giao sao cho $T^{-1}AT = \tilde{A}$ là ma trận chéo. Đặt $\tilde{B} = T^{-1}BT$ (không chắc la ma trận chéo). Ta có

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = \mathrm{Tr}(T^{-1}A^2B^2T) = \mathrm{Tr}(A^2B^2); \mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) = \mathrm{Tr}(T^{-1}ABABT) = \mathrm{Tr}(ABAB).$$

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ii}b_{ij}a_{jj}b_{ji} = \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

(Vì $\tilde{B}$ đối xứng, $\tilde{A}$ là ma trận chéo).

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ij}^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2)b_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 b_{ii}^2$$

Vậy

$$\mathrm{Tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2) - \mathrm{Tr}(\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}\tilde{B}) = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii}^2 + a_{jj}^2 - 2a_{ii}a_{jj})b_{ij}^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{ii} - a_{jj})^2 b_{ij}^2 \geq 0.$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow (a_{ii} - a_{ij})^2 b_{ij}^2 = 0; \forall i < j \Leftrightarrow a_{ii}b_{ij} = b_{ij}a_{jj}; \forall i < j \Leftrightarrow AB = BA$.

Bài 1.14 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Ta có $AB = A + B$ nên $(A - I)(B - I) = I$. Do đó $A - I$ và $B - I$ khả nghịch và là nghịch đảo của nhau. Với mọi vectơ u ta có $Au = 0 \iff (A - I)u = -u \iff u = -(B - I)u \iff Bu = 0$. Suy ra hai hệ phương trình $AX = 0$ và $BX = 0$ có cùng tập hợp nghiệm. Do đó $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

Bài 1.15 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Đặt $A = (a_{ij})$ và $A^{-1} = (b_{ij})$. Do $AA^{-1} = I$ nên với mọi $i \neq j$, ta có $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$. Do $a_{ik} > 0, \forall k = 1, 2, ..., n$ nên tồn tại ít nhất 2 trong các số các b_{kj} trái dấu nhau, nghĩa là có ít nhất 2 số khác 0 trong một cột của A^{-1}. Suy ra số hệ số 0 của A^{-1} là $z_n \leq n^2 - 2n$.

Bài 1.16 (Dự bị)**.** 1. Từ định nghĩa, ta dễ dàng suy ra rằng một ma trận là thực sự ngẫu nhiên nếu các hệ số là > 0 và nhận $(1, 1, \ldots, 1)$ làm vector riêng với giá trị riêng 1. Từ đây, ta dễ dàng suy ra rằng A^k là thực sự ngẫu nhiên với mọi $k \geq 1$.

2. Đặt $A^k = (a_{ij}^{(k)})$. Thế thì từ đẳng thức $A^{k+1} = A \cdot A^k$ ta có

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{sj}^{(k)}.$$

Theo giả thiết, $\beta_j^{(k)} = \max_{1 \leq s \leq n} a_{sj}^{(k)}$. Suy ra

$$a_{ij}^{(k+1)} = \leq \beta_j^{(k)} \sum_{s=1}^{n} a_{is} = \beta_j^{(k)}.$$

Từ đó,

$$\beta_j^{k+1} = \max_{i=1}^{n} a_{ij}^{(k+1)} \leq \beta_j^{(k)}.$$

Lập luận một cách tương tự, ta cũng thu được $\alpha_j^{(k)} \leq \alpha_j^{(k+1)}$.
Cố định j. Gọi i là chỉ số sao cho $\beta_j^{(k+1)} = a_{ij}^{(k+1)}$. Thế thì,

$$\begin{aligned}
\beta_j^{(k)} - \beta_j^{(k+1)} &= \beta_j^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)} = \beta_j^{(k)} - \sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{sj}^{(k)} \\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{is}(\beta_j^{(k)} - a_{sj}^{(k)}) \geq \epsilon(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})
\end{aligned}$$

(Bởi vì các hệ số là dương và tồn tại ít nhất một chỉ số s để $a_{sj}^{(k)} = \alpha_j^(k)$ và $a_{sj} \geq \epsilon$). Tương tự, gọi i' là chỉ số thoả mãn $\alpha_j^{(k+1)} = a_{i'j}^{(k+1)}$. Thế thì,

$$\begin{aligned}
\alpha_j^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} &= a_{i'j}^{(k+1)} - \alpha_j^{(k)} = \sum_{s=1}^{n} a_{i's} a_{sj}^{(k)} - \alpha_j^(k) \\
&= \sum_{s=1}^{n} a_{i's}(a_{sj}^{(k)} - \alpha_j^(k)) \geq \epsilon(\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)})
\end{aligned}$$

Bằng cách lấy tổng của các bất đẳng thức thu được ở trên ta suy ra

$$\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)} - (\beta_j^{(k+1)} - \alpha_j^{k+1}) \geq 2\epsilon(\beta_j^(k) - \alpha_j^{(k)}).$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức cần chứng minh.

3. Trường hợp $n = 1$ là tầm thường. Ta giả sử $n \geq 2$. Khi đó, $\epsilon \leq 1/2$ và như vậy $0 \leq 1 - 2\epsilon < 1$. Ta suy ra dãy $\beta_j^{(k)} - \alpha_j^{(k)}$ tiến tới 0 khi k tiến tới vô cùng. Từ đây, ta dễ dàng suy ra rằng các dãy $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}$ cùng tiến tới một giới hạn hữu hạn x_j. Theo định lý kẹp, ta suy ra

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = x_j.$$

Như vậy,

$$\lim_{k\to\infty} A^k = M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Mặt khác, với mọi i, k ta có $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(k)} = 1$ nên $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Ta suy ra M cũng là một ma trận ngẫu nhiên.

Bài 1.17 (ĐH Đồng Tháp)**.** Giả sử $I + BA$ không khả nghịch, tức là $\det(I + BA) = 0$. Suy ra tồn tại $X \neq 0$ sao cho $(I + BA)X = 0$, suy ra $X + BAX = 0 (*)$.
Từ $(*)$ suy ra $AX + ABAX = 0$, hay $(I + AB)AX = 0$. Nếu $AX = 0$ thì từ $(*)$ ta có $X = 0$, vô lý. Nếu $AX \neq 0$ thì $I + AB$ không khả nghịch, vô lý. Vậy, $I + BA$ khả nghịch.

Bài 1.18 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Giả sử $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thích hợp. Từ $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$, suy ra

$$\begin{cases} bc = 0 \\ (a + d - b)b = 0 \\ (a + d - c)c = 0 \end{cases}$$

Giả sử $c \neq 0$. Khi đó $b = 0$ và $a + d = c$. Từ $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix}$, suy ra $c(a^2 + ad + d^2) = c^3$. Sau đó $ad = 0$. Như vậy A có dạng $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
Tương tự nếu $b = 0$ thì A sẽ có dạng $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{pmatrix}$ hoặc $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Nếu $b = c = 0$ thì $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.
Vậy A thuộc một trong những tập

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

hoặc

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cup \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.19 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Đặt

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ a^{-1} \\ a^{-2} \\ a^{-3} \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}.$$

Ta có $VU = 4$,

$$UV = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & 1 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & 1 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & 1 \end{pmatrix} = A + I_4\mathbb{R} \Rightarrow A = UV - I_4$$

Ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= (UV - I_4)^2 = UV.VU - UV - UV + I_4 \\ &= 4UV - 2UV + I_4 = 2UV + I_4 = 2(A + I_4) + I_4 = 2A + 3I_4 \\ &= \mathbb{R} \Rightarrow A^2 - 2A = 3I_4 \Leftrightarrow A(A - 2I_4) = 3I_4\mathbb{R} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_4) \end{aligned}$$

Vậy $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & a & a^2 & a^3 \\ a^{-1} & -2 & a & a^2 \\ a^{-2} & a^{-1} & -2 & a \\ a^{-3} & a^{-2} & a^{-1} & -2 \end{pmatrix}$

Bài 1.20 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Đặt $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, kiểm chứng rằng $M^2 = M, rank(M) = 2$. Suy ra:

$$ABC = M = M^2 = (ABC)^2.$$

Ta có: $2 = rank(ABC) = rank((ABC)^2) = rank(AB(CAB)C) \leq (CAB)$.

Vì $CAB \in M_2(\mathbb{R})$ nên $rank(CAB) \leq 2$. Do đó $rank(CAB) = 2$ hay CAB khả nghịch. Từ điều này và hệ thức

$$(CAB)^2 = C(ABC)AB = C(ABC)^2AB = (CAB)^3$$

ta suy ra $CAB = I_2$. Vậy

$$(BCA)^2 = B(CAB)CA = BI_2CA = BCA.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài 1.21 (CĐ Ngô Gia Tự). Đa thức đặc trưng của A là $p(x) = x^3 - 3x + 2 = x(x-1)(x-2)$. Chia x^{2014} cho $p(x)$ ta được dạng biểu diễn

$$x^{2014} = p(x).q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Lần lượt thay x bởi $0; 1; 2$ trong đẳng thức trên, ta được $c = 0$; $a + b = 1$ và $4a + 2b = 2^{2014}$, nghĩa là $a = 2^{2013} - 1$, $b = 2 - 2^{2013}$, $c = 0$. Do $p(A) = 0$ nên bằng cách thay x bởi A vào đẳng thức trên, ta được

$$A^{2014} = p(A).q(A) + (2^{2013} - 1)A^2 + (2 - 2^{2013})A = (2^{2013} - 1)A^2 + (2 - 2^{2013})A.$$

Bài 1.22 (CĐ Ngô Gia Tự). Ta có $\text{rank}(AB - I) = \text{rank}[(A - I)B + (B - I)] \leq \text{rank}[(A - I)B] + \text{rank}(B - I) \leq \text{rank}(A - I) + \text{rank}(B - I)$.
Nhận xét. Bài toán này sử dụng hai tính chất quan trọng của hạng ma trận là

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \text{ và } \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A).$$

Bài 1.23 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Đặt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Từ giả thiết ta có $X_{n+1} = AX_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Hay

$$X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \ldots = A^nX_0.$$

Xét phương trình đặc trưng của ma trận A ta có

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, 1, 2.$$

Ma trận A có ba giá trị riêng phân biệt nên A chéo hóa được.
+ với $\lambda = 0$, hệ phương trình xác định véc tơ riêng là

$$\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{3}x_3 \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Chọn một véc tơ riêng $a = (1, 2, 3)$.
+ Tương tự với $\lambda = 1, \lambda = 2$ chọn được các véc tơ riêng tương ứng là $b = (3, 2, 4), c = (1, 2, 2)$. Do đó ma trận làm chéo hóa A là

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính ma trận nghịch đảo của T ta được

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Ta có $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D \Leftrightarrow A = TDT^{-1} \to A^n = TD^nT^{-1}$.
Do đó $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 3 - 3.2^n \\ 2 - 3.2^n \\ 4 - 6.2^n \end{pmatrix}$.
b. Theo phần a, có $v_n - 2 = 3.2^n$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 1.24 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Chúng ta xét các trường hợp sau:
TH 1: $n = 1$ thì hiển nhiên $r(A) = 0$.
TH 2: $n = 2$ thì hiển nhiên $\det A \neq 0$ do đó $r(A) = 2$.
TH 3: $n = 3$ ma trận A có dạng : $\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ a & 0 & f \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, trong đó a, b, c, d, e, f nhận các giá trị là 1 hoặc 2. Ta có $\det A = bdf + aec \neq 0$. Do đó $r(A) = 3$.
TH 4: $n > 3$, ta thay tất cả các phần tử $n-1$ của A bởi 1 thì nhận được ma trận B có các phần tử còn lại bằng 1. Rõ ràng ta có $\det A \equiv \det(B) \pmod{n-2}$. Mà $n - 2 > 1$ nên $\det A \neq 0$ do đó $r(A) = n$.
Kết luận: với $n = 1$ thì $r(A) = 0$; với $n > 1$ thì $r(A) = n$.

Bài 1.25 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Xét

$$f_A(x) = \det(A - xI_2) = x^2 - sx + p \in \mathbb{Q}[x]$$

là đa thức đặc trưng của A. Gọi λ_1, λ_2 là cá nghiệm của $f_A(x)$, khi đó λ_1, λ_2 là các giá trị riêng của A. Theo định lý Viét ta có:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = s \in \mathbb{Q}; \lambda_1\lambda_2 = p \in \mathbb{Q}.$$

Theo định lý Cayley-Hamilton ta có: $A^2 - sA + pI_2 = 0_2$. Với $\lambda \in \mathbb{C}$ là giá trị riêng của A thì tồn tại véc tơ riêng $X \neq 0$ thỏa mãn: $AX = \lambda X$. Bằng quy nạp ta có: $A^n X = \lambda^n X \to \lambda^n = -1$. Suy ra: $\lambda_1^n = \lambda_2^n = -1$.

Nếu $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ thì $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, từ đó với n lẻ ta có $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Khi đó $(A + I_2)^2 = A^2 + 2A + I_2 = 0_2$. Suy ra $-I_2 = A^n = (A + I_2 - I_2)^n = n(A + I_2) - I_2 \to A = -I_2 \to A^3 = -I_2$.
Nếu $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$ thì $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \notin \mathbb{R}$. Vì $|\lambda_i| = 1$ nên tồn tại t sao cho $\lambda_1 = \cos t + i \sin t$ và $\lambda_2 = \cos t - i \sin t$. Khi đó $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\cos t = s \in \mathbb{Q}$.
Lại có: $\lambda_1^n = -1 \to \cos nt + i \sin nt = -1 \to \cos nt = -1$.
Nhận xét: Với mọi n thì tồn tại đa thức đơn khởi $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ bậc n thỏa mãn:

$$2\cos nt = P_n(2\cos t).$$

Vì $x = 2\cos t$ là nghiệm hữu tỷ của $P_n(x) + 2 = 0$, nên $2\cos t \in \mathbb{Z}$. Mà $|2\cos t| \leq 2 \to 2\cos t \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Nếu $2\cos t = \pm 2 \to \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, đã xét ở trên.
Nếu $2\cos t = -1$, ta có $A^2 + A + I_2 = 0_2 \to (A - I_2)(A^2 + A + I_2) = 0_2 \to A^3 = I_2$, suy ra: $A^n \in \{I_2, A, A^2\}$, vô lý với $A^n = -I_2$.
Nếu $2\cos t = 1$, ta có $A^2 - A + I_1 = 0_2 \to (A + I_2)(A^2 - A + I_2) = 0_2 \to A^3 = -I_2$.
Nếu $2\cos t = 0$, ta có $A^2 + I_2 = 0_2$.

Bài 1.26 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). a. Các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

thỏa mãn yêu cầu bài toán.
b. Với $A \in M_2(\mathbb{R})$ ta có: $A^2 - (trA)A + (\det A)I = 0$. Giả sử tồn tại $A, B, C \in K_2(\mathbb{Z})$ sao cho $A^4 + B^4 = C^4$. Đặt $a = trA; b = trB; c = trC$. Khi đó

$$A^4 = (aA - I)^2 = a^2A^2 - 2aA + I = (a^3 - a)A + (1 - a^2)I.$$

Tương tự cho B^4 và C^4, ta được:

$$(a^3 - 2a)A + (b^3 - b)B + (2 - a^2 - b^2)I = (c^3 - 2c)C + (1 - c^2)I$$

Ta tính vết hai vế ta được:

$$a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) = c^4 - 4c^2 - 2.$$

Suy ra: $a^4 + b^4 - c^4 \equiv -2(mod4)$, suy ra a, b lẻ và c chẵn.
Tuy nhiên, khi đó

$$a^4 + b^4 - 4(a^2 + b^2) \equiv 2 \pmod 8, \text{ và } c^4 - 4c^2 - 2 \equiv -2 \pmod 8,$$

là điều vô lý.

Bài 1.27 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)**.** Cho p là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2. Ta có

$$\begin{aligned} A^pB - BA^p &= A^pB - A^{p-1}BA + A^{p-1}BA - A^{p-2}BA^2 \\ &\quad + A^{p-2}BA^2 - \ldots + ABA^{p-1} - BA^p \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k}BA^k - A^{p-k-1}BA^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1}(AB - BA)A^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{p-k-1}AA^k = pA^p. \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} 2014\mathrm{tr}(A^{2014}) &= \mathrm{tr}(2014A^{2014}) \\ &= \mathrm{tr}(A^{2014}B) - \mathrm{tr}(BA^{2014}) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{tr}(A^{2014}) = 0$.

Bài 1.28 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Ta có đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$P(k) = \begin{vmatrix} 3-k & 0 & 2 \\ 0 & 1-k & 2 \\ 2 & 2 & 2-k \end{vmatrix} = -k^3 + 6k^2 - 3k - 10.$$

$P(k)$ có các nghiệm $2, -1, 5$. Theo định lý Caley-Hamilton thì

$$A^3 - 6A^2 + 3A + 10 = 0.$$

Thực hiện phép chia đa thức x^{2014} cho đa thức $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$, ta được

$$x^{2014} = (x^3 - 6x^2 + 3x + 10)g(x) + ax^2 + bx + c.$$

Lần lượt thế $x = 2, -1, 5$ vào ta được hệ phương trình theo a, b, c,

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^{2014} \\ a - b + c = 1 \\ 25a + 5b + c = 5^{2014} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5^{2014} - 2^{2015} + 1}{18} \\ b = \dfrac{6.2^{2014} - 5^{2014} - 12}{18} \\ c = \dfrac{5.2^{2014} - 5^{2014} + 5}{9}. \end{cases}$$

Vậy

$$A^{2014} = \frac{5^{2014} - 2^{2015} + 1}{18}A^2 + \frac{6.2^{2014} - 5^{2014} - 12}{18}A + \frac{5.2^{2014} - 5^{2014} + 5}{9}I.$$

Bài 1.29 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Gọi k là một giá trị riêng bất kì của A, ta có: $\det(A-kI)=0$. Suy ra: $\det(A+kI).\det(A-kI)=0$, dẫn đến $\det(A^2-k^2I)=0$. Từ giả thiết: $A^{2014}=0$ nên $A^2=0\Rightarrow k=0$. Vậy với mọi giá trị riêng k_i của A đều bằng 0.
Mặt khác, giá trị riêng k là nghiệm của phương trình:

$$x^n+(-1)^n\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x^{n-1}+b_2x^{n-2}+...+b_{n-1}x+b_n=0$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=(-1)^n\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}\Rightarrow\sum a_{ii}=0$. Vậy $\mathrm{Tr}(A)=0$.

Bài 1.30 (HV Phòng không Không quân)**.** Đặt

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&1&1&\dots&1\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots}\\1&1&1&\dots&1\end{pmatrix}.$$

Do

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}2015&2014&2014&\dots&2014\\2014&2015&2014&\dots&2014\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\2014&2014&2014&\dots&2015\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2014+1&2014&2014&\dots&2014\\2014&2014+1&2014&\dots&2014\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\2014&2014&2014&\dots&2014+1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

nên ta suy ra $A=2014B+I_n\qquad(1)$. Ta có

$$B^2=\begin{pmatrix}n&n&n&\dots&n\\n&n&n&\dots&n\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots}\\n&n&n&\dots&n\end{pmatrix},$$

$$B^3=B^2.B=\begin{pmatrix}n^2&n^2&n^2&\dots&n^2\\n^2&n^2&n^2&\dots&n^2\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\n^2&n^2&n^2&\dots&n^2\end{pmatrix}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$B^k=\begin{pmatrix}n^{k-1}&n^{k-1}&n^{k-1}&\dots&n^{k-1}\\n^{k-1}&n^{k-1}&n^{k-1}&\dots&n^{k-1}\\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\\n^{k-1}&n^{k-1}&n^{k-1}&\dots&n^{k-1}\end{pmatrix},\ \text{với mọi số nguyên dương k}$$

. Từ đó ta có

$$A^k = (2014B + I_n)^k = \sum_1^n C_k^i 2014^i B^i I_n^{k-i} = \sum_1^n C_k^i 2014^i B^i.$$

Hay ta có:

$$A^k = I_n + 2014C_k^1 B + 2014^2 C_k^2 B^2 + \ldots + 2014^k C_k^k B^k$$

Từ đó các phần tử của A^k được xác định như sau:
Các phần tử trên đường chéo chính là: $1 + 2014C_k^1 + 2014^2C_k^2 + \ldots + 2014^kC_k^k$.
Các phần tử còn lại bằng nhau và bằng: $2014C_k^1 + 2014^2C_k^2 + \ldots + 2014^kC_k^k$.

Bài 1.31 (ĐH Quảng Nam)**.** Từ giả thiết ta có

$$AB^t = BA^t, CD^t = DC^t, DA^t - CB^t = I, AD^t - BC^t = I.$$

Do đó

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix} = I_{2n} \Rightarrow \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Từ đó $D^tA - B^tC = I$.

Bài 1.32 (ĐH Quy Nhơn)**.** a. Ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$\lim_{t\to+\infty} tr(A+tI) = +\infty, \lim_{t\to+\infty} \Big(\frac{\det(A+tI)}{tr(A+tI)} - t\Big) = -\infty.$$

Từ đó với t đủ lớn ta có

$$\begin{aligned} A = (A+tI) - tI &= \frac{1}{tr(A+tI)}(A+tI)^2 + \Big(\frac{\det(A+tI)}{tr(A-tI)} - t\Big)I \\ &= \Big(\frac{1}{\sqrt{tr(A+tI)}}(A+tI)\Big)^2 + \Big(\sqrt{(t - \frac{\det(A+tI)}{tr(A+tI)})}\Big)^2(-I) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{tr(A+tI)}}(A+tI)\right)^2 + \left(\sqrt{(t - \frac{\det(A+tI)}{tr(A+tI)})}\right)^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b. Giả sử tồn tại hai ma trận $B, C \in M_2(\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện bài toán. Vì $BC = CB$ nên

$$\det(B^2 + C^2) = \det(B + IC)(B - iC) = |\det(B + iC)| \geq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với

$$\det(B^2 + C^2) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

Vậy không tồn tại $B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

Bài 1.33 (ĐH Quy Nhơn)**.** Từ giả thiết của bài toán ta có.

$$(BA)^3 = BABABA = B(ABAB)A = 0.$$

Suy ra BA lũy linh. Từ đây suy ra

$$BABA = (BA)^2 = 0.$$

Khẳng định trên nói chung không đúng với A, B là các ma trận vuông có cấp lớn hơn 2. Thật vậy, ta xét hai ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó ta có:

$$ABAB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nhưng

$$BABA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 1.34 (ĐH Sao Đỏ)**.** Đặt $u_n = (x_n, y_n, z_n); u_{n+1} = Au_n^t; A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$

Xét $|A - tI| = 0 \Leftrightarrow (t+2)^2(t-4) = 0.$

Ma trận chéo hóa $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ và ma trận chuyển cơ sở $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow A = PBP^{-1} \Rightarrow A^{2014} = PB^{2014}P^{-1}$, với $B^{2014} = \begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2014} & 0 \\ 0 & 0 & 4^{2014} \end{pmatrix}.$

Tìm được A^{2014} suy ra $x_{2014} = 2^{2014} + 4^{2014}$.

Bài 1.35 (ĐH Sao Đỏ)**.** Ta có

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{10+2\sqrt{5}} & \sqrt{5}-1 \\ 1-\sqrt{5} & \sqrt{10+2\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{18} & \sin\frac{\pi}{18} \\ -\sin\frac{\pi}{18} & \cos\frac{\pi}{18} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = 4^n\begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{18} & \sin\frac{n\pi}{18} \\ -\sin\frac{n\pi}{18} & \cos\frac{n\pi}{18} \end{pmatrix}.$$

Bài 1.36 (ĐH Sao Đỏ)**.** Xét các phương trinh $Ax = 0$ (1) và $(A + A^2 + \cdots + A^n)X = 0$ (2) .
Gọi X_0 là nghiệm của phương trình (1) suy ra X_0 cũng là nghiệm của phương trình (2).
Giả sử x_0 là nghiệm của (2) ta có $Ax_0 = -A^2x_0 - \cdots - A^nx_0 = A^2Bx_0$.
Với $B = -E - A - A^2 - cldots - A^{n-2}$; ta có $AB = BA$.

$$Ax_0 = A^2Bx_0 = ABA^2Bx_0 = \cdots = B^mA^mAx_0 = 0.$$

Do đó phương trình (1) và (2) cũng có cùng tập nghiệm. Suy ra:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A + A^2 + \ldots + A^n).$$

Bài 1.37 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Từ giả thiết ta có $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ và $X = Y$, $X^3 = I_2$. Từ $X^3 = I_2$ ta có các giá trị riêng của X chỉ có thể là nghiệm của đa thức $t^3 - 1 = (t-1)(t^2+t+1)$. Đa thức đặc trưng $P_x(t)$ của X là đa thức bậc hai nên nếu có nghiệm phức thì có cả hai nghiệm phức, do đó chỉ có thể xảy ra các khả năng:

$$\begin{bmatrix} P_x(t) & = & (t-1)^2 \\ P_x(t) & = & t^2+t+1. \end{bmatrix}$$

TH 1. Nếu $P_x(t) = (t-1)^2$ ta có $X^2 = 2X - I_2$ nên thay vào $X^3 = I_2$ ta được $2X^2 - X - I_2 = 0$. Do đó ta được $X = I_2$. Thử lại dễ thấy $X = I_2$ thỏa mãn.
TH 2. Nếu $P_x(t) = t^2 + t + 1$ thì $\det X = 1, \operatorname{Tr}(X) = -1$. Do đó nếu ma trận $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thì $\begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1. \end{cases}$

Ngược lại nếu $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ thỏa mãn $\begin{cases} a + d = -1 \\ ad - bc = 1 \end{cases}$ thì đa thức đặc trưng của X là $P_x(t) = t^2+t+1$. Theo định lý Cayley-Hamilton ta có $X^2+X+I_2 = 0$. Do đó $X^3 = I_2$.

