Mục lục

Danh sách hình vẽ

CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$: Tập các số tự nhiên;
$\mathbb{N}^*$: Tập các số nguyên dương;
$\mathbb{R}$: Tập các số thực;
$\mathbb{R}^*$: Tập các số thực khác 0;
$\mathbb{R}_+^*$: Tập các số thực dương;
$\mathbb{R}_+$: Tập các số thực không âm;
Δ : Bắt đầu chứng minh;
$\square$: Kết thúc chứng minh.
$\star$: Định nghĩa
$\lozenge$: Định lý
$\diamondsuit$: Mệnh đề
$\bigtriangledown$: Hệ quả
$\bullet$: Ví dụ
$*$: Chú ý

Chương 1

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. Khái niệm mở đầu

1.1.1. Không gian metric

Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ là tập các bộ có thứ tự n số thực $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, mà ta cũng gọi là các điểm. Ta gọi khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của $\mathbb{R}^n$ là biểu thức

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1}$$

Dễ thấy khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$ được cho bởi (1.1) có ba tính chất cơ bản sau của metric:

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Như vậy tập $\mathbb{R}^n$ với khoảng cách được cho bởi công thức (1.1) là không gian metric [2, tr 39].

Giả sử $x^* \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Ta gọi ε - lân cận của x^* là tập hợp sau của $\mathbb{R}^n$:

$$V_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) < \varepsilon\}.$$

Ta gọi lân cận của x^* là mọi tập của $\mathbb{R}^n$ chứa được một ε - lân cận nào đó của x^*. Lân cận của x^* được ký hiệu là $V(x^*)$. Tập $\overset{0}{V}_\varepsilon(x^*) = V_\varepsilon(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là ε- lân cận thủng của x^* . Tập $\overset{0}{V}(x^*) = V(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là lân cận thủng của x^*.

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $x^* \in D$ được gọi là điểm trong của D nếu tồn tại một ε - lân cận của x^* nằm hoàn toàn trong D . Tập D được gọi là mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của nó.

Điểm $y^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của D nếu mọi ε- lân cận của x^* đều vừa chứa điểm thuộc D, vừa chứa điểm không thuộc D. Điểm biên của D có thể thuộc D, cũng có thể không thuộc D. Tập các điểm biên của D được gọi là biên của nó và được ký hiệu là ∂D.

Tập D được gọi là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

Ví dụ ε- lân cận $V_\varepsilon(x^*)$ của x^* là tập mở. Ta gọi $V_\varepsilon(x^*)$ là quả cầu mở tâm x^*, bán kính ε. Biên của quả cầu ấy là tập các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d(x, x^*) = \varepsilon$. Tập $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) \leq \varepsilon\}$ là một tập đóng và được gọi là quả cầu đóng tâm x^*, bán kính ε.

Tập D được gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu chứa nó.

Tập D được gọi là liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kỳ của D bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D. Tập D liên thông được gọi là đơn liên nếu biên của nó gồm một mặt kín, được gọi là đa liên nếu biên của nó gồm nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một.

1.1.2. Định nghĩa hàm số n biến số

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Ánh xạ

$$\begin{array}{rccc} f & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2, ...x_n) & \mapsto & u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

được gọi là hàm số n biến số. Tập D được gọi là tập xác định, $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các biến độc lập, u được gọi là biến phụ thuộc của hàm.

Hàm hai biến thường được ký hiệu là $z = f(x, y)$, còn hàm ba biến thường được ký hiệu là $u = f(x, y, z)$.

Về sau ngoài các chữ cái như $x, y, z, ...$ ta còn ký hiệu các điểm của $\mathbb{R}^n$ bằng các chữ cái in hoa như $M, N, P, ...$ Cũng giống như với hàm một biến số, với hàm nhiều biến số ta có quy ước sau: Nếu hàm nhiều biến số được cho bằng biểu thức giải tích $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và không nói gì thêm về tập xác định của hàm số đó thì ta quy ước tập xác định của nó là tập tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$, sao cho $f(M)$ có nghĩa.

•**Ví dụ 1.1.** Tập xác định của hàm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Đó là hình tròn tâm O(0,0), bán kính bằng 2.

1.1.3. Giới hạn của hàm nhiều biến

Các khái niệm trong mục này, mục 1.1.4, và trong các phần 1.2, 1.3 được trình bày cho hàm hai biến. Chúng có thể được mở rộng cho hàm nhiều hơn hai biến.

⋆ **Định nghĩa 1.1.** Ta nói dãy điểm $M_n(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, dần đến điểm $M_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ và viết $M_n \to M_0$ khi n dần đến vô cực hay $M_n \to M_0 (n \to \infty)$ nếu $d(M_n, M_0) \to 0 (n \to \infty)$.

Dễ thấy rằng $M_n \to M_0 (n \to \infty) \Leftrightarrow x_n \to x_0, y_n \to y_0 (n \to \infty)$.

⋆ **Định nghĩa 1.2.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận thủng $\overset{0}{V}(M_0)$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Ta nói hàm f có giới hạn l khi M(x,y) dần đến $M_0(x_0, y_0)$ và viết $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ hay $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = l$ nếu với mọi dãy điểm $M_n(x_n, y_n)$ thỏa mãn $M_n \in \overset{0}{V}(M_0), \forall n \in N^*, M_n \to M_0 (n \to \infty)$ ta đều có $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l$.

Định nghĩa hàm có giới hạn vô cực tương tự như định nghĩa trên.

Nhận xét 1.1. Các tính chất cơ bản của hàm số như: giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương, định lý kẹp,... vẫn còn đúng với giới hạn của hàm hai biến.

•**Ví dụ 1.2.**

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0^2+0^2 = 0.$

Δ.Giả sử $\{(x_n, y_n)\}_n$ là một dãy dần đến $(0,0)$ và $x_n^2+y_n^2 > 0$. Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+y_n^2) = 0 \overset{\text{đn}}{\Rightarrow} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0$ $\square$.

(b) Xét $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Ta thấy hàm $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ xác định trên $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Với $(x,y)\neq(0,0)$ ta có

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}|y| \le 1.|y| = |y|,$$

mà $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, nên theo định lý kẹp về giới hạn của hàm số $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

1.1.4. Sự liên tục của hàm nhiều biến

$\star$ **Định nghĩa 1.3.** Giả sử hàm $f(x,y)$ xác định trong tập $D\subset\mathbb{R}^2$, điểm $M_0(x_0,y_0)\in D$. Ta nói hàm f liên tục tại M_o nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho với mọi điểm M(x, y) thỏa mãn các điều kiện $M\in D$, $d(M,M_0)<\delta$, ta đều có

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

Theo định nghĩa trên, nếu M_o là điểm cô lập của D, tức là trong một lân cận nào đó của M_o chỉ có một điểm duy nhất của D (chính là điểm M_o), thì hàm f liên tục tại M_o. Nếu M_o là điểm giới hạn của D, tức là trong mọi lân cận thủng của M_o đều có ít nhất một điểm của D, thì hàm f liên tục tại M_o khi và chỉ khi

$$\lim_{\substack{M\to M_0\\ M\in D}} f(M) = f(M_0),$$

trong đó giới hạn ở vế trái được hiểu theo nghĩa của định nghĩa 1.2 với một thay đổi nhỏ là đối với dãy điểm M_n có thêm đòi hỏi $M_n\in D, \forall n\in\mathbb{R}^*$.

Hàm f liên tục tại mọi điểm của D được gọi là liên tục trên D.

Hàm f được gọi là liên tục đều trên D nếu với mọi $\varepsilon>0$ tồn tại $\delta>0$ sao cho với mọi cặp điểm $M,N\in D$ thỏa mãn điều kiện $d(M,N)<\delta$ ta đều có

$$|f(M)-f(N)|<\varepsilon.$$

Hàm f liên tục trên tập đóng, bị chặn D (tập compact) có các tính chất tương tự như hàm một biến, đó là: f bị chặn trên D, f đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, f liên tục đều trên D.

Nhận xét 1.2. Các tính chất cơ bản của sự liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm một biến liên tục vẫn còn đúng với hàm hai biến.

$\bullet$**Ví dụ 1.3.** Khảo sát sự liên tục của hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{khi}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{khi } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

trong đó $\alpha>1$.

Bài giải. Hàm f liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$ vì khi đó hàm f là tỉ số của hai hàm liên tục mà mẫu số khác 0. Để xét tính liên tục của hàm f tại (0,0) ta tính giới hạn của hàm số ấy tại (0,0). Theo bất đẳng thức Cauchy

$$|xy|^\alpha \leq \left[\tfrac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha,$$

do đó với $(x,y) \neq (0,0)$ ta có

$$0 \leq f(x,y) \leq \left[\tfrac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha \tfrac{1}{x^2+y^2} = \tfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha}.$$

Vì $\alpha - 1 > 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha} = 0.$$

Theo định lý kẹp về giới hạn của hàm số ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

tức là hàm f liên tục tại (0,0). Vậy hàm f liên tục tại mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Đạo hàm riêng và vi phân

1.2.1. Định nghĩa đạo hàm riêng

$\star$ **Định nghĩa 1.4.** Giả sử hàm $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ đặt

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng $\Delta_x f$ được gọi là số gia riêng của hàm f theo biến x tại M_o. Đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại M_o là

$$\tfrac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{\Delta_x f}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại. Đạo hàm riêng ấy cũng được ký hiệu bằng một trong các ký hiệu sau:

$$f'_x(M_0), \tfrac{\partial z}{\partial x}(M_0), z'_x(M_0).$$

Đạo hàm riêng của hàm f theo biến y tại M_o được định nghĩa tương tự.

Từ định nghĩa 1.4 ta suy ra quy tắc thực hành sau: khi tính đạo hàm riêng của hàm hai biến theo biến nào đó ta coi biến còn lại là hằng số.

•Ví dụ 1.4. Với $z = \arctan \frac{y}{x}$ ta có

$$z'_x = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}(\tfrac{y}{x})'_x = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}(-\tfrac{y}{x^2}) = -\tfrac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}(\tfrac{y}{x})'_y = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}\tfrac{1}{x} = \tfrac{x}{x^2+y^2}.$$

1.2.2. Vi phân toàn phần

⋆ **Định nghĩa 1.5.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Với $\Delta x, \Delta y$ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng Δf được gọi là số gia toàn phần của hàm f tại $M_0(x_0, y_0)$. Nếu Δf có dạng

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \tag{1.2}$$

trong đó A, B là các số thực không phụ thuộc vào Δx và Δy, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn ρ khi ρ dần đến 0, thì hàm f được gọi là khả vi tại M_o và biểu thức

$$df = A\Delta x + B\Delta y \tag{1.3}$$

được gọi là vi phân toàn phần của hàm f tại M_o.

♢ **Định lý 1.1.** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì f có các đạo hàm riêng tại M_o và vi phân toàn phần của hàm f tại M_o là*

$$df = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.4}$$

Δ.Áp dụng biểu diễn (1.2) với $\Delta y = 0$, để ý rằng khi đó $\Delta f = \Delta_x f$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2} = |\Delta x|$, ta được

$$\Delta_x f = A\Delta x + o(|\Delta x|).$$

Với $\Delta x \neq 0$ chia hai vế của đẳng thức trên cho Δx ta được

$$\tfrac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \tfrac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}.$$

Vế phải của đẳng thức cuối cùng dần tới A khi $\Delta x \to 0$ vì $\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \pm\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Suy ra $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ có giới hạn bằng A khi $\Delta x \to 0$, tức là f có đạo hàm riêng theo x tại M_o và $A = f'_x(M_0)$. Tương tự ta có hàm f có đạo hàm riêng theo y tại M_o và $B = f'_y(M_0)$. Cuối cùng thay $A = f'_x(M_0)$ và $B = f'_y(M_0)$ vào (1.3) ta được (1.4) □.

Định lý đảo của định lý 1.1 không đúng, tức là tính có các đạo hàm riêng của hàm số tại một điểm không kéo theo tính khả vi của hàm số tại điểm ấy. Đây là điểm khác biệt giữa hàm hai biến và hàm một biến. Định lý dưới đây cho ta một điều kiện đủ của hàm khả vi.

♢ **Định lý 1.2.** *Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_o thì hàm f khả vi tại M_o.*

Ta thừa nhận Định lý 1.2. Áp dụng định lý này ta thấy hàm $f(x, y) = x$ có các đạo hàm riêng $f'_x = 1$ và $f'_y = 0$ liên tục trên toàn $\mathbb{R}^2$ nên khả vi trên toàn $\mathbb{R}^2$. Theo công thức (1.4) ta có $dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y$ hay $\Delta x = dx$. Tương tự ta có $\Delta y = dy$. Do đó công thức (1.4) còn có dạng

$$df = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy \tag{1.5}$$

•**Ví dụ 1.5.** Tìm vi phân toàn phần của hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ta có

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

$$z'_x = \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

do đó

$$dz = \tfrac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \tfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Trong phần cuối của mục này chúng tôi giới thiệu một ứng dụng của vi phân toàn phần. Giả sử hàm f(x,y) khả vi tại $M_o(x_o, y_o)$. Khi đó số gia toàn phần Δf có dạng (1.2). Bỏ qua vô cùng bé $o(\rho)$ bậc cao hơn ρ ta được công thức xấp xỉ

$$\Delta f \approx A\Delta x + B\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.6}$$

Công thức (1.6) cho phép ta tính giá trị gần đúng của hàm f tại điểm đủ gần điểm M_o.

•**Ví dụ 1.6.** Tính gần đúng giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{2.98^2 + 4.01^2}.$$

Lời giải. Đặt $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì $A = z(2.98, 4.01)$. Viết A dưới dạng $A = z(3 - 0.02, 4 + 0.01)$, rồi áp dụng công thức (1.6) ta được

$$A \approx z(3, 4) + z'_x(3, 4)(-0.02) + z'_y(3, 4)0.01,$$

trong đó

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$
$$z'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5},$$
$$z'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Ta suy ra $A \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}0.01 \Rightarrow A \approx 4.996$.

1.2.3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1.2.3.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm f(x,y) có các đạo hàm riêng f'_x và f'_y trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Các đạo hàm riêng này là các hàm hai biến xác định trên D. Nếu các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng này tồn tại thì ta gọi chúng là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai của hàm f như sau:

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ hay f''_{xx} hay f''_{x^2}.
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ hay f''_{xy}.
$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ hay f''_{yx}.
$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$. Đạo hàm riêng cấp hai này còn được ký hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ hay f''_{yy} hay f''_{y^2}.

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f nếu tồn tại được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba của hàmf ...

•**Ví dụ 1.7.** Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$ ta lần lượt có

$$z'_x = 3x^2 - 3 + 2xy^2,\ z'_y = 2x^2y,$$
$$z''_{xx} = 6x + 2y^2,\ z''_{xy} = 4xy,\ z''_{yx} = 4xy,\ z''_{yy} = 2x^2.$$

Các đạo hàm z''_{xy} và z''_{yx} được gọi là các đạo hàm hỗn hợp của hàm z. Trong ví dụ trên ta thấy các đạo hàm hỗn hợp của hàm z bằng nhau. Không phải hàm số nào cũng có tính chất này. Định lý sau cho ta một điều kiện đủ để các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau.

◊ **Định lý 1.3.** *(Định lý Schwartz). Nếu hàm f(x,y) có các đạo hàm hỗn hợp trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$ và các đạo hàm hỗn hợp ấy liên tục tại M_o thì các đạo hàm hỗn hợp ấy bằng nhau tại M_o.*

Ta cũng thừa nhận không chứng minh định lý 1.3.

1.2.3.2. Vi phân cấp cao

Ta gọi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ của hàm $f(x, y)$ tại một điểm là vi phân cấp một của nó tại điểm ấy. Giả sử ta đã định nghĩa vi phân cấp $n \geq 1$ của hàm f tại một điểm. Nếu vi phân cấp n của hàm f xác định trên miền D và khả vi tại điểm M_o nào đó thì vi phân của vi phân cấp n ấy tại M_o được gọi là vi phân cấp (n+1) của hàm f tại M_o. Vi phân cấp n nguyên dương của hàm f tại M_o được ký hiệu là $d^n f(M_0)$.

Giả sử f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp hai trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$, và các đạo hàm riêng cấp hai ấy liên tục tại M_o (do đó $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ theo định lý Schwartz). Khi đó f'_x và f'_y khả vi tại M_o theo định lý 1.2. Vì x và y là các biến độc lập nên $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$ là các hằng số, do đó $df = f'_x dx + f'_y dy$ khả vi tại M_o và vi phân của df tại M_o thỏa mãn

$$\begin{aligned} d(df)(M_0) &= d(f'_x dx + f'_y dy)(M_0) \\ &= d(f'_x dx)(M_0) + d(f'_y dy)(M_0) \\ &= d(f'_x)(M_0)dx + d(f'_y)(M_0)dy \\ &= (f''_{xx}(M_0)dx + f''_{xy}(M_0)dy)dx + (f''_{yx}(M_0)dx + f''_{yy}(M_0)dy)dy \\ &= f''_{xx}(M_0)dx^2 + f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yx}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2. \end{aligned}$$

Trong dãy đẳng thức trên, thay biểu thức đầu tiên bằng $d^2 f(M_0)$ theo định nghĩa, và thay $f''_{yx}(M_0) = f''_{xy}(M_0)$ trong biểu thức cuối cùng ta được công thức của vi phân cấp hai của hàm f

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2. \tag{1.7}$$

Người ta thường dùng ký hiệu tượng trưng để biểu diễn công thức trên như sau

$$d^2 f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^2 f(M_0),$$

trong đó $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo x, $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần theo y, một lần theo x. Tương tự nếu f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp n trong lân cận của $M_o(x_o, y_o)$, và các đạo hàm riêng cấp n liên tục tại M_o, thì khả vi đến cấp n tại M_o. Trong trường hợp này ta cũng có công thức lũy thừa tượng trưng sau

$$d^n f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^n f(M_0).$$

•**Ví dụ 1.8.** Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$, theo công thức (1.7), ta có

$$d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2,$$

do đó theo kết quả của ví dụ 1.7 $d^2 z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2$.

Nói riêng ta có

$$d^2 z(1, 0) = 6dx^2 + 2dy^2.$$

1.2.4. Công thức Taylor đối với hàm nhiều biến

Dưới đây chúng tôi phát biểu không chứng minh một định lý, được sử dụng để khảo sát cực trị của hàm số hai biến số.

◊ **Định lý 1.4.** *Giả sử hàm f(x,y) có các đạo hàm riêng đến cấp n+1 liên tục trong ε - lân cận $V_\varepsilon(M_o)$ của điểm $M_o(x_o, y_o)$ và $(x_0 + dx, y_0 + dy) \in V_\varepsilon(M_0)$. Khi đó $\exists \theta \in (0,1)$ sao cho*

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(M_0) + \tfrac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \tfrac{1}{n!}d^n f(M_0) + \tfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy). \end{aligned} \tag{1.8}$$

1.3. Cực trị của hàm nhiều biến

Trong mục này chúng tôi sẽ xem xét ba loại cực trị của hàm nhiều biến, đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện, cực trị có điều kiện, và giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên miền đóng, bị chặn. Như đã nói từ trước, chúng tôi sẽ xét các khái niệm này đối với hàm số hai biến số.

1.3.1. Cực trị tự do của hàm nhiều biến

⋆ **Định nghĩa 1.6.** Hàm $f(x, y)$ được gọi là có cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ nếu tồn tại lân cận $V(M_0(x_0, y_0))$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$ sao cho

$$f(M) < f(M_0), \forall M \in \overset{0}{V}(M_0).$$

Khi đó điểm M_o được gọi là điểm cực đại của hàm f, $f(M_o)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm f và được ký hiệu là $f_{\max}(M_0)$.

Điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu của hàm hai biến được định nghĩa tương tự. Giá trị cực tiểu của hàm f được ký hiệu là $f_{\min}(M_0)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm hai biến được gọi chung là điểm cực trị. Tương tự như vậy đối với giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm nhiều biến.

Chúng tôi đưa vào sử dụng các ký hiệu sau đối với hàm $z = f(x, y)$:

$$p = z'_x(x, y),\ q = z'_y(x, y),\ a = z''_{xx}(x, y),\ b = z''_{xy}(x, y),\ c = z''_{yy}(x, y).$$

◊ **Định lý 1.5.** *Nếu hàm $f(x, y)$ có cực trị và có các đạo hàm riêng tại điểm $M_o(x_o, y_o)$ thì*

$$p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0.$$

Δ.Từ giả thiết của Định lý 1.5 suy ra hàm một biến $g(x) = f(x, y_0)$ có cực trị tại x_o. Hàm g có đạo hàm tại x_o là $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$. Theo định lý Fermat, $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$ hay $p(M_0) = 0$. Hoàn toàn tương tự ta có $q(M_0) = 0$ □.

Ta gọi các điểm tới hạn của hàm hai biến là các điểm mà ở đó các đạo hàm riêng nó tồn tại và triệt tiêu hoặc ở đó ít nhất một trong hai đạo hàm riêng của hàm số ấy không tồn tại. Từ định lý 1.5 suy ra nếu một điểm là điểm cực trị của hàm hai biến thì nó là điểm tới hạn. Khẳng định ngược lại không đúng.

Định lý dưới đây cho phép ta kiểm tra một số điểm tới hạn của hàm hai biến có phải là điểm cực trị của hàm số ấy hay không.

◊ **Định lý 1.6.** *Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của điểm $M_o(x_o, y_o)$. Giả sử $p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0$. Khi đó tại M_o:*

(i) Nếu $b^2 - ac < 0$ thì M_o là điểm cực trị của hàm f. Đó là điểm cực tiểu nếu $a > 0$, là điểm cực đại nếu $a < 0$.

(ii) Nếu $b^2 - ac > 0$ thì M_o không là điểm cực trị của hàm f.

(iii) Nếu $b^2 - ac = 0$ thì M_o có thể là điểm cực trị của hàm f, cũng có thể không là điểm cực trị của hàm f.

Δ.Giả sử $h^2 + k^2 \neq 0$ và $h^2 + k^2$ đủ nhỏ. Áp dụng công thức (1.8) và sử dụng giả thiết $p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0$ ta được

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)hk + f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + \tfrac{1}{2}\left[\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2\right],\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}\alpha &= f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{xx}(x_0, y_0),\\ \beta &= f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{xy}(x_0, y_0),\\ \gamma &= f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{yy}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Do các đạo hàm cấp hai của hàm f liên tục tại M_0 nên α, β, γ dần đến 0 khi $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ dần đến 0. Từ đó ta có

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\left[ah^2 + 2bhk + ck^2\right] + o(\rho^2) \tag{1.9}$$

trong đó

$$\begin{aligned}a &= f''_{xx}(x_0, y_0),\\ b &= f''_{xy}(x_0, y_0),\\ c &= f''_{yy}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Giả sử $b^2 - ac < 0$. Khi đó $a \neq 0$. Giả sử $a > 0$. Xét hàm

$$g(u, v) = \tfrac{1}{2}\left[au^2 + 2buv + cv^2\right].$$

Vì g liên tục trên đường tròn $u^2 + v^2 = 1$ nên đạt được giá trị nhỏ nhất tại (u_0, v_0) nào đó trên đường tròn đó. Ta có

$$\begin{aligned}g(u, v) &\geq g(u_0, v_0) = \tfrac{1}{2a}\left[(au_0)^2 + 2au_0bv_0 + acv_0{}^2\right]\\ &= \tfrac{1}{2a}\left[(au_0 + bv_0)^2 - (b^2 - ac)v_0{}^2\right] > 0, \forall (u, v) : u^2 + v^2 = 1.\end{aligned}$$

Từ (1.9) suy ra

$$\Delta f = \rho^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[au^2 + 2buv + cv^2\right] + \tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right\},$$

trong đó $u = \dfrac{h}{\rho}, v = \dfrac{k}{\rho}$.

Theo chứng minh trên

$$\Delta f \geq \rho^2\left\{g(u_0, v_0) + \tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right\} > \tfrac{1}{2}\rho^2 g(u_0, v_0) > 0$$

với mọi ρ đủ nhỏ. Điều này chứng tỏ M_0 là điểm cực tiểu của hàm f. Chứng minh tương tự ta được nếu $a < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm f.

