Chuyên đề Olympic Đại số
Hệ phương trình tuyến tính

Phần SV tự đọc

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 - 5x_5 = 8 \end{cases}$$

Bài 2. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 1 \\ \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots - [n(n+1) - 1]x_n = 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ với n = 5.
b) Giải hệ với n bất kỳ.

Bài 3. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{n-1} + x_n = n - 1 \\ x_n + x_1 = n \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau với a, b, c, d không đồng thời bằng 0:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = m \\ -bx_1 + ax_2 + dx_3 - cx_4 = n \\ -cx_1 - dx_2 + ax_3 + bx_4 = p \\ -dx_1 + cx_2 - bx_3 + ax_4 = q \end{cases}$$

Bài 5. Cho $A = [a_{ij}]_n$ thoả mãn $A^2 = -A$. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = x_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = x_n \end{cases}$$

Bài 6. Tìm a để hệ chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + ax_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + ax_n = 0 \end{cases}$$

Bài 7. Tìm điều kiện với các hệ số thực $\lambda, a, b, c, d, e, f$ để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + a x_2 + b x_3 + c x_4 = 0 \\ -a x_1 + \lambda x_2 + d x_3 - e x_4 = 0 \\ -b x_1 - d x_2 + \lambda x_3 + f x_4 = 0 \\ -c x_1 + e x_2 - f x_3 + \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 8. Cho a_i $(i = 1,2,\ldots n)$ là các số thực nằm trong khoảng (0,1). Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \end{cases}$$

Hướng dẫn - Đáp số

1. (2, 1, 0, -1, 0)

2. a) $(-3, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5})$; b) Đặt S= $\sum x_i$, suy ra $x_i = \frac{S}{i(i+1)} - 1$. Cộng tất cả x_i suy ra $S = -n$, từ đó suy ra nghiệm.

3. Nếu n chẵn, cộng các pt chẵn và cộng các pt lẻ, suy ra hệ phương trình vô nghiệm.
Nếu n lẻ, trừ phương trình thứ (i+1) cho phương trình thứ (i) suy ra các nghiệm $\{x_{2k}\}$ lập thành cấp số cộng và các nghiệm $\{x_{2k+1}\}$ lập thành cấp số cộng. Từ pt(1) và pt(n) tính được x_1, x_2, suy ra cấp số cộng cần tìm.22

4. Hệ pt: Ax=B. Có $A \,.\, A^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I$, suy ra $A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} A^t$. Suy ra nghiệm $x = A^{-1}B$.

5. Hệ có dạng $(A - I)x = 0$. Xét $(A - I)(A + 2I) = -2I$. Suy ra $\det(A - I) \neq 0$, nên hệ đã cho chỉ có nghiệm tầm thường.

6. $\det A = (a + n - 1)(a - 1)^{n-1}$. Hệ chỉ có nghiệm tầm thường nếu $\det A \neq 0$, tức là $a \neq -(n-1)$ và $a \neq 1$.

7. Nhân pt(i) với x_i và cộng lại, suy ra $\lambda = 0$. Khi đó $\det A = (af + be + cf)^2$. Hệ có nghiệm không tầm thường nếu $\det A \neq 0$.

8. Hệ pt: Ax=0. Tính định thức của A: lấy dòng (i) trừ cho dòng 1, sau đó nhóm nhân tử chung $(1 - a_i)$ của cột (i), cộng tất cả các cột vào cột 1: $|A| = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - a_i} - 1 \right)$.
Vì detA $\neq 0$ nên hệ chỉ có nghiệm tầm thường.