Bài 1.38 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta chứng minh $\det A \neq 0$. Thật vậy, gọi $\overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_n}$ tương ứng là các véc tơ dòng của ma trận $A = [a_{ij}]$. Khi đó:

$$\overrightarrow{c_1} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \overrightarrow{c_2} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots\dots \overrightarrow{c_n} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

Ta chứng minh hệ véc tơ $\overrightarrow{c_1}, \dots, \overrightarrow{c_n}$ là hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử:

$$\lambda_1 \overrightarrow{c_1} + \lambda_2 \overrightarrow{c_2} + \lambda_n \overrightarrow{c_n} = \overrightarrow{0} \qquad (*)$$

Đặt $|\lambda_k| = \max\{|\lambda_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$. Nếu $\lambda_k \neq 0$ thì từ (*) xét tại tọa độ thứ k ta có:

$$\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots + \lambda_k a_{kk} + \dots + \lambda_n a_{nk} = 0$$

Suy ra:

$$2014 < |a_{kk}| \leq \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{|\lambda_i|}{\lambda_k}|a_{ik}|\right) \Leftrightarrow 2014 < \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left(\frac{|\lambda_i|}{|\lambda_k|}\right) = 2014$$

Điều vô lý này chứng tỏ $\lambda_k = 0$, do đó từ tính chất cực đại của $|\lambda_k|$ suy ra $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Vậy $\det A \neq 0$

Bài 1.39 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.**

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \end{array}\right)^2 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2.2014^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2014^2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2.2014^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2014^2 \end{array}\right).$$

Tương tự ta có

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2014 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2014 \end{array}\right)^{2014}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2^{2013}.2014^{2014} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{2013}.2014^{2014} \\ 0 & 2^{2013} & 0 & 0 & 2^{2013} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B^{2014}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^{2013} & 0 & 0 & 2^{2013} & 0 \\ 2^{2013}.2014^{2014} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{2013}.2014^{2014} \end{array}\right).$$

Trong đó
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ta có $B^4 = -4I$. Do đó $B^{2014} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{107} \\ -2^{107} & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 1.40 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** (i) Theo định nghĩa.
(ii) Ta có $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}((AB)^T)$. Theo (i), ta có

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\frac{1}{2}(A-B)(A-B)^T) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T - AB^T - BA^T + BB^T) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T - 2AB^T + BB^T) \geq 0. \\
\mathrm{tr}(\frac{1}{2}(B-C)(B-C)^T) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(BB^T - BC^T - CB^T + CC^T) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(BB^T - 2BC^T + CC^T) \geq 0. \\
\mathrm{tr}(\frac{1}{2}(C-A)(C-A)^T) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T - AB^T - BA^T + BB^T) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T - 2AB^T + BB^T) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bài 1.41 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Ta có

$$(I-A)(I + A + \cdots + A^{2013}) = I - A^{2014} = I$$

nên $\det(I-A) \neq 0$. Hơn nữa,

$$(I - A - A^{1007})(I - A + A^{1007}) = (I-A)^2 - A^{2014} = (I-A)^2,$$

do đó $\det(I - A - A^{1007}) \neq 0$. Mặt khác,

$$(I-A)B = I - A - A^{1007} + A^{2014} = I - A - A^{1007}.$$

Do đó, bằng cách lấy định thức hai vế ta được $\det(B) \neq 0$, nghĩa là B khả nghịch.

Bài 1.42 (ĐH Tân Trào)**.** Nếu $\mathrm{rank}(A) = 0$ thì kết quả là hiển nhiên. Ta xét trường hợp $\mathrm{rank}(A) = 1$. Khi đó các dòng là tỷ lệ với nhau theo một tỷ số nào đó. Không giảm tổng quát, ta có

$$A = \begin{pmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \dots & u_2v_n \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \dots & u_3v_n \\ . & . & . & \dots & . \\ u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \dots & u_nv_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Đặt $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdots \\ u_n \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$, suy ra $A = UV^T$.

Theo định nghĩa vết của ma trận, ta có: $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = V^T U$, Do đó $A^2 = (UV^T)^2 = UV^T UV^T = U(V^T U)V^T = \operatorname{trace}(A).A$.

Bài 1.43 (ĐH Tân Trào). Đặt $A = (a-b)I + bU$, trong đó $U = (1)_{k\times k}$. Ta có:

$$U^n = k^{n-1}U$$

Theo nhị thức Newton ta suy ra kết quả:

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i (a-b)^{n-i} b^i U^i \\ &= (a-b)^n I + \sum_{i=1}^n C_n^i (a-b)^{n-i} b^i U^i \\ &= (a-b)^n I + \sum_{i=1}^n C_n^i (a-b)^{n-i} (kb)^i \frac{1}{k} U \\ &= (a-b)^n I - \frac{1}{k}(a-b)^n U + \frac{1}{k} U \sum_{i=0}^n C_n^i (a-b)^{n-i} (kb)^i \\ &= (a-b)^n I - \frac{1}{k}\left[(a+(k-1)b)^n - (a-b)^n\right] U \end{aligned}$$

2 ĐỊNH THỨC

Bài 2.1 (ĐH An Giang). Giả sử $A = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$. Ta có $A^* = \begin{bmatrix} q & -n \\ -p & m \end{bmatrix}$ và $d = mq - np$. Suy ra

$$\det(A + dA^*) = d[(d-1)^2 + (m+q)^2].$$

Mà $\det(A + dA^*) = 0$ và $d \neq 0$, nên $d = 1$ và $q = -m$. Do đó

$$\det(A - dA^*) = \det \begin{bmatrix} 2m & 2n \\ 2p & 2q \end{bmatrix} = \det(2A) = 4d = 4.$$

Chú ý. Trong bài toán này, để biểu diễn được định thức dưới dạng tổng bình phương thì đòi hỏi sinh viên có kỹ thuật và suy luận tốt.

Bài 2.2 (HV An ninh Nhân dân)**.** Cho ma trận $A \in M_n\mathbb{R}$ như sau

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0\dots & 0 & 0 & \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Hãy tìm một véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho hệ véc tơ $\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x\}$ độc lập tuyến tính.
b. Giả sử ma trận A đồng dạng với ma trận đường chéo $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Chứng tỏ rằng các số $b_1, \dots, b_n$ khác nhau từng đôi một.

Bài 2.3 (ĐH Bạc Liêu)**.** Sau khi thay $F_k(\cos\phi_i)$ bởi các giá trị của nó rồi thực hiện các bước sau:
– biến đổi $d_2 \to d_2 - a_{11}d_1$, ta được dòng thứ hai có dạng

$$a_{01}(\cos\phi_1, \cos\phi_2, \cdots, \cos\phi_n);$$

– lấy a_{01} ở dòng hai ra ngoài dấu định thức để làm nhân tử chung,
– biến đổi $d_3 \to d_3 - a_{12}d_2 - a_{22}d_1$, ta được dòng thứ hai có dạng

$$a_{02}(\cos^2\phi_1, \cos^2\phi_2, \cdots, \cos^2\phi_n);$$

– ....
Cứ tiếp tục quá trình trên, ta được định thức

$$D_n = a_{01}a_{02}\dots a_{0,n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\phi_1 & \cos\phi_2 & \cdots & \cos\phi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{n-1}\phi_1 & \cos^{n-1}\phi_2 & \cdots & \cos^{n-1}\phi_n \end{vmatrix}.$$

Đây là định thức Vandermonde, và ta được

$$D_n = a_{01}a_{02}\dots a_{0,n-1}\prod_{i>j}(\cos\phi_i - \cos\phi_j).$$

Nhận xét. Có thể thay $\cos\phi_i$ bởi x_i, $i = 1, \dots, n$.

Bài 2.4 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** – Trường hợp ma trận B khả nghịch:

$$\det(A + B) = \det((AB^{-1} + I)B) = \det B.\det(AB^{-1} + I)$$

B giao hoán với A dp đó B^{-1} cũng giao hoán với A. A lũy linh suy ra $X = AB^{-1}$ cũng lũy linh, do đó đa thức đặc trưng

$$P_X(\lambda) = det(X - \lambda I) = (-\lambda)^n \Rightarrow \det(AB^{-1} + I) = P_X(-1) = 1$$

– Trường hợp B không khả nghịch, ta có $\det B = 0$.
Với mọi số tự nhiên $k \neq 0$, xét ma trận $B_k = B - \frac{1}{k}I$, B_k giao hoán với A và tồn tại N sao cho B_k khả nghịch với mọi $k \geq N$, do đó $\det(A + B_k) = \det(B_k), \forall k \geq N$.
Sử dụng tính liên tục của định thức ta được:

$$\det(A+B) = \lim_{k\to\infty} \det(A+B_k) = \lim_{k\to\infty} \det B_k = \det B$$

Bài 2.5 (HV Bưu chính Viễn thông). Đa thức đặc trưng của ma trận A có thể biểu diễn dưới dạng:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + C_1(-\lambda)^{n-1} + C_2(-\lambda)^{n-2} + \ldots + C_n$$

Trong đó C_k là tổng tất cả các định thức con chính bậc k của A.
Đặc biệt, $C_n = \det A, C_1 = \mathrm{Tr}(A) = 2013$. Vì $r(A) = 1$ nên $C_k = 0$, với mọi $k \geq 0$. Vậy

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + 2014(-\lambda)^{n-1},$$

hay

$$\det(A+I) = P_A(-1) = (1)^n + 2014(1)^n = 2015$$

Bài 2.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Ta có

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A+B)^3 - 3AB(A+B) \\ &= -(C+I)^3 - 3AB(A+B) \\ &= -[C^3 + I + 3C(C+I)] - 3AB(A+B). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 + C^3 + I &= -3AB(A+B) - 3C(C+I) \\ &= 3(C+I)(AB - C) \\ &= 3(C+I)(AB + A + B + I) \\ &= 3(A+I)(B+I)(C+I). \end{aligned}$$

Do đó,

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3(A+I)(B+I)(C+I) = -I.$$

Như vậy

$$\det[A^3 + B^3 + C^3 - 3(A-I)(B-I)(C-I)] = -1.$$

Bài 2.7 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Xét định thức cấp $n+1$ có dạng

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} \quad (1).$$

Bằng cách khai triển định thức theo dòng thứ $n+1$ ta thấy $\Delta(z)$ là một đa thức bậc n có dạng

$$\Delta(z) = a_n z_n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Hơn nữa, từ (1) ta dễ dàng thấy rằng $x_1, x_2, ..., x_n$ là các nghiệm của $\Delta(z)$. Do đó $\Delta(z)$ chỉ có các nghiệm là $x_1, x_2, ..., x_n$. Theo định lý Viete, ta được

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

nghĩa là

$$a_{n-1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) a_n.$$

Dễ dàng thấy

$$a_{n-1} = -\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Do đó ta được kết quả cần chứng minh.

Bài 2.8 (Dự bị). 1. Điều kiện $X_i \cap X_j = k$ nói rằng

$$\sum_s a_{si} a_{js} = k.$$

Từ đó suy ra

$$M = {}^tAA = \begin{pmatrix} d_1 & k & \cdots & k \\ k & d_2 & \cdots & k \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k & d_m \end{pmatrix}$$

2. Kí hiệu $e_1, \ldots, e_m$ cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^m$ và C là véc tơ cột (phần tử của $\mathbb{R}^m$) với tất cả các hệ số bằng k. Thế thì

$$\det M = \det\left(C + (d_1 - k)e_1), \ldots, C + (d_m - k)e_m\right).$$

Từ đây, bằng cách khai triển định thức và sử dụng tính tuyến tính, cùng với nhận xét rằng các định thức của các ma trận mà ở đó cột C xuất hiện ≥ 2 lần bằng 0, ta suy ra

$$\det M = \prod_{i=1}^{n}(d_i - k)$$
$$+\sum_{i=1}^{n} \det\left((d_1-k)e_1, \ldots, (d_{i-1}-k)e_{i-1}, C, (d_{i+1}-k)e_{i+1}, \ldots, (d_n-k)e_n\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{array}{rcl} \det M & = & \prod_{i=1}^{m}(d_i-k) \\ & & +\sum_{i=1}^{m}(d_1-k)\cdots(d_{i-1}-k)k(d_{i+1}-k)\cdots(d_n-k) \\ & = & \prod_{i=1}^{m}(d_i-k) + k\sum_{i=1}^{m}\prod_{j\neq i}(d_j-k). \end{array}$$

3. Chú ý rằng $k \leq d_j$ với mọi i (vì $k = |X_i \cap X_j| \leq |X_i|$) và đẳng thức $k = d_j$ chỉ xảy ra với không quá 1 chỉ số j. Ta suy ra $\det M$ là một số thực dương. Nói riêng $\det M \neq 0$, hay M có hạng bằng m. Nhưng do $A \in M_{n,m}(\mathbb{R}), {}^tA \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ta suy ra $rk^tAA \leq rkA \leq n$. Từ đó $m \leq n$.

Bài 2.9 (ĐH Đồng Tháp)**.** Vì A luôn là nghiệm của đa thức đặc trưng nên $A^2 - 5A + 6I = 0$. Vậy

$$g(A) = A^{2014} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 3^{2012} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\det(g(A)) = 6^{2014}$.
Và $f(A) = -A$ nên

$$[f(A)]^{2014} = A^{2014} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2^{2014} & 0 \\ 0 & 3^{2012} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{2015} - 3^{2014} & 2.3^{2014} - 2^{2015} \\ 2^{2014} - 3^{2015} & 2.3^{2014} - 2^{2014} \end{pmatrix}.$$

Bài 2.10 (ĐH Đồng Tháp)**.** Tính định thức của tích

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & -a_1 & -a_4 & a_3 \\ a_3 & a_4 & -a_1 & -a_2 \\ a_4 & -a_3 & a_2 & -a_1 \end{pmatrix}^T$$

Suy ra $D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$.
Tương tự đối với định thức tích $D(a_1, a_2, a_3, a_4)D(b_1, b_2, b_3, b_4)$.

Bài 2.11 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Từ giả thiết suy ra a_{ii} chẵn và a_{ij} lẻ $(i \neq j)$. Xét theo modulo 2, ta có

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 42013 & 42013 & \dots & 42013 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv 42013 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Dẫn đến

$$\det A \equiv 42013 \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots & 1 & \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \equiv -42013 \equiv 1.$$

Vậy $\det A \neq 0$.

Bài 2.12 (CĐ Ngô Gia Tự). Giả sử $\det(B) \neq 0$, nghĩa là B khả nghịch. Từ giả thiết ta suy ra $A + I = B^{-1}AB$. Do đó $\operatorname{trace}(A) + \operatorname{trace}(I) = \operatorname{trace}(A + I) = \operatorname{trace}(B^{-1}AB) = \operatorname{trace}(A)$, nghĩa là $\operatorname{trace}(I) = 0$. Đây là điều mâu thuẫn. Vậy $\det(B) = 0$.

Bài 2.13 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội). Bắt đầu từ dòng thứ nhất đến dòng thứ $n-1$, cộng vào nó tổng của tất cả các dòng đứng sau nó, ta được.

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & x+n-1 & x+n-1 & \dots & x+n-1 & x+n-1 \\ n-1 & x+n-2 & x+n-1 & x+n-1 & \dots & x+n-1 & x+n-1 \\ 0 & n-2 & x+n-3 & x+n-1 & \dots & x+n-1 & x+n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Tiếp theo, với j lần lượt bằng $n-1, n-2, \dots, 1$, nhân cột thứ j với -1 rồi cộng vào cột thứ $j+1$, ta được

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x-1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x-1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Sau đó, khai triển định thức trên theo dòng 1, ta có

$$
\begin{aligned}
&= (x+n-1)D_{n-1}(x-1)\\
&= (x+n-1)(x+n-3)D_{n-2}(x-2)\\
&= \dots\\
&= \prod_{i=1}^{n}(x+n-2i+1).
\end{aligned}
$$

Bài 2.14 (HV Phòng không Không quan)**.** Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:
Cho $P(x) = x^2+ax+b$ là tam thức bậc hai với hệ số thực và $P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. A là ma trận vuông cấp n bất kì. Chứng minh rằng $\det(P(A)) \geq 0$.
Thật vậy, từ giả thiết suy ra $P(x)$ có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda, \overline{\lambda}$. hay ta có:

$$P(x) = (x-\lambda)(x-\overline{\lambda})$$

Từ đó ta suy ra:

$$P(A) = (A-\lambda I_n)(A-\overline{\lambda}I_n) = (A-\lambda)\overline{(A-\lambda)}$$

Suy ra $\det(P(x)) = |(A-\lambda I_n)|^2 \geq 0$. Bổ đề được chứng minh.
Xét đa thức $q(x) = x^4+4 = (x^2+2)^2-4x^2 = (x^2-2x+2)(x^2+2x+2) = q_1(x)q_2(x)$
Ta thấy $q_1(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, q_2(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ($q_1(x)$ có hai nghiệm phức liên hợp là $1 \pm i$ và $q_2(x)$ có hai nghiệm phức hợp $-1 \pm i$). Theo bổ đề ta có : $\det(q_1(A)) \geq 0; \det(q_2(A)) \geq 0$. Từ đó suy ra $\det(A^4+4I_n) = \det(P(A)) = \det(q_1(A))\det(q_2(A)) \geq 0$. ĐPCM
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hoặc $\det(q_1(A)) = 0$ hoặc $\det(q_2(A)) = 0$. Hay đa thức đặc trưng của A hoặc nhận $1 \pm i$ hoặc nhận $-1 \pm i$ làm nghiệm.

Bài 2.15 (HV Phòng không Không quân)**.** Ta có

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2014\\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2012 & 2013\\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2011 & 2012\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 2013 & 2012 & 2011 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Cộng cột đầu và cột cuối ta được

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2013 & 2015\\ 2 & 1 & 2 & \dots & 2012 & 2015\\ 3 & 2 & 1 & \dots & 2011 & 2015\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 2013 & 2012 & 2011 & \dots & 2 & 2015 \end{vmatrix}$$

$$= 2015\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & \ldots & 2012 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \ldots & 2011 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2013 & 2012 & 2011 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nhân hàng thứ 2013 với -1 rồi cộng vào hàng cuối, nhân hàng 2012 với -1 rồi cộng vào hàng 2013, nhân hàng thứ 2011 với -1 rồi cộng vào hàng thứ 2012,..., nhân hàng đầu với -1 rồi cộng vào hàng thứ hai ta được:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức theo cột cuối cùng, ta được:

$$D = (-1)^{2015}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -2015\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Cộng hàng cuối vào hàng còn lại ta được

$$D = -2015\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -2015\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2015.2^{2012}$$

Bài 2.16 (ĐH Quảng Nam). Từ giả thiết suy ra $\det A = \pm 1$, $\det B = \pm 1$. Do $\det A \neq \det B$ nên $\det A + \det B = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} \det B.\det(A+B) &= \det B.\det(A+B)^t = \det(BA^t + I) \\ &= \det(AB^t + AA^t) = \det A.\det(A+B) \\ &= -\det B.\det(A+B). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\det B.\det(A+B) = 0$. Mà $\det B = \pm 1$. Vậy $\det(A+B) = 0$.

Bài 2.17 (ĐH Quảng Nam)**.** Ta chứng minh A, B có chung một vectơ riêng. Thật vậy, giả sử U là một không gian con riêng của A ứng với giá trị riêng γ_1. Khi đó với mọi $x \in U$ ta có:

$$A(Bx) = B(Ax) = \gamma_1(Bx) \Rightarrow Bx \in U$$

Ta nhận thấy B ánh xạ từ U vào U. Do đó B có một vectơ riêng là phần tử của U. Vì vậy A, B có chung vectơ riêng.
Bằng cách chứng minh tương tự ta chứng minh được A, B, C có chung một vectơ riêng $y \neq 0$ ứng với các giá trị riêng $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tương ứng của A, B, C. Hiển nhiên rằng $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_2$ phụ thuộc tuyến tính trong không gian số phức. Do đó tồn tại các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 sao cho $a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 = 0$.
Khi đó $(aA + bB + cC)y = (a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_2)y = 0$.
Vậy $\det(aA + bB + cC) = 0$.

Bài 2.18 (ĐH Quy Nhơn)**.** Vì $a_{i+6,j} = (i+6)^j + j^{i+6} \equiv i^j + j^i = a_{ij}(mod 3)$ nên $\det A = 0,$ với $n \geq 7$.
Với $n = 6$ tính toán trực tiếp ta nhận được $\det A = 0$
Với $n = 5$ tình toán trực tiếp ta nhận được $\det A = 12$
Vậy $n = 5$.

Bài 2.19 (ĐH Sao Đỏ)**.** Ta đặt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \dots & C_n^n a_1^n \\ 1 & C_n^1 a_2 & C_n^2 a_2^2 & \dots & C_n^n a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_n^1 a_{n+1} & C_n^2 a_{n+1}^2 & \dots & C_n^n a_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Và

$$B = \begin{pmatrix} b_1^n & b_1^n & b_3^n & \dots & b_{n+1}^n \\ b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & b_3^{n-1} & \dots & b_{n+1}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} (a_1 + b_2)^n & (a_1 + b_2)^n & \dots & (a_1 + b_{n+1})^{n+1} \\ (a_2 + b_1)^n & (a_2 + b_2)^n & \dots & (a_2 + b_{n+1})^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n+1} + b_1)^n & (a_{n+1} + b_2)^n & \dots & (a_{n+1} + b_{n+1})^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = |A||B| = C_n^1 C_n^2 \dots C_n^n \prod_{n \geq i > j} (a_i - a_j)(b_i - b_j).$$

Thay $n = 2014$ và $a_k = k; b_k = -k$. Suy ra

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2^{2014} & 3^{2014} & \dots & |2014^{2014} \\ 1 & 0 & 1 & 2^{2014} & \dots & 2013^{2014} \\ 2^{2014} & 1 & 0 & 1 & \dots & 2012^{2014} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2014^{2014} & 2013^{2014} & \dots & 2^{2014} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Bài 2.20 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Vì $B = AA^t + I_{2014}$ là ma trận đối xứng nên B có tất cả 2014 giá trị riêng đều là số thực.
Gọi λ là một giá trị riêng của ma trận B ứng với véc tơ riêng là $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$. Ta có:

$$Bx = \lambda x \Rightarrow (AA^t + 4I_{2014})x = \lambda x \Rightarrow AA^t x = (\lambda - 4)x$$

Nhân cả hai vế bên trái với x^t ta được:

$$x^t AA^t x = (\lambda - 4)x^t x \Rightarrow (A^t c)^t (A^t x) = (\lambda - 4)x^t x \geq 0.$$

Từ $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ nên ta có $\lambda - 4 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 4$.
Mặt khác định thức của ma trận B là tích của tất cả các giá trị riêng của nó kể cả bội nên định thức của B thỏa mãn:

$$\det B = \det\left(AA^t + 4I_{2014}\right) \geq 2^{4028}.$$

Bài 2.21 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). (i) Theo Định lý Caley-Hamilton $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A) = 0$.
Lấy vết hai vế ta có điều phải chứng minh.
(ii) Gọi các giá trị riêng của B là $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ta có: $\mathrm{tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$; $\mathrm{tr}(B^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Từ đó ta có $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)}{2} = \frac{(\mathrm{tr}(B))^2 - \mathrm{tr}(B^2)}{2}$.
Đa thức đặc trưng của B là $P(x) = (-1)^3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) = (-1)(x^3 - \mathrm{tr}(A)x^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)x - \det(B))$. Theo Định lý Caley-Mamilton, ta có

$$B^3 - \mathrm{tr}(B)B^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)B - \det(B) = 0.$$

hay

$$B^3 - \mathrm{tr}(B)B^2 + (\frac{(\mathrm{tr}(B))^2 - \mathrm{tr}(B^2)}{2})B - \det(B) = 0.$$

Lấy vết hai vế ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.22 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Ta có:

$$D_{2014} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014} - 1 + 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 0 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 0 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014}-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo cột cuối, cộng cột cuối định thức thứ hai với các cột trước nó, ta được: $D_{2014} = (a_{2014} - 1)D_{2013} + (a_1 + 1)...(a_{2013} + 1)$ Mặt khác

$$D_{2014} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & a_{2014}+1-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{2014}+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ -1 & a_2 & ... & 1 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & -1 & ... & ... & 1 \\ -1 & -1 & ... & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức đầu theo dòng cuối, cộng dòng cuối định thức thứ hai với các dòng trước nó, ta được: $D_{2014} = (a_{2014}+1)D_{2013} - (a_1 - 1)...(a_{2013} - 1)$. Gải hệ trên, ta được

$$D_{2014} = \frac{(a_1 + 1)...(a_{2014} + 1) + (a_1 - 1)...(a_{2014} - 1)}{2}.$$

Bài 2.23 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Giả sử p, q là các số nguyên tố lớn hơn 3. Suy ra p, q là các số lẻ và không chia hết cho 3. Do đó $p^2 - q^2$ chia hết cho 8 và p^2, q^2 cùng chia 3 dư 1, nghĩa là $p^2 - q^2$ chia hết cho 24. Như vậy, bằng cách lấy từ dòng thứ 2 đến dòng thứ n trừ cho dòng thứ nhất của $\det(A)$, ta được tất cả các phần tử từ dòng thứ 2 đến dòng thứ n của $\det(A)$ đều chia hết cho 24. Do đó $\det(A)$ chia hết cho 24^{n-1}.