Giả sử $b^2 - ac > 0$. Nếu $a \neq 0$ thì $\dfrac{1}{2}\left[at^2 + 2bt + c\right]$ là tam thức bậc hai. Nó đổi dấu trên $\mathbb{R}$ vì $b^2 - ac > 0$. Giả sử t_1, t_2 là hai giá trị thỏa mãn

$$\tfrac{1}{2}\left[a{t_1}^2 + 2bt_1 + c\right] < 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\left[a{t_2}^2 + 2bt_2 + c\right] > 0.$$

Áp dụng công thức (1.9) với $h = t_1\delta, k = \delta, \delta \neq 0$. Khi đó $\rho^2 = ({t_1}^2+1)\delta^2$ nên $o(\rho^2) = o(\delta^2)$. Từ đó ta có

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\left[a{t_1}^2\delta^2 + 2bt_1\delta^2 + c\delta^2\right] + o(\delta^2) = \delta^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[a{t_1}^2 + 2bt_1 + c\right] + \tfrac{o(\delta^2)}{\delta^2}\right\} < 0$$

với mọi δ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Tương tự áp dụng công thức (1.9) với $h = t_2\lambda, k = \lambda, \lambda \neq 0$, ta được

$$\Delta f = \lambda^2\left\{\tfrac{1}{2}\left[a{t_1}^2 + 2bt_1 + c\right] + \tfrac{o(\lambda^2)}{\lambda^2}\right\} > 0$$

với mọi λ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Ta thấy Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_o, điều đó chứng tỏ M_o không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $c \neq 0$ lập luận tương tự ta cũng có kết luận M_o không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $a = c = 0$ thì $b \neq 0$. Đầu tiên áp dụng (1.9) với $h = k = \xi \neq 0$, khi đó $\rho^2 = \xi^2 + \xi^2 = 2\xi^2$, do đó $o(\rho^2) = o(\xi^2)$, ta được

$$\Delta f = b\xi^2 + o(\xi^2) = \xi^2\left[b + \tfrac{o(\xi^2)}{\xi^2}\right],$$

suy ra Δf cùng dấu với b khi ξ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Sau đó áp dụng (1.9) với $h = \zeta, k = -\zeta, \zeta \neq 0$, ta được

$$\Delta f = -b\zeta^2 + o(\zeta^2) = \zeta^2\left[-b + \tfrac{o(\zeta^2)}{\zeta^2}\right],$$

suy ra Δf trái dấu với b khi ζ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Các lập luận trên chứng tỏ Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_o, điều đó chứng tỏ M_o không là điểm cực trị của hàm f.

Để kết thúc chứng minh định lý ta đưa ra hai ví dụ về điểm tới hạn mà tại đó $b^2 - ac = 0$. Trong một trường hợp điểm tới hạn là điểm cực trị, trong trường hợp còn lại điểm tới hạn không là điểm cực trị.

Đầu tiên xét hàm$f(x, y) = x^4 + y^4$. Ta có $p = f'_x = 4x^3, q = f'_y = 4y^3, a = f''_{xx} = 12x^2, b = f''_{xy} = 0, c = f''_{yy} = 12y^2$.

Điểm tới hạn của hàm f là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Ta thấy f có một điểm tới hạn duy nhất là O(0,0). Tại điểm tới hạn đó $a = 0, b = 0, c = 0 \Rightarrow b^2 - ac = 0$. Để biết O(0,0) có là điểm cực trị không ta lấy h, k thỏa mãn $h^2 + k^2 \neq 0$, $h^2 + k^2$ đủ nhỏ, và xét dấu của $\Delta f = f(h, k) - f(0, 0)$. Ta có

$$\Delta f = f(h, k) - f(0, 0) = h^4 + k^4 - 0^4 - 0^4 = h^4 + k^4 > 0,$$

Suy ra $O(0, 0)$ là điểm cực tiểu của hàm f.

Tiếp theo xét hàm $g(x, y) = x^3 + y^3$. Tương tự như đối với hàm f, hàm g cũng có một điểm tới hạn duy nhất là O(0,0) và tại đó $b^2 - ac = 0$. Với h, k thỏa mãn $k = 0, h \neq 0$ ta có

$$\Delta g = g(h, 0) - g(0, 0) = h^3 + 0^3 - 0^3 - 0^3 = h^3.$$

Ta thấy Δg đổi dấu dù h có giá trị tuyệt đối nhỏ bao nhiêu chăng nữa, tức là Δg đổi dấu trong mọi lân cận của O(0,0). Điều đó chứng tỏ O(0,0) không là điểm cực trị của hàm g □.

Từ các định lý 1.5 và 1.6 ta suy ra thuật toán tìm cực trị của hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trên tập xác định của hàm số ấy như sau:

Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp một $p = z'_x, q = z'_y$.

Bước 2. Tìm điểm tới hạn của hàm z bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$

Bước 3. Tính các đạo hàm riêng cấp hai $a = z''_{xx},\ b = z''_{xy},\ c = z''_{yy}$.

Bước 4. Với mỗi điểm tới hạn của hàm z, kiểm tra xem trường hợp nào trong các trường hợp (i), (ii), (iii) của định lý 1.6 xảy ra. Nếu xảy ra trường hợp (i) hoặc (ii) thì đưa ra kết luận tương ứng. Nếu xảy ra trường hợp (iii) thì cần khảo sát thêm về điểm tới hạn bằng các công cụ khác để biết điểm tới hạn ấy có phải là điểm cực trị không. Chẳng hạn có thể dựa vào định nghĩa cực trị như trong chứng minh của định lý 1.6. Chúng tôi không đi sâu vào phân tích các phương pháp khảo sát đối với điểm tới hạn trong trường hợp này.

Để dễ nhớ định lý 1.6 chúng tôi đưa ra bảng sau:

$b^2 - ac$	a	Kết luận
< 0	> 0	Điểm tới hạn là điểm cực tiểu
	< 0	Điểm tới hạn là điểm cực đại
> 0	Bất kỳ	Điểm tới hạn không là điểm cực trị
$= 0$	Bất kỳ	Chưa kết luận được. Điểm tới hạn có thể là điểm cực trị, có thể không là điểm cực trị

•**Ví dụ 1.9.** Tìm cực trị của hàm số $z = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2, \\ p &= z'_x = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2, \\ q &= z'_y = 2x^3y, \\ a &= z''_{xx} = 36x^2 + 48x - 12 + 6xy^2, \\ b &= z''_{xy} = 6x^2y, \\ c &= z''_{yy} = 2x^3. \end{aligned}$$

Ta tìm các điểm tới hạn của hàm z bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2 = 0 \\ 2x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ y = 0. \end{cases}$$

Suy ra hàm z có ba điểm tới hạn là $M(-2, 0),\ N(-1, 0),\ P(1, 0)$. Ta có bảng sau:

Điểm tới hạn	a	b	c	$b^2 - ac$	Kết luận
M(-2,0)	36>0	0	-16	576>0	M không là điểm cực trị của hàm z
N(-1,0)	-24<0	0	-2	-48<0	N là điểm cực đại của hàm z, $z_{\max}(N) = 13$
P(1,0)	72>0	0	2	-144<0	P là điểm cực tiểu của hàm z, $z_{\min}(P) = -19$

1.3.2. Cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến

Người ta gọi cực trị của hàm số

$$z = f(x, y), \tag{1.10}$$

trong đó các biến số bị ràng buộc bởi hệ thức

$$g(x, y) = 0 \tag{1.11}$$

là cực trị có điều kiện.

◊ **Định lý 1.7.** *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị có điều kiện của hàm số* (1.10) *với điều kiện* (1.11). *Giả sử*

(i) Trong lân cận của M_0 các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục,

(ii) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_0.

Khi đó tại M_0

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Ta thừa nhận định lý này.

Hệ thức (1.12) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_o, y_o).

***Chú thích* 1.1.** *Hệ thức* (1.12) *có thể viết lại thành*

$$f'_x(M_0)g'_y(M_0) - f'_y(M_0)g'_x(M_0) = 0,$$

hay

$$\tfrac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)} = \tfrac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)} \tag{1.13}$$

Đặt các giá trị chung của các vế ở đẳng thức (1.13) là $-\lambda$ ta được

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda g'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda g'_y(M_0) = 0. \end{cases}$$

Ngược lại nếu tồn tại λ thỏa mãn hệ trên thì $\frac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)}$ và $\frac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)}$ bằng nhau vì đều bằng $-\lambda$. Tức là hệ thức (1.13), do đó (1.12) thỏa mãn. Vậy nếu M_o thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của định lý 1.7 thì tồn tại λ sao cho tại M_o

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Hệ (1.14) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_0, y_0, λ).

Đặt

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \tag{1.15}$$

thì

$$\begin{aligned} F'_x &= f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) \\ F'_y &= f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) \\ F'_\lambda &= g(x, y), \end{aligned}$$

do đó hệ (1.14) cùng với điều kiện (1.11) có thể viết lại thành

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Hàm $F(x, y, \lambda)$ trong công thức (1.15) được gọi là hàm Lagrange.

Ta gọi điểm tới hạn của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) là điểm thuộc một trong hai loại sau:

- Loại 1: Gồm các điểm (x, y) thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của định lý 1.7 và hệ (1.16) với λ nào đó.

- Loại 2: Gồm các điểm tại đó một trong hai điều kiện (i), (ii) của định lý 1.7 không thỏa mãn.

Từ định lý 1.7, các lập luận sau định lý ấy, và chú thích 1.1 suy ra nếu M_o là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) thì M_o là điểm tới hạn. Khẳng định ngược lại không đúng.

Định lý dưới đây cho phép ta kiểm tra một số điểm tới hạn loại 1 của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) có phải là điểm cực trị có điều kiện của hàm số ấy không.

◊ **Định lý 1.8.** *Giả sử $M_o(x_o, y_o)$ là điểm tới hạn loại 1 của hàm số* (1.10) *với điều kiện* (1.11). *Giả sử (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của* (1.16). *Xét vi phân cấp hai*

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = F''_{xx}(M_0)h^2 + 2F''_{xy}(M_0)hk + F''_{yy}(M_0)k^2$$

khi h, k không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn

$$g'_x(M_0)h + g'_y(M_0)k = 0.$$

(a) Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì M_o là điểm cực tiểu của hàm số (1.10) *với điều kiện* (1.11).

(b) Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì M_o là điểm cực đại của hàm số (1.10) *với điều kiện* (1.11).

(c) Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ thì M_o có thể là điểm cực trị, cũng có thể không là điểm cực trị của hàm số (1.10) *với điều kiện* (1.11).

Chúng tôi không chứng minh định lý trên, chỉ nêu một ví dụ áp dụng định lý ấy.

•**Ví dụ 1.10.** Tìm cực trị của hàm số $z = 3x + 4y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Bài giải.

Ràng buộc đối với x, y là $g(x, y) = 0$, trong đó $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Dễ thấy các hàm z và g có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Hơn nữa $g'_x = 2x, g'_y = 2y$ không đồng thời bằng không vì $x^2 + y^2 = 1$. Suy ra hàm z với điều kiện $g(x, y) = 0$ chỉ có các điểm tới hạn loại 1. Hàm Lagrange là

$$F(x, y, \lambda) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta có

$$\begin{aligned} F'_x &= 3 + 2\lambda x, \\ F'_y &= 4 + 2\lambda y, \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 1, \end{aligned}$$

do đó hệ (1.16) trở thành

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda x = 0 \\ 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}, \lambda = -\frac{5}{2}. \end{array} \right.$$

Suy ra bài toán có hai điểm tới hạn là: $M(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ tương ứng $\lambda=\frac{5}{2}$, và $N(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ tương ứng $\lambda=-\frac{5}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&F''_{xx}=2\lambda, F''_{xy}=0, F''_{yy}=2\lambda,\\&g'_x=2x, g'_y=2y.\end{aligned}$$

Khi $x=-\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{5}, \lambda=\frac{5}{2}$ ta có $F''_{xx}=5, F''_{xy}=0, F''_{yy}=5, g'_x=-\frac{6}{5}, g'_y=-\frac{8}{5}$.

Do đó ta cần xét

$$d^2F(-\tfrac{3}{5},-\tfrac{4}{5},\tfrac{5}{2})=F''_{xx}h^2+2F''_{xy}hk+F''_{yy}k^2=5h^2+5k^2,$$

khi h,k không đồng thời bằng 0 và bị ràng buộc bởi điều kiện

$$g'_x(-\tfrac{3}{5},-\tfrac{4}{5})h+g'_y(-\tfrac{3}{5},-\tfrac{4}{5})k=-\tfrac{6}{5}h-\tfrac{8}{5}k=0. \tag{1.17}$$

Từ ràng buộc (1.17) và điều kiện h,k không đồng thời bằng 0 suy ra $h=-\dfrac{4}{3}k$ và $k\neq 0$, h,k không đồng thời bằng 0, do đó $d^2F(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{5}{2})=\frac{125}{9}k^2>0$. Theo định lý 1.8, $M(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm z. Giá trị cực tiểu là

$$z_{\min}(M)=-5.$$

Tính toán tương tự khi $x=\frac{3}{5}, y=\frac{4}{5}, \lambda=-\frac{5}{2}$ ta thấy $N(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm z. Giá trị cực đại là

$$z_{\max}(N)=5.$$

Trên đây ta đã dựa vào định lý 1.8 để xét xem điểm $M(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$ có là điểm cực trị có điều kiện của hàm z không. Ta có thể kết luận $d^2F(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{5}{2})>0$ với mọi h,k không đồng thời bằng 0 và bị ràng buộc bởi điều kiện (1.17) nhanh hơn như sau. Ta có

$$d^2F(-\tfrac{3}{5},-\tfrac{4}{5},\tfrac{5}{2})=5h^2+5k^2>0$$

với mọi h,k không đồng thời bằng 0. Bất đẳng thức trên vẫn đúng khi h,k bị ràng buộc thêm bởi điều kiện (1.17).

1.3.3. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên miền đóng, bị chặn

Giả sử hàm f liên tục trên miền D đóng và bị chặn. Theo tính chất của hàm liên tục suy ra f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D. Giả sử giá trị lớn nhất của hàm f đạt được tại $M_o\in D$. Khi đó $f(M)\leq f(M_0), \forall M\in D$. Giả sử M_o là điểm trong của D. Khi đó tồn tại lân cận $V(M_0)$ nào đó của điểm M_0 sao cho $V(M_0)\subset D$. Nếu $M\in V(M_0)$ thì $M\in D$ do đó $f(M)\leq f(M_0)$. Suy ra M_o là điểm cực đại không nghiêm ngặt, do đó là điểm tới hạn của hàm f. Điểm M_o cũng có thể là điểm biên của miền D.

Từ các lập luận trên ta suy ra thuật toán tìm giá trị lớn nhất của hàm $z=f(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại tất cả các điểm trong của miền D đóng và bị chặn như sau.

Bước 1. Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm z là $p=z'_x, q=z'_y$.

Bước 2. Tìm các điểm tới hạn của hàm z là các điểm trong của miền D có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}p=0\\q=0\end{cases}$$

và tính giá trị của hàm f tại các điểm ấy.

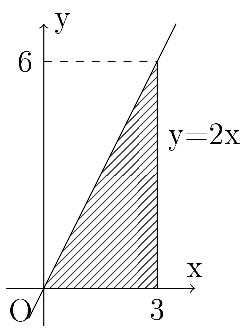
Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm f trên biên của miền D.

Bước 4. Tìm giá trị lớn nhất trong số các giá trị tìm được ở bước 2 và bước 3. Giá trị lớn nhất ấy chính là giá trị lớn nhất của hàm f trên miền D.

Nếu các điểm tới hạn ở bước 2 không tồn tại thì hàm f đạt giá trị lớn nhất trên biên của miền D, tức là giá trị lớn nhất của hàm f trên biên của D tìm được ở bước 3 cũng chính là giá trị lớn nhất của nó trên toàn miền D.

Thuật toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f trên miền D tương tự thuật toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số ấy trên miền D.

•**Ví dụ 1.11.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $z = 2x^2 + y^2 - x^2y$ trên miền $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x$.



Hình 1.1

Lời giải. Ký hiệu D là miền $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x$. Ta có

$$\begin{cases} p = z'_x &= 4x - 2xy, \\ q = z'_y &= 2y - x^2, \end{cases} \text{do đó} \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2xy = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Trong ba điểm (0,0), (-2,2) và (2,2) chỉ có điểm (2,2) là điểm trong của D. Ta có

$$z(2,2) = 4 \tag{1.18}$$

Xét hàm $z(x,y)$ khi (x,y) là điểm biên của D.

Với $y = 0, 0 \le x \le 3$ ta có

$$z = f(x) = 2x^2, 0 \le x \le 3,$$

$$f'(x) = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,3),$$

$$f(0) = z(0,0) = 0 \tag{1.19}$$

$$f(3) = z(3,0) = 18 \tag{1.20}$$

Với $x = 3, 0 \le y \le 6$ ta có

$$z = g(y) = y^2 - 9y + 18, 0 \le y \le 6, g'(y) = 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \tfrac{9}{2} \in (0,6),$$

$$g(\tfrac{9}{2}) = z(3, \tfrac{9}{2}) = -\tfrac{9}{4} \tag{1.21}$$

$$g(6) = z(3,6) = 0 \tag{1.22}$$

Với $y = 2x, 0 \le x \le 3$ ta có $z = h(x) = 6x^2 - 2x^3, 0 \le x \le 3$,

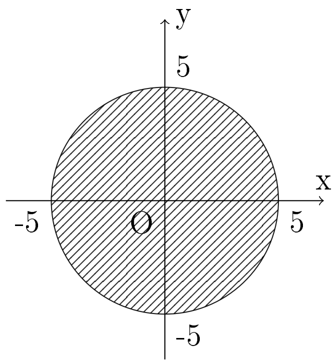
$$h'(x) = 12x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0,3) \\ x = 2 \in (0,3), \end{array} \right.$$

$$h(2) = z(2,4) = 8 \tag{1.23}$$

So sánh các giá trị tại (1.18) - (1.23) suy ra

$$\max_{M\in D} z(M) = z(3,0) = 18, \min_{M\in D} z(M) = z(3, \tfrac{9}{2}) = -\tfrac{9}{4}.$$

•Ví dụ 1.12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trên miền $x^2 + y^2 \le 25$.



Hình 1.2

Lời giải.

Ký hiệu D là miền $x^2 + y^2 \le 25$. Đó là hình tròn đóng tâm O(0, 0) bán kính bằng 5.

Ta có $\begin{cases} p = z'_x &= 2x - 12, \\ q = z'_y &= 2y + 16, \end{cases}$ do đó $\begin{cases} p = 0, \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0, \\ 2y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -8. \end{cases}$

Vì $6^2 + (-8)^2 = 100 > 25$ nên điểm (6, -8) không phải là điểm trong của miền D. Suy ra trong D hàm z không có điểm tới hạn nên nó đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên của D.

Xét hàm $z(x,y)$ khi (x, y) là điểm biên của D. Khi đó $x^2 + y^2 = 25$ hay $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases}$

suy ra $z = 25 - 60\cos t + 80\sin t$, $z = 25 + 100(-\frac{3}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t)$.

Đặt $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ ta có $z = 25 + 100(\cos\alpha\cos t + \sin\alpha\sin t)$, $z = 25 + 100\cos(t - \alpha)$.

Từ đó suy ra $-75 \le z \le 125$.

Dấu bằng thứ nhất xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{array}{l} \cos(t-\alpha) = -1, \\ \Leftrightarrow t - \alpha = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \\ \Leftrightarrow t = \alpha + \pi + k2\pi, \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 5\cos t = -5\cos\alpha = -5(-\frac{3}{5}) = 3, \\ y = 5\sin t = -5\sin\alpha = -5(\frac{4}{5}) = -4. \end{cases} \end{array}$$

Dấu bằng thứ hai xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{array}{l} \cos(t-\alpha) = 1, \\ \Leftrightarrow t - \alpha = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \\ \Leftrightarrow t = \alpha + k2\pi, \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 5\cos t = 5\cos\alpha = 5(-\frac{3}{5}) = -3, \\ y = 5\sin t = 5\sin\alpha = 5(\frac{4}{5}) = 4. \end{cases} \end{array}$$

Suy ra $\max\limits_{M\in D} z(M) = \max\limits_{M\in\partial D} z(M) = 125$, giá trị lớn nhất đạt được tại $(-3, 4)$,

và $\min\limits_{M\in D} z(M) = \min\limits_{M\in\partial D} z(M) = -75$, giá trị nhỏ nhất đạt được tại $(3, -4)$.

Bài tập chương 1

Bài 1.1. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau
a) $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,
b) $z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
c) $z = y^2 \sin \frac{x}{y}$,
d) $z = x^{y^3}, x > 0$,
e) $z = \arctan \frac{y}{x}$,
f) $z = arcsin(x - 2y)$,
g) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,
h) $z = \arctan \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$,
i) $u = x^{y^z}, x, y > 0$,
j) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$,
k) $u = e^{xyz} \sin \frac{y}{z}$.
Bài 1.2. Chứng minh rằng hàm số $z = yln(x^2 - y^2)$ thoả mãn phương trình $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$.
Bài 1.3. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số
a) $z = sin(x^2 + y^2)$,
b) $z = e^x(cosy + xsiny)$,
c) $z = \ln \tan \frac{y}{x}$,
d) $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$,
e) $u = x^{y^2.z}, x > 0$.
Bài 1.4. Tính gần đúng
a) $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$,
b) $ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.
Bài 1.5. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau:
a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$,
b) $z = x^2ln(x + y)$,
c) $z = ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
d) $z = \arctan \frac{y}{x}$.
Bài 1.6. Tìm hàm f(x,y) thoả mãn
a) $f''_{xy} = 0$,
b) $f''_{xx} = 0$,
c) $f''_{xx} = 12x^2y + 2,\ f'_y = x^4 - 30xy^5,\ f(0, 0) = 1,\ f(1, 1) = -2$,
d) $f'_x = x^2 - 2xy^2 + 3,\ f'_y = y^2 - 2x^2y + 3$.
Bài 1.7. Tìm hàm $u(x, y, z)$ thoả mãn $u'''_{xyz} = 0$.
Bài 1.8. Chứng minh rằng :
a) Hàm số $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thoả mãn phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,
b) Hàm số $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thoả mãn phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.
Bài 1.9. Tìm cực trị của các hàm số sau
a) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$,
b) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$,

c) $z = x + y - xe^y$,
d) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$,
e) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Bài 1.10. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm trong miền nếu
a) $z = x^2 - y^2$, D là miền tròn $x^2 + y^2 \leq 4$,
b) $z = x^2y(4 - x - y)$, D là hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng x=0, y=0 và x+y=6,
c) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường x=0, x=1, y=0 và y=2,
d) $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$, D là miền tròn $x^2 + y^2 \leq 1$,
e) $z = sinx + siny + sin(x + y)$, D là hình chữ nhật giới hạn bởi x=0, $x = \dfrac{\pi}{2}$, y=0 và $y = \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 1.11. Tìm cực trị của
a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2},\ a > 0$,
b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

Đáp số bài tập chương 1

Bài 1.1.
a) $z'_x = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, z'_y = \dfrac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$;
b) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$;
c) $z'_x = y\cos\frac{x}{y}, z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}$;
d) $z'_x = y^3x^{y^3-1}, z'_y = x^{y^3}\ln x.3y^2$;
e) $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}, z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$;
f) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}, z'_y = -\frac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}$;
g) $z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}, z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$;
h) $z'_x = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}, z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^4-y^4}}$;
i) $u'_x = y^zx^{y^z-1}, u'_y = x^{y^z}\ln x.zy^{z-1}, u'_z = x^{y^z}\ln x.y^z\ln y$;
j) $u'_x = \frac{-2xu}{(x^2+y^2+z^2)^2}, u'_y = \frac{-2yu}{(x^2+y^2+z^2)^2}, u'_z = \frac{-2zu}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;
k) $u'_x = yze^{xyz}\sin\frac{y}{z}, u'_y = xze^{xyz}\sin\frac{y}{z} + e^{xyz}.\frac{1}{z}\cos\frac{y}{z}, u'_z = xye^{xyz}\sin\frac{y}{z} - e^{xyz}.\frac{y}{z^2}\cos\frac{y}{z}$.