Bài 2.24 (ĐH Tân Trào). Lập định thức $D^*(z)$ có dạng như sau:

$$D^*(z) = \begin{vmatrix} a_1+z & x+z & x+z & ... & x+z \\ y+z & a_2+z & x+z & ... & x+z \\ y+z & y+z & a_3+z & ... & x+z \\ . & . & . & ... & . \\ y+z & y+z & y+z & ... & a_n+z \end{vmatrix}.$$

và đặt $B = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$, trong đó A_{ij} là phần bù đại số của các phần tử trong định thức D. Sử dụng khai triển đa tuyến tính đối với $D^*(z)$ ta có:

$$D^*(z) = D + \sum_{i} \begin{vmatrix} a_1 & \ldots & z & \ldots & x \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ y & \ldots & z & \ldots & x \\ . & \ldots & . & \ldots & . \\ y & \ldots & z & \ldots & a_n \end{vmatrix} = D + z\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} = D + zB$$

Do đó ta có:

$$\begin{cases} D^*(-x) = D - xB = (a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_3 - x) \\ D^*(-y) = D - yB = (a_1 - y)(a_2 - y)\ldots(a_3 - y) \end{cases}$$

Suy ra

$$D = \frac{x(a_1 - y)(a_2 - y)\ldots(a_3 - y) - y(a_1 - x)(a_2 - x)\ldots(a_3 - x)}{x - y}$$

3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 3.1 (ĐH An Giang). Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (a_{11}+1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{12}x_1 + (a_{22}+1)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}+1)x_n & = & 0. \end{cases}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình có dạng $M = A + I$. Ta có

$$M(A - 2I) = (A + I_n)(A - 2I_n) = A^2 - A - 2I_n = -2I_n.$$

Suy ra $\det(M) \neq 0$, nghĩa là M khả nghịch. Do đó hệ đã cho chỉ có nghiệm tầm thường.
Chú ý. Bài toán này được xây dựng dựa trên ý tưởng phân tích đa thức $t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$. Dựa trên ý tưởng này, ta có thể thay đổi hệ số -1 ở vế phải bởi hệ số α khác 0 và khác 1, rồi áp dụng sự phân tích

$$(t - \alpha)(t + \alpha - 1) = t^2 - t - \alpha(\alpha - 1)$$

ta cũng được kết quả tương tự.

Bài 3.2 (ĐH Bạc Liêu). Do $k \neq -1$ và $k \neq 3$ nên ma trận hệ số của hệ phương trình có dạng chính tắc theo dòng là

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{-2k+2}{k-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{1+k}{k-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{2(k-1)}{k-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{-(k-1)^2}{k-3} \end{bmatrix}.$$

Từ đây ta được kết quả cần chứng minh.

Bài 3.3 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Đặt $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$. Hệ đã cho tương đương với $\left(A - \dfrac{1}{n}I\right)X = 0$. Ta có A là ma trận với hệ số nguyên nên đa thức đặc trưng $p(t)$ của A là đa thức đơn khởi (hệ số cao nhất bằng 1) với hệ số nguyên. Do đó $p(t)$ không thể có nghiệm hữu tỷ không nguyên. Suy ra $p\left(\dfrac{1}{n}\right) \neq 0$, nghĩa là $\det\left(A - \dfrac{1}{n}I\right) \neq 0$. Như vậy, hệ phương trình trên chỉ có nghiệm tầm thường.
Chú ý. Đây là lời giải khác với lời giải do tác giả đề xuất, sử dụng tính chất của đa thức đặc trưng và tính chất nghiệm của đa thức.

Bài 3.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Bằng cách đặt $y_i = x_i - 671 (i = 1, 2, \dots, 2014)$, hệ đã cho thành:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + y_3 + y_4 = 0 \\ y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ y_4 + y_5 + y_6 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y_{2011} + y_{2012} + y_{2013} = 0 \\ y_{2012} + y_{2013} + y_{2014} = 0 \\ y_{2013} + y_{2014} + y_1 = 0 \\ y_{2014} + y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất và thứ hai suy ra $y_1 = y_4$. Tù phương trình thứ tư và thú năm suy ra $y_4 = y_7$. Tiếp tục quá trình này cuối cùng ta được $y_1 = y_4 = y_7 = \dots = y_{2014}$. Bằng lập luận tương tự, ta được $y_2 = y_5 = y_8 = \dots = y_{2012}, y_3 = y_6 = y_9 = \dots = y_{2013}$. Từ hai phương trình cuối cùng ta thu được $y_2 = y_{2013}$. Từ phương trình đầu tiên và phương trình cuối cùng ta thu được $y_3 = y_{2014}$. Kết hợp các khẳng định trên suy ra $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_{2014}$. Thay vào hệ ta được $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_{2014} = 0$. Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{2014} = 671$.

Bài 3.5 (CĐ Ngô Gia Tự). Cộng vế theo vế tất cả các phương trình của hệ, ta được

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2014} = 1.$$

Trừ phương trình thứ k cho phương trình thứ $k+1$ $(k < 2014)$, ta được

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2014}) - 2014x_k = k - (k+1) = -1.$$

Suy ra $x_k = \dfrac{2}{2014}$ và $x_{2014} = 1 - \sum\limits_{k<2014} x_k = -\dfrac{2012}{2014}$.

Chú ý. Ta có thể thay số 2014 bởi số tự nhiên n bất kỳ.

Bài 3.6 (ĐH Phạm Văn Đồng). Đặt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Hệ đã cho trở thành $(A + 2014E)X = 0$. Lấy chuyển vị hai vế ta được $X^t(A + 2014X)^t = 0$. Dẫn đến $X^t(-A + 2014E) = 0$, hay $-X^tA + 2014X^tE = 0$. Từ đây suy ra $-X^tAX + 2014X^tEX = 0$.
Ta có $AX + 2014X = 0 \Leftrightarrow AX = -2014X$. Kết hợp lại, ta được

$$X^t(-2014X) + 2014X^tX = 0 \Leftrightarrow X^tX + X^tX = 0 \Leftrightarrow X^tX = 0.$$

Như vậy,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{2014} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{2014} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \ldots x_{2014}^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots = x_{2014} = 0$$

Bài 3.7 (ĐH Sao Đỏ). Ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} (1 + a_1b_1)x_1 + a_1b_1x_2 + \ldots + a_1b_nx_n = c_1 \\ a_2b_1x_1 + (1 + a_2b_2)x_2 + \ldots + a_2b_nx_n = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_nb_1x_1 + a_nb_2x_2 + \ldots + (1 + a_nb_n)x_n = c_n \end{cases}$$

Xét định thức

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & 1+a_nb_n \end{vmatrix} = D_{n-1} + a_nb_n$$

$D_n = 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = 1$
Theo Cramer hệ luôn luôn có nghiệm $x_i = \frac{D_n^j}{D_n} = D_n^i$
D_n^i là định thức D bỏ di cột i thay bằng $(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$.
Do vậy hệ luôn có nghiệm nguyên (đpcm).

Bài 3.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Viết hệ phương trình đã cho dưới dạng

$$Ax = \frac{1}{2014}x \Leftrightarrow (A - \frac{1}{2014}I_{2014})x = 0$$

Giả sử $\det(A - \frac{1}{2014}I_{2014}) = 0$. Điều này chứng tỏ $\lambda = \frac{1}{2014}$ là một giá trị riêng của A. Vì vậy đa thức đặc trưng của A là

$$P_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(A)t^{n-1} + \ldots + \det A \in \mathbb{Z}[t]$$

đa thức trên nhận $\lambda = \frac{1}{2014}$ là một nghiệm . Từ đó suy ra 2014 là ước của $(-1)^n$. Vô lý này chứng tỏ $\det(A - \frac{1}{2014}I_{2014}) \neq 0$, vì vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Bài 3.9 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Tách ma trận hệ số dưới dạng

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2013} & a_{2014} \\ a_{2014} & a_1 & a_2 & \dots & a_{2012} & a_{2013} \\ a_{2013} & a_{2014} & a_1 & \dots & a_{2011} & a_{2012} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{2014} & a_1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+....+a_{2014}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Đặt

$$B=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Theo trên, ta có $A = a_1I + a_2B + ... + a_{2014}B^{2013}$. Đa thức đặc trưng của B là $P(x) = x^{2014} - 1$. Đa thức này có 2014 nghiệm trong trường số phức là các căn bậc 2014 của 1. Ta ký hiệu các căn là $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_{2014}$. Khi đó các giá trị riêng của A là $P(\epsilon_1), P(\epsilon_2), ..., P(\epsilon_{2014})$. Các giá trị này khác không vì $P(x)$ có các nghiệm $2, 3, ..., 2014$. Từ trên ta có $\det(A) = P(\epsilon_1)P(\epsilon_2)...P(\epsilon_{2014}) \neq 0$. Vậy A chỉ có nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = ... = x_{2014} = 0$.

Bài 3.10 (ĐH Tân Trào). Ký hiệu S là tập hợp nghiệm của hệ phương trình. Lần lượt tính các ẩn theo x_1, tách các trường hợp chỉ số chẵn, lẻ của ẩn.
a. Với $n = 4$ hệ phương trình vô nghiệm, nếu $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 \neq 0$.
Nếu $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0$, thì hệ phương trình có vô số nghiệm. Không giảm tổng quát,

$$\begin{aligned}&x_1 \in \mathbb{R}\\&x_2 = 2a_1 - x_1\\&x_3 = 2a_2 - 2a_1 + x_1\\&x_4 = 2a_3 - 2a_2 + 2a_1 - x_1\\&x_5 = 2a_4 - 2a_3 + 2a_2 - 2a_1 + x_1\end{aligned}$$

Với $n = 5$, ta có nghiệm của hệ là:

$$\begin{aligned}x_1 &= \ \ a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1\\x_2 &= -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1\\x_3 &= \ \ a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1\\x_4 &= -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1\\x_5 &= \ \ a_5 - a_4 + a_3 - a_2 + a_1\end{aligned}$$

b.Trường hợp tổng quát:
(1). Nếu n chẵn, $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$. thì:

$S = \emptyset$, nếu $a_{2k} - a_{2k-1} + \cdot + a_2 - a_1 \neq 0$;

$S = \{x_1, 2a_1 - x_1, 2(a_2 - a_1) + x_1, ..., 2(a_{2k-1} - a_{2k-2} + \cdots + a_1) - x_1\}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, nếu $a_{2k} - a_{2k-1} + \cdot + a_2 - a_1 = 0$.

(2). Nếu n lẻ, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$, thì:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{2k+1} - a_{2k} + \cdots + a_3 - a_2 + a_1 \\
x_{2i+1} &= a_{2k+1} - a_{2k} + \cdots - a_{2i+2} + a_{2i+1} - a_{2i} + \cdots + a_3 - a_2 + a_1 \\
x_{2i} &= -a_{2k+1} + a_{2k} - \cdots + a_{2i} - a_{2i-1} + a_{2i-2} - \cdots - a_3 + a_2 - a_1 \\
i &\in \{1, 2, ..., k\}
\end{aligned}$$

4 KHÔNG GIAN VÉC TƠ VÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Bài 4.1 (HV An ninh nhân dân). a. Có thể lấy $x = (0, 0, \dots, 0, 1)^t$ và dễ dàng kiểm tra nó thỏa mãn yêu cầu
b. Do A $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, tức là A chéo hóa được, nên tồn tại một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ gồm n véc tơ riêng độc lập tuyến tính của A là $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
Với x đã chọn như trên ta có

$$\begin{aligned}
&x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n \\
&Ax = \alpha_1 b_1 e_1 + \alpha_2 b_2 e_2 + \dots + \alpha_n b_n e_n \\
&\dots = \dots \\
&A^{n-1}x = \alpha_1 b_1^{n-1} e_1 + \alpha_2 b_2^{n-1} e_2 + \dots + \alpha_n b_n^{n-1} e_n
\end{aligned}$$

Vì hệ véc tơ $\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x\}$ độc lập tuyến tính, nên

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 b_1 & \alpha_2 b_2 & \dots & \alpha_n b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 b_1^{n-1} & \alpha_2 b_2^{n-1} & \dots & \alpha_n b_n^{n-1} \end{bmatrix} = D \neq 0$$

Sử dụng định thức Vandermonde ta được $D = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \prod\limits_{i>j} (b_i - b_j) \neq 0$. Suy ra các số $b_1, \dots, b_n$ khác nhau từng đôi một.

Bài 4.2 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Từ giả thiết ta có $[\dim(V_1 + V_2) - \dim V_1] + [\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)] = 1$. Mà $\dim(V_1 + V_2) \geq \dim V_1 \geq \dim(V_1 \cap V_2)$. Do đó $[\dim(V_1 + V_2) - \dim V_1] = 0$ hoặc $[\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)] = 0$. Suy ra $V_2 \subseteq V_1$ hoặc $V_1 \subseteq V_2$, nghĩa là $V_1 \cup V_2 = V_1$ hoặc $V_1 \cup V_2 = V_2$. Từ đó ta được kết quả cần chứng minh.

Bài 4.3 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Đặt $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và không gian con $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & s \\ c & d & s \\ s & s & 3s \end{pmatrix} \right\}$. W là không gian con 5 chiều của $M_3(R)$ với một cơ sở gồm các ma trận

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Xét ánh xạ $f : M_3(R) \to M_3(R)$ thỏa $f(A) = PAQ$. Vì P, Q khả nghịch nên f là một sóng ánh. Để chứng minh $\dim(H) = 5$, ta cần chứng tỏ $f(H) = W$.

Thật vậy, xét $A = (a_{ij})_3 \in H : f(A) = PAQ = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & s \\ a_{21} & a_{22} & s \\ s & s & 3s \end{pmatrix} \in W, s = a_{11} + a_{12} + a_{13}$.

Thêm nữa, $f^{-1}(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, $f^{-1}(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in H$, $f^{-1}(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$, $f^{-1}(A_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in H$, $f^{-1}(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in H$.

Như vậy $f(H) = W$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.4 (ĐH Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh). Dễ thấy $A^3 X_i = X_i, i = 1, 2, 3$. Vì X_1, X_2, X_3 độc lập nên $A^3 = I$.
A là ma trận thực cấp 3 (lẻ) nên chắc chắn có 1 trị riêng bằng 1.
Hơn nữa, $(A^2 + A + I)(X_1 - X_2) = A^2(X_1 - X_2) + A(X_1 - X_2) + X_1 - X_2 = X_3 - X_1 + X_2 - X_3 + X_1 - X_2 = 0$ do đó $\det(A^2 + A + I) = 0$ tức A phải có 3 trị riêng phân biệt

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 - i\sqrt{3}, \lambda_3 = -1 + i\sqrt{3}.$$

Đặt $Y_k = X_1 + \lambda_k^2 X_2 + \lambda_3 X_3$. Ta có

$$AY_k = X_2 + \lambda_k^2 X_3 + \lambda_3 X_1 = \lambda_k(\lambda_k^2 X_2 + \lambda_k X_3 + X_1) = \lambda_k Y_k.$$

Điều này chứng tỏ Y_k là VTR của A ứng với TR $\lambda_k, k = 1, 2, 3$.
Ta suy ra A chéo hóa được, tức $A = PDP^{-1}$ với $D = diag(\lambda_k)$ và $P = [Y_1\ Y_2\ Y_3]$.
Để kết thúc, ta chú ý

$$P = [X_1\ X_2\ X_3]\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

hay

$$A = [X_1\ X_2\ X_3]PDP^{-1}[X_1\ X_2\ X_3]^{-1} = [X_1\ X_2\ X_3]\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}[X_1\ X_2\ X_3]^{-1}.$$

Bài 4.5 (HV Bưu chính Viễn thông). – Trường hợp tồn tại $P_j(x) \equiv 0$ thì mệnh đề đúng

– Giả sử $P_j(x)$ không đồng nhất bằng 0 đối với mọi j.
Nếu các bậc $n_1, n_2, \ldots, n_r$ khác nhau, giả sử $n_1 < \ldots < n_r$ thì

$$n_i \geq i - 1 \Rightarrow n_1 + \ldots + n_r \geq \frac{r(r-1)}{2} \text{ vô lý.}$$

vậy tồn tại $i \neq j$ sao cho $n_i = n_j = n. P_j(x) = ax^n + \ldots, P_i(x) = bx^n + \ldots$
Đặt $Q_i = P_j - \frac{a}{b}P_i$: $\deg(Q_i) < n$, lúc đó hệ $\{P_1(x), \ldots, P_r(x)\}$ phụ thuộc $\Leftrightarrow$ hệ $\{P_1(x), \ldots, P_{i-1}(x), Q_i, P_{i+1}(x), \ldots, P_j(x), P_r(x)\}$ phụ thuộc. Tổng của bậc của hệ $\{P_1(x), \ldots, P_{i-1}(x), Q_i, P_{i+1}(x), \ldots, P_j(x), P_r(x)\}$ nhỏ hơn $\frac{r(r-1)}{2} - 1$. Tiếp tục quá trình này cuối cùng được hệ mới có đa thức đồng nhất bằng 0, do đó phụ thuộc tuyến tính.

Bài 4.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Đặt $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Do $AB = BA$ nên $(a_i - a_j)b_{ij} = 0, \forall i, j$. Suy ra, nếu $a_i \neq a_j$ thì $b_{ij} = 0$. Do đó $\dim V$ chính bằng số các cặp chỉ số (i, j) sao cho $a_i = a_j$. Với mỗi c_m, số cặp chỉ số $a_i = a_j = c_m$ là r_m^2. Do đó $\dim V = r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_k^2$.

Bài 4.7 (Dự bị). Ký hiệu V là không gian véc tơ gồm các đa thức thuần nhất theo $X_1, \ldots, X_n$ có bậc d với hệ số thực. Khi đó dễ thấy V sinh bởi các đơn thức có dạng $X_1^{r_1}X_2^{r_2}\ldots X_n^{r_n}$ với $r_1, \ldots, r_n \geq 0$ và $r_1 + \ldots + r_n = d$. Hệ sinh này là một hệ cơ sở của V. Như vậy, để tính chiều của V ta chỉ cần đếm số đơn thức như trên, nói cách khác ta đi đếm các bộ số nguyên không âm $(r_1, \ldots, r_n)$ là nghiệm của phương trình $r_1 + \ldots + r_n = d$. Tính toán ta sẽ thấy chiều của V là

$$\binom{n+d-1}{d}.$$

Bài 4.8 (Dự bị). 1. Hiển nhiên ta có $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$. Từ đó suy ra dãy các không gian con $\ker f^k, k \geq 0$, là tăng (thứ tự bao hàm). Từ đó suy ra các dãy $\dim Im\ f^k, k \geq 0$, và $\dim \ker f^k, k \geq 0$ tương ứng là dãy tăng. Đây là một dãy các số tự nhiên, bị chặn bởi n, chiều của V. Từ đó suy ra tồn tại một số nguyên m nhỏ nhất sao cho $\ker f^m = \ker f^{m+1}$, nói riêng $\ker f^0 \subsetneq \ker f^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker f^m$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ với mọi $m \geq k$. Giả sử $k \geq m$ và $x \in \ker f^{k+1}$. Thế thì do $0 = f^{k+1}(x) = f^{m+1}(f^{k-m}(x))$ ta suy ra $f^{k-m}(x) \in \ker f^{m+1}$. Giả thiết $\ker f^m = \ker f^{m+1}$ dẫn đến $f^{k-m}(x) \in \ker f^m$ và do đó $f^k(x) = 0$, hay $x \in \ker f^k$. Từ đó $\ker f^{k+1} \subset \ker f^k$ và như vậy $\ker f^k = \ker f^{k+1}$. Như vậy, dãy $\ker f^k, k \geq 0$, là một dãy tăng thực sự tới $k = m$ và không đổi kể từ đó. Nói riêng, ta phải có $m \leq n$. Mặt khác, ta nhắc lại định lý về hạng

$$\dim \ker f^k + \dim Im\ f^k = \dim V = n.$$

Từ đó ta cũng dễ dàng suy ra dãy $Im\ f^k$ là giảm thực sự tới $k = m$ rồi không đổi kể từ đó. Khẳng định được chứng minh.

2. Ta có, với mọi $k \geq 0$, $f(\ker f^{k+1}) \subset \ker f^k$: nếu $x \in \ker f^{k+1}$ thì $f^{k+1}(x) = 0$, nghĩa là $f^k(f(x)) = 0$, hay $f(x) \in \ker f^k$. Tương tự $f(\ker f^{k+2}) \subset \ker f^{k+1}$. Điều này cho thấy ánh xạ f gửi $\ker f^{k+2}$ lên $\ker f^{k+1}$ đồng thời gửi không gian con $\ker f^{k+1}$ lên $\ker f^k$. Từ đó suy ra f cảm sinh một ánh xạ tuyến tính

$$\bar{f} : \ker f^{k+2}/\ker f^{k+1} \longrightarrow \ker f^{k+1}/\ker f^k.$$

Ánh xạ $\bar{f}$ là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử $\bar{x} \in \ker f^{k+2}/\ker f^{k+1}$ sao cho $\bar{f}(\bar{x}) = 0$. Điều này có nghĩa là $f(x) \in \ker f^k$ (với mọi $x \in \ker f^{k+2}$ với ảnh $\bar{x}$ trong $\ker f^{k+2}/\ker f^{k+1}$). Nói cách khác $f^{k+1}(x) = 0$, hay $x \in \ker f^{k+1}$, và như vậy $\bar{x} = 0$.

Từ đó suy ra $\dim(\ker f^{k+2}/\ker f^{k+1}) \leq \dim(\ker f^{k+1}/\ker f^k)$. Từ đó suy ra $\dim \ker f^{k+1} - \dim \ker f^k \geq \dim \ker f^{k+2} - \dim \ker f^{k+1}$ và khẳng định được chứng minh.

3. Ta có $\dim \ker f^m + \dim Im\ f^m$. Do vậy, ta chỉ cần chứng minh tổng $\ker f^m + Im\ f^m$ là trực tiếp. Trường hợp $m = 0$ là tầm thường, ta giả sử $m \geq 1$. Giả sử $x \in \ker f^m \cap Im\ f^m$. Giả sử $y \in V$ sao cho $x = f^m(y)$. Thế thì $f^m(y) = f^{2m}(x) = 0$. Ta suy ra $x \in \ker f^{2m}$ và do đó $x \in \ker f^m$, hay $f^m(x) = 0$. Như vậy $y = 0$ và tổng cần chứng minh là trực tiếp.

4. Giả sử $A \in M_n(\mathbb{R})$. Theo các kết quả ở trên, áp dụng cho tự đẳng cấu của $\mathbb{R}^n$ tương ứng với ma trận A trong cơ sở chính tắc, $\mathbb{R} = \Im A^m \oplus \ker A^m$. Chú ý rằng các không gian $V_1 = \ker A^m, V_2 = Im\ A^m$ ổng định bởi A vì: $A(\ker A^m) \subset \ker A^{m-1} \subset ker A^m, A(Im\ A^m) = A^{m+1} \subset A^m$.

Bây giờ, xét một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ được tạo thành từ một cơ sở của $V_1 = \ker A^m$ và một cơ sở của $V_2 = Im\ A^m$. Thế thì ma trận của A (tốt hơn là của tự đồng cấu xây dựng từ A như đã nói ở trên) trong cơ sở như vậy có dạng $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$. Để kết thúc, ta chú ý rằng hạn chế của A xuống V_1 là luỹ linh ($x \in \ker A^m \implies A^m(x) = 0$) và hạn chế của A xuống V_2 là khả nghịch vì là một toàn cấu ($A(Im\ A^m) = A^{m+1} = A^m$.)

Bài 4.9 (Dự bị)**.** Một mặt, nếu tồn tại các phần tử $x_1, \dots, x_n$ sao cho ma trận $(f_i(x_j))$ là khả nghịch thì $f_1, \dots, f_n$ hiển nhiên độc lập tuyến tính: nếu không, mọi quan hệ phụ thuộc tuyến tính của chúng sẽ cảm sinh một quan hệ phụ thuộc tuyến tính trên các vector hàng của ma trận $(f_i(x_j))$.
Đảo lại, ta giả sử $f_1, \dots, f_n$ là một họ độc lập tuyến tính. Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của các phần tử $x_1, \dots, x_n$ với tính chất yêu cầu. Ta thiết lập khẳng định này bằng qui nạp theo n. Trường hợp $n = 1$ là rõ ràng: nói rằng họ một hàm số f là độc lập nghĩa là nói f không tầm thường, nói cách khác, tồn tại x để $f(x) = 0$. Giả sử khẳng định đã là đúng cho $n - 1$ và $f_1, \dots, f_n$ là một họ độc lập n các hàm số trên X. Nói riêng, họ $f_1, \dots, f_{n-1}$ cũng độc lập. Theo giả thiết qui nạp, tồn tại các phần tử $x_1, \dots, x_{n-1}$ để $\det(f_i(x_j))_{1 \le i,j \le n-1} \neq 0$. Với $x \in X$, xét định thức

$$d(x) = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) & f_1(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{n-1}(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_{n-1}) & f_{n-1}(x) \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_{n-1}) & f_n(x) \end{vmatrix}.$$

Bằng cách khai triển theo cột cuối cùng ta thu được một biểu thức

$$d(x) = d_1 f_1(x) + \cdots + d_{n-1} f_{n-1}(x) + d_n f_n(x),$$

trong đó d_i là đối định thức tương ứng với hệ số $f_i(x)$. Mặt khác $d_n = \det(f_i(x_j))_{1 \le i,j \le n-1} \neq 0$ và các f_i là độc lập $d(x)$ không thể đồng nhất bằng 0. Giả sử $d(x_n) \neq 0$. Thế thì bộ $x_1, \dots, x_n$ thoả mãn yêu cầu bài ra với họ $f_1, \dots, f_n$.

Bài 4.10 (Dự bị)**.** 1. Nếu f chéo hoá được, mọi cơ sở chéo hoá f cũng chéo hoá f^2 và $\ker f = \ker f^2 =$ không gian riêng của f ứng với giá trị riêng 0. Thật vậy, hiển nhiên ta có $\ker f \subset \ker f^2$ và $\dim \ker f = \dim \ker f$ vì cả f và f^2 đều có hạng bằng số các giá trị riêng $\neq 0$ của f.
Đảo lại, giả sử f^2 chéo hoá được và $\ker f = \ker f^2$. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ là các giá trị riêng $\neq 0$ của f^2. Với mỗi $1 \le i \le k$ gọi α_i là một căn bậc 2 của λ_i. Do $X^2 - \lambda_i = (X - \alpha_i)(X + \alpha_i)$ và $X - \alpha_i, X + \alpha_i$ nguyên tố cùng nhau (do điều kiện $\lambda_i \neq 0$) nên công thức phân tích hạch cho ta

$$\ker(f^2 - \lambda_i \mathrm{Id}) = \ker(\mathrm{f} - \alpha_\mathrm{i}\mathrm{Id}) \oplus \ker(\mathrm{f} + \alpha_\mathrm{i}\mathrm{Id}).$$

Điều này cho thấy

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \ker f \oplus (\oplus_{i=1}^k \ker f - \lambda_i \mathrm{Id}) \\ &= \ker f \oplus (\oplus_{i=1}^k \ker(f - \alpha_i \mathrm{Id}) \oplus \ker(\mathrm{f} + \alpha_\mathrm{i}\mathrm{Id})). \end{aligned}$$

Đẳng thức trên cho ta phân tích của $\mathbb{C}^n$ thành tổng trực tiếp các không gian riêng của f và do đó f chéo hoá được.

2. Kí hiệu A là ma trận đã cho trong đề bài và $(e_1, \ldots, e_n)$ cơ sở chính tắc của $\mathbb{C}^n$. Thế thì $A^2 e_i = a_i a_{n+1-i} e_i$ với mọi i. Nói riêng A^2 là chéo hoá được. Hơn nữa, $\dim \ker A = \#\{i; a_i = 0\}$ và $\dim \ker A^2 = \#\{i; a_i a_{n+1-i} = 0\}$. Từ đó suy ra $\dim \ker A = \dim \ker A^2 \Leftrightarrow (a_i = 0 \Leftrightarrow a_{n+1-i} = 0, \forall i)$.

Bài 4.11 (ĐH Đồng Tháp)**.** Chứng minh $\dim(F_1 + F_2 + ... + F_n) \leq \dim F_1 + \dim F_2 + ... + \dim F_n$ bằng quy nạp theo n.

Bài 4.12 (ĐH Ngoại Thương - Hà Nội)**.** Xét ánh xạ tuyến tính $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \to V^2$ với $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3)$
$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha, \alpha, \alpha)$ với mọi $\alpha \in V_1 \cap V_2 \cap V_3$.
Do đó $\dim (V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \dim \ker f$

$$4019 \leq \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3 = \dim V_1 \times V_2 \times V_3 = \dim \ker f + \dim Imf$$

Ta có

$$4029 \leq \dim \ker f + \dim V^2 = \dim \ker f + 4028$$

Nên $\dim V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \dim \ker f \geq 1$ hay $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \neq 0$.

Bài 4.13 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội)**.** Theo định nghĩa của bậc lũy linh, ta có $u^{p-1} \neq 0$. Hơn nữa, $u^k \neq 0$ với mọi $1 \leq k \leq p-1$, vì nếu $u^k = 0$ thì $u^{p-1} = u^k . u^{p-1-k} = 0$, suy ra vô lý.
Vì $u^{p-1} \neq 0$ nên tồn tại $x \in E$ sao cho $u^{p-1}(x) \neq 0$. Ta sẽ chứng minh hệ véctơ $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$ độc lập tuyến tính. (*2 điểm*)
Lấy $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in R^p$ mà $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. Giả sử có ít nhất một số α_k khác không. Đặt $i = \min\big\{k \in \{0, 1, \ldots, p-1\} : \alpha_k \neq 0\big\}$. Ta có:

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0$$

Suy ra

$$u^{p-1-i}\Big(\sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k u^k(x)\Big) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=i}^{p-1} \alpha_k u^{p-1-i+k}(x) = 0 \text{ (\textit{2 điểm})}$$

Suy ra $\alpha_i u^{p-1}(x) = 0$ (vì với $k \geq i+1$ thì $p-1-i+k \geq p$ nên $u^{p-1-i+k} = 0$. Do đó $\alpha_i = 0$ vì $u^{p-1}(x) \neq 0$. Suy ra vô lý. Suy ra $\alpha_k = 0, \forall k$. Vậy hệ $\{x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\}$ độc lập tuyến tính (*1 điểm*).

Bài 4.14 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Giả sử $a_0 id + a_1 f + \ldots + a_{p-1} f^{p-1} = 0, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \ldots, p-1$. Nhân f^{p-2} vào hai vế cảu đẳng thức ta được $a_0 f^{p-2} = 0$. Từ $f^{p-2} \neq 0$ ta suy ra $a_0 = 0$. Do đó ta có:

$$a_1 f + a_2 f^2 + \ldots + a_{p-1} f^{p-1}, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, p-1$$

Nhân hai vế với f^{p-3} vao hai vế của đẳng thức ta được $a_1 f^{p-2} = 0$. Do đó $a_1 = 0$. Thực hiện tương tự ta được $a_3 = a_4 = \ldots = a_{p-1} = 0$. Chứng tỏ hệ các tự đồng cấu $\{id_E, f, \ldots, f^{p-1}\}$ là độc lập tuyến tính.

Bài 4.15 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). Đặt $A = \left(\int\limits_a^b f_i(x) f_j(x) dx \right)$. Do $\det A = 0$ nên hệ các véctơ dòng của A phụ thuộc tuyến tính, nghĩa là tồn tại $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho với mọi $j = 1, 2, ..., n$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Big(\int\limits_a^b f_i(x) f_j(x) dx \Big) = 0.$$

Mặt khác

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \Big)^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) f_j(x) \Big),$$

nên bằng cách lấy tích phân hai vế của đẳng thức trên ta suy ra

$$\int\limits_a^b \Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \Big]^2 dx = 0.$$

Do đó $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$, nghĩa là $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ phụ thuộc tuyến tính.

5 GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VÉC TƠ RIÊNG

Bài 5.1 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Giả sử λ là một trị riêng của A. Khi đó tồn tại $u \neq 0$ sao cho $Au = \lambda u$. Do B lũy linh nên tồn tại số nguyên $k \geq 0$ sao cho $v := B^k u \neq 0$ và $Bv = B^{k+1} u = 0$. Kết hợp giả thiết $AB = BA$, ta có $(A + \lambda B)v = Av = A(B^k u) = B^k(Au) = B^k(\lambda u) = \lambda v$, nghĩa là λ là trị riêng của $A + \lambda B$.
Ngược lại, nếu λ là trị riêng của $A + \lambda B$ thì áp dụng chứng minh trên với hai ma trận $A + \lambda B$ và $-B$ ta được λ là trị riêng của $(A + \lambda B) + \lambda(-B) = A$.

Bài 5.2 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Ta có

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ b^{-1} & 0 & b & \dots & b^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{1-n} & b^{2-n} & b^{3-n} & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

nên

$$\det(A + xI) = \begin{vmatrix} x & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ b^{-1} & x & b & \dots & b^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b^{1-n} & b^{2-n} & b^{3-n} & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Bằng cách nhân dòng thứ i cho b^i rồi lấy dòng thứ i trừ dòng thứ nhất ta được

$$\det(A + xI) = b^{-1}.b^{-2}\dots b^{1-n} \begin{vmatrix} x & b & b^2 & \dots & b^{n-1} \\ 1-x & b(x-1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-x & 0 & 0 & \dots & b^{n-1}(x-1) \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} x & b & b^2 & \dots & b^n \\ -b^{-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b^{1-n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Tiếp tục lấy cột thứ nhất cộng b^{1-i} cột thứ i ta được $\det(A + xI) = (x - 1)^{n-1}(x + n - 1)$. Bằng cách thay x bởi $-t$ ta được đa thức đặc trưng của A là $p(t) = (t + 1)^{n-1}(t - n + 1)$. Suy ra $\det(A) = (-1)^n p(0) = (-1)^n(1 - n)$ và A có 2 trị riêng là $\lambda_1 = n - 1$ (đơn) và $\lambda_2 = -1$ (bội $n - 1$).

Bài 5.3 (CĐ Ngô Gia Tự). Giả thiết của bài toán tương đương với

$$(A + B - I)^2 = (A - I)(B - I).$$

Do đó $\det(A + B - I) = 0$ khi và chỉ khi $\det(A - I) = 0$ hay $\det(B - I) = 0$. Nghĩa là ta được điều phải chứng minh.

Bài 5.4 (ĐH Sao Đỏ). a. Nếu A khả nghịch AB và $A^{-1}ABA$ có cùng đa thức đặc trưng hay AB và BA có cùng giá trị riêng. Nếu A không khả nghịch $\det(A) = 0$, tồn tại m đủ lớn $A_k = A - \frac{A}{k}$ không suy biến (k>m). Do vậy A_kB và BA_k có cùng giá trị riêng.

$$|A_kB - \lambda E| = |BA_k - E| \text{ Cho } k \to \infty \text{ đpcm}$$

b. Giả sử A lũy linh cấp m, B là lũy linh cấp n ta có $A^m = 0; B^n = 0$. Xét $(A + B)^{m+n} = \sum\limits_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k A^k B^{m+n-k} = 0$

Suy ra A+B lũy linh (đpcm)

Bài 5.5 (ĐH Tân Trào). Theo giả thiết ta có $AA^* = A^*A$, $A^{**} = A$, ta có:

$$(Ax)^*Ax = x^*A^*Ax = x^*AA^*x = (A^*x)^*A^*x.$$

Mặt khác, vì λ là giá trị riêng của A, nên $Ax = \lambda x$, hay $Ax - \lambda x = 0$. Ký hiệu $\overline{\lambda}$ là số phức liên hợp của số phức λ. Khi đó:

$$\begin{aligned}
0^*0 &= (Ax - \lambda x)^*(Ax - \lambda x) = ((Ax)^* - \overline{\lambda}x^*)(Ax - \lambda x)\\
&= (x^*A^* - \overline{\lambda}x^*)(Ax - \lambda x)\\
&= x^*A^*Ax - x^*A^*\lambda x - \overline{\lambda}x^*Ax + \overline{\lambda}x^*\lambda x\\
&= x^*AA^*x - \lambda x^*A^*x - \overline{\lambda}x^*Ax + \overline{\lambda}x^*\lambda x\\
&= x^*A(A^*x - \overline{\lambda}x) - \lambda x^*(A^*x - \overline{\lambda}x)\\
&= (x^*A - \lambda x^*)(A^*x - \overline{\lambda}x)\\
&= [(x^*A - \lambda x^*)]\,(A^*x - \overline{\lambda}x)\\
&= (A^*x - \overline{\lambda}x)^*(A^*x - \overline{\lambda}x)\\
&\Rightarrow A^*x = \overline{\lambda}x.
\end{aligned}$$

Do đó x là véc tơ riêng của ma trận A^* ứng với giá trị riêng $\overline{\lambda}$.

6 ĐA THỨC

Bài 6.1 (ĐH Bách Khoa Hà Nội). Đặt $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^{(k)}(x)$. Ta có $g(x) = f(x) + g'(x)$ và $\deg g(x) = \deg f(x) = n$. Do $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên n là số chẵn. Do đó $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$. Giả sử $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0, khi đó $g'(x_0) = 0$, nên $g(x_0) = f(x_0) \geq 0$. Do đó $g(x) \geq g(x_0) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.2 (HV Bưu chính Viễn thông). Ta sẽ chứng minh với đa thức bậc n: $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ có đầy đủ nghiệm thực thì $P'(a) - n(P(a))^{\frac{n-1}{n}} \geq 0$ với $a > \max\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sử dụng đẳng thức: $\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x-x_i}$ và phân tích: $P(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Khi đó thay a vào các đẳng thức trên ta được $\frac{P'(a)}{P(a)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a-x_i}$ và $P(a) = \prod\limits_{i=1}^{n}(a - x_i)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương $\frac{1}{a-x_i} > 0 (i = 1, \ldots, n)$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - x_i} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n}(a - x_i)}}$$

Hay $\frac{P'(a)}{P(a)} \geq \frac{n}{\sqrt[n]{P(a)}} \Leftrightarrow (P'(a))^n \geq n^n(P(a))^{n-1}$ (vì $P'(a), P(a) > 0$), thay $n = 2014$ và ta có đpcm.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi các nghiệm bằng nhau.

Bài 6.3 (HV Bưu chính Viễn thông). Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3$ cho nên các điểm tới hạn là $x = -1, x = 1$ và do đó các giá trị tới hạn là $f(-1) = 3, f(1) = -1$. Lại có $f(-2) = -1, f(0) = 1, f(2) = 3$ cho nên các không điểm của $f(x)$ nằm trong các khoảng $(-2; -1), (0; 1), (1; 2)$. Như vậy ta chỉ cần đếm số lần f đi qua mỗi khoảng là sẽ được số nghiệm của $f(f(x)) = 0$. Thật vậy, f đi qua $(-2; -1)$ đúng một lần (khi $x < 2$), đi qua $(0; 1)$ với 3 lần (khi $-2 < x < -1, 0 < x < 1, 1 < x < 2$) và cuối cùng f đi qua $(1; 2)$ đúng 3 lần. Vì vậy tổng cộng $f(f(x)) = 0$ có đúng 7 nghiệm phân biệt.

Bài 6.4 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Giả sử $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, với $a_n \neq 0$. Suy ra $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$.
- Nếu $n \geq 2$ thì thừa số bậc cao nhất của $P(P'(x))$ là

$$a_n(na_n x^{n-1})^n = n^n a_n^{n+1} x^{n(n-1)};$$

thừa số bậc cao nhất của $P'(P(x))$ là

$$na_n(a_n x^n)^{n-1} = na_n^n x^{n(n-1)}.$$

Do đó, từ $P(P'(x)) = P'(P(x))$ ta suy ra $n^n a_n = n$, nghĩa là $n = 1$ và $a_n = 1$ (do a_n nguyên) $\rightarrow$ mâu thuẫn.
- Nếu $n = 0$ thì từ $P(P'(x)) = P'(P(x))$ suy ra $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $n = 1$ thì $P(x) = ax + b$, nên từ $P(P'(x)) = P'(P(x))$ suy ra $b = a - a^2$. Do đó $P(x) = ax + a - a^2$, với a nguyên.
Vậy các đa thức thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $P(x) \equiv 0$ và $P(x) = ax + a - a^2$, với a nguyên.

Bài 6.5 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Nếu $P(x) = 0$ là một hằng số thì ta được $a^2 = a \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 1$. Vậy $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.
Giả sử $\deg P(x) > 0$. Dễ thấy hệ số cao nhất của $P(x)$ phải bằng 1. Gọi $x_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của $P(x)$. Khi đó $x_0 - 1$ cũng là một nghiệm của $P(x+1)$. Suy ra

$$x_0^2 + x_0 + 1; (x_0 - 1)^2 + (x_0 - 1) + 1 = x_0^2 - x_0 + 1$$

đều là nghiệm của $P(x)$. Giả sử x_0 là nghiệm có môđun lớn nhất trong số tất cả các nghiệm của $P(x)$. Khi đó ta có $|x_0| \geq |x_0^2 + x_0 + 1|, |x_0| \geq |x_0^2 - x_0 + 1|$. Suy ra

$$2|x_0| \geq |x_0^2 + x_0 + 1| + |x_0^2 - x_0 + 1| \geq |(x_0^2 + x_0 + 1) - (x_0^2 - x_0 + 1)| = 2|x_0|.$$

Điều này dẫn đến $|x_0| = |x_0^2 + x_0 + 1| = |x_0^2 - x_0 + 1|, x_0^2 + x_0 + 1 = \lambda(x_0^2 - x_0 + 1), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$. Nếu $\lambda = 0$ thì $x_0 = 0$. Từ trên suy ra $x^2 + x_0 + 1 = 0$ vô lí. Do đó $\lambda > 0$ và dễ dàng suy ra $\lambda = 1$. Vậy $x_0^2 + 1 = 0$. Vì $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ nên tồn tại $Q(x) \in \mathbb{R}[x], Q(x)$ không chia hết cho (x^2+1) và số nguyên dương n để $P(x) = (x^2+1)^n Q(x)$. Dễ kiểm tra được đa thức $Q(x)$ thỏa mãn

$$Q(x)Q(x+1) = Q(x^2+x+1).$$

Lập luận tương tự như trên suy ra $Q(x) = 0$ hoặc $Q(x) = 1$.
Vậy có đáp số $P(x) = 0, P(x) = 1$ hoặc $P(x) = (x^2+1)^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6.6 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Nếu $P(x) = 0$ là một hằng số thì ta được $a^2 = a \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = 1$. Vậy $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = 1$.
Giả sử $\deg P(x) > 0$. Dễ thấy hệ số cao nhất của $P(x)$ phải bằng 1. Gọi $x_0 \in \mathbb{C}$ là một nghiệm của $P(x)$. Suy ra x_0^2 cũng là một nghiệm của $P(x)$. Do đó ta được dãy số $x_0, x_0^2, x_0^4, \ldots, x_0^{2n}, \ldots$ gồm những nghiệm của $P(x)$.
Nếu $|x_0| < 1$ thì $x_0, x_0^2, x_0^4, \ldots, x_0^{2n}, \ldots$ phân biệt vì $|x_0| > |x_0^2| > |x_0^4| > \ldots > |x_0^{2n}| > \ldots$. Điều này vô lí vì $P(x)$ không thể có vô số nghiệm.
Nếu $|x_0| > 1$ thì $x_0, x_0^2, x_0^4, \ldots, x_0^{2n}, \ldots$ phân biệt vì $|x_0| < |x_0^2| < |x_0^4| < \ldots < |x_0^{2n}| < \ldots$. Điều này vô lí vì $P(x)$ không thể có vô số nghiệm. Do đó mọi nghiệm x_0 của $P(x)$ đều thỏa mãn $|x_0| = 1$. Gọi $n = \deg P(x), a_1, \ldots, a_n$ là nghiệm của $P(x) : P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.
Suy ra $P(x^2) = (x^2-a_1)(x^2-a_2)\ldots(x^2-a_n)$ và $P(x-1) = (x-(a_1+1))(x-(a_2+1))\ldots(x-(a_n+1))$. Từ hệ thức $P(x)P(x-1) = P(x^2)$ suy ra $a_1+1, a_2+1, \ldots, a_n+1$ cũng là nghiệm của $P(x^2)$. Như vậy các phần tử này thuộc tập hợp

$$\{-\sqrt{a_1}, -\sqrt{a_2}, \ldots, -\sqrt{a_n}, \sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}\},$$

và do đó cũng có môđun bằng 1. Viết $a_k = \cos\alpha_k + i\sin\alpha_k$. Khi đó

$$1 = |a_k + 1| = |\cos\alpha_k + i\sin\alpha_k + 1| \Leftrightarrow \cos\alpha_k = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a_k = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ hoặc $a_k = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Do đó $P(x)$ chỉ gồm các nhân tử

$$(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = x^2 + x + 1.$$

Vậy $P(x) = (x^2+x+1)^m, m \in \mathbb{N}^*$
Đáp án: $P(x) = 0$ hoặc $P(x) = (x^2+x+1)^m, m \in \mathbb{N}^*$.

Bài 6.7 (CĐ Ngô Gia Tự). Nếu người đi trước viết số -1 vào hệ số của x thì $f(x) = x(x^2-1) + *x^2 + *$. Do đó chiến thuật luôn thắng của người đi trước là: Nếu người chơi sau viết số a vào một dấu $*$ thì người đi trước viết số $-a$ vào dấu $*$ còn lại.

Bài 6.8 (ĐH Nông nghiệp Hà Nội). Ta có $P(x) = a_0$ không thỏa mãn vậy $P(x)$ có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

với $a_n \neq 0$. Khi khai triển 2 vế của (1) thì số hạng có bậc lớn nhất của $P(P(x)) + 1$ là

$$a_n(a_n x^n)^n = a_n^{n+1} x^{n^2}$$

còn số hạng có bậc lớn nhất của $\left[P^2(x) + 2P(x) + (x^2+3x+1)^2\right]^2$ là

$$\begin{cases} x^8 & \text{nếu } n < 2 \\ (a_n^2+1)x^8 & \text{nếu } n = 2 \\ a_n^4 x^{4n} & \text{nếu } n \geq 2. \end{cases}$$

Nếu $n \leq 2$ thì trước hết ta phải có

$$x^{n^2} = x^8 \Rightarrow n^2 = 8$$

Điều trên vô lý vì n là số tự nhiên. Vậy $n > 2$ và

$$a_n^{n+1} x^{n^2} = a_n^4 x^{4n}$$

Suy ra

$$\begin{cases} a_n^{n+1} = a_n^4 \\ n^2 = 4n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ a_n = 1 \end{cases}$$

Do vậy ta cần tìm đa thức dạng

$$P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Ta đặt $G(x) = P(x) - (x^2+3x+1)^2 + 1$. Vậy (1) tương đương với

$$P(P(x)) + 1 = \left[P^2(x) + 3P(x) + 1 - G(x)\right]^2$$

$$\Rightarrow P(P(x)) - \left[P^2(x) + 3P(x) + 1\right]^2 + 1 = G(x)\left[G(x) - 2(P^2(x) + 3P(x) + 1)\right]$$

$$\Rightarrow G(P(x)) = G(x)\left[G(x) - 2(P^2(x) + 3P(x) + 1)\right]$$

Nếu $G(x)$ khác 0, ta đặt $k = degG$, $(k \leq 3)$ nên ta có $4k = k + 8$. Suy ra vô lý vì k là số tự nhiên, vậy $G(x) = 0, \forall x$. Từ đó ta có

$$P(x) = (x^2+3x+1)^2 - 1 = x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Bài 6.9 (ĐH Phạm Văn Đồng)**.** Do $x_1, ..., x_n$ là nghiệm nên $P(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$. Ta có:

$$P'(x) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Xét đa thức: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n \prod_{j=1}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j} - x^n + \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$

Ta có $f(x_1) = ... = f(x_n) = 0$ và bậc $f(x) \leq n - 1$. Do đó $f(x) = 0$

Đa thức $f(x)$ có hệ tử cao nhất là $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^n}{\prod_{j=1}^{n}(x_i - x_j)} - (x_1 + ... + x_n) = 0$

Theo Viet $x_1 + ... + x_n = -1$. Vậy $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^n}{\prod_{j=1}^{n}(x_i - x_j)} = -1$.

Bài 6.10 (HV Phòng không Không quân)**.** Gọi $x_1, x_2, \ldots, x_m$ là các nghiệm của $Q(x)$ (kể cả bội). Giả sử môđun của chúng không vượt quá 2014. Theo định lý Viét ta có:

$$\begin{cases} |b_1| = |-(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)| \leq 2014.m \\ \cdots\cdots\cdots \\ |b_k| = \left|(-1)^k \sum\limits_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_1 x_2 \ldots x_k\right| \leq 2014^k.C_m^k \qquad (1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ |b_m| = |(-1)^m x_1 x_2 \ldots x_m| \leq 2014^m \end{cases}$$

Rõ ràng (1) mâu thuẫn với giả thiết $|b_k| > 2014^k.C_m^k$. Như vậy đa thức $Q(x)$ có ít nhất một nghiệm y thỏa mãn bất đẳng thức:

$$|y| > 2014. \quad (2)$$

Do đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ nên ta có $P(y) = 0$. Giả sử

$$|a_i| \leq 2013, \forall i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 0 = |P(y)| &= \left|y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} y + a_n\right| \\ &\geq |y^n| - \left|a_1 y^{n-1}\right| - \ldots | - |a_{n-1} y| - |a_n|. \quad (4) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta có:

$$|a_i| \leq 2013 < |y| - 1; \forall i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta nhận được:

$$0 = |P(y)| \geq |y^n| - (|y| - 1)(\left|y^{n-1}\right| + \ldots + |y| + 1) = 1 \quad \text{(mâu thuẫn)}$$

Vậy tồn tại i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sao cho $|a_i| > 2013$.

Bài 6.11 (ĐH Quảng Nam). Giả sử $a_1, a_2, ..., a_{33}$ là 33 nghiệm nguyên của đa thức $P(x) - 2014$.
Do $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$ trên vành $\mathbb{Z}[x]$ nên $Q(a_1), Q(a_2), ..., Q(a_{33})$ chia hết cho 2014 hay $Q(a_i) in A = \{1, -1, 2, -2, 1007, -1007, 2014, -2014\}$. ($A$ có 8 phần tử.). Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một giá trị $a \in A$ sao cho

$$Q(a_{i_1}) = Q(a_{i_2}) = Q(a_{i_a} = Q(a_{i_5}) = a \neq 0.$$

Vậy $\deg Q(x) \geq 5$.

Bài 6.12 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Không tồn tại đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 4x + 2014.$$

Thật vậy, giả sử tồn tại đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ sao cho

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 4x + 2014.$$

Thế thì $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $\deg P = \deg Q + 1$. Từ $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $\deg Q = 2k, k \in \mathbb{N}$ và khi đó đa thức $P(x)$ có bậc là số lẻ. Vì vậy tồn tại số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $P(x_0) = 0$, tức là $\frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = 0 \Rightarrow x_0^2 + 4x_0 + 2014 = 0 \Rightarrow (x_0 + 2)^2 + 2010 = 0$. Điều này vô lý chứng tỏ không tồn tại các đa thức $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Bài 6.13 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm $a_1, ..., a_n$. Nếu $x = a_i$ là nghiệm của $P(x)$ thì ta có điều phải chứng minh. Giả sử x không là nghiệm của $P(x)$. Khi đó

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}.$$

Lấy đạo hàm hai vế, ta có

$$\frac{P'(x)P(x) - (P'(x))^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} < 0.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.14 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc). $f(x)$ có bậc 2014 nên $F(x)$ có bậc 2015, mà $F(x)$ có ít nhất 2014 nghiệm thực nên $F(x)$ có đúng 2015 nghiệm thực (kể cả số bội). Đặt $G(x) = F(x) + \alpha f(x)$, suy ra $G(x)$ là đa thức có bậc 2015.
• Nếu $\alpha = 0$ thì hiển nhiên $G(x)$ có đúng 2015 nghiệm thực.