Bài 1.2.
a) $2cos(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$;
b) $e^x\left[(xcosy - siny)dy + (siny + cosy + xsiny)dx\right]$;
c) $\frac{2(xdy-ydx)}{x^2\sin(2y/x)}$;
d) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$;
e) $y^2zx^{y^2z-1}dx + x^{y^2z}lnx2yzdy + x^{y^2z}lnxy^2dz$.

Bài 1.3. a) 1,013; b) 0,005.

Bài 1.4.
a) $z''_{xx} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, z''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, z''_{yy} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
b) $z''_{xx} = 2\ln(x + y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}, z''_{xy} = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2}, z''_{yy} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}$;
c) $z''_{xx} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, z''_{xy} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, z''_{yy} = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$;
d) $z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Bài 1.5.
a) $f(x, y) = F(x) + G(y)$, $F(x)$ là hàm khả vi, G(y) là hàm bất kỳ ;
b) $f(x, y) = xF(y) + G(y)$, F và G là 2 hàm bất kỳ;

c) $f(x,y) = x^4y - 5xy^6 + x^2 + 1$;
d) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} - x^2y^2 + 3(x+y) + C$.
Bài 1.6. $u(x,y,z) = G(y,z) + H(x,z) + F(x,y)$, F có đạo hàm riêng cấp 2 F''_{xy}, H có đạo hàm theo x, G là hàm bất kỳ.
Bài 1.7.
a) $z_{\max} = 8$ tại (2,-2) ;
b) $z_{\min} = 0$ tại (-1,1);
c) Không có cực trị;
d) $z_{\min} = -\frac{9}{8}$ tại $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, và $z_{max} = 0$ tại $(0,0)$;
e) $z_{\min} = 0$ tại (0,0) , $z_{\max} = \frac{1}{e}$ trên đường tròn $x^2 + y^2 = 1$
(trong đáp số này cực trị được hiểu theo nghĩa không ngặt).
Bài 1.8.
a) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2,0) và (-2,0), giá trị nhỏ nhất là -4 tại (0,2) và (0,-2);
b) Giá trị lớn nhất là 4 tại (2,1), giá trị nhỏ nhất là -64 tại (4,2);
c) Giá trị lớn nhất là 17 tại (1,2) , giá trị nhỏ nhất là -3 tại (1,0);
d) Giá trị lớn nhất là $\frac{3}{e}$ tại (0,1) và (0,-1) , giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0,0);
e) Giá trị lớn nhất là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, giá trị nhỏ nhất là 0 tại (0,0).
Bài 1.9.
a) $z_{\min} = -\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ tại $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z_{max} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$;
b) $z_{max} = \frac{1}{4}$ tại $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Chương 2

TÍCH PHÂN KÉP VÀ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1. Tích phân kép

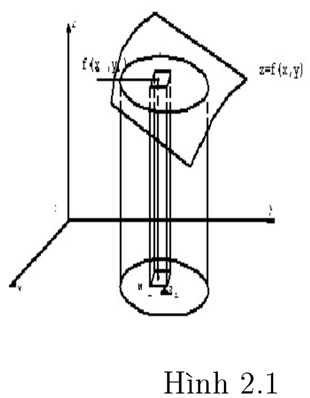
2.1.1. Định nghĩa

2.1.1.1. Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho z = f(x, y) là một hàm số xác định, liên tục, không âm trong một miền D đóng, bị chặn, có biên L trong mặt phẳng Oxy. Tính thể tích của vật thể hình trụ giới hạn bởi mặt phẳng Oxy, mặt z = f(x, y) và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên L.

Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh đó là ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n. Lấy mỗi mảnh nhỏ đó làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với Oz và phía trên giới hạn bởi mặt cong z = f(x, y). Vậy vật thể hình trụ đã được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ. Trong mỗi mảnh ΔS_i (i=1,..., n) ta lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Tích $f(x_i, y_i).\Delta S_i$ là thể tích hình trụ thẳng có đáy là ΔS_i và chiều cao là $f(x_i, y_i)$, nó khác rất ít thể tích ΔV_i của vật thể hình trụ nhỏ thứ i nếu mảnh ΔS_i có đường kính d_i[1] khá nhỏ, vì hàm số f(x, y) liên tục. Vậy có thể xem thể tích V của vật thể hình trụ xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i.$$



Hình 2.1

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các ΔS_i có đường kính càng nhỏ. Do đó thể tích V của vật thể hình trụ đã cho bằng giới hạn (nếu có) của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính d_i của các mảnh ΔS_i dần tới 0, giới hạn đó không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ cũng như cách chọn điểm M_i trong ΔS_i.

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i.$$

[1] Đường kính d_i của một miền S_i là khoảng cách lớn nhất giữa các điểm trên biên của miền ấy.

2.1.1.2. Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất

Cho một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy. Lấy một mảnh tùy ý của bản ấy có diện tích ΔS và giả sử khối lượng của mảnh ấy là Δm. Giới hạn nếu có của tỷ số $\frac{\Delta m}{\Delta S}$ khi $\Delta S \to 0$ sao cho mảnh ấy thu về một điểm P được gọi là khối lượng riêng của bản tại P và được ký hiệu là $\rho(P)$. Nếu bản đồng chất thì ρ không đổi. Nếu bản không đồng chất thì ρ là một hàm số của P.

Bây giờ, giả sử khối lượng riêng của bản là một hàm số liên tục $\rho(P) = \rho(x, y)$. Hãy tính khối lượng của bản. Chia miền D thành n miền nhỏ ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n có đường kính tương ứng là d_i và chọn trong mỗi mảnh ΔS_i một điểm tùy ý $P_i(x_i, y_i)$. Khối lượng của bản được tính xấp xỉ bằng tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta S_i.$$

Giới hạn nếu có của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i \to 0$ được gọi là khối lượng của bản

$$m = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i).\Delta S_i.$$

2.1.1.3. Định nghĩa tích phân kép

Nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học kỹ thuật đưa đến việc tìm giới hạn của tổng có dạng trên. Ta đưa ra định nghĩa sau:

Cho hàm z = f(x, y) xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ, gọi tên và diện tích của các mảnh đó là ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$ được gọi là tổng tích phân của hàm số f(x, y) trong miền D.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $d \to 0$ mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i trong mỗi mảnh ΔS_i , thì giới hạn đó được gọi là tích phân kép của hàm số f(x, y) trong miền D và được ký hiệu là $\iint\limits_D f(x, y)dS$.

Vậy

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i \tag{2.1}$$

f(x, y) được gọi là hàm dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân, dS là yếu tố diện tích, x, y là biến tích phân. Nếu tồn tại tích phân (2.1) thì hàm f(x, y) được gọi là khả tích trong miền D.

Người ta chứng minh được rằng nếu f(x, y) liên tục trong miền D thì $\iint\limits_D f(x, y)dS$ tồn tại, tức là f(x, y) khả tích trong miền D.

∗ **Chú ý:** Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ như đã nêu trong định nghĩa nên ta có thể chia miền D bằng hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ. Do đó dS = dx.dy và $\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

2.1.1.4. Các tính chất của tích phân kép

Giả sử $f(x,y), g(x,y)$ là các hàm số khả tích trên một miền D.

1. $\iint\limits_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

2. $\iint\limits_D k.f(x,y)dxdy = k.\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (k là hằng số).

3. Nếu miền D có thể chia thành hai miền D_1, D_2 sao cho diện tích của miền $D_1 \cap D_2$ bằng 0 thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

4. Nếu f(x, y) $\leq$ g(x, y), $\forall (x,y) \in D$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

5. Nếu m $\leq$ f(x, y) $\leq$ M, $\forall (x,y) \in D$, m và M là hằng số thì:

$$m.S \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M.S, \text{ S là diện tích của miền D.}$$

6. Nếu f(x, y) liên tục trong miền đóng, bị chặn, liên thông D thì trong D có ít nhất một điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ sao cho:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y}).S, \text{ S là diện tích của miền D.}$$

2.1.2. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Đềcác

2.1.2.1. Miền D là hình chữ nhật

Giả sử phải tính tích phân kép: I = $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó D là hình chữ nhật a $\leq$ x $\leq$ b; c $\leq$ y $\leq$ d và hàm f(x, y) liên tục trong D. Ta cần định lý sau:

◊ **Định lý 2.1.** *(Định lý Fubini).*

Giả sử f(x, y) là hàm số khả tích trong hình chữ nhật $D = [a;b] \times [c;d]$. Khi ấy:

a. Nếu $\forall x \in [a,b]$, hàm số $y \mapsto f(x,y)$ khả tích trên $[c,d]$ thì hàm số $x \mapsto I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên [a, b] và

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f(x,y)dy)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{2.2}$$

b. Nếu $\forall y \in [c,d]$, hàm số $x \mapsto f(x,y)$ khả tích trên $[a,b]$ thì hàm số $y \mapsto J(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ khả tích trên [c,d] và

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d J(y)dy = \int\limits_c^d (\int\limits_a^b f(x,y)dx)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{2.3}$$

Định lý này ta không chứng minh.

▽ ***Hệ quả* 2.1.** *Nếu f(x,y) liên tục trên D = [a, b] x [c, d] thì:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx. \tag{2.4}$$

Như vậy việc tính tích phân kép trên được đưa về việc tính hai tích phân đơn liên tiếp, khi tính tích phân đơn thứ nhất $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ ta coi x là hằng số (hoặc khi tính tích phân đơn $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ coi y là hằng số).

∗ **Chú ý:** Nếu f(x,y) = f_1(x).f_2(y) thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f_1(x)dx. \int\limits_c^d f_2(y)dy. \tag{2.5}$$

•**Ví dụ 2.1.** Tính I = $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, trong đó D là miền: 0 ≤ x ≤ 1; 0 ≤ y ≤ 1.

Lời giải. Vì x^2+y^2 liên tục trên D nên
$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^1 (x^2y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 dx = \int\limits_0^1 (x^2+\frac{1}{3})dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

•**Ví dụ 2.2.** Tính I = $\iint\limits_D x^2ydxdy$, trong đó D là miền: -1 ≤ x ≤ 2; 0 ≤ y ≤ 1.

Lời giải. Theo công thức (2.5) ta có I = $\int\limits_{-1}^2 x^2dx. \int\limits_0^1 ydy = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 . \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$

2.1.2.2. Miền D là miền bất kỳ

♢ **Định lý 2.2.**

Giả sử D = $\{(x,y) : a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là những hàm số liên tục trên [a,b], y_1(x) ≤ y_2(x) với $\forall x \in [a,b]$. Giả sử f(x, y) là hàm số khả tích trên D. Nếu $\forall x \in [a,b]$, hàm số $y \mapsto f(x,y)$ khả tích trên đoạn $[y_1(x), y_2(x)]$, thì hàm số: $x \mapsto I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ khả tích trên $[a,b]$ và:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{2.6}$$

♢ **Định lý 2.3.**

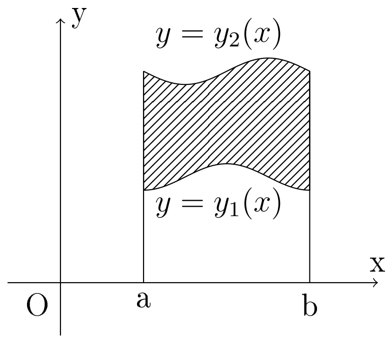
Giả sử $D = \{(x,y); c \le y \le d; x_1(y) \le x \le x_2(y)\}, x_1(y)$ và $x_2(y)$ là hai hàm số liên tục trên $[c,d], x_1(y) \le x_2(y)$ với $\forall y \in [c,d]$. Giả sử f(x, y) là hàm số khả tích trên D. Nếu $\forall y \in [c,d]$, hàm số $x \mapsto f(x,y)$ khả tích trên đoạn $[x_1(y), x_2(y)]$, thì hàm số $y \mapsto J(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ khả tích trên $[c,d]$ và:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d J(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.7)$$

▽ ***Hệ quả* 2.2.**

• Giả sử $D = \{(x,y) : a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x)\}; y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai hàm số liên tục trên [a,b]. Nếu f là một hàm số liên tục trên D thì:

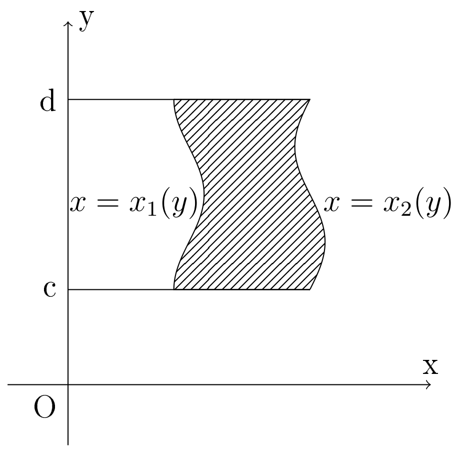
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$



Hình 2.2

• Giả sử D = {(x, y); c ≤ y ≤ d; $x_1(y) \le x \le x_2(y)$}, $x_1(y)$ và $x_2(y)$ là hai hàm số liên tục trên [c,d]. Nếu f là một hàm số liên tục trên D thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

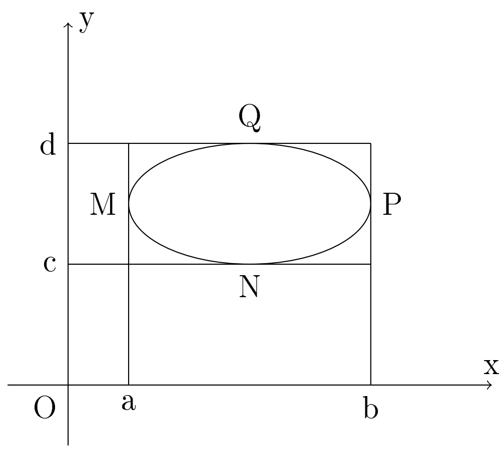


Hình 2.3

∗ **Chú ý:** Giả sử mỗi đường thẳng song song với Ox và Oy đều cắt biên của miền D nhiều nhất tại hai điểm. Dựng hình chữ nhật a ≤ x ≤ b; c ≤ y ≤ d mà các cạnh của nó tiếp xúc với biên của D tại các điểm M, N, P, Q. Các điểm M, P chia biên của D thành hai cung $\widehat{MNP}$ và cung $\widehat{MQP}$ có các phương trình theo thứ tự là: $y = y_1(x), y = y_2(x)$. Các điểm N, Q chia biên của miền D thành hai cung $\widehat{NMQ}$ và cung $\widehat{NPQ}$ có các phương trình theo thứ tự là $x = x_1(y), x = x_2(y)$.

Nếu f(x,y) liên tục trên D, ta có thể tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ theo công thức (2.6) hoặc (2.7). Khi đó ta có

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (2.8)$$



Hình 2.4

Đó là công thức đổi thứ tự lấy tích phân.

•**Ví dụ 2.3.** Xác định các cận tích phân trong tích phân kép

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

trong đó D là miền $\{y \ge 0, y \le x^2, x + y \le 2, x \ge 0\}$.

Lời giải. (Xem hình 2.5)

Miền D được xác định bởi: $0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y$.

Do đó $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$.

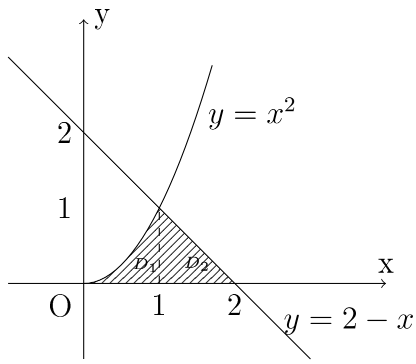
Để đổi thứ tự tích phân ta chia miền D thành hai miền D_1 và D_2 bởi đường x = 1, trong đó

D_1 được xác định: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le x^2$.

D_2 được xác định: $1 \le x \le 2; 0 \le y \le 2 - x$.

Do đó $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy$.

Rõ ràng cách tính thứ nhất đơn giản hơn. Qua ví dụ trên ta thấy khi tính tích phân kép cần chọn thứ tự tích phân sao cho cách tính đơn giản hơn.



Hình 2.5

•Ví dụ 2.4.

Tính I = $\iint\limits_D (x^2 - 2xy + 4y)\, dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường: $y = x^2 - x$; $y = 2x$.

Lời giải. (Xem hình 2.6)

Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức:

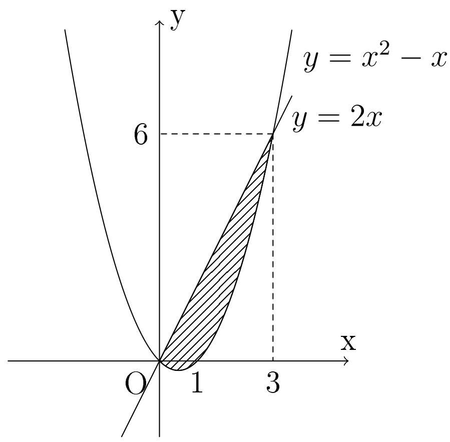
$0 \le$ x ≤ 3 ; $x^2 - x \le$ y $\le$ 2x.

$$\text{Do đó: } I = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2-x}^{2x} (x^2 - 2xy + 4y)\, dy$$

$$= \int\limits_0^3 (x^2y - xy^2 + 2y^2)\Big|_{x^2-x}^{2x} dx$$

$$= \int\limits_0^3 (x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2)dx$$

$$= (\frac{x^6}{6} - x^5 + x^4 + 2x^3)\Big|_0^3 = \frac{27}{2}.$$



Hình 2.6

•Ví dụ 2.5. Tính I = $\iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường y = x - 4, $y^2 = 2x$.

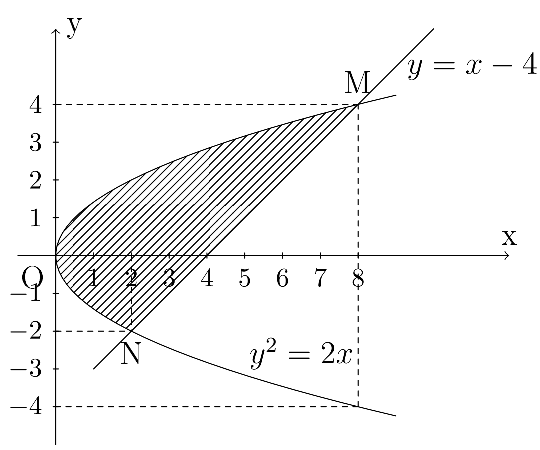
Lời giải. (Xem hình 2.7)

Hai đường đã cho cắt nhau tạo thành một miền kín D.

Trước hết ta tìm giao điểm của hai đường

$$\begin{cases} y &= x - 4 \\ y^2 &= 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 &= 2x \\ y &= x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x &= 8 \\ y &= 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x &= 2 \\ y &= -2 \end{cases} \end{array} \right. .$$



Hình 2.7

Vậy hai đường cắt nhau tại hai điểm

M(8; 4) và N(2; -2).

Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức:

$$-2 \leq y \leq 4; \frac{y^2}{2} \leq x \leq y+4.$$

Do đó

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{y^2/2}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4} \frac{\text{yx}^2}{2}\Big|_{y^2/2}^{y+4} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} (y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4})dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\Big|_{-2}^{4} = 90.$$

2.1.3. Đổi biến số trong tích phân kép

2.1.3.1. Công thức đổi biến số trong tích phân kép

Nhiều trường hợp tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ tính trong tọa độ Đề-các không thuận lợi, khi đó ta có thể dùng phương pháp đổi biến sau:

Xét tích phân kép I = $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong đó f(x,y) liên tục trên D.

Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \tag{2.9}$$

Giả sử rằng:

1. x(u,v), y(u,v) là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền đóng D' của mặt phẳng O'uv.
2. Các công thức (2.9) xác định một song ánh từ miền D' lên miền D của mặt phẳng Oxy.
3. Định thức Jacobi $J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ trong miền D'.

Khi đó ta có công thức:

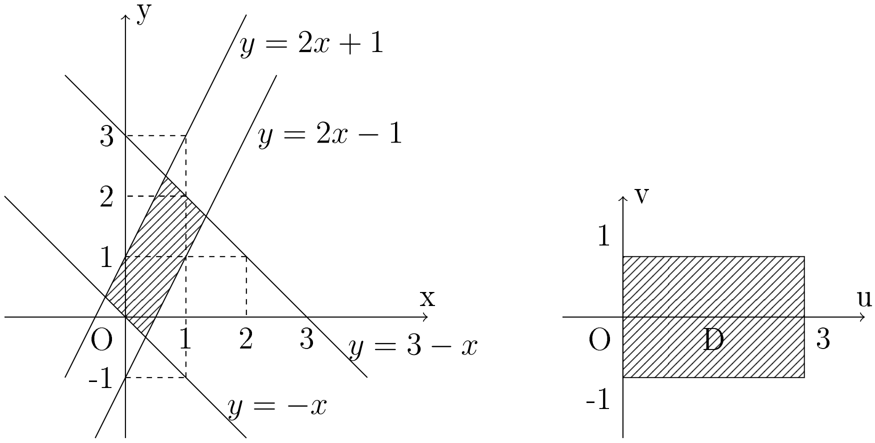
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv. \tag{2.10}$$

Công thức (2.10) được gọi là công thức đổi biến trong tích phân kép.

∗ **Chú ý:** Khi tính tích phân kép người ta thường chọn phép đổi biến sao cho đường biên của miền D khi chuyển sang biến mới có phương trình đơn giản để cho việc xác định cận của u và v đơn giản hơn.

•**Ví dụ 2.6.** Tính I = $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường:

$$y = -x, y = -x+3, y = 2x-1, y = 2x+1.$$



Hình 2.8

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{3} - \dfrac{v}{3} \\ y = \dfrac{2u}{3} + \dfrac{v}{3}. \end{cases}$

Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3} \neq 0.$

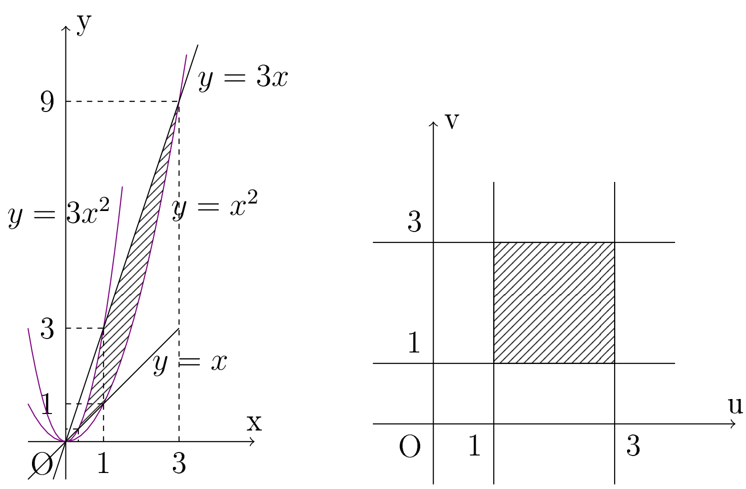
Công thức trên xác định một song ánh biến miền D thành hình chữ nhật D' giới hạn bởi các đường u = 0, u = 3, v = -1, v = 1.