• Nếu $\alpha \neq 0$ thì ta đặt $H(x) = \alpha e^{x/\alpha} F(x)$. Khi đó $H'(x) = e^{x/\alpha} G(x)$. Mà $F(x)$ có đúng 2015 nghiệm thực nên $H(x)$ có 2015 nghiệm thực, suy ra $H'(x)$ có ít nhất 2014 nghiệm thực, nghĩa là $G(x)$ có ít nhất 2014 nghiệm thực. Mà $G(x)$ là đa thức có bậc 2015, nên $G(x)$ có đúng 2015 nghiệm thực.
Ghi chú. Bài toán này sử dụng hai Định lý cổ điển của toán học:
Định lý 1. *Mọi đa thức bậc $n(n \geq 1)$ với hệ số thực có tối đa n nghiệm thực.*
Định lý 2. *Nếu hàm thực f khả vi trên $\mathbb{R}$ và phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất n nghiệm thực thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất $n - 1$ nghiệm thực (kể cả số bội).*

Bài 6.15 (ĐH Tân Trào). Ta xét các trường hợp sau

1. $a = b = 0$ thì $P(x)$ là tùy ý;
2. $a = 0, b \neq 0$ thì $P(x) = 0$ với mọi x;
3. $a \neq 0, b = 0$ thì $P(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ là một hằng số tùy ý;
4. $a \neq 0, b \neq 0$;
   - Nếu $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$, thay $x = b$ vào giả thiết, ta được $x = b - a$. Thay $x = b - a$ vào giả thiết, ta lại có $x = b - 2a$ là nghiệm... Cứ tiếp tục như vậy, suy ra $P(x) = x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$;
   - Nếu $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$ thì đa thức $P(x)$ có $x = a, x = 2a, ..., x = (n-1)a$ là các nghiệm. Khi đó ta có:

   $$P(x) = (x - a)(x - 2a)...[x - (n - 1)a]Q(x).$$

   Thay $P(x)$ vào giả thiết ta có $Q(x - a) = Q(x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là $Q(x) = k$, với $k \in R$ là một hằng số tùy ý. Do đó:

   $$P(x) = (x - a)(x - 2a)...[x - (n - 1)a].$$

CÁC BÀI ĐỀ XUẤT: GIẢI TÍCH

1 DÃY SỐ

Bài 1.1 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Ta có

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+1}{(n+2)!} > 0.$$

Do vậy, $x_{n+1} > x_n \quad \forall n = 1, 2, \cdots, 2013$. Như vậy

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2014}.$$

Khi đó

$$x_{2014} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2014}^n} < 2014^{\frac{1}{n}} x_{2014}.$$

Cho $n \to +\infty$. Ta có $I = x_{2014}$.
Mặt khác, từ

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

suy ra

$$x_k = (1 - \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + \cdots + (\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Do vậy

$$x_{2014} = 1 - \frac{1}{2015!}.$$

Suy ra

$$I = 1 - \frac{1}{2015!}.$$

Bài 1.2 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** .
a) Xét hàm số

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

là lẻ và liên tục trên đoạn $[-1, 1]$ nên $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 0$.

Chia đoạn $[-1, 1]$ thành $2n$ đoạn có độ dài bằng nhau bởi các điểm chia

$x_i = -1 + \frac{i}{n}$. Trên mỗi đoạn con $[x_{i-1}, x_i]$, lấy điểm $\xi_i = x_i, i = \overline{0,\ 2n}$. Khi đó, tổng tích phân Riemann của hàm số $f(x)$ là

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \ln\left[-1 + \frac{i}{n} + \sqrt{1 + \left(-1 + \frac{i}{n}\right)^2}\right]$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0.$$

Mặt khác, ta có

$$S_n = \frac{1}{n}\Bigg[\ln\left(-1 + \frac{1}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{1-n}{n}\right)^2}\right) + \cdots$$
$$+ \ln\left(-1 + \frac{2n}{n} + \sqrt{1 + \left(\frac{2n-n}{n}\right)^2}\right)\Bigg]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\ln\frac{1-n+\sqrt{n^2+(1-n)^2}}{n} + \cdots + \ln\frac{2n-n+\sqrt{n^2+(2n-n)^2}}{n}\right]$$
$$= \ln\left[\prod_{i=1}^{2n}\frac{i-n+\sqrt{n^2+(i-n)^2}}{n^{2n}}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{i=1}^{2n}\frac{i-n+\sqrt{n^2+(i-n)^2}}{n^{2n}}\right]^{\frac{1}{n}} = 1.$$

b) Từ giả thiết ta có

$$b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$$

suy ra $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n - b_n)$. Suy ra

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n (a-b) \to 0,\ n \to \infty \tag{1}$$

Ta cần chứng minh dãy $\{a_n\}$ hội tụ.
Giả sử $a \le b$, ta có $a_2 \le b_2, ..., a_n \le b_n \le b$, suy ra

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \ge \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n.$$

Như vậy, dãy $\{a_n\}$ là đơn điệu tăng, bị chặn trên bởi b. Do đó, tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Từ (1), ta có
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Trường hợp $a > b$, chứng minh tương tự.

Bài 1.3 (Dự bị)**.** Xét dãy thuần nhất $x_{n+1} = 2x_n$, suy ra $x_n = 2^{n-1}c$.
Bây giờ xét dãy cho bởi $x_{n+1} = 2x_n + 3n \quad (*)$. Ta tìm nghiệm dưới dạng $x_n = An + B$. Thay vào (*) ta được $A = B = -3$.
Xét dãy cho bởi $x_{n+1} = 2x_n + 2^n(**)$. Ta tìm nghiệm dưới dạng $x_n = An2^n$. Thay vào (**) ta được $A = \dfrac{1}{2}$.
Suy ra nghiệm của bài toán có dạng $x_n = c2^{n-1} - 3n - 3 + \dfrac{1}{2}n2^n$. Thay $n = 1$, suy ra $c = -2$. Vậy $x_n = (n-2)2^{n-1} - 3n - 3$. Thay $n = 2013$ ta được kết quả cần tìm.

Bài 1.4 (Dự bị)**.** 1. Ta có
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n^2 - a_n + 1} \leq 1.$$
Do đó dãy số là giảm. Mặt khác dễ chứng minh $a_n \geq 1$ nếu $a_1 \geq 1$ và $a_n < 1$ nếu $a_1 < 1$ Từ đó tính được giới hạn $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ nếu $a_1 \geq 1$ và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nếu $a_1 < 1$.
2. Do
$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - 1 = \frac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}.$$
Nên $a_n = \frac{1}{a_{n+1}-1} - \frac{1}{a_n-1}$.
Chỉ ra giới hạn $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^n a_i = \infty$ nếu $a_1 \geq 1$ và $\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^n a_i = -1 + \frac{1}{1-a_1}$ nếu $a_1 < 1$.

Bài 1.5 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Xét hàm số
$$f(x) = 2013\ln(x^2 + 2014^2) - 2014^2,$$
với $x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$.
$$f'(x) = 2013\frac{2x}{x^2 + 2014^2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{2013}{2014}.$$
Xét hàm số
$$g(x) = x - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta có $g'(x) = 1 - f'(x) > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, dẫn đến hàm $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$g(0) = -f(0) = -2013\ln(2014^2) + 2014^2 > 0,$$

$$g(-2014^2) = -2013\ln(2014^2 + 2014^4) < 0.$$

Do đó $g(0).g(-2014^2) < 0$ và tồn tại $c \in (-2014^2; 0)$ thỏa mãn $g(c) = 0$, hay $f(c) = c$. Do g đồng biến nên c là duy nhất.
Lại có $x_{n+1} = f(x_n)$ nên với mỗi n tồn tại q_n nằm giữa c và x_n thỏa mãn

$$f(x_n) - f(c) = f'(q_n).(x_n - c).$$

Suy ra

$$|x_{n+1} - c| = |f'(q_n)|.|x_n - c| \leq \frac{2013}{2014}.|x_n - c|.$$

Vậy

$$|x_n - c| \leq \frac{2013}{2014}.|x_{n-1} - c| \leq \cdots \leq \Big(\frac{2013}{2014}\Big)^{n-1}|x_1 - c|.$$

Cho $n \to \infty$, ta được $|x_n - c| \to 0$ và

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

Bài 1.6 (CĐ Ngô Gia Tự). + Tìm $u_n + 1$ và $u_n - 1$.
+ Tính được

$$\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \Big(\frac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 1}\Big)^2 = \cdot = \Big(\frac{u_1 - 1}{u_1 + 1}\Big)^{2^{n-1}} = \Big(\frac{2013}{2015}\Big)^{2^{n-1}}$$

Cho nên

$$u_n = \frac{2.2015^{2^{n-1}}}{(2015)^{2^{n-1}} - 2013^{2^{n-1}}} - 1.$$

Vậy

$$\lim u_n = 1.$$

Bài 1.7 (ĐH Quảng Bình). Ta có bất đẳng thức $\ln(1 + x) < x$ với $x > 0$ do đó $\ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
Do đó

$$\frac{1}{n} > \ln(1 + n) - \ln n, n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \geq (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+...+(\ln(n+1)-\ln n) = \ln(n+1),$$

và
$$0 < \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)}.$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$$
suy ra
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}} = 0.$$

Bài 1.8 (ĐH Quảng Nam)**.** Từ giả thiết ta có
$$(n=1)u_{n+1} - u_n = 2(nu_n - u_{n-1}).$$
Đặt $v_n = (n=1)u_{n+1} - u_n$, suy ra
$$v_n = 2v_{n-1} = ... = 2^{n-1}v_1 = 2^{n-1}.$$
Khi đó,
$$(n+1)u_{n+1} - u_n = 2^{n-1},$$
suy ra
$$(n+1)!u_{n+1} - n!u_n = 2^{n-1}n!.$$
Đặt $w_n = n!u_n$, ta có
$$w_n = \sum_{i=0}^{n-2} 2^i(i+1)!.$$
Vậy
$$u_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-2} 2^i(i+1)!.$$

Bài 1.9 (ĐH Quy Nhơn)**.** Vì đẳng thức
$$\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + ... + \sqrt[n]{2014} = \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + ... + \sqrt[n]{a_m}. \tag{2}$$
xảy ra với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên khi $n \to \infty$, sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ với $a > 0$, ta được $m = 2014$. Suy ra
$$\begin{aligned} &n(\sqrt[n]{1}-1) + n(\sqrt[n]{2}-1) + ... + n(\sqrt[n]{2014}-1) \\ &\qquad = n(\sqrt[n]{a_1}-1) + n(\sqrt[n]{a_2}-1) + ... + n(\sqrt[n]{a_m}-1) \end{aligned} \tag{3}$$
Chú ý rằng
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0.$$

Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln a,\ a>0.$$

Trong (3), cho $n\to\infty$ ta được

$$\ln 1 + \ln 2 + ... + \ln 2014 = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_m.$$

Vậy $P = a_1a_2...a_m = 2014!$

Bài 1.10 (ĐH Sao Đỏ)**.** Chứng minh rằng được với mọi $x > -1$ ta có:

$$\frac{x}{2+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}.$$

Áp dụng cho $x = \frac{k}{n^2}$, ta được:

$$\frac{k}{n+2n^2} \leq \frac{k}{k+2n^2} \leq \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \leq \frac{k}{2n^2} \quad \forall k, n \geq 1.$$

Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+2n^2} \leq x_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n^2}.$$

Hay

$$\frac{n(n+1)}{2(2n^2+n)} \leq x_n \leq \frac{n(n+1)}{4n^2}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{4}.$$

Bài 1.11 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Bằng quy nạp, dễ thấy x_n là một dãy số dương. Ta có

$$\ln x_{n+2} = \frac{1}{2}\ln x_{n+1} + \frac{1}{2}\ln x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $u_n = \ln x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có:

$$u_1 = \ln x_1, u_2 = \ln x_2, u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Từ công thức xác định dãy u_n ta có

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-2}(u_2 - u_1) = (-\frac{1}{2})^{n-2} \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

Do đó

$$u_n = (-\frac{1}{2})^{n-2} \ln \frac{x_2}{x_1} + u_{n-1} = \ldots = [(-\frac{1}{2})^{n-2} + (-\frac{1}{2})^{n-3} + \cdots + 1] \ln \frac{x_2}{x_1} + \ln x_1$$

$$= [\frac{2}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}] \ln \frac{x_2}{x_1} + \ln x_1.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{2\ln x_2 + \ln x_1}{3}.$$

Vậy dãy x_n hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}.$$

Bài 1.12 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Dễ thấy $u_n > 0$ với mọi n. Ta chứng minh $u_n \geq 2$ với mọi $n \geq 3$. Thật vậy, dễ thấy $u_3 = 2$. Giả sử $u_k \geq 2$ với mọi $k = 3, .., n$, ta chứng minh $u_{n+1} \geq 2$.
Thật vậy

$$u_{n+1} = u_n^2.\left(1 + \frac{1}{u_{n-1}}\right) > u_n^2 \geq 4 > 2$$

$$u_n = u_{n-1}^2.\left(1 + \frac{1}{u_{n-2}}\right) > u_{n-1}^2 \geq 2u_{n-1}$$

với mọi $n \geq 4$ Vậy $u_n > 2^{n-3}.u_3$ do đó

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n.\left(1 + \frac{1}{u_{n-1}}\right) > u_n.$$

Từ 2 điều trên dẫn đến

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = 0.$$

Từ giả thuyết ta có:

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = u_n^2.u_{n-1}$$

Chia cả 2 vế cho $u_n.u_{n-1}$ ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_n}{u_{n-1}} = u_n.$$

Áp dụng liên tiếp công thức trên ta có:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} - \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = u_{n-1}$$

$$\dots$$

$$\frac{u_3}{u_2} - \frac{u_2}{u_1} = u_2.$$

Cộng vế các đẳng thức trên ta được

$$u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{u_2}{u_1}.$$

Suy ra

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

và vì vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_1 + u_2 + \cdots + u_n).u_n}{2u_{n+1} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{2u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Bài 1.13 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh)**.** Ta có $x_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+3)!}$, cho nên

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}.$$

Do đó

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{5}{3}.$$

Bài 1.14 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Từ giả thiết ta có

$$a_n - a_{n-1} = \frac{n-2}{n}(a_{n-1} - a_{n-2}),\ n \geq 3.$$

Đặt $v_n = a_n - a_{n-1}$. Ta thu được dãy $\{v_n\}$ thảo mãn

$$v_2 = a_2 - a_1, v_n = \frac{n-2}{n} v_{n-1},$$

với mọi $n \geqslant 2$. Từ đó ta thu được

$$v_n = \frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}.\frac{4}{6}\cdots\frac{n-4}{n-2}.\frac{n-3}{n-1}.\frac{n-2}{n} v_2 = \frac{2(a_2 - a_1)}{n(n-1)}.$$

Vậy

$$a_n - a_{n-1} = \frac{2(a_2 - a_1)}{n(n-1)}.$$

Ta dễ dàng thu được

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_3 - a_2 + a_2 \\ &= a_2 + 2(a_2 - a_1)(\frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}) \\ &= 2a_2 - a_1 - 2\frac{a_2 - a_1}{n}. \end{aligned}$$

Bài 1.15 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Xét hàm số

$$f(x) = \frac{\pi}{2014} - \frac{1}{2}\arctan x$$

là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$|f'(x)| = |\frac{1}{2(1+x^2)}| \leq \frac{1}{2}.$$

Đặt $g(x) = x - f(x)$ khi đó g là hàm khả vi trên $\mathbb{R}$ và

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2(1+x^2)} > 0.$$

Hơn nữa,

$$g(0) = \frac{-\pi}{2014} < 0, g(\frac{\pi}{2014}) > 0$$

cho nên tồn tại duy nhất $l \in (0; \frac{\pi}{2014})$ sao cho $g(l) = 0$ hay $f(l) = l$.
Mặt khác, theo định lý Lagrange tồn tại $c \in \mathbb{R}$ sao cho

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|.$$

Do đó,

$$|u_n - l| \leq (\frac{1}{2})^{n-1}|u_1 - l|.$$

Suy ra $\lim u_n = l$.

Bài 1.16 (ĐH Tân Trào)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ với $\frac{3}{2} < a_n < \frac{5}{2}$ và

$$a_{n+1} = 1 - \frac{n-1}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^{2n+1}} + (1 + \frac{n}{2^n})a_n - \frac{1}{2}a_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tính

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

Giải. Ta có

$$a_{n+1} = 1 + a_n - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2}(a_n - \frac{n}{2^n})^2 + \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Suy ra

$$a_{n+1} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = 1 + a_n - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2}(a_n - \frac{n}{2^n})^2.$$

Đặt

$$u_n = a_n - \frac{n}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra $u_{n+1} = 1 + u_n - \frac{1}{2}u_n^2$ và $1 < u_1 < 2$. Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được

$$|u_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}.$$

Hay

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}.$$

Bài 1.17 (ĐH Tân Trào). Cho dãy số (u_n) với mọi $n = 1, 2, ...$xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n \quad \text{với mọi } n = 1, 2, \dots. \end{cases}$$

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. Tìm

$$\lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Giải. Ta có

$$u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n \quad \forall n \geq 1$$

và

$$u_n = 1 + u_1 u_2 \dots u_{n-1} \quad \forall n \geq 2,$$

suy ra:

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = u_n \quad \forall n \geq 2.$$

Do do

$$\frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{u_n(u_n - 1)} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n}.$$

Hay

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad \forall n \geq 2.$$

Suy ra

$$S_n = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

Mà

$$u_1 = 1, u_2 = 1 + u_1 = 2.$$

Nên

$$S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}.$$

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = 1 + u_n(u_1 u_2 \dots u_{n-1} - 1) > 0.$$

Hay (u_n) tăng Nên $\forall n \geq 2$ ta có $u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_n > u_1(1 + u_1)^{n-1} = 2^{n-1}$.
Suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty.$$

Suy ra

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 2.$$

2 HÀM SỐ

Bài 2.1 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Giả sử phản chứng: hàm số $f(x) = \sin(x^{2014})$ tuần hoàn trên $\mathbb{R}$. Tồn tại $T > 0$ sao cho

$$f(x + T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Phương trình $\sin(x^{2014}) = 0$ có nghiệm dạng $x_k = \sqrt[2014]{k\pi}, \ k \in \mathbb{R}$. Vì

$$\lim_{k \to +\infty} (x_{k+1} - x_k) = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[2014]{\pi} \left(\sqrt[2014]{k + 1} - \sqrt[2014]{k} \right) = 0$$

nên số không điểm của $f(x)$ trong $[0; T]$ là vô hạn. Từ đây dẫn tới mâu thuẫn.

Bài 2.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội). a) Với $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $x_0 > 0$ sao cho với $x \geq x_0$ thì

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tồn tại số $T > 0$ sao cho $g(x + T) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Lấy $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tồn tại $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_1 + n_1 T > x_2 + n_2 T > x_0$. Khi đó ta có

$$f(x_1 + n_1 T) + g(x_1 + n_1 T) > f(x_2 + n_2 T) + g(x_2 + n_2 T)$$

Suy ra
$$g(x_1) - g(x_2) > f(x_2 + n_2T) - f(x_1 + n_1T) \geq -\varepsilon$$
Đổi vai trò x_1, x_2, ta suy ra $|g(x_1) - g(x_2)| \leq \varepsilon$, vậy $g(x)$ là hằng số.
b) Xét hàm số $f(x) = e^{-x}$, ta có
$$f(x+1) - f(x) = e^{-x-1} - e^{-x} = \left(\frac{1}{e} - 1\right) e^{-x}$$
Vậy một hàm số cần tìm là
$$\varphi_0(x) = \frac{e}{1-e} e^{-x}.$$
Với φ là hàm số thỏa mãn đề bài thì $\psi = \varphi - \varphi_0$ có tính chất
$$\psi(x+1) = \psi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Áp dụng câu a) cho hàm số $\varphi = \psi + \varphi_0$ tăng, thỏa man
$$\lim_{x\to+\infty} \varphi_0(x) = 0,$$
suy ra φ là hằng số.
Vậy tất cả các hàm φ cần tìm có dạng $\varphi = \dfrac{e}{1-e} e^{-x} + C$.

Bài 2.3 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Ta có
$$\lim_{x\to+\infty} \left[f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x \ln f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$$
Áp dụng quy tắc ĽHospital, ta thu được
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x \ln f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{t\to0^+} \frac{\ln f(2\sqrt{t})}{t} = \lim_{t\to0^+} \frac{2f'(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t} f(2\sqrt{t})} \\ &= \lim_{t\to0^+} \frac{2f''(2\sqrt{t})}{2f(2\sqrt{t}) + 4\sqrt{t} f'(2\sqrt{t})} = -2.\end{aligned}$$
Vậy
$$\lim_{x\to+\infty} \left[f\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\right]^x = e^{-2}.$$

Bài 2.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). 1) Ta có
$$\varphi'(x) = \frac{xf(x)\int\limits_0^x f(t)dt - f(x)\int\limits_0^x tf(t)dt}{(\int\limits_0^x f(t)dt)^2} = \frac{f(x)\int\limits_0^x (x-t)f(t)dt}{(\int\limits_0^x f(t)dt)^2} > 0, \quad \forall x > 0$$

Vậy $\varphi(x)$ tăng trên khoảng $(0, +\infty)$.
Theo Lôpitan, ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{xf(x)}{f(x)} = 0.$$

2) Xét hàm $g(x)$ xác định trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn $g(x) = \varphi(x)$ nếu $x > 0$; $g(0) = 0$. Dễ thấy $g(x)$ liên tục trên $[0; 2015]$ nên $g(x)$ liên tục đều trên $[0; 2015]$.
Suy ra $g(x)$ liên tục đều trên $(0; 2015)$. Vậy $\varphi(x)$ liên tục đều trên $(0; 2015)$. Do đó,

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\varphi(\frac{2014n+i}{n}) - \varphi(\frac{2014n+i-1}{n})\Big) = 0 \quad \forall i \leq 2015.$$

Vậy

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2015} \Big(\varphi(\frac{2014n+i}{n}) - \varphi(\frac{2014n+i-1}{n})\Big) = 0.$$

Bài 2.5 (ĐH Quảng Nam). Giả sử tồn tại $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ sao cho $f(a) \neq f(b)$.
Theo giả thiết ta có $g(a) = g(b) = c$.
Lần lượt cho $y = a, y = b$ ta được

$$(f(x) - f(a))(g(x) - c)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$(f(x) - f(b))(g(x) - c)) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra

$$(f(b) - f(a))(g(x) - c) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $g(x) = c, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 2.6 (CĐ Sư phạm Nam Định).

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ với mọi } x > 0 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Lagrange với hàm $f(x)$ trên khoảng $(0, x)$ ta có tồn tại $c(x) \in (0, x)$ sao cho:

$$f'(c(x)) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)$$

Sự duy nhất: Giả sử tồn tại $d(x) \in (0, x), d(x) \neq c(x)$ mà

$$f'(d(x)) = \ln(1 + x) = f'(c(x)).$$

Do đó theo định lý Rolle với hàm $f'(x)$ tồn tại a ở giữa $c(x), d(x)$ sao cho

$$f''(a) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (1).

Bài 2.7 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Sử dụng quy tắc L'Hôpital ta có

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^{2012}} \tan \sqrt[1006]{t} dt}{x^{2014}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2012x^{2011}\tan(x^2)}{2014x^{2013}} = \frac{1006}{1007}.$$

Bài 2.8 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Vì $f(1) = 2$ cho nên $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2$ và $ax^2 - x$ nhận $x = 1$ là nghiệm cho nên $a = 1; b = -1$.