Do $J = \dfrac{1}{3} \neq 0$ nên áp dụng công thức (2.10) ta được:

$$J = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} ududv = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 udu\int\limits_{-1}^1 dv = \frac{1}{3}\,\frac{u^2}{2}\Big|_0^3\, v|_{-1}^1 = \frac{1}{3}.\frac{9}{2}.2 = 3.$$

•Ví dụ 2.7. Tính I $= \iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền xác định bởi:

$$x \leq y \leq 3x;\;\; x^2 \leq y \leq 3x^2.$$



Hình 2.9

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{v} \\ y = \dfrac{u^2}{v}. \end{cases}$

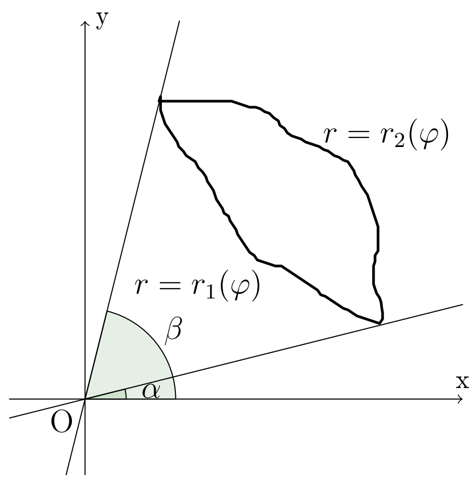
Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \dfrac{u^2}{v^3}.$

Công thức trên xác định một song ánh biến miền D thành hình vuông D' giới hạn bởi các đường: u = 1, u = 3, v = 1, v = 3. Do J = $\dfrac{u^2}{v^3} \neq 0$ trong miền D' nên áp dụng (2.10) ta được:

$$J = \iint\limits_{D'} \frac{u}{v}.\frac{u^2}{v}.\frac{u^2}{v^3}dudv = \iint\limits_{D'} \frac{u^5}{v^5}dudv = \int\limits_1^3 u^5du \int\limits_1^3 \frac{1}{v^5}dv = \frac{u^6}{6}\Big|_1^3 \frac{v^{-4}}{-4}\Big|_1^3 = \frac{7280}{243}.$$

2.1.3.2. Tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Công thức liên hệ giữa tọa độ Đề-các (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm là:



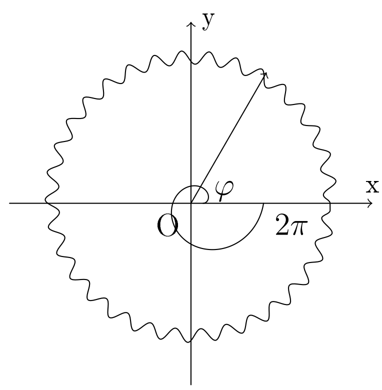
Hình 2.10

$$\begin{cases} x = & r.cos\varphi \\ y = & r.sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.11)$$

Nếu r > 0, $0 \leq \varphi < 2\pi$ thì công thức trên xác định một song ánh giữa tọa độ đề các (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm. Riêng điểm gốc tọa độ có r = 0 và φ tùy ý.

Xem công thức (2.11) như một phép biến đổi biến số, ta có:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0 \text{ trừ tại gốc O.}$$



Hình 2.11

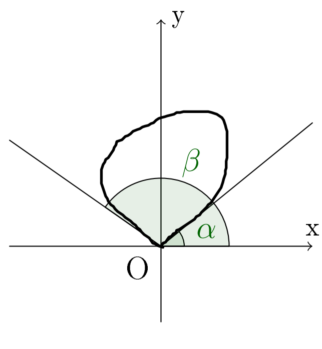
Do đó từ công thức (2.10) ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \qquad (2.12)$$

Công thức trên vẫn đúng khi miền D chứa gốc O.

Nếu miền D là miền giới hạn bởi các đường cong $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$ và các tia cực $\varphi = \alpha, \varphi = \beta (\alpha < \beta)$ thì ta có:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (2.13)$$



Hình 2.12

Đó là công thức tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực.

***Chú thích* 2.1.**

• Nếu miền D chứa gốc tọa độ O và mọi tia xuất phát từ O đều cắt biên của miền D tại một điểm có bán kính cực[2] r = r(φ) thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr, \qquad (2.14)$$

đặc biệt khi D là hình tròn tâm O bán kính R thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (2.15)$$

• Nếu miền D có biên đi qua O và có tại đó hai tiếp tuyến xác định bởi $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta(\alpha < \beta)$ và biên của D có phương trình r = r(φ) thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^{\beta} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \qquad (2.16)$$

∗ **Chú ý:** Người ta thường tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực khi biên hay một phần của biên của D là cung tròn.

•Ví dụ 2.8. Tính I = $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$ với

a) D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

b) D là một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Lời giải.

a) (Xem hình 2.13)

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

khi đó phương trình đường tròn trong tọa độ cực là r = 1.

Vậy: $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \sqrt{1-r^2}.rdr$

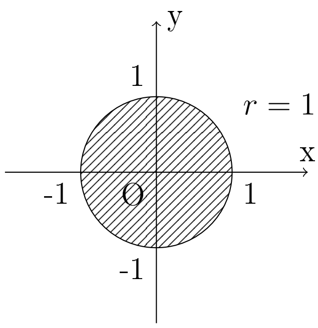
$= -\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} (1-r^2)^{1/2} d(1-r^2)$

$= -\dfrac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} .\dfrac{2}{3}.\left(1-r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \dfrac{2\pi}{3}.$

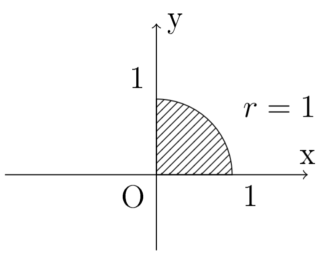
b) (Xem hình 2.14)

Chuyển sang tọa độ cực ta có

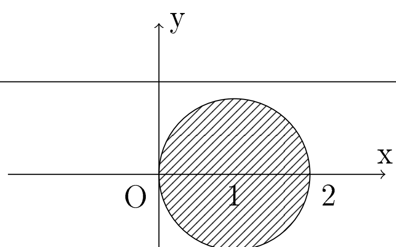
$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1} \sqrt{1-r^2}.rdr = \frac{\pi}{6}.$$



Hình 2.13



Hình 2.14



[2]Bán kính cực của điểm M là khoảng cách r từ gốc O đến nó.

•Ví dụ 2.9. Tính I $= \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

Lời giải. (Xem hình 2.15)

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$

khi đó phương trình đường tròn trên trong tọa độ cực là $r = 2cos\varphi$.

Miền D' được xác định bởi: $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$; $0 \le$ r ≤ 2cosφ.

Do đó

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{4-r^2}}dr = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \left(\sqrt{4-r^2}\right)^{-1/2} d(4-r^2)$$

$$= -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (4-r^2)^{1/2}\Big|_0^{2cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\varphi - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2|sin\varphi|d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\varphi - 4\int\limits_0^{\pi/2} sin\varphi d\varphi = 2\varphi|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\cos\varphi|_0^{\pi/2} = 2\pi - 4.$$

•Ví dụ 2.10.

Tính I $= \iint\limits_D xdxdy$, D là miền thỏa mãn $x^2 + y^2 \le 2y, y \le x$.

Lời giải. (Xem hình 2.16)

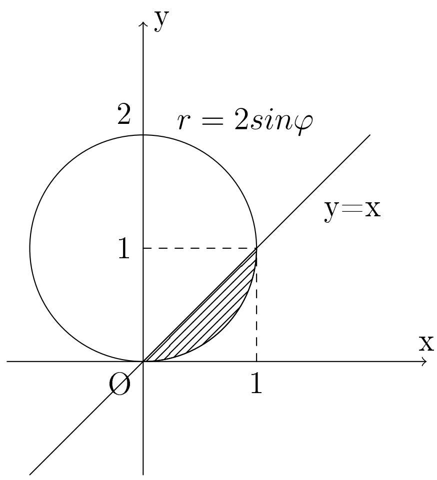
Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$

khi đó phương trình đường tròn trong tọa độ cực là r = 2sinφ.

Miền D' được xác định bởi $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}; 0 \le r \le 2\sin\varphi$.

Do đó $I = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} r^2\cos\varphi dr = \int\limits_0^{\pi/4} \cos\varphi \cdot \dfrac{r^3}{3}\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi$

$= \dfrac{8}{3}\int\limits_0^{\pi/4} \cos\varphi.\sin^3\varphi d\varphi = \dfrac{8}{3}\int\limits_0^{\pi} \sin^3\varphi d(\sin\varphi) = \dfrac{8}{3}.\dfrac{\sin^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{6}.$

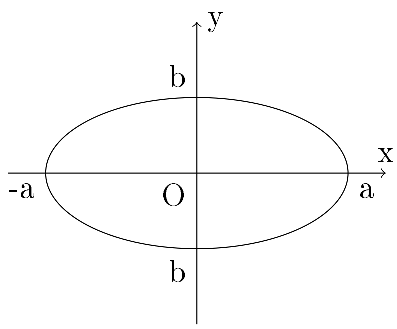


Hình 2.16

$*$ **Chú ý:** Nếu D là miền giới hạn bởi đường elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ thì thực hiện phép đổi biến sang hệ tọa độ cực suy rộng bằng cách đặt $\begin{cases} x = & a.r.cos\varphi \\ y = & b.r.sin\varphi, \end{cases}$

khi đó J = abr và miền D' được xác định bởi:

$$0 \le \varphi < 2\pi; 0 \le r \le 1.$$



Hình 2.17

Nếu D là miền giới hạn bởi đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì thực hiện phép đổi biến:

$$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}$$

khi đó J = r và miền D' được xác định bởi

$$0\leq\varphi < 2\pi; \quad 0\leq r\leq R.$$

2.2. Ứng dụng của tích phân kép

2.2.1. Ứng dụng hình học và cơ học của tích phân kép

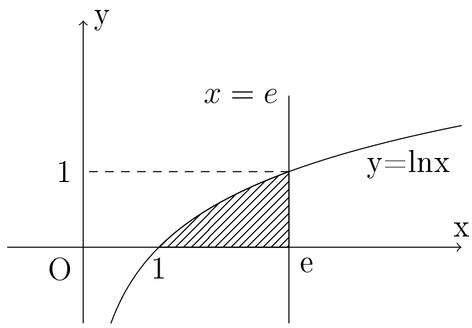
2.2.1.1. Ứng dụng hình học của tích phân kép

a. Tính diện tích hình phẳng.

Diện tích S của hình phẳng D được cho bởi công thức:

$$S = \iint_D dxdy. \tag{2.17}$$

•Ví dụ 2.11.



Hình 2.18

Tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \ln x, y = 0, x = e$.

Lời giải. (Xem hình 2.18)

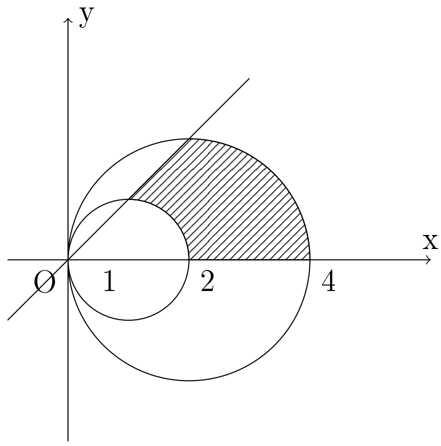
Miền D được xác định $1 \le x \le e; 0 \le y \le \ln x$.

Vậy $S = \int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} dy = \int\limits_1^e y|_0^{\ln x} dx = \int\limits_1^e \ln x dx$

$= \ln x.x|_1^e - \int\limits_1^e x.\dfrac{dx}{x} = \ln x.x|_1^e - \int\limits_1^e dx = 1.$

•Ví dụ 2.12. Tính diện tích hình phẳng D xác định bởi

$$2x \le x^2 + y^2 \le 4x;\ 0 \le y \le x.$$



Hình 2.19

Lời giải. (Xem hình 2.19)

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = & r.cos\varphi \\ y = & r.sin\varphi. \end{cases}$

Phương trình hai đường tròn trong tọa độ cực lần lượt là:

$r = 2cos\varphi$ và $r = 4cos\varphi$.

Miền D được xác định bởi:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, 2cos\varphi \le r \le 4cos\varphi.$$

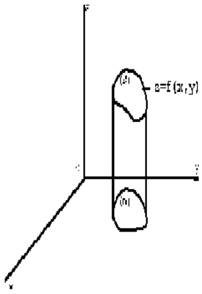
$$S = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2cos\varphi}^{4cos\varphi} rdr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\ \frac{r^2}{2}\Big|_{2cos\varphi}^{4cos\varphi} = 6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\varphi d\varphi$$

$$= 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + cos2\varphi)d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}).$$

b. Tính diện tích mặt cong.

Giả sử (S) là một mặt cong có phương trình là $z = f(x, y)$, gọi D là hình chiếu của mặt cong đã cho lên mặt phẳng Oxy, hàm f(x, y) cùng các đạo hàm riêng cấp một của nó liên tục trên miền D. Ký hiệu $p = f'_x(x, y)$; q = $f'_y(x, y)$. Khi đó diện tích của mặt (S) được tính theo công thức:

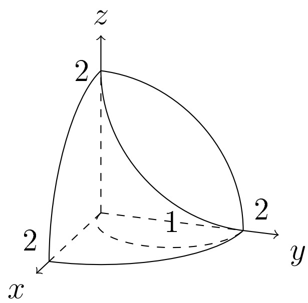
$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy. \tag{2.18}$$



Hình 2.20

•Ví dụ 2.13. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 2y$.

Lời giải. (Xem hình 2.21) Do tính đối xứng nên chỉ cần xét phần mặt nằm trong góc phần tám thứ nhất.



Hình 2.21

Khi đó $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$\Rightarrow p = z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $q = z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$

$\Rightarrow \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \dfrac{x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Vậy $S = 4\iint\limits_D \dfrac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}dxdy$ với D là nửa hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2y$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = & r.cos\varphi \\ y = & r.sin\varphi. \end{cases}$

Miền D' được xác định $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2\sin\varphi$.

Do đó

$$S = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \frac{2rdr}{\sqrt{4 - r^2}} = -4\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \left(\sqrt{4 - r^2}\right)^{-1/2} d(4-r^2)$$

$$= -8\int\limits_0^{\pi/2} \left(\sqrt{4 - r^2}\right)\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = -16\int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 1)d\varphi = -16\,(\sin\varphi - \varphi)|_0^{\pi/2} = 16(\frac{\pi}{2} - 1).$$

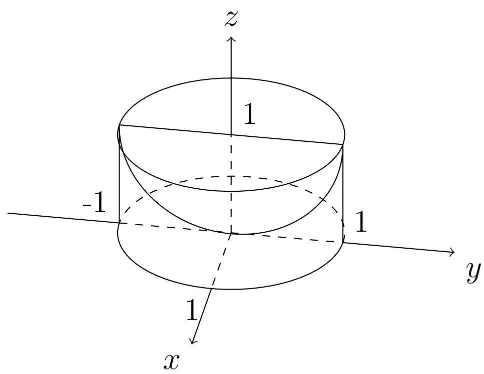
•Ví dụ 2.14.

Tính diện tích của phần mặt parabôlôit $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. (Xem hình 2.22) Ta có

$p = z'_x = 2x$, $q = z'_y = 2y \Rightarrow 1 + p^2 + q^2 = 1 + 4(x^2 + y^2)$.

Vậy $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ trong mặt phẳng Oxy.



Hình 2.22

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = & r.cos\varphi \\ y = & r.sin\varphi. \end{cases}$

Miền D' được xác định $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$.

Do đó

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}rdr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8} \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}d(1 + 4r^2)$$

$$= \frac{1}{8}\,\varphi|_0^{2\pi} \cdot \frac{2}{3}(1 + 4r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

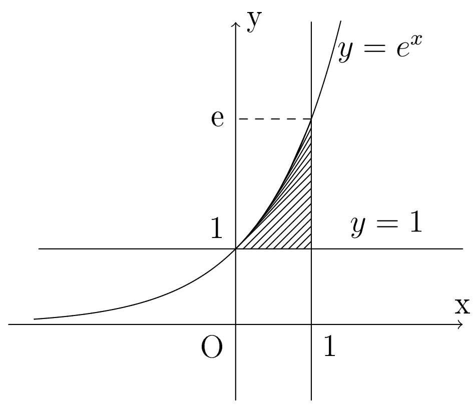
2.2.1.2. Ứng dụng cơ học của tích phân kép

a. Tính khối lượng của một bản phẳng không đồng chất

Cho một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm M(x, y) là ρ(x, y), trong đó ρ(x, y) là hàm liên tục trên D. Khi đó khối lượng m của bản phẳng được tính theo công thức:

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)dxdy. \tag{2.19}$$

•**Ví dụ 2.15.** Tìm khối lượng của một bản phẳng chiếm miền D giới hạn bởi các đường $y = e^x$, y = 1, x = 1 biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm là $\rho(x, y) = \dfrac{1}{y}$.



Hình 2.23

Lời giải. (Xem hình 2.23) Theo (2.19) có:

$$m = \iint\limits_D \frac{1}{y}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{e^x} \frac{dy}{y} = \int\limits_0^1 ln|y||_1^{e^x} dx = \int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

b. Momen quán tính của bản phẳng.

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm M(x, y) là ρ(x, y), trong đó ρ(x, y) là một hàm liên tục trên D. Khi đó momen quán tính của bản phẳng đã cho lần lượt đối với trục Ox, Oy và gốc tọa độ là:

$$I_x = \iint\limits_D y^2.\rho(x, y)dxdy, I_y = \iint\limits_D x^2.\rho(x, y)dxdy. \tag{2.20}$$

$$I_o = \iint\limits_D (x^2 + y^2).\rho(x, y)dxdy.$$

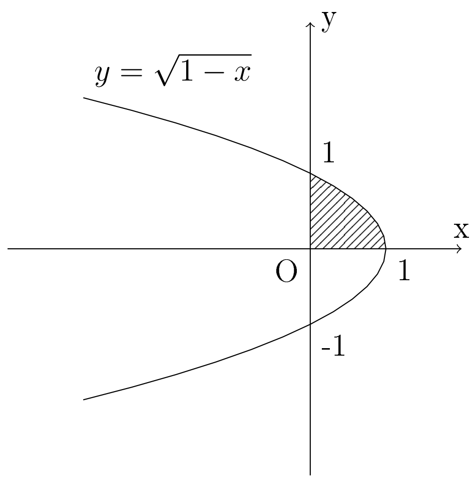
•Ví dụ 2.16.

Tìm momen quán tính của một bản phẳng D xác định bởi $0 \leq x \leq 1 - y^2, y \geq 0$ đối với trục Oy nếu khối lượng riêng của bản tại mỗi điểm là $\rho(x, y) = y$.

Lời giải. (Xem hình 2.24) Ta có

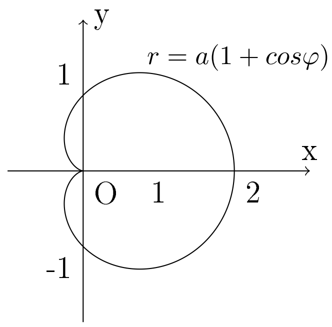
$$I_y = \iint\limits_D x^2 y dx dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x}} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^2 (1 - x) dx = \frac{1}{24}.$$



Hình 2.24

•Ví dụ 2.17. Tìm momen quán tính đối với trục Ox của bản phẳng D giới hạn bởi đường r = a(1+cosφ), a>0, biết rằng ρ(x, y) $\equiv$ 1.



Hình 2.25

Lời giải. (Xem hình 2.25)

Ta có I$_x$ = $\iint\limits_D y^2 dx dy$.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$

Khi đó

$$I_x = \iint\limits_{D'} r^2 \sin^2 \varphi r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \sin^2 \varphi r^3 dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi = \frac{a^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 + \cos\varphi)^4 d\varphi = \frac{21}{32} \pi a^4.$$

c. Trọng tâm của bản phẳng

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm $M(x, y) \in D$ là $\rho = \rho$ (x, y), trong đó ρ(x, y) là một hàm liên tục trên D. Khi đó tọa độ trọng tâm G của bản phẳng được xác định bởi công thức

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y) dx dy}{\iint\limits_D \rho(x, y) dx dy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y) dx dy}{\iint\limits_D \rho(x, y) dx dy}. \tag{2.21}$$

Nếu bản phẳng đồng chất thì ρ không đổi, do đó

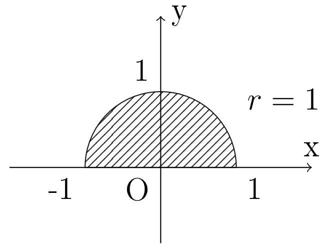
$$x_G = \frac{1}{S} \iint\limits_D x dx dy, \quad y_G = \frac{1}{S} \iint\limits_D y dx dy. \tag{2.22}$$

trong đó S là diện tích của miền D.

•Ví dụ 2.18.

Xác định tọa độ trong tâm G của bản phẳng đồng chất D xác định bởi: x^2 + y^2 $\leq$ 1, y $\geq$ 0.

Lời giải. (Xem hình 2.26)



Hình 2.26

Do miền D nhận Oy làm trục đối xứng nên $x_G = 0$.

Ta có $y_G = \frac{1}{S}\iint\limits_D ydxdy$ với $S = \frac{\pi}{2}$ (diện tích nửa hình tròn bán kính bằng 1).

Do đó

$$y_G = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 (1-x^2)dx = \frac{4}{3\pi}.$$

Vậy tọa độ trọng tâm $G(0, \frac{4}{3\pi})$.

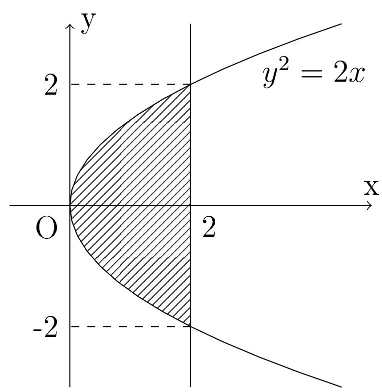
•Ví dụ 2.19.

Xác định tọa độ trọng tâm G của bản phẳng đồng chất D giới hạn bởi các đường $y^2 = 2$x, x = 2.

Lời giải. (Xem hình 2.27)

Do miền D nhận Ox làm trục đối xứng nên y$_G$ = 0.

Có x$_G$ = $\frac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy$ với:



Hình 2.27

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} dx = \int\limits_{-2}^{2} x|_{y^2/2}^{2} dy = \int\limits_{-2}^{2} (2 - \frac{y^2}{2})dy = \frac{16}{3}.$$

$$I = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} xdx = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2/2}^{2} dx = \int\limits_{-2}^{2} (2 - \frac{y^4}{8})dy = \frac{32}{5}$$

$\Rightarrow x_G = \frac{I}{S} = \frac{6}{5}$. Vậy tọa độ trọng tâm $G(\frac{6}{5}, 0)$.

2.3. Tích phân đường loại hai

2.3.1. Định nghĩa và tính chất

2.3.1.1. Công của một lực biến đổi

Cho một chất điểm M di chuyển theo một cung phẳng L từ A đến B dưới tác dụng của một lực $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ biến thiên liên tục dọc theo cung $\widehat{AB}$. Hãy tính công W của lực ấy.

Chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi $\Delta x_i, \Delta y_i$ là các thành phần của véctơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$.

Nếu cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ khá nhỏ có thể xem như lực $\overrightarrow{F}$ không đổi trên cung đó và bằng $\overrightarrow{F}(M_i)$, với $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm nào đó trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Xem cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ như dây cung $A_{i-1}A_i$, thì công ΔW_i của lực $\overrightarrow{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i trên L xấp xỉ bằng $\Delta W_i = \overrightarrow{F}(M_i).\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Nếu hai thành phần của lực $\overrightarrow{F}(M)$ là P(M) và Q(M) thì $\Delta W_i = P(\xi_i, \eta_i).\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i).\Delta y_i$. Nếu mọi cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ đều khá nhỏ ta có:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]. \qquad (2.23)$$

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ đều càng nhỏ. Do đó công W của lực $\overrightarrow{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A đến B trên đường L là giới hạn, nếu có, của tổng ở vế phải của (2.23) khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta s_i \to 0, \Delta s_i$ là chiều dài cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$.

2.3.1.2. Định nghĩa tích phân đường loại hai

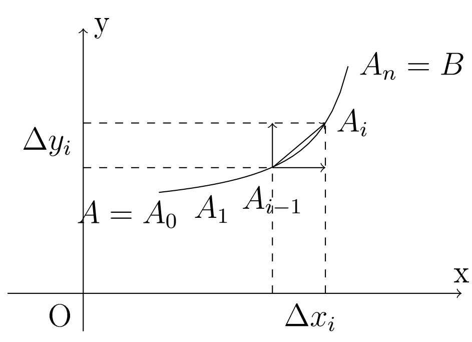
Cho hai hàm số P(x, y) và Q(x, y) xác định trên cung $\widehat{AB}$. Chia cung $\widehat{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi hình chiếu của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy là $\Delta x_i, \Delta y_i$, $M_i\ (\xi_i, \eta_i)$ là một điểm tùy ý trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i \to 0$, $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta y_i \to 0$, tổng $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$ dần tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc cách chia cung $\widehat{AB}$ và cách chọn điểm M_i trên cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\widehat{AB}$ và được ký hiệu là

$$I = \int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \qquad (2.24)$$

Người ta chứng minh được rằng nếu cung $\widehat{AB}$ trơn[3] và các các hàm số P(x, y), Q(x, y) liên tục trên cung $\widehat{AB}$ thì tích phân đường loại hai (2.24) tồn tại.

$*$ **Chú ý:** Trong tích phân đường loại hai, chiều trên đường lấy tích phân đóng vai trò quan trọng. Nếu ta đổi chiều trên đường lấy tích phân thì hình chiếu của véctơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy đổi dấu, do đó:

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int\limits_{\widehat{BA}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$



Hình 2.28

Nếu đường lấy tích phân là một đường kín L, ta quy ước chọn chiều dương trên L là chiều sao cho một người đi dọc L

[3]Đường cong có phương trình tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$ xác định trên (α, β) được gọi là trơn nếu x(t) và y(t) có đạo hàm và các đạo hàm đó không đồng thời bằng không với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở
về bên trái. Ta thường ký hiệu tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là $\oint\limits_L Pdx + Qdy$.

2.3.1.3. Tính chất

Tích phân đường loại hai có các tính chất như tích phân xác định.

2.3.2. Cách tính

Ta giả thiết rằng cung $\overset{\frown}{AB}$ là một cung trơn, các hàm P(x, y), Q(x, y) liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được xác định bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$, các mút A, B ứng với các giá trị t_1, t_2 của tham số. Khi đó ta có công thức:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right] dt \tag{2.25}$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, a là hoành độ của A, b là hoành độ của B, ta có:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right] dx \tag{2.26}$$

•Ví dụ 2.20. Tính $I = \int\limits_L ydx - xdy$ với

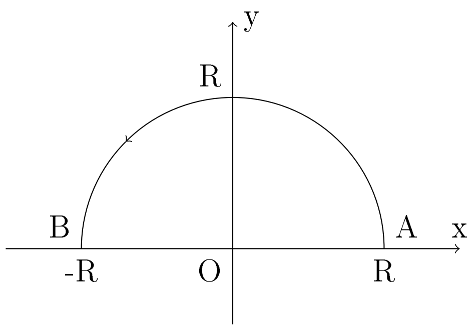
a) L là nửa đường tròn tâm O bán kính R nằm trong nửa mặt phẳng trên từ $A(R;0)$ đến $B(-R;0)$.

b) L là đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đi theo chiều dương.

Lời giải.

a) (Xem hình 2.29)

Phương trình tham số của đường tròn tâm O bán kính R là $\begin{cases} x &= Rcost \\ y &= Rsint. \end{cases}$



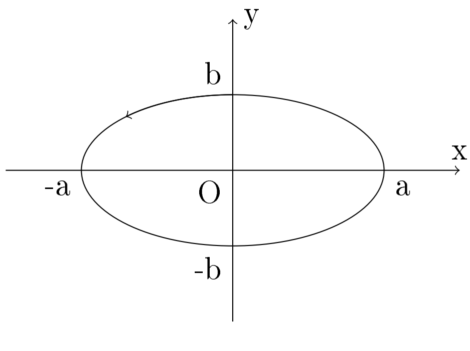
Hình 2.29

Theo công thức (2.25) ta có:

$I = \int\limits_0^{\pi} \left[R\sin t(-R\sin t) - R\cos t.R\cos t\right] dt$

$= -R^2 \int\limits_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\pi R^2$

b) (Xem hình 2.30)



Hình 2.30

Phương trình tham số của elip là :

$$\begin{cases} x &= acost \\ y &= bsint \end{cases}, \quad 0 \le t < 2\pi,$$

Chiều tăng của t ứng với chiều dương của L, ta có:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \left[b\sin t(-a\sin t) - a\cos t.b\cos t\right] dt = -ab\int\limits_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -ab\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

•**Ví dụ 2.21.** Tính $I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ trong đó

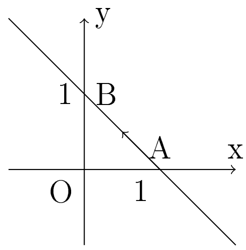
a) L là đường gấp khúc ABO với A(1; 0), B(0; 1) và O(0; 0).

b) L là đường $x + y^2 = 1$ nối từ điểm A(0; -1) đến B(0; 1).

Lời giải.

a) (Xem hình 2.31)

Chia L thành 2 đường: AB có phương trình $x + y = 1$, BO có phương trình $x = 0$.



Hình 2.31

Tính $I_1 = \int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy.$

Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow y' = -1.$

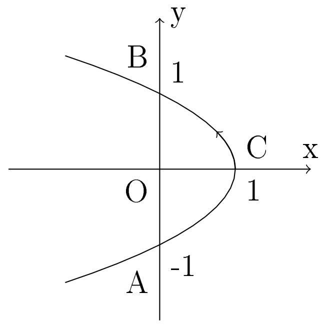
Vậy $I_1 = \int\limits_1^0 \left[x^2 - 2x(1-x) + \left((1-x)^2 - 2x(1-x)\right)(-1)\right] dx$

$= -\int\limits_0^1 (2x - 1)dx = -\left.(x^2 - x)\right|_0^1 = 0.$

Tính $I_2 = \int\limits_{BO} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy.$

Từ $x = 0 \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow I_2 = \int\limits_1^0 y^2 dy = -\int\limits_0^1 y^2 dy = -\left.\dfrac{y^3}{3}\right|_0^1 = -\dfrac{1}{3}.$

$$\text{Vậy } I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{3}.$$



Hình 2.32

b) (Xem hình 2.32)

Từ $x + y^2 = 1 \Rightarrow x = 1 - y^2 \Rightarrow x' = -2y.$

Vậy:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \left[\left((1-y^2)^2 - 2y(1-y^2)\right)\cdot(-2y) + \left(y^2 - 2y(1-y^2)\right)\right] dy$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (-2y^5 - 4y^4 + 6y^3 + 5y^2 - 4y)dy = \frac{26}{15}.$$

Trong ví dụ này nếu ta muốn tính I bằng cách đưa về tích phân xác định theo x thì ta phải chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành 2 cung $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$, phương trình cung $\overset{\frown}{AC}$ là $y = -\sqrt{1-x}$, còn phương trình cung $\overset{\frown}{CB}$ là $y = \sqrt{1-x}$.

2.3.3. Công thức Green

Công thức Green cho chúng ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo một đường kín L lấy theo chiều dương và tích phân kép trong miền D giới hạn bởi đường L.

◊ **Định lý 2.4.** *Nếu các hàm P(x, y), Q(x, y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền D thì ta có công thức:*

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy \tag{2.27}$$

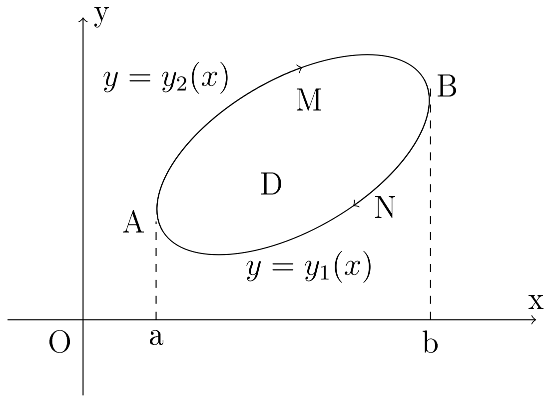
trong đó L là biên của miền D, tích phân dọc theo L lấy theo chiều dương .

Công thức (2.27) được gọi là công thức Green.

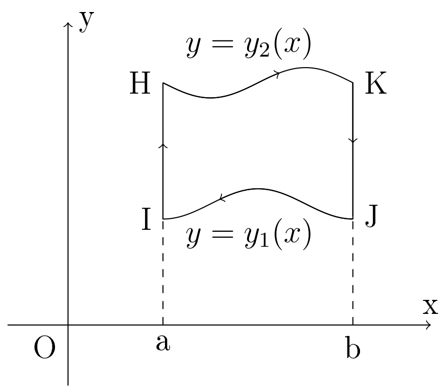
Δ.

a) Trước hết giả sử rằng D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt L nhiều nhất tại hai điểm.Vậy miền D được xác định bởi:

$$a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x).$$



Hình 2.33



Hình 2.34

Theo công thức tính tích phân kép ta có:

$\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \dfrac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$

$= \int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx.$

Theo công thức tính tích phân đường:

$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx = \int\limits_{\widehat{AMB}} P(x,y)dx,$

$\int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{\widehat{ANB}} P(x,y)dx = -\int\limits_{\widehat{BNA}} P(x,y)dx.$

Do đó $\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\widehat{AMBNA}} P(x,y)dx = -\oint\limits_L P(x,y)dx.$

Tương tự ta có $\iint\limits_D \dfrac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$

Từ hai kết quả trên ta được:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$

b) Bây giờ xét miền đơn liên D là miền có biên là đường L gồm hai cung $\widehat{IJ}$ và $\widehat{KH}$ có phương trình lần lượt là $y = y_1(x), y = y_2(x), a \le x \le b$ và hai đoạn thẳng IH và KJ song song với Oy (Hình 3.36). Tương tự như trên ta có:

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\widehat{HK}} P(x,y)dx + \int\limits_{\widehat{JI}} P(x,y)dx.$$

Do $\int\limits_{\widehat{IH}} P(x,y)dx$, $\int\limits_{\widehat{KJ}} P(x,y)dx = 0$ vì đường IH và KJ có phương trình $x = a, x = b \Rightarrow dx = 0$, nên ta có: $\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\widehat{HK}} Pdx + \int\limits_{\widehat{KJ}} Pdx + \int\limits_{\widehat{JI}} Pdx + \int\limits_{\widehat{IH}} Pdx = -\oint\limits_L P(x,y)dx.$

Tương tự ta có $\iint\limits_D \dfrac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$

Từ đó công thức (2.27) được chứng minh.

c) Nếu miền D là miền đơn liên tổng quát hơn trong đó có những đường song song với trục Oy cắt biên của miền D quá 2 điểm thì ta chia miền D thành một số hữu hạn miền nhỏ mà biên của chúng có tính chất nêu ở đầu chứng minh này. Ví dụ trên hình 2.35 có thể chia miền D thành 3 miền D_1, D_2, D_3.

Áp dụng công thức (2.27) cho cả 3 miền trên rồi cộng lại, ta được:

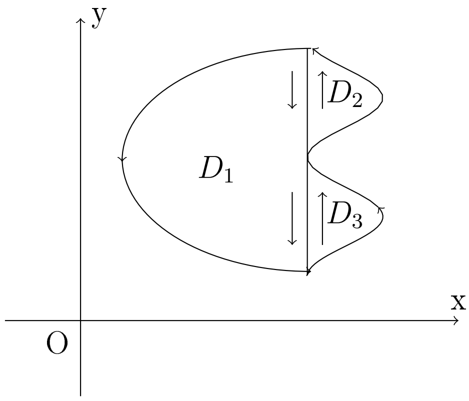
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$$

vì tổng các tích phân đường của $Pdx + Qdy$ trên cùng một cung đường cong hai lần theo hai hướng ngược nhau bằng 0.

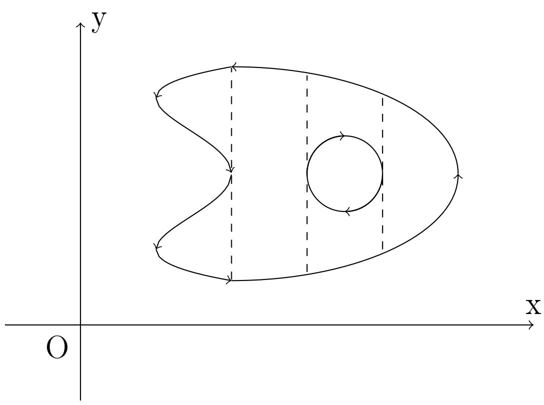
d) Giả sử miền D là miền đa liên. Chẳng hạn biên của nó gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau (hình 2.36). Chia miền D thành 6 miền nhỏ mà biên của chúng đều thỏa mãn các giả thiết trên. Áp dụng công thức (2.27) cho cả 6 miền trên rồi cộng lại, ta được

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy$$

vì tổng các tích phân đường của $Pdx + Qdy$ trên cùng một cung đường cong hai lần theo hai hướng ngược nhau bằng 0. Vì L gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau nên chiều dương trên L phải chọn theo quy ước đã nêu ở trên, chiều dương trên L_1 là ngược chiều kim đồng hồ, chiều dương trên L_2 là thuận chiều kim đồng hồ.



Hình 2.35



Hình 2.36

•Ví dụ 2.22. Tính

$I = \oint\limits_L (xsinx + y^2)dx + (x + 2xy + ln(1 + y^2))dy$, với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.

Lời giải. (Xem hình 2.37)

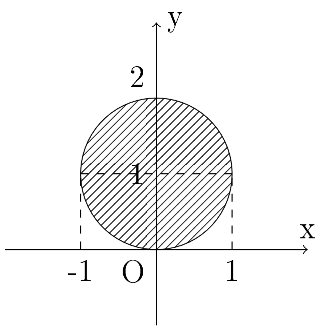
Ta có : $P = xsinx + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y$

$Q = x + 2xy + ln(1 + y^2) \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2y$

Áp dụng công thức Green có:

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D dxdy = S$$

trong đó S là diện tích miền D. Do D là hình tròn có bán kính bằng 1 nên $I = S = \pi$.



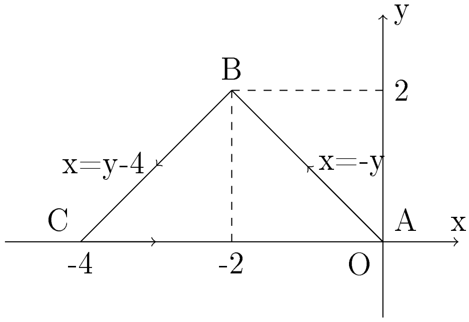
Hình 2.37

•Ví dụ 2.23. Tính $I = \int\limits_{ABC} (xy + y^2)dx + (x + y)^2dy$ trong đó ABC là đường gấp khúc A(0, 0), B(-2, 2), C(-4, 0).

Lời giải. (Xem hình 2.38)

Đường ABC chưa phải là đường kín nhưng nếu ta bổ sung thêm đường CA thì sẽ được một đường kín, khi đó:

$$I = \int\limits_{ABC} (xy + y^2)dx + (x + y)^2dy$$



Hình 2.38

$$= \int\limits_{ABCA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2dy - \int\limits_{CA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2dy$$

$$= I1 - I2.$$

Đoạn CA có phương trình $y = 0 \Rightarrow dy = 0dx$, do đó $I_2 = 0$.

Vậy $I = \int\limits_{ABCA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2dy$

Áp dụng công thức Green với

$$P = xy + y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y,$$

$$Q = (x+y)^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y).$$

Do đó $I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D xdxdy$, với D là miền tam giác ABC.

Miền D được xác định bởi: $0 \le y \le 2, y-4 \le x \le -y$.

Vậy $I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-4}^{-y} xdx = \int\limits_0^2 \frac{x^2}{2}\Big|_{y-4}^{-y} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (8y-16)dy = \frac{1}{2}\left(4y^2-16y\right)\Big|_0^2 = -8.$

▽ ***Hệ quả* 2.3. (Hệ quả của công thức Green.)**

Nếu đường kín L là biên của miền D thì diện tích S của miền D được cho bởi công thức:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx \tag{2.28}$$

Thật vậy, áp dụng công thức Green với P = -y, Q = x ta có:

$$\oint\limits_L xdy - ydx = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2S$$

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

•**Ví dụ 2.24.** Tính diện tích của miền giới hạn bởi elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a, b > 0.

Lời giải.

Phương trình tham số của elip là x = acost, y = bsint, $0 \le t < 2\pi$. Chiều tăng của t ứng với chiều dương của elip.

Áp dụng công thức (2.28) ta được:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t.b\cos t - b\sin t.(-a\sin t)]dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

.

2.3.4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Qua các ví dụ trên ta thấy rằng tích phân đường $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không những phụ thuộc vào 2 đầu mút A, B mà còn phụ thuộc vào đường $\widehat{AB}$. Bây giờ ta xét xem với điều kiện nào thì tích phân đường đó chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B mà không phụ thuộc vào đường lấy tích phân. Ta có định lý sau:

◊ **Định lý 2.5.** *Giả sử hai hàm P(x, y), Q(x, y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D nào đó. Khi đó 4 mệnh đề sau đây là tương đương với nhau:*

1) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D$;

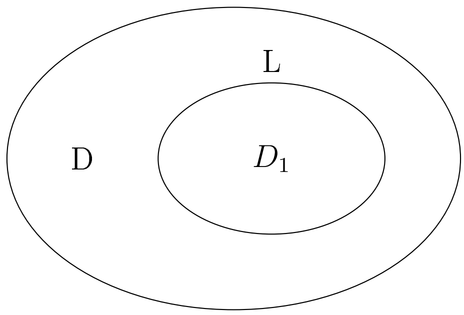
2) $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ *dọc theo mọi đường kín L nằm trong D;*

3) $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$*, trong đó* $\widehat{AB}$ *là một cung bất kỳ nằm trong D, chỉ phụ thuộc hai mút A, B mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B;*

4) Biểu thức Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó trong miền D.

Δ.Ta sẽ chứng minh định lý theo sơ đồ sau 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

a) 1) $\Rightarrow$ 2) (Xem hình 2.39) Giả sử L là một đường kín bất kỳ nằm trong D. Gọi D_1 là miền giới hạn bởi L. Áp dụng công thức Green ta có: $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$ vì theo giả thiết 1) ta có $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \forall (x,y) \in D_1 \subset D$.

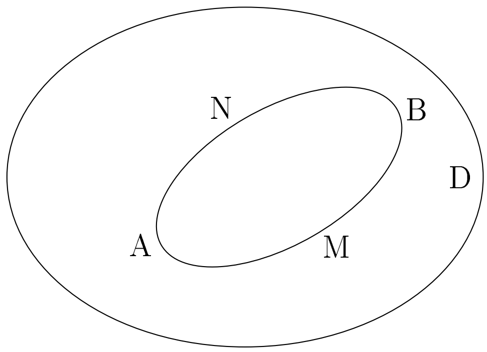


Hình 2.39

b) 2) $\Rightarrow$ 3) Giả sử $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ là hai đường bất kỳ nối A với B (hai đường này đều nằm trong D) (hình 2.40).

Theo giả thiết 2) ta có: $\int\limits_{\widehat{AMBNA}} Pdx + Qdy = 0$ hay $\int\limits_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\widehat{BNA}} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \int\limits_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\widehat{BNA}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\widehat{ANB}} Pdx + Qdy.$

Vậy $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B.



Hình 2.40

c) 3) $\Rightarrow$ 4) Giả sử $A(x_0, y_0)$ là một điểm cố định trong D, M(x, y) là điểm chạy trong D. Xét hàm số:

$$u(x,y) = \int\limits_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy + C, \text{ C là hằng số.} \tag{2.29}$$

Hàm số trên hoàn toàn xác định vì tích phân ở vế phải không phụ thuộc đường lấy tích phân. Lấy điểm $M_1(x +$

$h, y) \in D$ với h có giá trị tuyệt đối khá nhỏ ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,[\int\limits_{\widehat{AM_1}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy\,].$$

Chọn $\widehat{AM_1}$ gồm cung $\widehat{AM}$ và đoạn thẳng MM_1 song song với trục Ox (hình 2.41) ta được:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} P(\xi,y)d\xi.$$

Theo định lý về giá trị trung bình đối với tích phân xác định ta có:

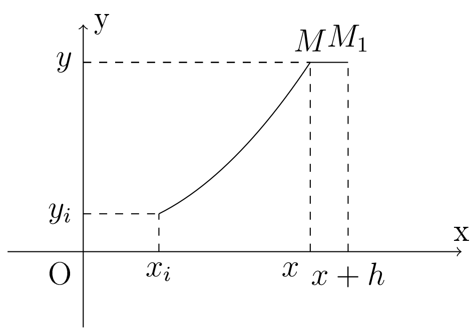
$$\int\limits_{x}^{x+h} P(\xi,y)d\xi = P(\bar{x},y).h, \text{ với } \bar{x} = x+\theta.h, \quad 0<\theta<1.$$

Khi $h\to 0$ thì $\overline{x}\to x$ do đó $P(\bar{x},y)\to P(x,y)$.

Vậy $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} P(\bar{x},y) = P(x,y)$.

Tương tự như vậy có thể chứng minh được rằng $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$.

Do đó $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số u(x, y) cho bởi công thức (2.29).



Hình 2.41

d) 4) $\Rightarrow$ 1) Giả sử $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ nào đó. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Các hàm số trên liên tục trên D, nên theo định lý Schwarz ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x,y)\in D$.

▽ ***Hệ quả* 2.4.** *Nếu Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm số u(x,y) thì:*

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A) \tag{2.30}$$

dọc theo mọi đường cong $\widehat{AB}$ nằm trong miền D.

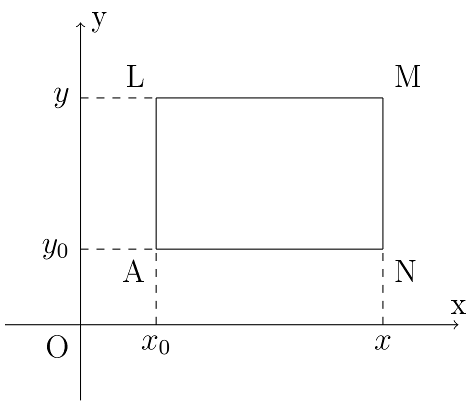
▽ ***Hệ quả* 2.5.** *Nếu D là toàn bộ $\mathbb{R}^2$ thì Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) cho bởi công thức:*

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} P(x,y)dy + C \tag{2.31}$$

hoặc:

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0,y)dy + C \tag{2.32}$$

với $M_o(x_o, y_o)$ là điểm tùy chọn trong D. Thật vậy vì tích phân $u(x,y) = \int_{\widehat{AM}} Pdx + Qdy + C$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nên nếu chọn $\widehat{AM}$ là đường gấp khúc ANM (hình 2.42) thì ta được công thức (2.31), còn nếu chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ALM thì ta được công thức (2.32).



Hình 2.42

•Ví dụ 2.25. Chứng minh rằng biểu thức:

$e^{x-y}.(1+x+y)dx + e^{x-y}.(1-x-y)dy$ là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó.Tìm hàm u(x, y).

Lời giải.

Ta có $P = e^{x-y}.(1+x+y) \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = -e^{x-y}(x+y)$

$$Q = e^{x-y}.(1-x-y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{x-y}(x+y).$$

Vậy $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Do đó Pdx + Qdy là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức (2.31) với $x_0 = y_0 = 0$ ta được:

$$u(x,y) = \int\limits_0^x e^x(1+x)dx + \int\limits_0^y e^{x-y}(1-x-y)dy + C$$

$$= e^x\,(1+x)|_0^x - \int\limits_0^x e^x dx - e^{x-y}\,(1-x-y)|_0^y - \int\limits_0^y e^{x-y}dy + C$$

$$= e^x\,(1+x)|_0^x - e^x|_0^x - e^{x-y}\,(1-x-y)|_0^y + e^{x-y}\Big|_0^y + C = e^{x-y}(x+y) + C.$$

2.3.5. Trường hợp đường lấy tích phân là một đường trong không gian

Nếu $\widehat{AB}$ là một cung trong không gian, $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ là ba hàm số xác định trên cung $\widehat{AB}$, người ta định nghĩa tích phân đường loại hai:

$$I = \int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

tương tự như tích phân đường loại hai trong mặt phẳng. Nếu cung $\widehat{AB}$ được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, các mút A, B ứng với các giá trị t_1, t_2 của tham số thì ta có công thức:

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]dt. \qquad (2.33)$$

•Ví dụ 2.26. Tính $I = \int_{AB} (x+y)dx + (x+z)dy + (y+z)dz$ dọc theo đoạn thẳng AB từ điểm A(1;1;3) đến điểm B(3;2;1).