Bài 2.9 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Trước hết ta chứng minh tồn tại $a, b \in (0, 1]$ sao cho

$$|f(b) - f(a)| > |b - a|^{2014}.$$

Thật vậy giả sử ngược lại $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|^{2014}$ với mọi $a, b \in (0, 1]$. Khi đó ta có

$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| \leq |b - a|^{2013} \text{ với mọi } a \neq b \in (0, 1].$$

Cho $b \to a$, ta được $f'(a) = 0$, với mọi $a \in (0, 1]$. Do đó f là hàm hằng trên $(0, 1]$. Vì f liên tục nên f là hàm hằng trên $[0, 1]$. Mâu thuẫn với giả thiết f khác hằng. Tiếp theo ta có thể giả sử $|f(1) - f(0)| \leq 0$. Xét hàm

$$g(t) = |f((1-t)a + t) - f((1-t)b| - |((1-t)a + t) - (1-t)b|^{2014},$$

khi đó g liên tục trên $[0, 1]$ và $g(0)g(1) < 0$. Theo Định lý giá trị trung gian tồn tại $t_0 \in (0, 1)$ sao cho $g(t_0) = 0$. Như vậy ta có

$$|f((1-t_0)a + t_0) - f((1-t_0)b| = |((1-t_0)a + t_0) - (1-t_0)b|^{2014},$$

đặt $x_1 = (1 - t_0)a + t_0, x_2 = (1 - t_0)b$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 2.10 (ĐH Tân Trào). Cho $f(x)$ là hàm số liên tục và xác định trên khoảng $[0, 1]$ thỏa mãn:

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \in [0; 1] \text{ và} f(0) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

Cho

$$c = \int_0^1 f(x)dx, F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Chứng minh rằng:
a.

$$\begin{cases} F(x) \le x & \text{khi } 0 \le x \le c \\ F(x) \le c & \text{khi } c \le x \le 1. \end{cases}$$

b.

$$\int_0^1 F(x)dx < c - \frac{c^2}{2}.$$

Giải. a). Ta có: $0 < f(x) \le 1$ và $f(1) = \frac{1}{2}$. Suy ra

$$0 < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 1dx = 1.$$

Do do

$$c < 1.$$

Ta có:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

với $F(0) = 0, F(1) = c$, $F^{'}(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$. Suy ra $F(x)$ đồng biến trên $[0,1]$. Hay

$$F(x) \le F(1) = c. \tag{6}$$

Mặt khác, từ giả thiết:

$$0 \le f(x) \le 1 \quad \forall x \in [0,1]$$

hay

$$0 \le f(t) \le 1 \quad \forall t \in [0,x].$$

Suy ra

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt < \int_0^x 1dt = x. \tag{7}$$

Từ (6) và (7) suy ra:

$$F(x) \le \min\{x, c\}.$$

Ta suy ra

$$\begin{cases} F(x) \le x & \text{khi } 0 \le x \le c \\ F(x) \le c & \text{khi } c \le x \le 1. \end{cases}$$

b). Theo chứng minh a). Ta có:

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^c F(x)dx + \int_c^1 F(x)dx \le \int_0^c xdx + \int_c^1 cdx = c - \frac{c^2}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} F(x) = x & \text{khi } 0 \leq x \leq c \\ F(x) = c & \text{khi } c \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} F^{'}(c^{-}) = 1 \\ F^{'}(c^{+}) = 0. \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết:

$$F^{'}(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Vậy dấu đẳng thức không xảy ra. Vậy

$$\int_0^1 F(x)dx < c - \frac{c^2}{2}.$$

3 PHÉP TÍNH VI PHÂN

Bài 3.1 (HV An ninh nhân dân)**.** Xét phương trình tìm ẩn là hàm $y(x)$ với $x \in [0, 1]$ và $k \in (0, 1)$ sau

$$y^2 - y + kx(1 - x) = 0.$$

Ta thấy $\Delta = 4kx^2 - 4kx + 1 = (2\sqrt{k}x - 1)^2 + 4\sqrt{k}x(1 - \sqrt{k}) \geq 0$.
Nên được các nghiệm

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4kx^2 - 4kx + 1}), y_2(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4kx^2 - 4kx + 1}).$$

Ta thấy $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là các hàm liên tục, đồng thời

$$y_1(0) = y_1(1) = 0, y_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - k})$$

$$y_2(0) = y_2(1) = 1, y_2(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - k})$$

Điều kiện của đề bài dẫn tới một trong hai khả năng
a.

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - k})$$

b.

$$f(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-k}).$$

Với khả năng a) ta xét hàm $g(x) = f(x) - y_1(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có

$$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - y_1(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-k}) \leq 0$$

$$g(1) = f(1) - y_1(1) = 1 - 0 = 1 > 0.$$

Nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $c \in [\frac{1}{2}, 1)$, tức là $f(c) = y_1(c)$. Sử dụng định lý Lagrang cho hàm $f(x)$ trên các đoạn $[0,c]$ và $[c,1]$ thì tồn tại các điểm $x_1 \in (0,c)$, $x_2 \in (c,1), x_1 \neq x_2$ sao cho

$$f^{`}(x_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{y_1(c)}{c}, f^{`}(x_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - y_1(c)}{1 - c}.$$

Khi đó

$$f^{`}(x_1)f^{`}(x_2) = \frac{y_1(c)}{c}\frac{1 - y_1(c)}{1 - c} = k.$$

Với khả năng b) ta xét hàm $h(x) = f(x) - y_1(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có

$$h(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - y_2(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-k}) \geq 0$$

$$h(0) = f(0) - y_2(0) = 0 - 1 = -1 < 0.$$

Nên Nên phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm $d \in (0, \frac{1}{2}]$, tức là $f(d) = y_2(d)$. Sử dụng định lý Lagrang cho hàm $f(x)$ trên các đoạn $[0,d]$ và $[d,1]$ thì tồn tại các điểm $x_1 \in (0,d)$, $x_2 \in (d,1), x_1 \neq x_2$ sao cho

$$f^{`}(x_1) = \frac{f(d) - f(0)}{d - 0} = \frac{y_2(d)}{d}, f^{`}(x_2) = \frac{f(1) - f(d)}{1 - d} = \frac{1 - y_2(d)}{1 - d}.$$

Khi đó

$$f^{`}(x_1)f^{`}(x_2) = \frac{y_2(d)}{d}\frac{1 - y_2(d)}{1 - d} = k.$$

Bài 3.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Xét hàm số

$$g(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right),\ x \in [0;1).$$

Do $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) = g(0)$ nên hàm $g(x)$ thác triển liên tục lên $[0;1]$ và $g(0) = g(1)$. Áp dụng định lý Rolle cho hàm g, ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3.3 (HV Bưu chính Viễn thông). Theo định nghĩa của $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{'}(x)=0$, ta có

$$\forall\epsilon>0, \exists x_{n_0} \forall x\geq x_{n_0} \Rightarrow |\lim_{n\to+\infty} f^{'}(x)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

Với mọi dãy (x_n) sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_{n_0},x_n]$, tồn tại $\xi_n\in(x_{n_0},x_n)$ sao cho

$$|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}|=|f^{`}(\xi_n)| \tag{2}$$

Kết hợp (1) và (2), ta nhận được

$$|\frac{f(x_n)-f(x_{n_0})}{x_n-x_{n_0}}|=|f^{`}(\xi_n)|\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

Khi đó

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n}-\frac{\epsilon}{2}(1-\frac{f(x_{n_0})}{x_n})<\frac{f(x_n)}{x_n}<\frac{f(x_{n_0})}{x_n}+\frac{\epsilon}{2}(1-\frac{x_{n_0}}{x_n}).$$

Với n đủ lớn, ta có

$$-\frac{\epsilon}{2}<\frac{f(x_{n_0})}{x_n}<\frac{\epsilon}{2}.$$

Mà $\frac{\epsilon}{2}(1-\frac{x_{n_0}}{x_n})<\frac{\epsilon}{2}$. Khi đó, ta có

$$-\epsilon<\frac{f(x_n)}{x_n}<\epsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

Bài 3.4 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM).

Bài 3.5 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM). Đặt $h(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$. Khi đó, $h(x)$ là hàm khả vi trên $[-1,1]$, áp dụng định lý Lagrange trên các đoạn $[-1,0],[0,1]$, tồn tại $a\in(-1,0),\ b\in(0,1)$ sao cho

$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-1)}{2} \text{ và } f'(b)=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Suy ra

$$|f'(a)|=\frac{|f(0)|+|f(-1)|}{2}\leq\frac{1+1}{2}=1 \text{ dẫn tới } h(a)\leq 1+1=2,$$

và

$$|f'(b)|=\frac{|f(2)|+|f(0)|}{2}\leq\frac{1+1}{2}=1 \text{ dẫn tới } h(b)\leq 1+1=2.$$

Mà $h(0) = f^2(0) + f'^2(0) = 3 > 2$. Do đó $h(x)$ không đạt giá trị lớn nhất tại a, b. Vì $h(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $h(c) = \max\limits_{[a,b]} h(x)$.
Khi đó, $h'(c) = 0$. Rõ ràng $c \in (a, b)$.
Ta có $h(c) \geq h(0) = 3,\ f^2(c) \leq 1$ suy ra $(f'(c))^2 \geq 2$, dẫn tới $f'(c) \neq 0$.
Mặt khác, $h'(c) = 2f'(c)\,(f(c) + f''(c))$. Suy ra $f(c) + f''(c) = 0$.

Bài 3.6 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Xét hàm số

$$g(x) = x^{2014}.e^{f(x)}.$$

Do $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$ nên hàm $g(x)$ cũng liên tục trên $[0; 1]$, khả vi trên $(0; 1)$ và $g(0) = 0$, $g(1) = e^{f(1)} = 1$

$$g'(x) = x^{2013}e^{f(x)}(2014 + xf'(x)).$$

Áp dụng định lý Lagrange ta có $\exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho

$$g'(x_0) = g(1) - g(0) = 1.$$

$$\Rightarrow x_0^{2013}e^{f(x_0)}(2014 + x_0 f'(x_0)) = 1.$$

$$\Rightarrow x_0 f'(x_0) + 2014 = \frac{1}{x_0^{2013}e^{f(x_0)}}.$$

Bài 3.7 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Ta có : $\forall x \in (0; 2)$ thì:

$$\begin{cases} f(x) = f(0) + f'(\theta_1).x & ,\theta_1 \in (0; x) \\ f(x) = f(2) + f'(\theta_2).(x-2) & ,\theta_2 \in (x; 2) \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} f(x) \geq 1 - 2x, \forall x \in (0; 2) \\ f(x) \geq 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 (1-2x)dx = 0$$

$$\int_1^2 f(x)dx \geq \int_1^2 (2x-1)dx = 2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \geq 2.$$

Mặt khác $\int\limits_0^2 f(x)dx = 2$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} f(x) = 1 - 2x & \forall x \in [0;1] \\ f(x) = 2x - 1 & \forall x \in [1;2] \end{cases}$$

Điều này mâu thuẫn với tính khả vi liên tục của f.
Vậy

$$\int\limits_0^2 f(x)dx > 2.$$

Bài 3.8 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** Gọi $c \in [0,1]$ sao cho $f(c) = \min\limits_{x\in[0;1]} f(x) = -\dfrac{3}{4}$.
Dễ thấy $c \in (0,1)$ và $f'(c) = 0$.
Khai triển Taylor của $f(x)$ trong lân cận điểm c ta được

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''[c+\theta(x-c)]}{2}(x-c)^2; 0 < \theta < 1$$

Tại $x = 0$, ta có $f(0) = f(c) + f'(c)(-c) + \dfrac{f''[c+\theta_1(-c)]}{2}(-c)^2; 0 < \theta_1 < 1$ suy ra $f''[c+\theta_1(-c)] = \dfrac{1007}{2c^2}$.
Tại $x = 1$, $f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \dfrac{f''[c+\theta_2(1-c)]}{2}(1-c)^2; 0 < \theta_2 < 1$ suy ra $f''[c+\theta_2(1-c)] = \dfrac{1007}{2(1-c)^2}$.
Suy ra

$$f''[c+\theta_1(-c)].f''[c+\theta_2(1-c)] = \frac{1007^2}{4c^2(1-c)^2}.$$

Mà $c(1-c) \leq \left(\dfrac{c+1-c}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ nên

$$f''[c+\theta_1(-c)].f''[c+\theta_2(1-c)] = \frac{1007^2}{4c^2(1-c)^2} \geq \frac{1007^2}{4\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1007^2.4$$

Mặt khác, do $c+\theta_1(-c), c+\theta_2(1-c) \in [0;1]$ nên

$$1007^2.4 \leq f''[c+\theta_1(-c)].f''[c+\theta_2(1-c)] \leq \left[\max_{x\in[0;1]} f''(x)\right]^2.$$

Do đó $\max\limits_{x\in[0;1]} f''(x) \geq 2014$.

Bài 3.9 (CĐ Ngô Gia Tự). Xét hàm $g(x) = f(x) + x - \dfrac{a+b}{2}$ liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Hơn nữa, $g(a).g(b) < 0$ do đó tồn tại x_0 sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = \dfrac{a+b}{2} - x_0$.
Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$ thì tồn tại $c_1 \in (a;x_0)$ và $c_2 \in (x_0;b)$ sao cho

$$f'(c_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{b - x_0}{x_0 - a}; f'(c_2) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{x_0 - a}{b - x_0}.$$

Hơn nữa, f là hàm liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$ cho nên theo định lý Lagrange tồn tại $c_3 \in (a;b)$ sao cho

$$f'(c_3) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1.$$

Vậy $f'(c_1).f'(c_2).f'(c_3) = 1$.

Bài 3.10 (ĐH Nông nghiệp). Nếu mỗi một trong các hàm $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ đổi dấu, chẳng hạn $f''(x)$ đổi dấu thì do nó liên tục nên tồn tại a để $f''(a) = 0$, tức ta có dấu đẳng thức.
Giả sử cả 4 hàm trên đều không đổi dấu. Ta chứng minh $f(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu. Khai triển Taylor $f(x)$ tại 0 đến cấp 2 ta được:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2, 0 < \theta < 1 \ (\textit{2 điểm})$$

Từ đó nếu $f''(x) > 0$ thì $f(x) > f(0) + f'(0)x$.
Nếu $f'(0) > 0$ thì $f(0) + f'(0)x > 0$ với x đủ lớn.
Nếu $f'(0) < 0$ thì $f(0) + f'(0)x > 0$ với x đủ nhỏ.
Từ đó nếu $f''(x) > 0$ thì $f(x) > 0$ (*2 điểm*).
Tương tự nếu $f''(x) < 0$ thì $f(x) < 0$, tức $f(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu. Tương tự $f'(x)$ và $f'''(x)$ cùng dấu. Do vậy tồn tại a để $f(a)f'(a)f''(a)f'''(a) \geq 0$ (*1 điểm*).

Bài 3.11 (HV Phòng không Không quân). Đặt $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, ta có:

$$g^{'}(x) = -\frac{f^{'}(x)}{f^2(x)}; g^{''}(x) = \frac{2[f^{'}(x)]^2 - f(x)f^{''}(x)}{f^3(x)}.$$

Do $f(x) > 0$; $f^{'}(x) > 0$, nên

$$g(x) > 0; g^{'}(x) < 0. \tag{1}$$

Xét

$$\frac{g^{''}(x)g(x)}{[g^{'}(x)]^2}=\frac{2[f^{'}(x)]^2-f(x)f^{''}(x)}{f^3(x)}.\frac{1}{f(x)}.\frac{f^4(x)}{[f^{'}(x)]^2}=2-\frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2}\geq 0$$

(Do $\frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2}\leq 2$, theo giả thiết). Từ các kết quả trên suy ra

$$g^{''}(x)\geq 0,\forall x\geq 0 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm $g^{'}(x)$ đơn điệu không giảm và bị chặn trên bởi 0, nên tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to\infty} g^{'}(x)=c\leq 0$$

Giả sử $c<0$. Do

$$\lim_{x\to\infty} g^{'}(x)=c\leq 0$$

nên

$$g^{'}(x)\leq c,\forall x\geq 0.$$

Suy ra

$$\int_0^x g^{'}(t)dt\leq\int_0^x cdt\Rightarrow g(x)-g(0)\leq cx.$$

Hay

$$g(x)\leq cx+g(0),\forall x\geq 0.$$

Điều này không thể xảy ra vì $g(x)\geq 0,\forall x\geq 0$. (Vì khi x đủ lớn thì $cx+g(0)<0$). Vậy $c=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\infty} g^{'}(x)=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{'}(x)}{[f(x)]^2}=0$.

Bài 3.12 (ĐH Quảng Bình). Giả sử

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \quad (a_n\neq 0).$$

Vì $P(x)\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên n chẵn và $a_n>0$.
Xét hàm

$$F(x)=P(x)+P'(x)+\cdots+P^{(n)}(x).$$

Vì F cũng là đa thức bậc n với hệ số của x^n là a_n nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)=+\infty$.

Do đó tồn tại $x_o\in\mathbb{R}$ sao cho

$$F(x_o)=\min_{x\in\mathbb{R}}F(x).$$

Theo định lý Fermat

$$F'(x_o)=F(x_o)-P(x_o)=0.$$

Như vậy $F(x_o)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}F(x)=P(x_o)\geq 0$, và $F(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bài 3.13 (ĐH Quảng Nam). Xét tích phân

$$\int_0^{2\pi} f(x)(1+\cos x)dx = \pi(a_0+1).$$

Do đó tồn tại $x_1 \in [0;2\pi]$ sao cho $f(x_1) > 0$.
Xét tích phân

$$\int_0^{2\pi} f(x)(1-\cos x)dx = \pi(a_0-1).$$

Do đó tồn tại $x_2 \in [0;2\pi]$ sao cho $f(x_2) < 0$.
Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.14 (ĐH Quảng Nam). Xét hàm số

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$\varphi'(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Với $x > 0$ và $y < 0$, theo định lý Lagrange,

$$0 \leq \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = g(\alpha_x) \leq g(0) = 0 \leq g(\alpha_y) = \frac{\varphi(y)}{y} \leq 0.$$

Do đó $\varphi(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, dẫn đến $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3.15 (ĐH Quy Nhơn). Đặt $g(x) = f(x) - \sin x, x \in [0;\pi/2]$. Suy ra $g(x)$ liên tục trên $[0;\pi/2]$ thoả mãn $\int\limits_0^{\pi/2} g(x)dx = 0$. Do đó xả ra hai trường hợp.
Nếu $g(x)$ là hàm đồng nhất không trên $[0;\pi/2]$ thì $f(x) = \sin x$. Sử dụng bất đẳng thức

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0;\pi/2]$$

ta suy ra điều phải chứng minh.
Giả sử g không đồng nhất bằng không trên $[0;\pi/2]$. Vì g liên tục nên vừa nhận giá trị âm, vừa nhận giá trị dương trên $[0;\pi/2]$. Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in (0;\pi/2)$ sao cho $g(x_0) = 0$. Do đó $f(x_0) = \sin x_0$ và ta cũng có điều phải chứng minh.

Bài 3.16 (ĐH Sao Đỏ). Từ $|f(x)| \leq \frac{1}{e^{x^2}-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Do đó
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-\frac{1}{e^{x^2}-1})=0.$$
Xét hàm
$$g(x)=f(x)-\frac{1}{e^{x^2-1}}.$$
Hàm g khả vi trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$.
Do đó, hàm g phải đạt cực trị địa phương tại 1 điểm nào đó. Thật vậy, giả sử tồn tại x_0 sao cho
$$g(x_0)>0.$$
Vì $\lim_{x\to-\infty}=0<g(x_0)$ nên tồn tại b đủ nhỏ để
$$g(x)<g(x_0)\forall x<a.$$
Vì $\lim_{x\to+\infty}=0<g(x_0)$ nên tồn tại a đủ lớn để $g(x)<g(x_0)\quad\forall x>b$.
Do hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ nên tồn tại $c\in[a,b]$ để
$$g(c)=\max_{[a,b]}g(x)=\max_{x}g(x).$$
Khi đó g đạt cực trị địa phương tại c. Theo Định lý Fermat $g^{'}(c)=0$ hay
$$f^{'}(c)=-\frac{2c}{e^{c^2-1}}.$$
Tương tự cho trường hợp tồn tại x_0 sao cho $g(x_0)<0$.

Bài 3.17 (ĐH Sao Đỏ)**.** Xét hàm
$$g(x)=\int_0^x(f^{''}(t)+f(t))\sin tdt.$$
Theo giả thiết, hàm g liên tục trên đoạn $[0,\pi]$, khả vi trên $(0,\pi)$. Ta có $g(0)=0$ và
$$\begin{aligned}g(\pi)&=\int_0^\pi f^{''}(t)dt+\int_0^\pi f(t)\sin tdt\\&=f^{'}(t)\sin t|_0^\pi-\int_0^\pi f^{'}(t)\cos tdt+\int_0^\pi f(t)\sin tdt\\&=0-f(t)\cos t|_0^\pi-\int_0^\pi f(t)\sin tdt+\int_0^\pi f(t)\sin tdt=0.\end{aligned}$$
Áp dụng định lý Rolle cho hàm g, tồn tại $c\in(0,\pi):g^{'}(c)=0$ hay
$$(f^{''}(c)+f(c))\sin c=0$$
hay
$$f^{''}(c)=-f(c).$$

Bài 3.18 (ĐH Sao Đỏ). Ta có

$$\int_0^1 f''(t)(1-t)dt = (1-t)f'(t)|_0^1 + \int_0^1 f'(t)dt$$
$$= -f'(0) + f(1) - f(0) = -f'(0) = -2014.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$2014 = |\int_0^1 f''(t)(1-t)dt| \leq \Big(\int_0^1 (f''(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1 (1-t)^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\int_0^1 (f''(t))^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Suy ra

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx \geq 3(2014)^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 1007x(x-1)(x-2)$.

Bài 3.19 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Với $\epsilon > 0$ cho trước bất kì, đặt $n_\epsilon = 2014(1 + \left[\frac{1}{\epsilon}\right])$, với $\left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ là phần nguyên của $\frac{1}{\epsilon}$. Ta có

$$\frac{2014}{n_\epsilon} = \frac{1}{1+\frac{1}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} < \min\{\epsilon, 1\}.$$

Xét hàm số

$$F(x) = f(x)\Big(x - \frac{2014}{n_\epsilon}\Big).e^{\frac{n_\epsilon . x}{2014}}, \quad x \in \Big[0, \frac{2014}{n_\epsilon}\Big] \subset [0,1].$$

Do hàm f liên tục trên $[0,1]$ khả vi trên $(0,1)$ nên hàm F liên tục trên $\left[0, \frac{2014}{n_\epsilon}\right]$ và khả vi trên $(0, \frac{2014}{n_\epsilon})$. Mặt khác, ta có $F(0) = F(\frac{2014}{n_\epsilon}) = 0$ nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_\epsilon \in \left(0, \frac{2014}{n_\epsilon}\right) \subset (0, \epsilon)$ sao cho: $F'(x_\epsilon) = 0$. Suy ra

$$f'(x_\epsilon)(x_\epsilon - \frac{2014}{n_\epsilon}).e^{\frac{n_\epsilon . x_\epsilon}{2014}} + f(x_\epsilon)[(x_\epsilon - \frac{2014}{n_\epsilon}).\frac{n_\epsilon}{2014} + 1].e^{\frac{n_\epsilon . x_\epsilon}{2014}} = 0.$$

Hay

$$f'(x_\epsilon) = \frac{n_\epsilon^2 x_\epsilon f(x_\epsilon)}{2014(2014 - n_\epsilon x_\epsilon)}$$

với $x_\epsilon \in (0, \frac{2014}{n_\epsilon}) \subset (0, \epsilon)$.

Bài 3.20 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Đặt

$$I = \int_0^1 (1-2x)f(x)dx.$$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = (1-2x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x - x^2 \end{cases}$

$$I = (x-x^2)f(x)\big|_0^1 - \int_0^1 (x-x^2)f'(x)dx = \int_0^1 (x^2-x)f'(x)dx$$

Vậy

$$\int_0^1 (f'(x) + (1-2x)f(x))dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2-x+1)f'(x)dx = 5.$$

Áp dụng định lý giá trị trung bình thứ 2 của tích phân với hàm $f'(x)$ và hàm $g(x) = x^2 - x + 1$. Hàm $g(x) = x^2 - x + 1 > 0$ với mọi x. Ta có tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho:

$$5 = f'(c).\int_0^1 (x^2-x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}f'(c).$$

Suy ra

$$f'(c) = 6.$$

Bài 3.21 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Xét hàm

$$g(x) = \sin f(x).e^{-x^2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos f(x).f'(x).e^{-x^2} - 2x.\sin f(x)e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}.(\cos f(x).f'(x) - 2x\sin f(x)), \end{aligned}$$

và $g(0) = g(1) = 0$. Như vậy hàm $g(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle. Do đó tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$, suy ra

$$\cos f(c).f'(c) - 2c\sin f(c) = 0.$$

Vì $f(c) \in [-1,1]$ nên $\cos f(c) > 0$. Vậy

$$f'(c) = 2c\tan f(c).$$

Bài 3.22 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). Xét hàm số $g(x) = \dfrac{\displaystyle\int_{2013}^{x} f(t)dt}{x^{2014}}$.
Khi đó sử dụng định lý Rolle ta có được $2014\displaystyle\int_{2013}^{c} f(x)dx = cf(c)$.

Bài 3.23 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Đặt

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)dx &= \int_0^1 xdF(x) = xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 F(x)dx \\ &= \int_0^1 f(x)dx\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^1 F(x)dx = 0.$$

Xét hàm

$$g(x) = e^{-2014x}\int_0^x F(t)dt.$$

Do đó g khả vi liên tục trên $[0, 1]$. Ta có $g(0) = g(1) = 0$, nên theo Định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $g'(x_0) = 0$. Ta có

$$g'(x) = e^{-2014x}(F(x) - 2014\int_0^x F(t)dt).$$

Do đó

$$F(x_0) = 2014\int_0^{x_0} F(x)dx.$$

Xét hàm

$$h(x) = F(x) - 2014\int_0^x F(t)dt,$$

ta có $h(0) = h(x_0) = 0$, h thỏa mãn Định lý Rolle, do đó tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $h'(c) = 0$. Do đó

$$f(c) = 2014\int_0^c f(x)dx.$$

Bài 3.24 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Đặt

$$g(x) = e^{\dfrac{-2014x}{2013}} \frac{1}{\sqrt[2013]{x^{2012}}} \int_a^x f(t)dt.$$

Khi đó g là hàm liên tục trên $[a;b]$ và khả vi trên $(a;b)$. Hơn nữa,

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Do đó, áp dụng định lý Rolle cho hàm g trên $[a;b]$ thì tồn tại c sao cho $g'(c) = 0$. Hay ta có được

$$2014c \int_a^c f(x)dx - 2013cf(c) + 2012 \int_a^c f(x)dx = 0.$$

Bài 3.25 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Từ giả thiết ta có

$$xf^{2014}(x) - 2014f(x) = -2013x \Leftrightarrow x(f^{2014}(x) + 2013) = 2014f(x).$$

hay

$$x = \frac{2014f(x)}{f^{2014}(x) + 2013}.$$

Đặt $g(x) = \dfrac{2014f(x)}{f^{2014}(x) + 2013}$ suy ra g là hàm liên tục trên $[-1;1]$.

Xét hàm số $h(x) = g(x) - x$ khi đó $h(-1).h(1) \leq 0$ nên tồn tại $x_0 \in [-1;1]$ sao cho $h(x_0) = 0$ hay $g(x_0) = x_0$.

Bài 3.26 (ĐH Tân Trào)**.** Ta có $g(x) = x\varphi^{'}(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[1,2]$ vì $\varphi(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1,2]$. Theo định lý giá trị trung bình ,tồn tại số $c \in (1,2)$ sao cho

$$\int_1^2 g(x)dx = g(c)(2-1) = c\varphi^{'}(c).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\int_1^2 g(x)dx &= \int_1^2 xd\varphi(x)x = x\varphi(x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \varphi(x)dx \\ &= 2\varphi(2) - \varphi(1) - \int_1^2 \varphi(x)dx = 1\end{aligned}$$

Suy ra $c\varphi^{'}(c) = 1$. Xét hàm số

$$h(x) = x\varphi'(x) - 1.$$

Hàm $h(x)$ liên tục trên đoạn $[1,2]$ và khả vi trên khoảng $(1,2)$. Ta có

$$h(1) = h(c) = 0, h'(x) = x\varphi^{''}(x) + \varphi'(x).$$

heo định lý Rolle, tồn tại số thực $a \in (1,c) \subseteq (1,2)$ sao cho $h'(a) = 0$. Vậy phương trình $x^{''}(x) + x'(x) = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $(1,2)$.

4 PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Bài 4.1 (HV An ninh nhân dân). Ta thấy

$$0=\int_0^1 xf(x)dx = a\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 axf(x)dx \quad ,\forall a\in\mathbb{R}.$$

Khi đó, ký hiệu $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$ thì $\forall a\in\mathbb{R}$ ta được

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^1 x^2f(x)dx\Big| &= \Big|\int_0^1 x^2f(x)dx-\int_0^1 axf(x)dx\Big| = \Big|\int_0^1 (x^2-ax)f(x)dx\Big|\\ &\le \int_0^1 |(x^2-ax)||f(x)|dx \le \int_0^1 |(x^2-ax)|\max_{x\in[0,1]}|f(x)|dx\\ &\le M\int_0^1 |(x^2-ax)|dx = MI(a) \quad , \text{với } I(a)=\int_0^1 |(x^2-ax)|dx\end{aligned}$$

Suy ra

$$|\int_0^1 x^2f(x)dx| \le M\min_{a\in\mathbb{R}} I(a) \le M\min_{a\in[0,1]} I(a).$$

Mặt khác, với $a\in[0,1]$ ta có

$$\begin{aligned}I(a)&=\int_0^1 |(x^2-ax)|dx=\int_0^a |x(x-a)|dx+\int_a^1 |x(x-a)|dx\\ &=\int_0^a (ax-x^2)dx+\int_a^1 (x^2-ax)dx\\ &=(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3})|_0^a+(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2})|_a^1=\frac{1}{6}(2a^3-3a+2).\end{aligned}$$

Bằng cách khảo sát hàm số $g(a)=2a^3-3a+2$ trên đoạn $a\in[0,1]$ ta được

$$\min_{\alpha\in[0,1]} g(a)=g(\frac{1}{\sqrt{2}})=2-\sqrt{2}$$

và

$$\min_{\alpha\in[0,1]} I(a)=I(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$$

Vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 4.2 (ĐH Bách khoa Hà Nội). Ta có

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=I_1+I_2.$$

Đổi biến $t = \tan\dfrac{x}{2}$ trong I_1, ta được kết quả $I_1 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$.
Đổi biến $t = \cot\dfrac{x}{2}$ trong I_2, ta được kết quả $I_2 = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$.
Vậy $I = \dfrac{5\pi\sqrt{3}}{9}$.

Bài 4.3 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho tích phân, ta có

$$\int_0^1 f(x)dx.\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \geq \Big(\int_0^1 \sqrt{f(x)}.\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\Big)^2 = 1.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx} &= \sqrt{\int_0^1 \frac{f(x)}{M}dx.\int_0^1 \frac{m}{f(x)}dx}.\sqrt{\frac{m}{M}}\\ &\leq \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{m}{M}}\Big(\int_0^1 \frac{f(x)}{M}dx + \int_0^1 \frac{m}{f(x)}dx\Big)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{M}}\int_0^1 \Big(\frac{f(x)}{M} + \frac{m}{f(x)}\Big)dx.\end{aligned}$$

Xét hàm $g(t) = \frac{t}{M} + \frac{m}{t}$ trên đoạn $[m, M]$. Ta có

$$g^{'}(t) = \frac{1}{M} - \frac{m}{t^2}.$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $g_{LN} = 1 + \frac{m}{M}$ khi và chỉ khi $t = \sqrt{mM}$.
Như vậy, bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 4.4 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Do $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, nên tồn tại các số $x_1, x_2 \in [0;1]$ sao cho

$$f(x_1) = \min f(x) : x \in [0;1], f(x_2) = \max f(x) : x \in [0;1].$$

Với $g(x) > 0$ ta có

$$g(x)f(x_1) \leq g(x)f(x) \leq g(x)f(x_2)$$

và do đó

$$\int_0^1 g(x)f(x_1)dx \leq \int_0^1 g(x)f(x)dx \leq \int_0^1 g(x)f(x_2)dx.$$

Khi đó
$$f(x_1) \leq \frac{1}{m}\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq f(x_2).$$
Do $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, nên tồn tại số $c \in [0;1]$ sao cho
$$\frac{1}{m}\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(c).$$

Bài 4.5 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Từ
$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\alpha x^2}}{x} = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\alpha x^2}}{x^2}x = -x\int_\alpha^\beta e^{-tx^2}dt.$$
suy ra
$$I = \int_0^{+\infty}\Big(\int_\alpha^\beta e^{-tx^2}dt\Big)dx = \int_\alpha^\beta\Big(\int_0^{+\infty} xe^{-tx^2}dx\Big)dt = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \ln t dt = -\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Bài 4.6 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại
$$M = \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|+1) < +\infty$$
Khi đó, với $\varepsilon > 0$, ta chọn δ sao cho $0 < \delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{M}, 1\right\}$. Ta có
$$\left|\int\limits_{1-\delta}^{1} x^n f(x)dx\right| \leq \int\limits_{1-\delta}^{1} x^n|f(x)|dx \leq M\delta \leq \varepsilon \tag{1}$$
và
$$\left|\int\limits_{0}^{1-\delta} x^n f(x)dx\right| \leq \int\limits_{0}^{1-\delta} x^n|f(x)|dx \leq M\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}. \tag{2}$$
Từ (1) và (2), ta suy ra
$$0 \leq \left|\int\limits_0^1 x^n f(x)dx\right| \leq \varepsilon + M\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}. \tag{3}$$
Trong (3), cho $n \to \infty$, ta được
$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_0^1 x^n f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ là tùy ý nên dẫn đến

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n f(x)dx = 0.$$

Bài 4.7 (Dự bị)**.** Hàm $\dfrac{\sin x}{x}$ là hàm giảm trên $[0,\pi]$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Với x dương đủ nhỏ, xét $t \in [x, 2013x]$. Ta có

$$\Big(\frac{\sin 2013x}{2013x}\Big)^{2012}\int\limits_x^{2013x}\frac{1}{t}dt \le \int\limits_x^{2013x}\frac{(\sin t)^{2012}}{t^{2013}}dt \le \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{2012}\int\limits_x^{2013x}\frac{1}{t}dt.$$

Cho $x \to 0^+$ ta được

$$\lim_{x\to 0^+}\int\limits_x^{2013x}\frac{(\sin t)^{2012}}{t^{2013}}dt = \ln 2013.$$

Bài 4.8 (Dự bị)**.** Xét hàm số $F(x) = \int\limits_0^{x^2} f(t)dt + \int\limits_{1-x^2}^{1} f(t)dt$. Ta có $F(0) = 0$, $F(1) = 2\int\limits_0^1 f(t)dt$. Vì $F(x)$ liên tục và $0 \le \alpha\int\limits_0^1 f(t)dt \le 2\int\limits_0^1 f(t)dt$ nên tồn tại $x(\alpha) \in [0,1]$ sao cho $F(x(\alpha)) = \alpha\int\limits_0^1 f(t)dt$. Mặt khác, $F'(x) = 2x(f(x^2) + f(1-x^2)) \ge 0$. Do đó, hàm $F(x)$ là đơn điệu tăng, dẫn đến $x(\alpha)$ là duy nhất. Áp dụng định lý giá trị trung bình ta có

$$\alpha\int\limits_0^1 f(t)dt = x^2(\alpha)(f(\xi_1(\alpha)) + f(\xi_2(\alpha))),$$

với $0 \le xi_1(\alpha) \le x^2(\alpha)$, $1 - x^2(\alpha) \le xi_1(\alpha) \le 1$. Vậy,

$$\frac{x^2(\alpha)}{\alpha} = \frac{\int\limits_0^1 f(t)dt}{f(\xi_1(\alpha)) + f(\xi_2(\alpha))} \underset{\alpha\to 0}{\to} \frac{\int\limits_0^1 f(t)dt}{f(0)+f(1)}.$$

Bài 4.9 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Ta có :

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx &= \int\limits_{-\infty}^{0} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f\big(x-\frac{1}{x}\big)dx\\ &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Thay $t = x - \dfrac{1}{x}$, ta có:

$$dx = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt \text{ với } x > 0.$$

$$dx = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt \text{ với } x < 0.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\big)dt.$$

Do $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ nên

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x).\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

hội tụ (do tiêu chuẩn Aben)

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\big(x - \frac{1}{x}\big)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = J.$$

Bài 4.10 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** Đặt

$$u = \int\limits_0^1 xf(x)dx, v = \int\limits_0^1 f(x)dx \text{ và } F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

Do tính chất lõm, ta có

$$f(t) \geq \frac{t}{x}f(x) + \frac{x-t}{x}f(0) = \frac{t}{x}f(x) + \frac{x-t}{x}.$$

Suy ra

$$F(x) \geq \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}f(x) + \frac{x-t}{x}\right)dt = \frac{f(x)t^2}{2x} + t - \frac{t^2}{2x}\bigg|_0^x = \frac{xf(x)}{2} + \frac{x}{2}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
u &= \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xdF(x) = xF(x)|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx \\
&= v - \int_0^1 F(x)dx \le v - \int_0^1 \left[\frac{xf(x)}{2} + \frac{x}{2}\right] dx \\
&= v - \frac{u}{2} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Hay $\frac{3u}{2} \le v - \frac{1}{4} \le v^2$.

Với $f(x) = -x + 1$ thỏa mãn đề bài và bất đẳng thức xảy ra dấu bằng.

Bài 4.11 (ĐH Ngoại thương Hà Nội)**.** a) Xét hàm số $A : [0, a] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$A(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x).$$

Hàm A thỏa mãn các tính chất

\+ A thuộc lớp C^1 trên $[0; a]$;

\+ Với mọi $x \in [0; a]$, $A'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x))\, f'(x) - (f(x) + xf'(x)) = 0$.

Do đó A không đổi, hơn nữa $A(0) = 0$. Vậy $A = 0$.

b) Với $x \in [0; a]$, xét hàm số $B_x : [0; f(a)] \to R$ cho bởi

$$B_x(y) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt - xy.$$

Ta có B_x thuộc lớp C^1 trên $[0; f(a)]$ và

$$\forall y \in [0; \mathrm{f(a)}], (\mathrm{B_x})'(\mathrm{y}) = \mathrm{f}^{-1}(y) - x$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{B_x})'(\mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{f(x)} \\
&(\mathrm{B_x})'(\mathrm{y}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} \in [\mathrm{f(x)}; \mathrm{f(a)}] \\
&(\mathrm{B_x})'(\mathrm{y}) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{y} \in [0; \mathrm{f(x)}]
\end{aligned}$$

Dẫn đến $\forall y \in [0; \mathrm{f(a)}]; \mathrm{B_x(y)} \ge \mathrm{B_x(f(x))} = 0$. Vậy ta có điều chứng minh.

Bài 4.12 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số dương $2a - 2b; b + 1; b + 1; \frac{8}{(a-b)(b+1)^2}$ ta có

$$(2a - 2b) + (b + 1) + (b + 1) + \frac{8}{(a-b)(b+1)^2} \ge 8.$$

Hay

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3$$

cho nên

$$f(x) = \min\{a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\} = 3.$$

Đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a = 2; b = 1$.

Vì vậy, $\int_0^{2014/3} f(x)dx = \int_0^{2014/3} 3dx = 2014.$

Bài 4.13 (CĐ Ngô Gia Tự). Áp dụng định lý Lagrange thì tồn tại $c \in (t^2; t)$ sao cho $t \in (0; 1)$.

Do $f'' > 0$ cho nên f' tăng trên $[0; 1]$. Vì vậy, $f'(c) > f'(t^2)$.

Do đó,

$$f'(c) = \frac{f(t) - f(t^2)}{t - t^2} > f'(t^2)$$

hay

$$f(t) - f(t^2) > f'(t^2)(t - t^2).$$

Từ đó suy ra

$$\int_0^1 f(t)dx - \int_0^1 f(t^2)dt > \int_0^1 (t-t^2)f'(t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)df(t^2) + \int_0^1 f(t)dt >$$

$$> \int_0^1 f(t^2)dt + \frac{1}{2}(1-t)f(t^2)|_0^1 + \int_0^1 f(t^2)dt.$$

Vì vậy,

$$2\int_0^1 f(t)dt > 3\int_0^1 f(t^2)dt - f(0).$$

Bài 4.14 (ĐH Nông nghiệp). Gọi thời gian từ lúc bắt đầu tháo nước đến khi cạn bể là x (phút). Từ giả thiết ta có phương trình

$$2400 = \int_0^x (100 - 2t)dt \Leftrightarrow x^2 - 100x + 2400 = 0.$$

Dẫn đến

$$x = 40 \text{ hoặc } x = 60.$$

Giá trị tìm được $x = 60$ bị loại vì $x \leq 50$.

Bài 4.15 (ĐH Nông Nghiệp)**.** Ta có

$$\begin{aligned}\left(\int_0^2 f(x)dx\right)^2 &= \left(\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx\right)^2\\ &\le 2\left(\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + \left(\int_1^2 f(x)dx\right)^2\right)\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{3}{2}\left(\int_0^2 f(x)dx\right)^2 \le 3\left(\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + \left(\int_1^2 f(x)dx\right)^2\right).$$

Lại có

$$\int_0^2 [f'(x)]^2dx = \int_0^1 [f'(x)]^2dx + \int_1^2 [f'(x)]^2dx$$

nên để chứng minh bài toán ta chỉ việc chứng minh

$$3\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 [f'(x)]^2dx \quad (1)$$

và

$$3\left(\int_1^2 f(x)dx\right)^2 \le \int_1^2 [f'(x)]^2dx \quad (2)$$

Ta có theo công thức tích phân từng phần:

$$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\mid_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 xf'(x)dx$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2 &\le \int_0^1 x^2dx\int_0^1 [f'(x)]^2dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 [f'(x)]^2dx.\end{aligned}$$

Như vậy (1) được chứng minh. Ta chỉ còn chứng minh (2). Xét tích phân:

$$\int_1^2 (2-x)f'(x)dx = (2-x)f(x)\mid_1^2 + \int_1^2 f(x)dx \text{ (do } f(1) = 0).$$

Từ đó

$$\begin{aligned}\left(\int_1^2 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_1^2 (2-x)f'(x)dx\right)^2 &\le \int_1^2 (2-x)^2dx\int_1^2 [f'(x)]^2dx\\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 [f'(x)]^2dx.\end{aligned}$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài 4.16 (HV Phòng không Không quân)**.** Đặt

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x.$$

Khi đó

$$f(-x) = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = \frac{1}{f(x)}.$$

Đặt $t = -x$, ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} x}{1+f(x)} dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014}(-t)}{1+t+\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} t}{1+\frac{1}{f(t)}} dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)\cos^{2014} x}{1+f(x)} dx. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2014} x}{1+f(x)} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)\cos^{2014} x}{1+f(x)} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2014} x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2014} x dx \end{aligned}$$

do $\cos^{2014} x$ là hàm chẵn. Vậy ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2014} x dx.$$

Đặt $I_n = \int 0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Đặt

$$\begin{cases} u = \cos^{n-1} x, \\ dv = \cos x dx, \end{cases}$$

ta suy ra

$$\begin{cases} du = (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x)dx, \\ v = \sin x dx \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$I_n = \cos^{n-1} x \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos x)dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n.$$

Suy ra

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Do vậy, ta nhận được

$$I = I_{2014} = \frac{1.3.\ldots.2013}{2.4.\ldots.2014} I_0 = \frac{1.3.\ldots.2013}{2.4.\ldots.2014}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1.3.\ldots2013}{2.4.\ldots2014}.\frac{\pi}{2}$$

Bài 4.17 (HV Phòng không Không quân)**.** Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{1}{1+e^{\cos 2014x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{1}{1+e^{\cos^2 1007x - \sin^2 1007x}}dx \quad (1)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{1}{1+e^{\cos^2 1007x - \sin^2 1007x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{e^{\sin^2 1007x}}{e^{\cos^2 1007x + e^{\sin^2 1007x}}}dx. \quad (2)$$

Đặt $t = \frac{\pi}{2014} - x$, ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{2014}}^0 \frac{e^{\sin^2 1007(\frac{\pi}{2014}-t)}}{e^{\cos^2} 1007(\frac{\pi}{2014}-t)} + e^{\sin^2 1007(\frac{\pi}{2014}-t)}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{e^{\sin^2(\frac{\pi}{2}-1007t)}}{e^{\cos^2(\frac{\pi}{2}-1007t)} + e^{\sin^2(\frac{\pi}{2}-1007t)}}dt.$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} \frac{e^{\cos^2 1007x}}{e^{\cos^2 1007x + e^{\sin^2 1007x}}dx}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2014}} dx = \frac{\pi}{2014}.$$

Vậy

$$I = \frac{\pi}{4028}.$$

Bài 4.18 (HV Phòng không Không quân)**.** Ta có

$$I = \int_0^{2014} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx}$$

$$= \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx} + \int_{2014.\frac{1}{n}}^{2014.\frac{2}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx} + \cdots$$

$$+ \int_{2014.\frac{n-2}{n}}^{2014.\frac{n-1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx} + \int_{2014.\frac{n-1}{n}}^{2014} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx}.$$

Xét tích phân

$$I_k = \int_{2014.\frac{k}{n}}^{2014.\frac{k+1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx}, 0 \le k \le n-1$$

Đặt $x = t + 2014.\frac{k}{n}$, ta có:

$$I_k = \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(t+2014.\frac{k}{n})}{f(t+2014\frac{k+1}{n})dt} = \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014.\frac{k}{n})}{f(x+2014\frac{k+1}{n})dx}, 0 \le k \le n-1.$$

Từ đó ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2014} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx} \\
&= \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+2014.\frac{1}{n})dx} + \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014.\frac{1}{n})}{f(x+2014.\frac{2}{n})} dx + \cdots \\
&+ \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014.\frac{n-2}{n})}{f(x+2014.\frac{n-1}{n})} dx + \int_0^{2014.\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014.\frac{n-1}{n})}{f(x+2014.\frac{n}{n})} dx.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2014} \frac{f(x)}{f(x+\frac{2014}{n})dx} \\
&= \int_0^{2014\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{f(x+2014\frac{1}{n})dx} + \int_0^{2014\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014\frac{1}{n})}{f(x+2014\frac{2}{n})} dx + \cdots \\
&+ \int_0^{2014\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014\frac{n-2}{n})}{f(x+2014\frac{n-1}{n})} dx + \int_0^{2014\frac{1}{n}} \frac{f(x+2014\frac{n-1}{n})}{f(x)} dx.
\end{aligned}
$$

Do $f(x+2014) = f(x)$, vì $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ $T = 2014$. Từ đó ta có

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{2014\frac{1}{n}} \Big[\frac{f(x)}{f(x+2014\frac{1}{n})} &+ \frac{f(x+2014\frac{1}{n})}{f(x+2014\frac{2}{n})} + \cdots \\
&+ \frac{f(x+2014\frac{n-2}{n})}{f(x+2014\frac{n-1}{n})} + \frac{f(x+2014\frac{n-1}{n})}{f(x)} \Big] dx
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho n số dương, ta có:

$$
\frac{f(x)}{f(x+2014\frac{1}{n})} + \frac{f(x+2014\frac{1}{n})}{f(x+2014\frac{2}{n}) + \cdots + \frac{f(x+2014\frac{n-2}{n})}{f(x+2014.\frac{n-1}{n})} + \frac{f(x+2014\frac{n-1}{n})}{f(x)}} \geq n.
$$

Từ đó ta có:

$$
I \geq n. \int_0^{2014.\frac{1}{n}} dx = 2014.
$$

Bài 4.19 (ĐH Quảng Bình)**.** Ta có

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x.[(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)]dx}{(\sin x + \cos x)^2} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x dx}{\sin x + \cos x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x.(\cos x - \sin x)dx}{(\sin x + \cos x)^2}.
\end{aligned}
$$

Xét $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x.(\cos x - \sin x)dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x.(\cos x - \sin x)dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

đặt $u = e^x, dv = \dfrac{(\cos x - \sin x)dx}{(\sin x + \cos x)^2}$ ta có $du = e^x dx$, chọn $v = \frac{-1}{\sin x + \cos x}$,

$H = \dfrac{-e^x}{\sin x + \cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^x dx}{\sin x + \cos x}$.

Do đó

$$2I = \frac{e^x}{\sin x + \cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{-\frac{\pi}{2}} - 1)$$

Bài 4.20 (ĐH Quảng Bình)**.** a) Ta có

$$\int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x.F'(x)dx + \int_0^1 F(x)dx$$
$$= \int_0^1 [xF'(x) + F(x)]dx = \int_0^1 [xF(x)]'dx = xF(x)|_0^1.$$

Do đó $F(1) = \int\limits_0^1 xf(x)dx + \int\limits_0^1 F(x)dx.$

b)

$$\int_x^1 f(t)dt = F(1) - F(x),$$

Theo giả thiết ta có:

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2} \Leftrightarrow F(1) - F(x) = \frac{1-x^2}{2}, \forall x \in [0,1].$$

$$\int_0^1 F(1)dx - \int_0^1 F(x)dx \geq \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx,$$

$$F(1) - \int_0^1 F(x)dx \geq \frac{1}{3}, (*)$$

Từ (*) và câu a) ta có $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx \geq \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x) = x$ ta được:

$$\int_0^1 x^2 dx . \int_0^1 f^2(x)dx \geq \left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\int_0^1 f^2(x)dx \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Bài 4.21 (ĐH Quảng Nam). Sử dụng phương pháp đổi biến số, ta chứng minh được

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\cos(x - \frac{\pi}{4})\right) dx.$$

Từ đó suy ra

$$\int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{\cos(x - \frac{\pi}{4})}{\cos x}\right) dx = 0.$$

Vậy $I = \frac{-\pi}{8}\ln 2$.

Bài 4.22 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh). a) Ta có

$$|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - 2014| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - 2014|dt$$

Do đó hàm

$$g(x) = \int_0^x |f(t) - 2014|dt$$

là hàm số tăng không âm.
Nếu $g(x) \to +\infty$ thì

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 2014| = 0$$

cho nên

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 2014.$$

Nếu $g(x) < M$ thì $|f(x) - 2014| < \dfrac{M}{x}$ cho nên

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 2014.$$

b) Nếu $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f(x)dx$ thì

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x))dx = 0.$$

Đặt $g(x) = |f(x)| - f(x)$ liên tục, không âm và

$$\int_a^b g(x)dx = 0$$

nên $g(x) = 0$ hay $|f(x)| = f(x)$.

Bài 4.23 (ĐH Quy Nhơn)**.** Đặt $g(x) = f(x) - \sin x, x \in [0; \pi/2]$. Suy ra $g(x)$ liên tục trên $[0; \pi/2]$ thoả mãn $\int\limits_0^{\pi/2} g(x)dx = 0$. Do đó xảy ra hai trường hợp.

a. Hàm $g(x)$ đồng nhất bằng 0 trên $[0; \pi/2]$: Ta có $f(x) = \sin x$. Sử dụng bất đẳng thức
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \in [0; \pi/2]$$
ta suy ra điều phải chứng minh.

b. Hàm $g(x)$ không đồng nhất bằng không trên $[0; \pi/2]$: Vì g liên tục nên vừa nhận giá trị âm, vừa nhận giá trị dương trên $[0; \pi/2]$. Theo định lý giá trị trung gian, tồn tại $x_0 \in (0; \pi/2)$ sao cho $g(x_0) = 0$. Do đó $f(x_0) = \sin x_0$ và ta cũng có điều phải chứng minh.

Bài 4.24 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Đặt
$$\int_2^4 \frac{\sqrt[22]{ln(9-x)}}{\sqrt[22]{ln(9-x)} + \sqrt[22]{ln(x+3)}} dx.$$
Đổi biến $x = 6 - y$, ta có:
$$\int_2^4 \frac{\sqrt[22]{ln(y+3)}}{\sqrt[22]{ln(y+3)} + \sqrt[22]{ln(9-y)}} dy = \int_2^4 \frac{\sqrt[22]{ln(x+3)}}{\sqrt[22]{ln(x+3)} + \sqrt[22]{ln(9-x)}} dx.$$
Do đó, ta có:
$$2I = \int_2^4 dx = 2.$$
Vậy $I = 1$.