Lời giải. Phương trình tham số của đoạn thẳng AB là: $x = 1 + 2t, y = 1 + t, z = 3 - 2t$ điểm A ứng với t = 0, điểm B ứng với t = 1. Có $x'(t) = 2, y'(t) = 1, z'(t) = -2$. Do đó:

$$I = \int\limits_0^1 [(1 + 2t + 1 + t).2 + (1 + 2t + 3 - 2t).1 + (1 + t + 3 - 2t).(-2)]dt = \int\limits_0^1 8tdt = 4.$$

Bài tập chương 2

Bài 2.1. Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-2}^{2} dx.\int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy;$

b) $\int\limits_{1}^{3} dy\int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx;$

c) $\int\limits_{1}^{2} dx\int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy.$

Đáp số:

a) $\int\limits_{0}^{4} dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx;$

b) $\int\limits_{0}^{2} dx\int\limits_{1}^{3} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{6} dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{3} f(x,y)dy;$

c) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dy\int\limits_{1}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dy\int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2} f(x,y)dx.$

Bài 2.2. Tính các tích phân kép:

a) I = $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$, D là miền giới hạn bởi x $\geq$ 1, y $\geq$ 1, x + y $\leq$ 3;

b) I = $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường y = x^2 và x = y^2;

c) I = $\iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường y = x^2 và 3x + y = 4;

d) I = $\iint\limits_D |x+y|\,dxdy$, D là miền được xác định bởi $|x|\leq$ 1 và |y| $\leq$ 1;

e) I = $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường y = 2 - x^2 và y = 2x - 1;

f) I = $\iint\limits_D e^x dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường x = 0, y = 2, y = e^x;

g) I = $\iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường:
x + y = 1, x − y =1, x + y = 3, x − y = -1;

h) I = $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi
y = x + 1, y = x - 3, y = $-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{9}$, y = $-\dfrac{1}{3}x+5$;

i) I = $\iint\limits_D (x^2+y^2+1)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường x^2 + y^2 − x = 0;

j) I = $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D là miền được giới hạn bởi các đường tròn x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = $4a^2$, a > 0;

k) I = $\iint\limits_D (x+2y+1)dxdy$, D là giao của hai hình tròn x^2 + y^2 $\leq$ 2y và x^2 + y^2 $\leq$ 2x;

l) I = $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}dxdy$, D là miền xác định bởi x^2 + y^2 -2x $\leq$ 0, y $\geq$ 0;

m) I = $\iint\limits_D \dfrac{y^2}{x^2}dxdy$, D là miền 1 $\leq$ x^2 + y^2 $\leq$ 2x;

n) I = $\iint\limits_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$;

o) I = $\iint\limits_D xydxdy$, D là miền (x - 2)^2 + y^2 $\leq$ 1 và y $\geq$ 0.

Đáp số:

a) $\frac{1}{36}$;
b) $-\frac{1}{504}$;
c) $\frac{36875}{42}$;
d) $\frac{8}{3}$;
e) $\frac{64}{15}$;
f) $\frac{1}{2}$;
g) $\frac{20}{3}$ (Đổi biến x + y = u; x – y =v);
h) $\frac{38}{3}$;
i) $\frac{11\pi}{32}$;
j) $\frac{14\pi a^3}{3}$;
k) $\frac{5}{2}(\frac{\pi}{2} - 1)$;
l) $\frac{8}{3}(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$;
m) $\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$;
n) $\frac{2}{3}\pi ab$;
o) $\frac{4}{3}$.

Bài 2.3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:
a) $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$;
b) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$;
c) $y = 2^x$, $y = -\frac{x}{2}$, $y = 4$;
d) $xy = 1$, $xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.
Đáp số:
a) $\frac{1}{6}$;
b) $\frac{192}{5}$;
c) $\frac{97}{4} - \frac{7}{2\ln 2}$;
d) 7ln2.
Bài 2.4.
a) Tính diện tích của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, nằm ở trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$;
b) Tính diện tích của phần mặt $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$ ($a > 0$, $b > 0$) nằm ở trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
c) Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2.(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$;
d) Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
Đáp số:
a) $\pi\sqrt{2}$;
b) $\frac{\pi ab}{6}(5\sqrt{5} - 1)$;
c) $8a^2(\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2})$;
d) $36(\pi - 2\text{arctan}\frac{\sqrt{5}}{2})$.
Bài 2.5. Xác định trọng tâm của các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường:
a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ và nằm trong miền $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1$;
c) $y^2 = x$, $x^2 = y$;
d) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$;
e) $r = a(1 + \cos\varphi)$, ($a > 0$).
Đáp số:
a) $(\frac{2}{5}, 0)$;

b) $(\frac{10}{3(\pi-2)}, \frac{2}{\pi-2})$;
c) $(\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$;
d) $(1, \frac{4}{3\pi})$;
e) $(\frac{5a}{6}, 0)$.

Bài 2.6. Tính các tích phân đường:
a) $\int\limits_{ABC}(x-y)^2dx+(x+y)^2dy$, ABC là đường gấp khúc A(0, 0), B(2, 2), C(4, 0);
b) $\int\limits_{L} ydx-(y+x^2)dy$, L là cung parabon y = 2x – x^2 nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ;
c) $\int\limits_{\widehat{AB}}(x^2-2xy)dx+(2xy+y^2)dy$, $\widehat{AB}$ là cung $x^2 + y^2 = 2x$, $x \geq 1$, A(1, 1), B(1, -1).

Đáp số:
a) $\frac{-32}{3}$;
b) 4;
c) $-(\pi+2)$.

Bài 2.7. Tính $\int\limits_{\widehat{AB}}(xy-1)dx+x^2ydy$, A(1, 0), B(0, 2) theo đường
a) 2x + y = 2;
b) $4x + y^2 = 4$;
c) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ theo chiều dương.

Đáp số:
a) 1;
b) $\frac{17}{15}$;
c) $\frac{4}{3}$.

Bài 2.8. Tính các tích phân đường
a) $\oint\limits_{L} xy\left[-(x+\frac{y}{2})dx+(\frac{x}{2}+y)dy\right]$, L là biên của tam giác ABC, A(-1, 0), B(1, -2), C(1, 2);
b) $\int\limits_{OAB} 2(x^2+y^2)dx+(4y+3)xdy$, OAB là đường gấp khúc O(0, 0), A(1, 1), B(0, 2);
c) $\oint\limits_{L}(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, L là đường $x^2 + y^2 = ax$ (a >0);
d) $\oint\limits_{L} x^3(y+\frac{x}{4})dy-y^3(x+\frac{y}{4})dx$, L là đường $x^2 + y^2 = 2x$.

Đáp số:
a) 4;
b) 3;
c) $-\frac{\pi a^3}{8}$;
d) $\frac{5\pi}{2}$.

Bài 2.9. Tích phân đường $\int\limits_{L}(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})dx+(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân ấy từ A(1, π) đến B(2, π) theo một cung không cắt Oy.

Đáp số:
Không nếu đường lấy tích phân L không cắt Oy; $1+\pi$.

Bài 2.10. Tích phân đường $\int\limits_{L}\frac{x^2+y^2}{xy}\left(\frac{3x^2-y^2}{x}dx+\frac{3y^2-x^2}{y}dy\right)$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân ấy theo cung $L = \widehat{AB}$ xác định bởi x = t + $\cos^2$t, y = 1 + $\sin^2$t,$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Đáp số:

Không nếu đường lấy tích phân L không cắt các trục tọa độ; $\frac{(\pi^2+16)^2}{16\pi} - 4$.

Bài 2.11. Chứng minh rằng các biểu thức Pdx + Qdy sau đây là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u:

a) $(x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$;

b) $(2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$;

c) $[e^{x+y} + \cos(x-y)]\,dx + [e^{x+y} - \cos(x-y) + 2]dy$;

d) $e^x\left[e^y(x-y+2)+y\right]dx + e^x\left[e^y(x-y)+1\right]dy$;

e) $\frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}ydy$.

Đáp số:

a) $\frac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + 3x + \frac{1}{3}y^3 + 3y + C$;

b) $x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C$;

c) e^{x+y} + sin(x - y) + 2y + C;

d) $e^x\left[y + e^y(x-y+1)\right] + C$;

e) $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{y^2}{2} + C$.

Bài 2.12. Tìm m để biểu thức $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^m}$ là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u.

Đáp số:

m = 1; u $= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + arctan\frac{y}{x} + C$.

Bài 2.13. Tìm a, b để biểu thức $\frac{(ax^2+2xy+y^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$ là vi phân toàn phần của một hàm số u(x, y) nào đó. Tìm u.

Đáp số:

a = b = -1; $u = \frac{x-y}{x^2+y^2} + C$.

Bài 2.14. Tìm α, β để tích phân đường $\int\limits_L \frac{y(1-x^2+\alpha y^2)dx + x(1-y^2+\beta x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ không phụ thuộc đường lấy tích phân. Tính tích phân ấy từ điểm A(0, 0) đến điểm B(a, b) ứng với các giá trị α, β đã tìm được.

Đáp số:

$\alpha = \beta = 1,\ I = \frac{ab}{1+a^2+b^2}$.

Bài 2.15. Tính $\oint_L \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2+1)^2}$, L là đường elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$.

Đáp số:

0; biểu thức dưới dấu tích phân là $\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}$.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương trình vi phân là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình gọi là cấp của phương trình vi phân. Ví dụ $y' + 2xy - y = s\text{inx}$ là phương trình vi phân cấp một; $y'' + 4y = e^x$ là phương trình vi phân cấp hai.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Ví dụ các hàm số $y = C_1\text{cos}2x + C_2 \sin 2x$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý đều là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$. Cho C_1, C_2 những giá trị khác nhau ta được những nghiệm khác nhau của phương trình. Vì vậy phương trình trên có vô số nghiệm.

Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là đường tích phân của phương trình. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường ấy được xác định bởi phương trình $y = f(x)$ hoặc phương trình $\Phi(x, y) = 0$ hoặc phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$.

Trong bài giảng này ta chỉ xét phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

3.1. Phương trình vi phân cấp 1

3.1.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

3.1.1.1. Định nghĩa

Là phương trình có dạng

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

hay

$$y' = f(x, y). \tag{3.2}$$

Trong đó y là hàm phải tìm, y' là đạo hàm cấp 1, x là biến độc lập. Biến độc lập và hàm phải tìm có thể không có mặt nhưng bắt buộc phải có mặt đạo hàm cấp một y'.

3.1.1.2. Định lý (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

Cho phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$. Giả sử $f(x, y)$ liên tục trong miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (3.2), nghiệm đó lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$.

Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ liên tục trong miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

Điều kiện $y|_{x=x_0} = y_0$ gọi là điều kiện đầu. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (3.2) thoả mãn điều kiện đầu gọi là bài toán Cauchy.

3.1.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một là hàm số $y = \varphi(x, C)$, trong đó C là hằng số tùy ý thỏa mãn phương trình vi phân.

- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C = C_0$ sao cho y $= \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện đầu $y|_{x=x_0} = y_0$ gọi là nghiệm riêng.

- Khi nghiệm tổng quát được cho dưới dạng ẩn thì được gọi là tích phân tổng quát, ký hiệu là $\phi(x,\ \mathrm{y},\ \mathrm{C}) = 0$. Cho C một giá trị cụ thể $C = C_0$ sao cho $\phi(x,\ \mathrm{y},\ \mathrm{C}_0) = 0$ thoả mãn điều kiện đầu $y|_{x=x_0} = y_0$ thì $\phi(x,\ \mathrm{y},\ \mathrm{C}_0)\ =\ 0$ được gọi là tích phân riêng.

3.1.2. Phương trình khuyết

3.1.2.1. Phương trình vi phân cấp 1 khuyết y

Phương trình vi cấp một khuyết y là phương trình có dạng:

$$F(x, y') = 0. \tag{3.3}$$

Trường hợp 1: Giải được $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx = F(x) + C.$

•**Ví dụ 3.1.** Giải phương trình $y' - cosx = 0 \Rightarrow y = \int cosxdx = sinx + C.$

Trường hợp 2: Giải được $x = f(y')$. Tham số hóa y' bằng cách đặt $y' = p$, p là tham số.
Khi đó $x = f(p)$ và $dx = f'(p)dp$.
Mặt khác $dy = y'dx = p.f'(p)dp$ nên $y = \int pf'(p)dp.$
Vậy tích phân tổng quát là $\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int pf'(p)dp. \end{cases}$

•**Ví dụ 3.2.** Giải phương trình vi phân $x = siny' + cosy'$.

Lời giải. Đặt $y' = p$ ta được $x = sinp + cosp$. Do đó $dx = (cosp - sinp)dp$.
Ta có $dy = y'dx = p(cosp - sinp)dp$.
$\Rightarrow y = \int p(\cos p - \sin p)dp$ hay $y = p(sinp + cosp) + cosp - sinp + C.$
Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = \sin p + \cos p \\ y = (p-1)\sin p + (p+1)\cos p + C. \end{cases}$

Trường hợp 3: Có thể giải phương trình vi phân cấp một khuyết y bằng cách tham số hóa cả x và y'.
Đặt x = f(t), y' = g(t). Ta có dy =y' dx = g(t)f' (t)dt $\Rightarrow y = \int g(t)f'(t)dt.$
Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = f(t) \\ y = \int g(t)f'(t)dt. \end{cases}$

•**Ví dụ 3.3.** Giải phương trình vi phân $x^2 + y'^2 = 1$.

Lời giải. Đặt $x = \sin t,\ y' = \cos t$.
Khi đó $dy = \cos t\ dx = \cos t.\cos t\ dt$.
$\Rightarrow y = \int \dfrac{1+\cos 2t}{2}dt = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + C$ (C: const).
Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{4}\sin 2t + C. \end{cases}$

3.1.2.2. Phương trình vi phân cấp 1 khuyết x

Phương trình vi cấp một khuyết x là phương trình có dạng:

$$F(y, y') = 0. \tag{3.4}$$

Trường hợp 1: Giải ra được y = $\varphi(y')$. Tham số hóa y' bằng cách đặt y' = p.
Ta có y = φ(p) và $dy = \varphi'(p)dp$. Mặt khác $dy = y'.dx = p.dx$ nên:

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}dp \Rightarrow x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}dp \\ y = \varphi(p). \end{cases}$

•**Ví dụ 3.4.** Giải phương trình $y = \dfrac{(y')^2}{e^{y'}}$.

Lời giải. Đặt y' = p ta có $y = \dfrac{p^2}{e^p}$ và $dy = (2pe^{-p} - p^2e^{-p})dp$.
Mặt khác $dy = y'dx = pdx$ nên $dx = \dfrac{2pe^{-p} - p^2e^{-p}}{p}dp$ nên

$$\Rightarrow x = \int (2e^{-p} - pe^{-p})dp$$
$$\Rightarrow x = -2e^{-p} + pe^{-p} + e^{-p} + C = (p-1)e^{-p} + C.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = (p-1)e^{-p} + C \\ y = \dfrac{p^2}{e^p}. \end{cases}$

Trường hợp 2: Giải được $y' = f(y) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(y) \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{f(y)}$ hay $x = \int \dfrac{dy}{f(y)} = F(y) + C$.

•**Ví dụ 3.5.** Tìm tích phân riêng của phương trình $y' = \dfrac{-\sqrt{1-y^2}}{y}$ thoả mãn $y|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải. Phương trình viết lại được $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \Rightarrow dx = -\dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$
$\Rightarrow x = -\int \dfrac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}$ hay $x = \sqrt{1-y^2} + C$.
Thay $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ta có C = 0. Vậy tích phân riêng là $x = \sqrt{1-y^2}$.

Trường hợp 3: Có thể giải phương trình vi phân cấp 1 khuyết x bằng cách tham số hóa cả y và y'.
Đặt y = f(t), y' = g(t).
Ta có dy = f'(t)dt = g(t)dx $\Rightarrow dx = \dfrac{f'(t)}{g(t)}dt$ *hay* $x = \int \dfrac{f'(t)}{g(t)}dt = G(t) + C$.
Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = G(t) + C \\ y = f(t). \end{cases}$

•**Ví dụ 3.6.** Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 1$.

Lời giải. Đặt $y = \sin t,\ y' = \cos t$. Vì $y' = \dfrac{dy}{dx}$ nên $dy = \cos t dt = \cos t dx$.
Có 2 trường hợp:
- Nếu $\cos t \neq 0$ thì $dt = dx,\ t = x + C \Rightarrow y = \sin(x + C)$ là nghiệm tổng quát.
- Nếu $\cos t = 0$ ta có $t = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pm 1$. Hai nghiệm này không nằm trong họ nghiệm tổng quát là hai nghiệm kỳ dị.

∗ **Chú ý:**
1. Các hằng số trong công thức nghiệm có thể chọn thích hợp để công thức nghiệm gọn, đẹp.
2. Khi giải phương trình vi phân ta có thể xem y là hàm của x và ngược lại có thể xem x là hàm của y.

3.1.3. Phương trình vi phân cấp một có biến số phân ly(Phương trình vi phân cấp một tách biến)

3.1.3.1. Định nghĩa

Là phương trình có dạng:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0 \tag{3.5}$$

trong đó $f_1(x)$ là hàm số của biến độc lập x, $f_2(y)$ là hàm số của biến độc lập y.

3.1.3.2. Cách giải

Lấy tích phân hai vế của phương trình được nghiệm tổng quát cho dưới dạng tích phân tổng quát $\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C$.

•**Ví dụ 3.7.** Cho phương trình vi phân $\dfrac{x}{x^2+2}dx + \dfrac{2y}{1+y^2}dy = 0$

a) Giải phương trình vi phân trên.
b) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện y(0) = 0.

Lời giải.
a) Lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int \frac{x}{x^2+2}dx + \int \frac{2y}{1+y^2}dy = lnC \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \ln(1+y^2) = \ln C$$

hay $\ln(1+y^2)\sqrt{x^2+2} = \ln C$.

Vậy $(1+y^2)\sqrt{x^2+2} = C \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{C}{\sqrt{x^2+2}} - 1}$.

b) Với điều kiện y(0) = 0 ta được $C = \sqrt{2}$.

Vậy nghiệm riêng là $y = \pm\sqrt{\sqrt{\dfrac{2}{x^2+2}} - 1}$.

3.1.3.3. Phương trình vi phân cấp 1 có thể đưa được về dạng có biến số phân ly

a. Định nghĩa. Là phương trình có dạng:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{3.6}$$

b. Cách giải.

+ Nếu $N_1(y).M_2(x) \neq 0$, chia cả 2 vế của (3.6) cho $N_1(y).M_2(x)$ ta được:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

+ Giải phương trình $N_1(y).M_2(x) = 0 \leftrightarrow N_1(y) = 0$ hoặc $M_2(x) = 0$.
Nếu coi x là biến chỉ đối, y là biến chỉ hàm thì ta chỉ cần giải phương trình $N_1(y) = 0$.
Giả sử $y = y_0$ là nghiệm, thay trực tiếp vào (3.6) thì đó cũng là nghiệm.
Nếu coi y là biến chỉ đối, x là biến chỉ hàm thì ta chỉ cần giải phương trình $M_2(x) = 0$.
Giả sử $x = x_0$ là nghiệm, thay trực tiếp vào (3.6) thì đó cũng là nghiệm.

•**Ví dụ 3.8.** Tìm tích phân tổng quát của phương trình $x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$.

Lời giải. Chia cả 2 vế của phương trình cho $(1+x^2)(1+y^2)$ ta được $\dfrac{x}{1+x^2}dx + \dfrac{y}{1+y^2}dy = 0$.

Tích phân tổng quát $\int \dfrac{x}{1+x^2}dx + \int \dfrac{ydy}{1+y^2} = \ln|C|$

Hay $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \dfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|C|$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $(1+x^2)(1+y^2) = C^2$.

•**Ví dụ 3.9.** Giải phương trình vi phân biết $\begin{cases} (1+e^{2x})y^2dy = e^x dx \\ y|_{x=0} = 0. \end{cases}$

Lời giải. Chia cả 2 vế cho $1+e^{2x}$ ta có $y^2dy = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

$\Rightarrow \int y^2dy = \int \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ hay $\dfrac{y^3}{3} = arctane^x + C$

Với $y|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{\pi}{4}$ hay $\dfrac{y^3}{3} = arctane^x - \dfrac{\pi}{4}$.

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $y = \sqrt[3]{3arctane^x - \dfrac{3\pi}{4}}$.

3.1.4. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 (Phương trình vi phân thuần nhất cấp 1)

3.1.4.1. Định nghĩa

Là phương trình có thể đưa được về dạng:

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.7}$$

3.1.4.2. Cách giải

Đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$. Thay vào phương trình (3.7) ta có:

$$u' \cdot x + u = \phi(u) \text{ hay } u' \cdot x = \phi(u) - u.$$

- Nếu $\phi(u) - u \neq 0$ thì phương trình đưa được về dạng có biến số phân ly $\frac{du}{\phi(u) - u} = \frac{dx}{x}$ và tích phân tổng quát là $\ln|x| = \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \Phi(u) + \ln|C|$ nên có nghiệm tổng quát $x = Ce^{\Phi(y/x)}$.

- Nếu $\phi(u) - u \equiv 0$ thì $\phi(u) \equiv u$, ∀u. Phương trình trở thành $y' = \frac{y}{x}$ có nghiệm y = C.x (C: const).

- Nếu ϕ(u) - u = 0 tại u = u_0 thì y = $u_0 x$ là nghiệm.

•**Ví dụ 3.10.** Tìm tích phân tổng quát của phương trình $y' = \frac{y}{x} + e^{y/x}$.

Lời giải. Đặt $\frac{y}{x} = u$ ta có $y = ux$ và $y' = u'x + u$.

Thay vào phương trình đã cho ta được $u'x + u = u + e^u$

$$\Rightarrow u'x = e^u \text{ hay } e^{-u}du = \frac{dx}{x} \text{ hay } \int e^{-u}du = \ln|Cx|$$

$$\Rightarrow -e^{-u} = \ln|Cx|.$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ ta được tích phân tổng quát của phương trình là $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|Cx| = 0$.

•**Ví dụ 3.11.** Tìm tích phân riêng của phương trình $xy' - y = \frac{x}{arctan\frac{y}{x}}$ thỏa mãn điều kiện y(1) = 1.

Lời giải. Phương trình đã cho viết lại được dưới dạng $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{arctan\frac{y}{x}}$.

Đặt $\frac{y}{x} = u$, ta có y = ux và $y' = xu' + u$. Thay vào phương trình ta được:

$$u'x + u - u = \frac{1}{arctanu}$$

$$\text{hay } \frac{dx}{x} = arctanudu \Rightarrow \ln|Cx| = \int arctanudu$$
$$\text{hay } \ln|Cx| = u \cdot arctanu - \frac{1}{2}\ln(1 + u^2)$$

$$\Rightarrow \ln\left[(1+u^2)C^2x^2\right] = 2u \cdot arctanu$$
$$\text{hay} \quad \ln\left[C^2(x^2+y^2)\right] = 2\frac{y}{x}arctan\frac{y}{x}$$

Với điều kiện $y|_{x=1} = 1$ ta có $2arctan1 = \ln 2C^2 \leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \ln 2C^2 \Rightarrow C^2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

Vậy tích phân riêng của phương trình là $2\frac{y}{x}arctan\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + \ln\frac{x^2+y^2}{2}$.

3.1.5. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

3.1.5.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 thuần nhất

a. Định nghĩa. Là phương trình dạng:

$$y' + p(x)y = 0. \tag{3.8}$$

b. Cách giải

- Nếu y $\neq$ 0 phương trình tương đương với $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ là phương trình có biến số phân ly. Suy ra $\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|$ với C$\neq$0. Do đó $y = C.e^{-\int p(x)dx}$.

- Nếu y = 0 bằng cách thế trực tiếp vào phương trình thì y = 0 cũng là nghiệm.

Tóm lại, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = C.e^{-\int p(x)dx}$ với C tuỳ ý.

3.1.5.2. Phương trình tuyến tính cấp 1 không thuần nhất

a. Định nghĩa. Là phương trình dạng:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{3.9}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số liên tục.

b. Cách giải

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng y'+ p(x) y = 0 ta được nghiệm tổng quát:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx}(C : const). \qquad (*)$$

Bước 2: Coi C là hàm của x. Tìm C(x)?

Ta có $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Thay y, y' vào phương trình (3.9) ta được:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

hay $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$ (K = const).

Thay C(x) vừa tìm được vào (*) ta được nghiệm tổng quát của phương trình (3.9) là:

$$y = K.e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (**)$$

$*$ **Chú ý:** Trong công thức (**) số hạng thứ nhất của vế phải $\overline{y} = Ke^{-\int p(x)dx}$là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, còn số hạng thứ hai $Y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)}dx$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

•**Ví dụ 3.12.** Giải phương trình vi phân $y' + 2xy = x.e^{-x^2}$.

Lời giải.

Bước 1: Giải phương trình thuần nhất tương ứng $y' + 2xy = 0$.

Hay $dy = -2xydx$ có nghiệm tổng quát là $y = C.e^{-\int 2xdx} = C.e^{-x^2}$ (C: const).

Bước 2: Coi C = C(x) ta có $y' = C' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C \cdot e^{-x^2}$.

Thay y, y' vào phương trình đã cho ta được $C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = xe^{-x^2}$

$$\Rightarrow C'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow\ dC(x) = xdx \text{ hay } C(x) = \frac{x^2}{2} + K.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = K.e^{-x^2} + \dfrac{x^2}{2}e^{-x^2}$ (K: const).

•**Ví dụ 3.13.** Chứng tỏ rằng phương trình $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$ có một nghiệm riêng là một tam thức bậc hai. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Lời giải. Đặt $y = ax^2 + bx + c$. Ta cần tìm a, b, c để tam thức này là nghiệm của phương trình đã cho. Ta có $y' = 2a\,x + b$. Thay vào phương trình ta được:

$$x(x^2+1)(2ax+b) - (2x^2+3)(a\,x^2+bx+c) = 3$$

$$\text{hay } \ -bx^3 - (2c+a)x^2 - abx - 3c = 3$$

đồng nhất các hệ số ta được b = 0, c = -1, a = 2.

Vậy y = 2x^2 -1 là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

+) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng: $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 0$. Chia cả 2 vế cho $x(x^2+1)$ với điều kiện $x \neq 0$ được $y' - \dfrac{2x^2+3}{x(x^2+1)}y = 0$ hay $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{2x^2+3}{x(x^2+1)}dx$. Suy ra nghiệm tổng quát y = $Ce^{\int \frac{2x^2+3}{x(x^2+1)}dx}$.

Ta có $\int \dfrac{2x^2+3}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}\right) dx = 3\ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln \dfrac{|x|^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

Do đó $y = \dfrac{Cx^3}{\sqrt{x^2+1}}$ (C: const) là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \dfrac{Cx^3}{\sqrt{x^2+1}} + 2x^2 - 1$.

•**Ví dụ 3.14.** Giải phương trình $e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0$.

Lời giải. Nếu xem y là hàm phải tìm của biến số x và viết phương trình dưới dạng $(xe^y - 1)y' + e^y = 0$ thì phương trình không thuộc dạng đang xét. Nếu xem x là hàm số phải tìm của y ta được phương trình $x' + x = \dfrac{1}{e^y}$ trong đó $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Đó là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với hàm số x(y). Giải phương trình thuần nhất tương ứng $\dfrac{dx}{dy} + x = 0$ hay $\dfrac{dx}{x} = -dy$ ta được $x = Ce^{-y}$.

Coi C=C(x) khi đó $x' = C'e^{-y} - Ce^{-y}$, thay vào phương trình không thuần nhất ta được:

$$C'e^{-y} = e^{-y} \Rightarrow C' = 1 \Rightarrow C = y + K.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $x = (y+K)e^{-y}$ (K: const).

3.1.6. Phương trình Becnully

3.1.6.1. Định nghĩa

Là phương trình có dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \tag{3.10}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục và $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.1.6.2. Cách giải

- Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (3.10) là phương trình tuyến tính không thuần nhất hoặc thuần nhất.

- Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$. Với y $\neq$ 0 ta chia cả 2 vế cuả (3.10) cho y$^{\alpha}$ ta được:

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{3.11}$$

Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ thay vào (3.11) ta được:

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{3.12}$$

Đây là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với biến x, hàm z.

Giải phương trình (3.12) tìm được nghiệm tổng quát z = z(x, C). Sau đó ta thay trở lại biến cũ $z = y^{1-\alpha}$ để tìm nghiệm tổng quát y = y(x, C).

•**Ví dụ 3.15.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^4$.

Lời giải.

- Với y = 0 là nghiệm của phương trình (thử trực tiếp).

- Với y $\neq$ 0 chia cả 2 vế của phương trình cho y^4 ta được $y^{-4}y' + \dfrac{1}{x}y^{-3} = x^2$.

Đặt $z = y^{-3}$ ta có $z' = -3y^{-4}y'$, thay vào phương trình trên ta được:

$z' - \dfrac{3}{x}z = -3x^2$ (*) là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với biến z.

+) Giải phương trình thuần nhất $z' - \dfrac{3}{x}z = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = 3\dfrac{dx}{x}$ hay $\ln\left|\dfrac{z}{C}\right| = 3\ln|x| \Rightarrow z = Cx^3$ (C: const).

+) Coi C=C(x) thì $z' = C'x^3 + 3x^2C$. Thay z, z' vào phương trình (*) ta được

$C'x^3 + 3x^2C - 3x^2C = -3x^2 \Rightarrow \dfrac{dC}{dx} = -\dfrac{3}{x}$ hay $C = -3\ln|x| + K$.

Do đó nghiệm của phương trình (*) là $z = Kx^3 - 3x^3\ln|x|$ (K:const).

Thay $z = y^{-3}$ ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{K - 3\ln|x|}}$ (K:const).

3.1.7. Phương trình vi phân cấp 1 toàn phần

3.1.7.1. Định nghĩa

Là phương trình có dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{3.13}$$

trong đó P(x, y), Q(x, y) là các hàm liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{3.14}$$

3.1.7.2. Cách giải

Từ điều kiện (3.14) nên vế trái phương trình (3.13) là vi phân toàn phần của hàm u(x,y) nào đó, tức là du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy với u(x, y) được xác định bằng một trong hai công thức sau:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

hoặc $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$ trong đó (x_0, y_0) $\in$ D.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần (3.13) là:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

hoặc $\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$

•**Ví dụ 3.16.** Giải phương trình vi phân sau $(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0$.

Lời giải. Ta có $P(x,y) = 4xy^2 + y;\ Q(x,y) = 4x^2y + x \ \Rightarrow P'_y = 8xy + 1; Q'_x = 8xy + 1$.

Các hàm P, Q, P'_y, Q'_x liên tục và $Q'_x = P'_y$ nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Chọn $x_0 = y_0 = 0$ ta được:

$$u(x,y) = \int_{0}^{x} (4xy^2 + y)dx + \int_{0}^{y} 0dy = 2x^2y^2 + xy.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $2x^2y^2 + xy = C$.

∗ **Chú ý:** Nếu P(x, y), Q(x, y) liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp 1 của chúng trong một miền D nào đó mà $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trong D thì Pdx + Qdy = 0 không phải là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, trong một số trường hợp người ta có thể chọn được hàm h(x, y) để phương trình

$$h(x,y)\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = 0 \tag{3.15}$$

là phương trình vi phân toàn phần. Hàm h(x, y) gọi là thừa số tích phân. Nói chung, không có phương pháp tổng quát để tìm thừa số tích phân. Ta xét 2 trường hợp đặc biệt sau:

a. Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \phi(x)$ tức là không phụ thuộc vào y thì chọn h(x, y) = h(x) = $e^{\int \phi(x)dx}$

Thật vậy, đặt R(x, y) = h(x, y) P(x, y); S(x, y) = h(x, y) Q(x, y).

Ta có $R = Pe^{\int \phi(x)dx} \Rightarrow R'_y = P'_y e^{\int \phi(x)dx}$

$$S = Q.e^{\int \phi(x)dx} \Rightarrow S'_x = Q'_x.e^{\int \phi(x)dx} + Q.\phi(x).e^{\int \phi(x)dx} = \left[Q'_x + Q\phi(x)\right].e^{\int \phi(x)dx}$$

mà $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \phi(x) \Rightarrow P'_y = Q'_x + Q.\phi(x) \Rightarrow S'_x = P'_y \cdot e^{\int \phi(x)dx}$.

Vậy $R'_y = S'_x$ nên (3.15) là phương trình vi phân toàn phần.

b. Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{P} = \phi(y)$ tức là không phụ thuộc vào x thì chọn h(x, y) = h(y) = $e^{-\int \phi(y)dy}$ (chứng minh tương tự như trong trường hợp a).

•**Ví dụ 3.17.** Giải phương trình vi phân ($2y + xy^3$) dx + ($x+x^2y^2$) dy = 0.

Lời giải. Đặt $P = 2y + xy^3$, $P'_y = 2 + 3xy^2$; Q = $x+x^2y^2$, $Q'_x = 1+2xy^2$.

Ta có $P'_y - Q'_x = 1 + xy^2 = \dfrac{x + x^2y^2}{x} = \dfrac{Q}{x}$. Vậy thừa số tích phân h(x) = $e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|} = x$.

Nhân 2 vế của phương trình đã cho với x ta được phương trình vi phân toàn phần:

$$x(2y + xy^3)dx + x(x + x^2y^2)dy = 0.$$

Chọn $x_0 = y_0 = 0$ thì $u(x,y) = \int_0^x (2xy + x^2y^3)dx + \int_0^y 0dy = 2y \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^x + y^3 \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_0^y = yx^2 + \dfrac{x^3y^3}{3}$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $yx^2 + \dfrac{x^3y^3}{3} = C$ hay $3yx^2 + x^3y^3 = C$.

•**Ví dụ 3.18.** Giải phương trình vi phân $(x^2 + y^2)dx + (2xy + y^2x + \dfrac{x^3}{3})dy = 0$.

Lời giải. Đặt $P = x^2 + y^2$, $P'_y = 2y$, $Q = 2xy + y^2x + \dfrac{x^3}{3}$, $Q'_x = 2y + y^2 + x^2$.

Ta có $\dfrac{P'_y - Q'_x}{P} = -1$ nên thừa số tích phân h(y) = $e^{\int dy} = e^y$.

Nhân 2 vế của phương trình với e^y ta được phương trình vi phân toàn phần:

$$e^y(x^2 + y^2)dx + e^y(2xy + y^2x + \frac{x^3}{3})dy = 0.$$

Chọn $x_0 = y_0 = 0$ thì $u(x,y) = \int\limits_0^x (e^yx^2 + y^2e^y)dx + \int\limits_0^y 0dy = e^y\dfrac{x^3}{3} + e^yy^2x$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $e^y\dfrac{x^3}{3} + e^yy^2x = C$ hay $e^y(x^3 + 3xy^2) = C$.

3.2. Phương trình vi phân cấp 2

3.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 2

3.2.1.1. Định nghĩa

Là phương trình có dạng:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{3.16}$$

hoặc

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.17}$$

trong đó y: hàm cần tìm, x: biến độc lập.

y', y'': đạo hàm cấp 1, cấp 2 của hàm cần tìm. Biến độc lập, hàm cần tìm và đạo hàm cấp một có thể không có một cách tường minh nhưng bắt buộc phải có mặt đạo hàm cấp hai.

•Ví dụ 3.19. Các phương trình : $y'' = 0,\ y''y + (y')^2 = 0,\ x^2y'' + xy' + y = 0$ là các phương trình vi phân cấp 2.

3.2.1.2. Định lý (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

Cho phương trình vi phân cấp 2: $y'' = f(x, y, y')$.

Nếu $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(x, y, y')$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ liên tục trong một miền D nào đó trong $\mathbb{R}^3$ và nếu (x_0, y_0, y'_0) là một điểm thuộc D thì trong lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại một nghiệm duy nhất y = y(x) của phương trình (3.17) thỏa mãn các điều kiện:

$$y|_{x=x_0} = y_0\ ,\ y'|_{x=x_0} = y_1. \tag{3.18}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (3.17) thỏa mãn các điều kiện (3.18) được gọi là bài toán Cauchy.

3.2.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp 2 là hàm số y = φ (x, C_1, C_2) trong đó C_1, C_2: hằng số.

- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ thỏa mãn $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y_1$ gọi là nghiệm riêng.

- Hệ thức ϕ (x,y,C_1,C_2) = 0 xác định nghiệm tổng quát của phương trình (3.17) dưới dạng ẩn gọi là tích phân tổng quát.

- Khi cho C_1, C_2 các giá trị cụ thể $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$ từ tích phân tổng quát ta nhận được hệ thức $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ gọi là tích phân riêng.

3.2.2. Phương trình khuyết

3.2.2.1. Phương trình vi phân cấp 2 khuyết y, y'

a. Dạng:

$$F(x, y'') = 0 \text{ hay } y'' = f(x). \tag{3.19}$$

b. Cách giải. Lấy tích phân theo biến x hai lần ta được công thức nghiệm tổng quát:

$$y = \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1x + C_2$$

hoặc đặt $y' = p$ ta được $\mathrm{F}(x, p') = 0$ là phương trình cấp một đối với p. Nếu nghiệm tổng quát của phương trình đó là p = f(x, C_1) thì y = g(x, C_1) + C_2 trong đó g(x, C_1) là nguyên hàm của f(x, C_1).

•Ví dụ 3.20. Giải phương trình vi phân $y'' = 2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x$.

Lời giải. Lấy tích phân theo biến x hai lần ta được:

$$y = \int \left[\int \left(2\sin \mathrm{x} \cos^2 x - \sin^3 x \right) dx \right] dx + C_1x + C_2$$

$$= \int \left[\int \left(-2\cos^2 x + 1 - \cos^2 x \right) d\cos x \right] dx + C_1x + C_2$$

$$= \int (\cos x - \cos^3 x)dx + C_1x + C_2$$

$$= \int (\cos x - \frac{\cos(3x) + 3cosx}{4})dx + C_1x + C_2$$

$$= \int (\frac{-\cos(3x) + cosx}{4})dx + C_1x + C_2$$

$$= \frac{-sin3x}{12} + \frac{sinx}{4} + C_1x + C_2.$$

3.2.2.2. Phương trình vi phân cấp 2 khuyết y

a. Dạng:

$$F(x, y', y'') = 0 \text{ hay } y'' = f(x, y'). \tag{3.20}$$

b. Cách giải. Đặt p $= y'$ (p là hàm của x).

Khi đó $y'' = p'$ và phương trình (3.20) trở thành p'= f(x, p) là phương trình vi phân cấp 1 đối với p. Giải ra ta được p $= \varphi$ (x, C_1). Do đó nghiệm tổng quát của (3.20) là y=$\int \phi(x, C_1)dx + C_2$.

•**Ví dụ 3.21.** Giải phương trình $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

Lời giải. Đặt $y' = p \Rightarrow y'' = p'$ thay vào phương trình đã cho ta được $p' - \frac{p}{x} = x$ (*)
(*) là phương trình tuyến tính cấp 1 đối với p. Giải phương trình (*).

+) Phương trình thuần nhất $p' - \frac{p}{x} = 0$ hay $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \Rightarrow p = Cx$ (C:const).

+) Coi C=C(x) thì $p' = C'x + C$. Thay p, p' vào phương trình (*) ta được $C'x + C - C = x$ hay $C' = 1 \Rightarrow C = x + C_1$ (C_1: const).

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (*) là $p = (x + C_1)x$ (C_1: const).

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \int x(C_1 + x)dx = \frac{x^3}{3} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2$.

3.2.2.3. Phương trình khuyết x

a. Dạng:

$$F(y, y', y'') = 0 \text{ hay } y'' = f(y, y'). \tag{3.21}$$

b. Cách giải. Đặt y' = p trong đó p là hàm của y tức là $p = p\,[y(x)]$

Khi đó $y'' = p'_y y'_x = p\frac{dp}{dy}$. Thay vào phương trình (3.21) ta được:

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \tag{3.22}$$

(3.22) là phương trình vi phân cấp một mà hàm cần tìm là p, còn biến là y. Giải phương trình này ta có nghiệm $p = \phi(y, C_1)$ hay $\frac{dy}{\phi(y, C_1)} = dx$.

Do đó tích phân tổng quát của phương trình (3.21) là $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

•**Ví dụ 3.22.** Tìm nghiệm của phương trình $yy'' - (y')^2 = 0$ thỏa mãn điều kiện $y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 2$.

Lời giải. Đặt $y' = p = p\,[y(x)] \Rightarrow y'' = p'_y y'x = pp'_y$ thay vào phương trình đã cho ta được: $y.p.\dfrac{dp}{dy} = p^2$ hay $y.p.dp = p^2dy$. (*)

- Với y = 0 thử trực tiếp vào phương trình là nghiệm.

- Với p = 0 $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow$ y = C thay vào phương trình là nghiệm.

- Với $y \cdot p^2 \neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình (*) cho $y \cdot p^2$ ta được:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow p = C_1y \Rightarrow y' = C_1y$$

$$hay\ \frac{dy}{dx} = C_1y \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = C_1x + \ln|C_2|\ hay\ y = C_2e^{C_1x}.$$

Thay điều kiện đầu $y'|_{x=0} = 2,\ \ y|_{x=0} = 1$ ta được $\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 1. \end{cases}$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là y = e^{2x}.

3.2.3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số thay đổi

3.2.3.1. Định nghĩa

Là phương trình vi phân có dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x).y = f(x) \tag{3.23}$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ là những hàm số liên tục.

- Nếu $f(x) \equiv 0$ thì (3.23) là phương trình thuần nhất.

- Nếu $f(x) \neq 0$ thì (3.23) là phương trình không thuần nhất.

3.2.3.2. Phương trình tuyến tính cấp 2 thuần nhất

a. Dạng:

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = 0. \tag{3.24}$$

b. Các định lý về cấu tạo nghiệm

◊ **Định lý 3.1.** *Nếu $y_1(x), y_2(x)$ là hai nghiệm của* (3.24) *thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (C_1, C_2: hằng số) cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất* (3.24).

Đặc biệt $y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (3.24) (tức là $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq C$) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.24).

◊ **Định lý 3.2.** *Nếu biết một nghiệm riêng $y_1(x)$ (với $y_1(x) \neq 0$) của phương trình thuần nhất* (3.24) *thì ta có thể tìm được nghiệm riêng thứ hai $y_2(x)$ của phương trình thuần nhất* (3.24) *độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ bằng cách đặt $y_2(x) = y_1(x).u(x)$.*

∗ **Chú ý:** Để tìm nghiệm riêng thứ 2 ta có thể sử dụng công thức Liouville:

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx.$$

•Ví dụ 3.23. Giải phương trình $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ biết một nghiệm riêng của nó là $y_1(x)=x$.

Lời giải. Đặt $y_2(x)=u.x \Rightarrow y_2'(x)=u+xu'$, $y_2''(x)=2u'+xu''$ thay vào phương trình ta được

$$(1-x^2)(2u'+xu'')-2x(u+xu')+2xu=0 \text{ hay } (x-x^3)u''+(2-4x^2)u'=0.$$

Đặt $u'=$ p, phương trình trở thành $(x-x^3)dp=(4x^2-2)pdx$ hay $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{4x^2-2}{x-x^3}dx$

$$\Rightarrow \ln|p|=\int\frac{4x^2-2}{x-x^3}dx=\int\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=\ln\left(x^2|1-x^2|\right)^{-1}+\ln|C|.$$

Do đó $p=\dfrac{C}{x^2(1-x^2)}$.

Chọn C = 1, thay p = u' ta có

$$du=\frac{dx}{x^2(1-x^2)}\Rightarrow u(x)=\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+K.$$

Chọn K = 0 ta được $u(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. Do đó $y_2(x)=u(x)\cdot x=-1+\dfrac{1}{2}x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=C_1x+\dfrac{1}{2}C_2x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-C_2$.

Nhận xét 3.1. Để tìm nghiệm riêng $y_2(x)$ ta có thể sử dụng công thức Liouville và có kết quả tương tự $y_2(x)=-1+\dfrac{1}{2}x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$.

•Ví dụ 3.24. Cho phương trình $(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0$ có một nghiệm $y=e^x$. Hãy tìm nghiệm riêng của phương trình trên biết $y|_{x=1}=0,\ y'|_{x=1}=1$.

Lời giải. Đặt $y(x)=e^x$. Ta tìm y$_2$(x) độc lập với y$_1$(x) theo công thức Liouville:

$$y_2(x)=e^x\int\frac{e^{-\int\frac{x^2-2}{2x-x^2}dx}}{e^{2x}}dx.$$

Tính $-\int\dfrac{x^2-2}{2x-x^2}dx=\int\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}\right)dx=x+\ln|x(x-2)|+C$.

Cho C = 0 ta được $y_2(x)=e^x\int\dfrac{e^x.x(x-2)}{e^{2x}}dx$

$$=e^x\int(x^2-2x)e^{-x}dx=e^x\left[-(x^2-2x)e^{-x}-2xe^{-x}\right]=-x^2.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y=C_1e^x-C_2x^2$. Do đó $y'=C_1e^x-2C_2x$.

Thay điều kiện ban đầu vào y và y' ta được $\begin{cases}C_1e-C_2=0\\C_1e-2C_2=1\end{cases}$ hay $\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{e}\\C_2=-1.\end{cases}$

Vậy nghiệm riêng cần tìm là $y=-e^{x-1}+x^2$.

•Ví dụ 3.25. Giải phương trình $(x^2-1)y''+2xy'=0$.

Lời giải. Phương trình đã cho là phương trình vi phân cấp 2 khuyết y. Vậy ta có thể giải bằng phương pháp giảm cấp, đồng thời nó cũng là một phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 thuần nhất có hệ số thay đổi nên có thể giải bằng cách tìm hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính.

Cách 1. Đặt $y' = p$ thì $y'' = p'$ thay vào phương trình ta được:

$(x^2-1)p' + 2xp = 0$ hay $p' + \dfrac{2x}{x^2-1}p = 0 \Rightarrow \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{2xdx}{x^2-1}$ hay $p = C_1 e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx} = \dfrac{C_1}{x^2-1}$.

Thay p $=y'$ ta được $y' = \dfrac{C_1}{x^2-1}$ hay $y = \int \dfrac{C_1}{x^2-1}dx = \dfrac{1}{2}C_1 \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C_2$.

Cách 2. Bằng cách thay y = C vào phương trình thì y = C là nghiệm. Chọn C = 1 ta được y = 1 là một nghiệm riêng của phương trình đã cho. Tìm nghiệm riêng thứ 2 theo công thức Liouville $y_2(x) = \int e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx}dx = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + K$.

Chọn K = 0 $\Rightarrow y_2(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 + C_2 \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

3.2.3.3. Phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất

a. Phương trình tuyến tính cấp hai không thuần nhất là phương trình có dạng:

$$y'' + p(x).y' + q(x).y = f(x) \tag{3.25}$$

trong đó $f(x) \neq 0$.

b. Các định lý về cấu tạo nghiệm

◊ **Định lý 3.3.** *Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất* (3.25) *bằng tổng của nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng* (3.24) *với một nghiệm riêng nào đó của phương trình không thuần nhất* (3.25) *ký hiệu* $y = \overline{y} + Y$.

◊ **Định lý 3.4.** *(Nguyên lý chồng chất nghiệm) Cho phương trình:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + \cdots + f_n(x). \tag{3.26}$$

Nếu $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ *là nghiệm riêng của phương trình* $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$ *thì* $y = y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$ *là nghiệm riêng của phương trình* (3.26).

◊ **Định lý 3.5.** *Nếu* $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là hai nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất* (3.25) *thì* $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ *là nghiệm riêng của phương trình thuần nhất* (3.24).

c. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Nếu biết $\overline{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ (C_1, C_2: const) là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.24) thì có thể tìm nghiệm tổng quát của phương trình (3.25) dưới dạng $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$.