Bài 4.25 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Ta có
$$|f(x)| = \Big| \int_a^x f^{`}(t)dt \Big| \leq \int_a^x |f^{`}(t)|dt \quad \forall x \in [a, b].$$
Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopski ta có
$$\int_a^x |f^{`}(t)|dt \leq \Big( \int_a^x dt \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \int_a^x |f^{`}(t)|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{x-a}.(\int_a^x [f^{`}(t)]^2 dt)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in [a, b].$$
Suy ra
$$|f(x)| \leq \sqrt{x-a}(\int_a^x [f^{`}(t)]^2 dt)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in [a, b].$$

Hay là

$$f^2(x) \le (x-a).\int_a^x [f'(t)]^2 dt \le (x-a).\int_a^b [f'(t)]^2 dt \quad \forall x \in [a,b].$$

Vì vậy

$$\int_a^b f^2(x)dx \le \int_a^b \Big(x-a\Big) \textstyle\int_a^b [f'(t)]^2 dt dx$$

$$= \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

Bài 4.26 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Xét hàm $G(x)$ liên tục khả vi từng khúc thỏa mãn

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in [0, 1/3) \\ 1-2x & \text{nếu } x \in [1/3, 2/3) \\ x-1 & \text{nếu } x \in [2/3, 1] \end{cases} \tag{4}$$

Vì $\int_{1/3}^{2/3} f(x)dx = 0$ nên ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{1/3} f(x)dx - 2\int_{1/3}^{2/3} f(x)dx + \int_{2/3}^1 f(x)dx = \int_0^1 G'(x)f(x)dx.$$

Tích phần từng phần ta nhận được

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dG(x) = [f(x)G(x)]|_0^1 - \int_0^1 G(x)f'(x)dx$$

$$= -\int_0^1 G(x)f'(x)dx.$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\Big(\int_0^1 f(x)dx\Big)^2 = \Big(\int_0^1 G(x)f'(x)dx\Big)^2 \le \int_0^1 G^2(x)dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $f(x) = cG(x)$, c là hằng số.

Bài 4.27 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Đặt hàm $h(x) = f(x) - x$. Khi đó h là hàm liên tục trên $[0;1]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại x_0. Ta có

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^1 f(x)dx \ge \int_{x_0}^1 f(x)dx.$$

Do f là hàm đơn điệu tăng cho nên

$$\int_{x_0}^1 f(x)dx \geq \int_{x_0}^1 f(x_0)dx = (1-x_0)f(x_0).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx \leq (1-x_0)f(x_0) &= f(x_0) - x_0 f(x_0)\\ &= h(x_0) + x_0(1-x_0)\\ &\geq h(x_0) = \int_0^1 h(x_0)dx\\ &\geq \int_0^1 h(x^{2014})dx\\ &= \int_0^1 f(x^{2014})dx - \int_0^2 x^{2014}dx\\ &= \int_0^1 f(x^{2014})dx - \frac{1}{2015}.\end{aligned}$$

Bài 4.28 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Ta có

$$\int_0^{1/2} xf'(x)dx = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

do $\int_0^{1/2} f(x)dx = 0$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}VT &= (\int_0^{1/2} f(x)dx + \int_{1/2}^1 f(x)dx)^2 = (\int_{1/2}^1 f(x)dx)^2\\ &= (\int_{1/2}^1 (f(x) - f(1/2)dx) + \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}))^2\\ &= (\int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)dx + \int_0^{1/2} xf'(x)dx)^2\\ &\leq 2(\int_{1/2}^1 (1-x)f'(x)dx)^2 + 2(\int_0^{1/2} xf'(x)dx)^2\\ &\leq \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2dx.\end{aligned}$$

5 CHUỖI SỐ

Bài 5.1 (ĐH Bách khoa Hà Nội)**.** Khai triển hữu hạn hàm

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \alpha(x)$$

trong lân cận $x = 0$, với $\alpha(x) = o(x^2)$. Suy ra

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \alpha_n, \quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Chuỗi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

Vì $\frac{1}{2n} + \alpha_n \sim \frac{1}{2n}$ khi $n \to \infty$ và $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} + \alpha_n\right)$ cũng phân kỳ. Vậy chuỗi đã cho là phần kỳ.

Bài 5.2 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k)}\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n(n+1)\dots(n+k-1)} - \frac{1}{(n+1)\dots(n+k)}\Big)\frac{1}{k}\\
&\qquad= \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k}\frac{1}{k!}\Big)
\end{aligned}$$

Mặt khác

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\Big)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\int_0^1 \frac{x^k}{x}\Big)dx.$$

Từ những điều trên ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 5.3 (Dự bị)**.** Từ giải thiết ta có $x_n > 0$ với $n \geq N_0$, N_0 đủ lớn. Suy ra, với $n \geq N_0$ thì

$$1 - \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \leq \frac{x_{n+1} - x_n}{a_{N_0}}.$$

Vì

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{a_{N_0}}) = \frac{a}{N_0},$$

nên chuỗi đã cho hội tụ.

Chú ý: Điều này không đúng nếu $a < 0$.

Bài 5.4 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ)**.** Nhận xét $a_n > 1 \forall n$.
Ta có:
$$\frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{1}{a_n^2 - 3a_n + 2} = -\frac{1}{a_n - 2} + \frac{1}{a_n - 1}.$$
Suy ra
$$\frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{1}{a_n - 1}.$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n - 1} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{a_{n+1}-2}\right) = \frac{1}{a_1 - 2} - \frac{1}{a_{N+1}-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{N+1}-2}.$$
Mặt khác :
$$a_{n+1} - a_n = a_n^2 - 4a_n + 4 = (a_n - 2)^2 > 0 \quad \forall n.$$
$\Rightarrow \{a_n\}$ là dãy tăng.
Giả sử
$$L = \sup_{n\geq 1} a_n \Rightarrow L > 4.$$
Nếu $L < +\infty \Rightarrow L = L^2 - 3L + 4 \Rightarrow L = 2$ (vô lý)
$\Rightarrow L = +\infty \Rightarrow \lim a_n = +\infty$.
Mà
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{N+1}-2}$$
nên cho $N \to +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$.

Bài 5.5 (HV Phòng không Không quân)**.** Giả sử
$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$
trong đó $|b_n| \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ theo giả thiết. Mặt khác ta có:
$$f'(x) = f(x)\frac{f'(x)}{f(x)}.$$
Từ giả thiết ta có:
$$f'(x) = a_1 x + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$$
Ta lại có:
$$f(x)\frac{f'(x)}{f(x)} = (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots)$$

Bây giờ, ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $|a_n| \leq n+1$ không đúng với mọi giá trị của n. Gọi k là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $|a_k| > k+1$. Từ các lập luận ở trên ta có

$$\begin{aligned}&a_1x + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ &= (1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)\forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

So sánh hệ số của x^{k-1} ở hai vế, ta được:

$$ka_k = b_0a_{k-1} + b_1a_{k-2} + \cdots + b_{k-2}a_1 + b_{k-1} \tag{1}$$

Xét hai vế của hệ thức (1) Vế trái có

$$ka_k > k(k+1),$$

vì k là số tự nhiên nhỏ nhất sao cho $a_k > k+1$. Vế phải có

$$\begin{aligned}|b_0a_{k-1} + b_1a_{k-2} + \cdots + b_{k-2}a_1 + b_{k-1}| &\leq 2(|a_{k-1} + \cdots + |a_1| + 1) \\ &\leq 2(k + \cdots + 2 + 1) = k(k+1).\end{aligned}$$

Dẫn đến mâu thuẫn với (1). Vậy:

$$|a_n| \leq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bài 5.6 (ĐH Quy Nhơn). a) Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên theo tiêu chuẩn Cauchy

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{[\frac{n}{2}]+1} + a_{[\frac{n}{2}]+2} + \ldots + a_n\right) = 0,$$

trong đó, [.] là ký hiệu hàm phần nguyên. Vì dãy $\{a_n\}$ giảm nên

$$a_{[\frac{n}{2}]+1} + a_{[\frac{n}{2}]+2} + \ldots + a_n \geq [\frac{n}{2}]a_n.$$

Vì vậy, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{n}{2}]a_n = 0$. Do đó, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}a_n = 0$ và ta cũng có $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n = 0$.
b) Ta có

$$\begin{aligned}\sin\pi\sqrt[3]{n^3+n} &= (-1)^n\sin\pi\sqrt[3]{n^3+n} - n\pi \\ &= (-1)^n\sin\frac{n\pi}{\sqrt[3]{(n^3+n)^2} + n\sqrt[3]{n^3+n} + n^2} \\ &= (-1)^na_n.\end{aligned}$$

trong đó $\{a_n\}$ là dãy số dương giảm dần về 0. Theo tiêu chuẩn Leibniz cho chuỗi đan dấu, ta có chuỗi đã cho hội tụ.

Bài 5.7 (ĐH Sao Đỏ)**.** Đặt

$$c_j = \sup_{n \geq 2^j} (n+1)a_n \quad \forall j \geq 1.$$

Ta sẽ chỉ ra

$$c_{j+1} \leq 4c_j^2.$$

Thật vậy, với mỗi $n \geq 2^{j+1}$, tồn tại số một số nguyên $k \geq 2^j$ sao cho $n = 2k$ hoặc $n = 2k+1$.
Nếu $n = 2k$ ta có

$$a_{2k} - a_{2k+1} \leq a_k^2 \leq \frac{c_j^2}{(k+1)^2} \leq \frac{4c_j^2}{2k+1} - \frac{4c_j^2}{2k+2}.$$

Nếu $n = 2k+1$ ta có:

$$a_{2k+1} - a_{2k+2} \leq a_k a_{k+1} \leq \frac{c_j^2}{(k+1)(k+2)} \leq \frac{4c_j^2}{2k+2} - \frac{4c_j^2}{2k+3}.$$

Do đó, dãy $(a_n - \frac{4c_j^2}{n+1})_{n \geq 2^{j+1}}$ là một dãy tăng các số hạng không dương và hội tụ đến 0. Vì vậy

$$a_n \leq \frac{4c_j^2}{n+1} \forall n \geq 2^{j+1}.$$

Hay

$$c_{j+1}^2 \leq 4c_j^2.$$

Suy ra dãy $((4c_j)^{2-t})_{j \geq 0}$ không tăng và vì vậy bị chặn trên bởi một số $q < 1$. Vì vậy $c_j \leq q^{2t}$ với j đủ lớn. Với bất kì n trong khoảng 2^j và 2^{j+1} ta có

$$a_n \leq \frac{c_j}{n+1} \leq q^{2t} \leq (\sqrt{q})^n.$$

Vì vậy

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{a_n} < \sqrt{q} < 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy, suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Bài 5.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2)**.** Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta xét các khả năng sau:
a) Nếu $a_n \geq \frac{1}{2^{n+1}}$ thì ta có

$$a_n^{\frac{n}{n+1}} = \frac{a_n}{a_n^{\frac{1}{n+1}}} \leq 2a_n.$$

b) Nếu $a_n < \frac{1}{2^{n+1}}$ thì

$$a_n^{\frac{n}{n+1}} < (\frac{1}{2^{n+1}})^{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Vì vậy, ta luôn có:

$$a_n^{\frac{n}{n+1}} \le 2a_n + \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ và chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ cũng hội tụ.
Theo dấu hiệu so sánh cho chuỗi số dương ta có chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{n}{n+1}}$$

cũng hội tụ.

Bài 5.9 (CĐ Sư phạm Nam Định). $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \dfrac{1}{n^2}$

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ

Ta có $n^2+n+1 = \dfrac{1}{3}.((n+1)(n+2)(n+3) - n(n+1)(n+2) - \dfrac{1}{2}.((n+2)(n+3) - n(n+1)) + \dfrac{2}{3}((n+3) - n)$

$$u_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right) + \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+4)}\right)$$

$u_n = v_n - v_{n+1}$

với $v_n = \dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{n+2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$S_n = v_1 - v_{n+1}$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = v_1 = \dfrac{7}{18}$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên). Từ giả thiết ta có

$$a_{n+1}^2 = 2^{n+1}a_{n+1} - 2^n a_n,$$

do đó

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^2 = a^2 - 2a + 2^n a_n.$$

Tiếp theo ta sẽ tính

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$

Thật vậy gọi $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $a = 2\sin^2\alpha$ hay

$$\alpha = arcsin(\sqrt{\frac{a}{2}}) = \frac{1}{2}arcos(1-a).$$

Bằng chứng minh quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $a_n = 2^n sin^2(\frac{\alpha}{2^{n-1}})$. Do vậy ta có

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{2n} sin^2(\frac{\alpha}{2^{n-1}}) = 4\alpha^2 = arcos^2(1-a).$$

Vậy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = a^2 - 2a + arcos^2(1-a).$$

6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (HV Bưu chính Viễn thông)**.** Lấy đạo hàm 2 vế của

$$f(2015x + 2014) = 2015f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó

$$2015f^{'}(2025x + 2014) = 2015f^{'}(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Thay x bởi $\frac{x-2014}{2015}$, ta có

$$f^{'}(x) = f(\frac{x-2014}{2015}) = f^{'}(\frac{\frac{x-2014}{2015} - 2014}{2015}) = f^{'}(\frac{x - 2015^2 + 1}{2015^2})$$
$$= \cdots = f^{'}(\frac{x - 2015^n + 1}{2015^n}).$$

Cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$f^{'}(x) = f^{'}(-1).$$

Như vậy

$$f(x) = mx + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

trong đó $m = f^{'}(1)$. Thay $x = -1$ vào hệ thức ban đầu, ta có

$$f(-1) = 2014f(-1)$$

và do đó $f(-1) = 0$. Bởi vậy $k = m$ và do đó

$$f(x) = m(x + 1).$$

Thử lại: Thỏa mãn. Như vậy

$$f(x) = m(x + 1)$$

trong đó m hằng số.

Bài 6.2 (ĐH Công nghệ thực phẩm Tp. HCM)**.** a) Từ giả thiết suy ra

$$\begin{gathered} f(f(f(x))) + \alpha f(f(x)) = 2\alpha^2 f(x) \\ \cdots \\ f^{n+2}(x) + \alpha f^{n+1}(x) = 2\alpha^2 f^n(x), \forall n \in \mathbb{N} \end{gathered} \tag{2}$$

với $x = f^0(x)$.
Cố định x thì (2) trở thành phương trình truy hồi tuyến tính cấp 2

$$u_{n+2} + \alpha u_{n+1} = 2\alpha^2 u_n$$

Phương trình đặc trưng là $\lambda^2 + \alpha\lambda - 2\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \alpha \vee \lambda_2 = -2\alpha$. Suy ra

$$u_n = f^n(x) = \alpha^n A + (-2\alpha)^n B \tag{3}$$

Trong (3), thay $n = 0$, ta được $x = u_0 = A + B$.
Trong (3), thay $n = 1$, ta được $f(x) = \alpha A - 2\alpha B$.
Vì $f^n : [0,\ +\infty) \to [0,\ +\infty)$ nên ta có

$$0 \le \frac{f^n(x)}{(2\alpha)^n} = \left(\frac{\alpha}{2\alpha}\right)^n A + (-1)^n B$$

Vì $\left(\dfrac{\alpha}{2\alpha}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$, khi $n \to \infty$ nên để bất đẳng thức trên đúng phải có $B = 0$. Khi đó, $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \alpha A = \alpha x.$$

Thử lại, ta thấy $f(x) = \alpha x$ thoả mãn phương trình đã cho. Vậy $f(x) = \alpha x$.
b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x+y}{2} f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{xf(x) + yf(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Đặt $g(x) = xf(x)$. Khi đó, $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và từ (4) suy ra

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Suy ra $g(x) = ax + b$, với a, b là các hằng số cho trước tuỳ ý.
Từ $g(0) = 0$ dẫn đến $b = 0$. Vì $g(x) = xf(x)$ nên $f(x) = a, \forall x \neq 0$.
Vì $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$ nên $a = 0$.
Vậy $f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương, Phú Thọ). Xét hàm số

$$g(x) = e^{-x/18}(f(x) - 2014).$$

Suy ra $g(0) = g(1) = 0$. Hơn nữa $g(x)$ là hàm liên tục trên $[0; 1]$, có đạo hàm trên $(0; 1)$. Ta có :

$$g'(x) = \frac{e^{-x/18}}{18}\big(18f'(x) - f(x) + 2014\big) \le 0 \quad \forall x \in (0; 1)$$

$\Rightarrow g(x)$ là hàm giảm trên $[0; 1]$.
Mà $g(0) = g(1) = 0 \Rightarrow g(0) \equiv 0$ trên $[0; 1]$
$\Rightarrow f(x) \equiv 2014$ trên $[0; 1]$.
Thử lại ta thấy $f(x) \equiv 2014$ trên $[0; 1]$ thỏa mãn.

Bài 6.4 (CĐ Ngô Gia Tự)**.** Giả sử f là hàm số cần tìm. Khi đó

$$f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2014^{x+y}.$$

Thay $x = y = 0$ thì $f(0) \geq f^2(0) \geq 1$ nên $f(0) = 1$.
Thay $y = -x$ thì $f(0) \geq f(x).f(-x) \geq 1$.
Vì vậy, $f(x).f(-x) = 1$.
Thay $y = 0$ thì $f(x) \geq 2014^x$. Suy ra $f(-x) \geq 2014^{-x}$. Cho nên

$$f(x).f(-x) \geq 2014^{x+(-x)} = 1.$$

Vì vậy,

$$f(x) = 2014^x.$$

Bài 6.5 (ĐH Nông nghiệp)**.** Khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tới cấp 2:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(c_x)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{f''(c_x)}{2}x^2, c_x \in (0,x).$$

Suy ra

$$f(x) - (1+x) = \frac{f''(c_x)}{2}x^2.$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 (1+x)dx = \int_0^1 \frac{f''(c_x)}{2}x^2 dx \geq 0.$$

Từ đó suy ra

$$\int_0^1 f(x)dx \geq \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $f''(c_x) = 0, \forall x$, suy ra $f''(x) = 0, \forall x \in (0,1)$. Do đó ta có $f(x) = 1 + x$.

Bài 6.6 (ĐH Quảng Bình)**.** Từ giả thiết ta có $f(x) = \frac{1}{2}f(\frac{x}{2}) + x, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2^2}.f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x}{2^2} \\
\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right) &= \frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x}{2^4} \\
&\dots \\
\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) &= \frac{1}{2^{n+1}}f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x}{2^{2n}}
\end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được:

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ... + \frac{1}{2^{2n}}\right).(*)$$

Qua giới hạn đẳng thức $(*)$ khi $n \to \infty$ ta được:

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0.f(x) + x.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4x}{3}.$$

Bài 6.7 (ĐH Sao Đỏ). Giả thiết

$$f(x+y) = f(x)e^{\frac{f(y)}{2014}-1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{6}$$

Thay $x = y = 0$ vào (6) ta có:

$$f(0) = f(0)e^{\frac{f(0)}{2014}-1} \tag{7}$$

Nếu $f(0) = 0$ thì trong (6) thay $x = 0$ ta có $f(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ (7) suy ra $f(0) = 2014$.
Thay $x = 0$ trong (6) ta có

$$f(y) = 2014e^{\frac{f(y)}{2014}-1} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$\frac{f(y)}{2014} = e^{\frac{f(y)}{2014}-1} > 0 \quad y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Xét hàm số

$$g(u) = e^{u-1} - u, u > 0.$$

Ta có

$$g^{'}(u) = e^{u-1} - 1$$

do đó $g^{'}(u) = 0$ hay $u = 1$. Do đó, phương trình $g(u) = u$ có nghiệm duy nhất $u = 1$.
Vì vậy từ (8) ta có

$$f(y) = 2014, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Kết luận: $f(x) \equiv 0$ hoặc $f(x) \equiv 2014$ trên $\mathbb{R}$.

Bài 6.8 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Ta xét các trường hợp sau:
a) Nếu $f(f(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \leq 0.$$

Vì vậy f là hàm giảm trên $\mathbb{R}$ và

$$f(0) > 0 \geq f(f(x)) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}$ (mâu thuẫn với giả thiết).
b) Nếu tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho $f(f(z)) > 0$ thì

$$f(z + x) \geq f(z) + xf(f(z)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy ta có

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty.$$

Do đó tồn tại x_0 đủ lớn để:

$$f(x_0) \geq 0, f(f(x_0)) > 1.$$

Cũng do $\lim\limits_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$ ta có thể chọn $y_0 \geq \frac{x_0+1}{f(f(x_0))-1} > 0$ đủ lớn để

$$f(f(x_0 + y_0 + 1)) \geq 0.$$

Từ các khẳng định trên ta có:

$$f(x_0 + y_0) \geq f(x_0) + y_0 f(f(x_0)) \geq x_0 + y_0 + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(f(x_0 + y_0)) &= f[(x_0 + y_0 + 1) + (f(x_0 + y_0) - x_0 - y_0 - 1)] \\ &\geq f(x_0 + y_0 + 1) + [f(x_0 + y_0) - x_0 - y_0 - 1] f(f(x_0 + y_0 + 1)) \\ &\geq f(x_0 + y_0 + 1) \geq f(x_0 + y_0) + f(f(x_0 + y_0)) \\ &\geq f(x_0) + y_0 f(f(x_0)) + f(f(x_0 + y_0)) \\ &> f(f(x_0 + y_0)) \end{aligned}$$

(mâu thuẫn) .

Bài 6.9 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Cho $x = y = 0$ ta có $f(0) = \dfrac{2}{3} f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. Cho $x = 0$ ta có $f(y/3) = f(2y)/3$. Vậy

$$f\left(\frac{2x + y}{3}\right) = \frac{1}{3} f\left(4x + 2y\right).$$

Do đó

$$f(4x + 2y) = f(x) + f(2y).$$

Chọn y sao cho $4x + 2y = x \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x$. Do đó

$$f(x) = f(x) + f(-3x)$$

Suy ra $f(-3x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Bài 6.10 (CĐ Sư phạm Nam Định)**.** Ta có

$$I = \int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} - 2 \right)^2 dx \geq 0.$$

$$I = \int_0^1 \frac{(f'(x))^2 dx}{f(x)} - 4 \int_0^1 \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} + \int_0^1 4dx$$

$$I \leq 4 - 4 \int_0^1 \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} + 4x\Big|_0^1$$

$$I \leq 4 - 8\sqrt{f(x)}\Big|_0^1 + 4 = 8 - 8(\sqrt{f(1)} - \sqrt{f(0)}) = 0.$$

Vậy $I = 0$ và $\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = 2x + 2C$. $\sqrt{f(x)} = x + C$. Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$. Suy ra

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Bài 6.11 (CĐ Sư phạm Quảng Ninh)**.** Ta có

$$f(x) - f(\frac{x}{2014}) = \frac{x}{2014}; \cdot, f(\frac{x}{2014^{n-1}}) - f(\frac{x}{2014^n}) = \frac{x}{2014^n}.$$

$$f(x) - f(\frac{x}{2014^n}) = x(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2014^2} + \cdot + \frac{1}{2014^n}).$$

Ta có

$$f(x) - f(0) = \frac{x/2014}{1 - \dfrac{1}{2014}} = \frac{x}{2013}.$$

Vậy

$$f(x) = \frac{x}{2013} + 2014.$$

Bài 6.12 (ĐH Sư phạm Thái Nguyên)**.** Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn điều kiện bài toán. Ta thấy $(xy - 2)^2 + 2(x + y)^2 = (x^2 + 2)(y^2 + 2)$. Đặt

$$g(x) = (x^2 + 2)f(x),$$

theo giả thiết ta thấy hàm g thỏa mãn

$$g(x) \geq x + 1, g(x + y) \geq g(x)g(y)$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$$g(x) = e^x.$$

Thật vậy từ điều $g(x) \geq x+1$ ta suy ra $g(0) \geq 1$. Từ điều kiện $g(x+y) \geq g(x)g(y)$ ta suy ra $g^2(0) \leq g(0)$, do vậy $g(0) \leq 1$, vậy $g(0) = 1$.
Từ giả thiết ta có $g(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_n)$, với mọi số tự nhiên n. Do đó ta có

$$g(x) = g(n\frac{x}{n}) = g(\underbrace{\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}}_{n\text{hạng tử}}) \geq g^n(\frac{x}{n}) \geq (1+\frac{x}{n})^n.$$

Bất đẳng thức đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Cho $n \to \infty$, ta có
$g(x) \geq \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$. Hay $g(x) \geq e^x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Từ giả thiết của g cho $y = -x$, ta có $1 = g(0) \geq g(x)g(-x)$, suy ra $g(x) \leq \dfrac{1}{g(-x)}$, $g(-x) \geq e^{-x}$, do đó ta thu được $g(x) \leq e^x$. Vậy $g(x) = e^x$. Hay

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+2}.$$

Thử lại ta thấy hàm f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 6.13 (CĐ Sư phạm Vĩnh Phúc)**.** Cho $x = y = 0$ thì

$$f(0) \geq (f(0))^2 \geq 1$$

suy ra $f(0) = 1$. Cho $x = -y$ thì

$$f(0) \geq f(x).f(-x) \geq 1$$

nên

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Cho $y = 0$ thì $f(x) \geq 2014^x$ và $f(-x) \geq 2014^{-x}$. Từ đó suy ra

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} \leq \frac{1}{2014^{-x}} = 2014^x.$$

Vì vậy,

$$f(x) = 2014^x.$$

Kiểm tra được hàm $f(x) = 2014^x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 6.14 (ĐH Tân Trào)**.** Tìm hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2+y^2) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. Ta có

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2+y^2).$$

Suy ra

$$
\begin{aligned}
&(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)\\
&=[(x+y)-(x-y)][(x+y)+(x-y)][\frac{1}{4}[(x+y)+(x-y)]^2-\frac{1}{4}[(x+y)-(x-y)]^2]
\end{aligned}
$$

Đặt

$$
\begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases}
$$

ta được

$$vf(u)-uf(v)=(u+v)(u-v)[(u+v)^2-(u-v)^2].$$

Suy ra

$$vf(u)-uf(v)=u^3v-v^3u$$

Hay

$$v[f(u)-u^3]=u[f(v)-u^3].$$

Với $uv \neq 0$ ta có:

$$\frac{f(u)-u^3}{u}=\frac{f(v)-v^3}{v} \quad u,v \in \mathbb{R}^*.$$

Do đó

$$\frac{f(u)-u^3}{u}=a$$

hay

$$f(u)=au+u^3 \quad \forall u \neq 0.$$

Với $u=0; v \neq 0$ suy ra $f(u)-u^3=0$ hay $\Rightarrow f(u)=u3$ do đó $f(0)=0$. Hàm $f(u)=au+u^3$ thỏa mãn $f(0)=0$. Vậy

$$f(u)=au+u^3 \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Hàm số cần tìm là $f(x)=ax+x^3 (a \in \mathbb{R})$.