Để tìm $C_1(x)$, $C_2(x)$ ta giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Khi đó $C_1' = \varphi_1(x)$, $C_2' = \varphi_2(x)$. Từ đó suy ra:
$C_1 = \int \varphi_1(x)dx = \Phi_1(x) + K_1$; $C_2 = \int \varphi_2(x)dx = \Phi_2(x) + K_2$ (K_1, K_2: const).
Vậy nghiệm tổng quát của (3.25) là $y = K_1y_1 + K_2y_2 + \Phi_1(x)y_1 + \Phi_2(x)y_2$ (K_1, K_2: const).

•**Ví dụ 3.26.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Lời giải. Xét phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Phương trình không chứa hàm y, do đó nó có một nghiệm riêng $y_1 = 1$.

Nghiệm riêng y_2 tìm bằng công thức Liouville $y_2(x) = \int e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}dx = \dfrac{x^2}{2}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là $\overline{y} = C_1x^2 + C_2$ (C_1,C_2: const).

Ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nghiệm tổng quát có dạng $y = C_1(x)x^2 + C_2(x)$ trong đó $C_1'(x), C_2'(x)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^2 + C_2'(x)\cdot 1 = 0 \\ C_1'(x)\cdot 2x + C_2'(x)\cdot 0 = x \end{cases} \text{hay} \begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{1}{2} \\ C_2'(x) = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \dfrac{x}{2} + K_1 \\ C_2(x) = -\dfrac{x^3}{6} + K_2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là $y = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{6} + K_1x^2 + K_2 = \dfrac{x^3}{3} + K_1x^2 + K_2$.

•**Ví dụ 3.27.** Giải phương trình $(x^2-1)y''+4xy'+2y = 6x$. Biết hai nghiệm riêng của phương trình là $y_1^* = x$, $y_2^* = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải. Vì y_1^*, y_2^* là hai nghiệm riêng của phương trình đã cho nên $y_1 = y_2^* - y_1^* = \dfrac{1}{x+1}$ là một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng $(x^2-1)y''+4xy'+2y = 0$. (*)

Nghiệm riêng y_2 của phương trình (*) được tìm bởi công thức Liouville:

$$y_2 = \frac{1}{x+1}\int \frac{e^{-\int \frac{4x}{x^2-1}dx}}{\frac{1}{(x+1)^2}}dx = \frac{-1}{x^2-1}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $y = C_1\dfrac{1}{x+1} + C_2\dfrac{1}{x^2-1}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = C_1\frac{1}{x+1} + C_2\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}(C_1, C_2 : const).$$

3.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

3.2.4.1. Phương trình thuần nhất

a. Dạng phương trình:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.27}$$

trong đó p, q là các hằng số thực.

b. Cách giải

Tìm nghiệm riêng của nó dưới dạng $y = e^{kx}$ trong đó k là hằng số. Ta có $y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}$. Thay y', y'' vào (3.27) ta được $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Suy ra

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{3.28}$$

(3.28) được gọi là phương trình đặc trưng của (3.27).

Giải phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$.

- Nếu phương trình (3.28) có 2 nghiệm thực $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.27) là $\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ $(C_1, C_2 : const)$.

- Nếu phương trình (3.28) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.27) là $\overline{y} = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$=$(C_1 + C_2x)e^{kx}$ $(C_1, C_2 : const)$.

- Nếu phương trình (3.28) có nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.27) là $\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ $(C_1, C_2 : const)$.

•**Ví dụ 3.28.** Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

b) $y'' - 2y' + 3y = 0$;

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Lời giải.

a) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = 3$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$ $(C_1,\ \mathrm{C}_2 : const)$.

b) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 2k + 3 = 0$⇒ $k = 1 \pm i\sqrt{2}$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = e^x(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$.

c) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k = 2$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

3.2.4.2. Phương trình không thuần nhất

a. Dạng phương trình:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3.29}$$

trong đó p, q là hằng số, f(x) ≠ 0.

b. Cách giải chung

Để giải (3.29) ta giải phương trình thuần nhất tương ứng (3.27) sau đó dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange. Nhưng trong một số trường hợp đặc biệt dưới đây của vế phải có thể tìm được một nghiệm riêng của (3.29) bằng cách giải các phương trình đại số. Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình (3.29) bằng tổng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (3.27) cộng với một nghiệm riêng của (3.29).

* **Trường hợp 1**. Với $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$ trong đó α là hằng số, $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x.

- Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.28) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.29) dưới dạng $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$ trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (3.28) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.29) dưới dạng $Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$ trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (3.28) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.29) dưới dạng $Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$ trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

*** Trường hợp 2**. Với $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$ trong đó α, β là hằng số; P_n(x), Q_m(x) lần lượt là các đa thức bậc n, m.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.28) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.29) dưới dạng $Y = e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + H_l(x)\sin\beta x\right)$ trong đó $R_l(x), H_l(x)$ là các đa thức bậc $l, l = max(n, m)$.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.28) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.29) dưới dạng $Y = xe^{\alpha x}\left[R_l(x)\cos\beta x + H_l(x)\sin\beta x\right]$ trong đó $R_l(x), H_l(x)$ là các đa thức bậc $l, l = max(n, m)$.

•**Ví dụ 3.29.** Giải các phương trình vi phân:

a) $y'' - 4y' + 3y = e^{4x}$;

b) $y'' + 4y' - 5y = e^x(x + 1)$;

c) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

Lời giải.

a) **Bước 1**. Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - 4y' + 3y = 0$ có phương trình đặc trưng:

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = 3.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{3x}$.

Bước 2. Vì vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^{4x}$, $\alpha = 4$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng:

$$Y = A.e^{4x} \Rightarrow Y' = 4A.e^{4x}, Y'' = 16.A.e^{4x}.$$

Thay Y, Y$'$, Y$''$vào phương trình đã cho ta được:

$$16Ae^{4x} - 4.4Ae^{4x} + 3Ae^{4x} = e^{4x} \Rightarrow 3A = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $Y = \dfrac{1}{3}e^{4x}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^x + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{3}e^{4x}$.

b) **Bước 1**. Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y' - 5y = 0$ có phương trình đặc trưng $k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 1; k_2 = -5$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-5x}$.

Bước 2. Vì vế phải của phương trình là $f(x) = e^x(x + 1)$, $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng:

$$\begin{aligned}
&Y = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)\\
&Y' = e^x\left[Ax^2 + (B + 2A)x + B\right]\\
&Y'' = e^x\left[Ax^2 + (B + 4A)x + 2A + 2B\right].
\end{aligned}$$

Thay Y, Y$'$, Y$''$vào phương trình đã cho và rút gọn ta được: 12Ax +2A+6B = x+1

$$\Rightarrow \begin{cases} 12A = 1 \\ 2A + 6B = 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{12} \\ B = \dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng cần tìm là $Y = e^x\left(\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{5x}{36}\right)$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^x + C_2e^{-5x} + e^x\left(\frac{x^2}{12} + \frac{5x}{36}\right)$.

c) **Bước 1**. Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - 6y' + 9y = 0$ có phương trình đặc trưng $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

Bước 2. Vì vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^{3x}$, $\alpha = 3$ là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng:

$$\begin{aligned} &Y = x^2e^{3x}A = Ax^2e^{3x}\\ &Y' = (2Ax + 3Ax^2)e^{3x}\\ &Y'' = (2A + 12Ax + 9Ax^2)e^{3x}. \end{aligned}$$

Thay Y, Y$'$, Y$''$vào phương trình đã cho và ta được:

$$(2A + 12\text{Ax} + 9\text{Ax}^2) - 6(2\text{Ax}+3\text{Ax}^2) + 9\text{Ax}^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $Y = \frac{x^2}{2}e^{3x}$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{x^2}{2}e^{3x}$.

•**Ví dụ 3.30.** Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'' + y = \cos 2x$;

b) $y'' + y = \cos x$;

c) $y'' + y = \cos 2x + \cos x$.

Lời giải.

a) **Bước 1**. Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\text{sinx}$.

Bước 2. Vế phải của phương trình là $f(x) = e^{0x}\cos 2x$ do đó $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng và bậc của đa thức bằng 0 nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng:

$$\begin{aligned} &Y = A\cos 2x + B\sin 2x\\ &Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x\\ &Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x. \end{aligned}$$

Thay Y, Y$'$, Y$''$ vào phương trình đã cho và rút gọn ta được:

$$-3Acos2x - 3Bsin2x = cos2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A = 1\\ -3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3}\\ B = 0. \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $Y = -\frac{1}{3}\cos 2x$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x$.

b) **Bước 1**. Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 sin$x.

Bước 2. Vế phải của phương trình là $f(x) = e^{0x} \cos x$ do đó $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng và bậc của đa thức bằng 0 nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng:

$$\begin{aligned}
&Y = x(A \cos x + B \sin x)\\
&Y' = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x\\
&Y'' = (2B - Ax) \cos x - (2A + Bx) \sin x.
\end{aligned}$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình và rút gọn ta được :

$$2Bcosx - (-2Asinx) = cosx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $Y = \dfrac{x}{2} \sin x$.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{x}{2} \sin x$.

c) Vế phải của phương trình là tổng của hai hàm $f_1(x) = \cos 2x,\ f_2(x) = \cos x$.

Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, tổng nghiệm riêng của phương trình trong (a) với một nghiệm riêng của phương trình trong (b) là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Vậy $Y = -\dfrac{1}{3} \cos 2x + \dfrac{x}{2} \sin x$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{3} \cos 2x + \dfrac{x}{2} \sin x$.

•**Ví dụ 3.31.** Giải phương trình $y'' - y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

Lời giải.

Bước 1. Giải phương trình thuần nhất có phương trình đặc trưng $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Bước 2. Vế phải của phương trình là $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ không có dạng đặc biệt. Ta sử dụng phương pháp biến thiên bằng số Lagrange tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dưới dạng $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$ trong đó $C_1(x)$, $C_2(x)$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = \dfrac{e^x}{1 + e^x}. \end{cases}$$

Giải ra ta được $C_1(x) = \dfrac{1}{2} [x - \ln(e^x + 1) + K_1]$, $C_2(x) = -\dfrac{1}{2} [e^x - \ln(e^x + 1) + K_2]$.

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y = \frac{1}{2} e^x [x - \ln(e^x + 1) + K_1] - \frac{1}{2} e^{-x} [e^x - \ln(e^x + 1) + K_2].$$

Bài tập chương 3

Bài 3.1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân ly:
a) $(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$;
b) $(x^2-yx^2)y'+y^2+xy^2=0$;
c) $2x\sqrt{y^2-y+1}dx-(1+x^2)dy=0$;
d) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0,\ \ y|_{x=0}=1$;
e) $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx,\ y|_{x=0}=0$.
Đáp số:
a) $\ln|xy|+x-y=C$;
b) $\dfrac{x+y}{xy}+\ln\left|\dfrac{y}{x}\right|=C$;
c) $1+x^2=C\left(y-\dfrac{1}{2}+\sqrt{y^2-y+1}\right)$;
d) $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=\sqrt{2}+1$;
e) $y^3=3arctane^x-\dfrac{3\pi}{4}$.
Bài 3.2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp một:
a) $y'=\dfrac{2xy+y^2}{x^2}$;
b) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}$;
c) $xyy'+x^2-2y^2=0$;
d) $(3x^2+y^2)y+(y^2-x^2)xy'=0$.
Đáp số:
a) $x(x+y)=Cy$;
b) $1+2Cy-C^2x^2=0$;
c) $y=\pm x\sqrt{1+C^2x^2}$;
d) $x(x^2+y^2)-C^2y=0$.
Bài 3.3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một:
a) $y'-\dfrac{2x-1}{x^2-x}y=1$;
b) $y'+2xy=xe^{-x^2}$;
c) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;
d) $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3;\ \ y|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.
Đáp số:
a) $y=\left(\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|+K\right)(x^2-x)$;
b) $y=e^{-x^2}\left(C+\dfrac{x^2}{2}\right)$;
c) $y=(1+x^2)(x+C)$;
d) $y=(x+1)^2\left(\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}\right)$.
Bài 3.4. Giải các phương trình vi phân Becnully sau:
a) $x(1+x^2)y'-4x^2y=2(1+x^2)^2\sqrt{y}$;
b) $y'-2y\cot gx=\sqrt{y}\sin 4x$;
c) y'+xy = x$^3y^3$;
d) $y'+y=e^{\frac{x}{2}}.\sqrt{y}\ ,\quad y|_{x=0}=\dfrac{9}{4}$.
Đáp số:

a) $y = (\ln|x| + K)^2 (1 + x^2)^2$;
b) $y = (\sin 3x/3 + \sin x + K)^2 \sin^2 x$;
c) $y^2(x^2 + 1 + Ke^{x^2}) = 1$;
d) $y = e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

Bài 3.5. Giải các phương trình vi phân toàn phần:
a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$;
b) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$;
c) $(2x + y)e^y dx + (x^2 + xy + x)e^y dy = 0$;
d) $\left(1 + \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\right) dx + \left(1 + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right) dy = 0$.

Đáp số:
a) $\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$;
b) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$;
c) $(x^2 + xy)e^y = C$;
d) $x + y + \ln(x^2 + y^2 + 1) = C$.

Bài 3.6. Giải các phương trình vi phân cấp 2 khuyết:
a) $xy'' - y' = x^2e^x$;
b) $y'' - \frac{y'}{x - 1} - x(x - 1) = 0\,;\ \ y|_{x=2} = 1\,;\ \ y'|_{x=2} = -1$;
c) $y'' + 2y'(1 - 2y) = 0\,;\ \ y|_{x=0} = 0\,;\ \ y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$;
d) $xy'' - y' = x^2 \ln x\,;\ \ y|_{x=1} = -\frac{4}{9}\,;\ \ y'|_{x=1} = -1$.

Đáp số:
a) $y = e^x(x - 1) + C_1x^2 + C_2$;
b) $y = \frac{1}{24}(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8)$;
c) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(x + 1)}$;
d) $y = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{4}{3}\right)$.

Bài 3.7. Giải các phương trình vi phân
a) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$ biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^\alpha$, $\alpha \in R$.
b) $(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0$ biết rằng nó có một nghiệm riêng dạng $\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}$,$\alpha \in R$.
c) $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$ biết rằng nó có một nghiệm riêng $\mathrm{y}_1(\mathrm{x})$ có dạng đa thức.
d) $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0,\ y|_{x=1} = 0,\ y'|_{x=1} = 1$ biết rằng nó có một nghiệm riêng $\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^x$.
e) $x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = x + \frac{1}{x}$ biết rằng phương trình thuần nhất tương ứng của nó có một nghiệm riêng dạng đa thức.
f) $(2x - x^2)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = -2$ biết rằng nó có hai nghiệm riêng là $\mathrm{y}_1(\mathrm{x}) = 1$, $\mathrm{y}_2(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$.

Đáp số:
a) $y = C_1x + C_2 \ln|x|$;
b) $y = C_1e^{-2x} + C_2\left[\frac{(2x + 1)^2}{2} - 2x\right]$;
c) $y = C_1(x^3 - x) + C_2\left[1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3x(x^2 - 1)}{4}\ln\left|\frac{x + 1}{x - 1}\right|\right]$;
d) $y = x^2 - e^{x-1}$;
e) $y = \frac{x + 2}{2}\ln|x| + C_1(x + 2) + C_2\frac{1}{x} + \frac{3}{2}$;
f) $y = C_1x^2 + C_2(x - 1) + 1$.

Bài 3.8. Giải các phương trình vi phân sau:
a) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$;
b) $y'' + y = tgx$;
c) $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1+e^{2x}}$.

Đáp số:
a) $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2x + \dfrac{4}{5}(1+x)^{5/2}\right)$;
b) $y = C_1\cos x + C_2\mathrm{sinx} - \cos x \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$;
c) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{-2x}\ln(1+e^{2x}) + e^{-3x}\mathrm{arctane}^{x}$.

Bài 3.9. Giải các phương trình vi phân sau:
a) $y'' - 7y' + 6y = sinx$;
b) $y'' + 9y = 6e^{3x}$;
c) $y'' - 3y' = 2 - 6x$;
d) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\mathrm{cosx}$;
e) $y'' + 4y = 2s\mathrm{in2x}$.

Đáp số:
a) $y = C_1e^{x} + C_2e^{6x} + \dfrac{5s\mathrm{inx} + 7\cos x}{74}$;
b) $y = C_1\mathrm{cos3x} + \mathrm{C}_2\sin 3x + \dfrac{1}{3}e^{3x}$;
c) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$;
d) $y = e^{x}(C_1\mathrm{cos}\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) + \dfrac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$;
e) $y = C_1\mathrm{cos2x} + \mathrm{C}_2\sin 2x - \dfrac{x}{2}\mathrm{cos2}x$.

Chương 4

MA TRẬN - ĐỊNH THỨC - HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1. Ma trận

4.1.1. Khái niệm ma trận

⋆ **Định nghĩa 4.1.** Một bảng số chữ nhật có m hàng n cột được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$. a_{ij} là phần tử nằm ở hàng i cột j của ma trận A. Ta viết:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{hoặc} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dạng thu gọn là $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Ký hiệu tập các ma trận cỡ $m \times n$ là $\mathcal{M}_{m\times n}$

•**Ví dụ 4.1.** Bảng số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1; \quad a_{12} = -2; \quad a_{13} = 4; \\ &a_{21} = 3; \quad a_{22} = 5; \quad\ \ a_{23} = -7. \end{aligned}$$

∗ **Chú ý:** Trong khuôn khổ bài giảng này, chúng ta chỉ xét chủ yếu các ma trận thực, tức là các ma trận với $a_{ij} \in \mathbb{R}$

4.1.2. Một số dạng đặc biệt của ma trận

a) **Ma trận không**

Ma trận không là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không. Ma trận không được ký hiệu là O.

•Ví dụ 4.2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận không cỡ 2×4

b) **Ma trận hàng, ma trận cột**

Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng. Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận hàng;} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận cột}$$

c) **Ma trận vuông cấp** n

Ma trận vuông cấp n là ma trận có n hàng và n cột, ký hiệu $A = [a_{ij}]_n$ hoặc $A = (a_{ij})_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các *phần tử chéo*, chúng tạo thành *đường chéo chính* của ma trận vuông. Ký hiệu tập các ma trận vuông cấp n là $\mathcal{M}_n$

d) **Ma trận tam giác:**

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$ được gọi là *ma trận tam giác trên.* (Ma trận có các phần tử nằm phía dưới đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{còn viết} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \dots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$ được gọi là *ma trận tam giác dưới.* (Ma trận có các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{còn viết} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác trên hoặc ma trận tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

e) **Ma trận chéo**

Ma trận chéo là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$:
(Ma trận có các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{còn viết} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

f) **Ma trận đơn vị cấp n**

Ma trận đơn vị cấp n là ma trận chéo với tất cả các phần tử chéo đều bằng 1. Ký hiệu I_n hoặc E_n. Khi n đã rõ hoặc không cần thiết phải nhắc tới ta có thể ký hiệu ma trận đơn vị là I (hoặc E).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3. Phép toán trên ma trận

a) **Ma trận bằng nhau**

⋆ **Định nghĩa 4.2.** Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau.

b) **Cộng ma trận**

⋆ **Định nghĩa 4.3.** Tổng của hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận $A + B$ cỡ $m \times n$ xác định bởi: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

•**Ví dụ 4.3.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C, O là các ma trận cỡ $m \times n$ dễ thấy:

$$\begin{aligned} &A + B = B + A \\ &A + O = O + A = A \\ &(A + B) + C = A + (B + C) \end{aligned}$$

c) **Nhân ma trận với một số**

⋆ **Định nghĩa 4.4.** Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ với số thực k là ma trận kA cỡ $m \times n$ xác định bởi: $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$

Như vậy muốn nhân ma trận với một số ta nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận.

•**Ví dụ 4.4.**

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 2 & 14 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}; k, l \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} &k(lA) = (kl)A \\ &(k + l)A = kA + lA \\ &k(A + B) = kA + kB \end{aligned}$$

d) **Nhân hai ma trận**

⋆ **Định nghĩa 4.5.** Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ với ma trận $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ (theo thứ tự đó) là ma trận $AB = C = [c_{ij}]_{m\times n}$ với các phần tử được xác định như sau:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Như vậy khi lấy hàng i của ma trận thứ nhất nhân tương ứng với cột j của ma trận thứ hai ta được phần tử c_{ij} của ma trận tích.

•Ví dụ 4.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-3) + (-2).2 + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

•Ví dụ 4.6.

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

•Ví dụ 4.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

•Ví dụ 4.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & A(kB) = k(AB) \\ A(B+C) = AB + AC & (A+B)C = AC + BC \\ A.I = I.A = A & \end{array}$$

∗ **Chú ý:** : Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán.

e) **Luỹ thừa ma trận**

⋆ **Định nghĩa 4.6.** Cho A là ma trận vuông cấp n, $k \in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa bậc k của ma trận A là ma trận vuông cùng cấp được xác định như sau:

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k \text{ ma trận } A}$$

Nhận xét 4.1. Do tính chất kết hợp của phép nhân ma trận nên:

$$A^k = (A^{k-1}).A = A.(A^{k-1})$$

•Ví dụ 4.9. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Lời giải.

Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dự đoán công thức:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp:

- Công thức đã đúng trong trường hợp $n = 1, n = 2$.
- Giả sử công thức đúng với $n = k \geq 2$, tức là: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  tức là công thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức dự đoán đã được chứng minh xong.

f) **Chuyển vị ma trận**

⋆ **Định nghĩa 4.7.** Ma trận chuyển vị của ma trận A là ma trận có được từ A sau khi đổi hàng thành cột và đổi cột thành hàng, ký hiệu A^t

Như vậy nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ thì $A^t = [b_{ji}]_{n\times m} : b_{ji} = a_{ij}, \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

•**Ví dụ 4.10.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán dưới đây thực hiện được và $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{array}{ll} (A+B)^t = A^t + B^t; & (kA)^t = k.A^t \\ (AB)^t = B^t.A^t; & (A^m)^t = (A^t)^m \end{array}$$

4.1.4. Biến đổi sơ cấp trên ma trận

Các biến đổi sau đây được gọi là biến đổi sơ cấp trên ma trận:

+) Chuyển vị ma trận;

+) Đổi chỗ 2 hàng (cột);

+) Cộng nhiều hàng (cột) vào một hàng (cột);

+) Nhân một hàng (cột) với một số khác 0;

+) Nhân một hàng (cột) với một số rồi cộng tương ứng vào hàng (cột) khác.

∗ **Chú ý:** Hiển nhiên khi thực hiện các biến đổi trên thì ma trận thay đổi. Các phép biến đổi chỉ thực hiện trên hàng được gọi là *biến đổi sơ cấp về hàng*, các phép biến đổi chỉ thực hiện trên cột được gọi là *biến đổi sơ cấp về cột*.

4.2. Định thức

4.2.1. Định nghĩa

Xét ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

⋆ **Định nghĩa 4.8.** *Ma trận con* ứng với phần tử a_{ij} của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j, ký hiệu là M_{ij}

•**Ví dụ 4.11.** Với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ta có:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \qquad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

⋆ **Định nghĩa 4.9.** Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là $\det(A)$ hoặc $|A|$ được định nghĩa như sau:

A là ma trận cấp 1: $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}$

A là ma trận cấp 2: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

A là ma trận cấp n thì:

$$\det(A) = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(M_{1n})$$

(công thức này còn được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng 1)

•**Ví dụ 4.12.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} =& 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ =& 1(45+48) - 2(-36-42) - 3(32-35) = 258 \end{aligned}$$

4.2.2. Tính chất

a) Tính chất cơ bản của định thức

◇ **Tính chất 1**. $\det(A) = \det(A^t)$

Do đó một tính chất của định thức khi phát biểu đúng với hàng thì cũng sẽ đúng với cột.

◇ **Tính chất 2**. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của định thức thì định thức đổi dấu.

◇ **Tính chất 3**. Công thức khai triển định thức theo hàng i:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(M_{ij})$$

◇ **Tính chất 4**. Công thức khai triển định thức theo cột j:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij})$$

•**Ví dụ 4.13.** Xét ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Khai triển định thức của A theo hàng 2 ta có:

$$\begin{aligned} \det(A) =& 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ =& 4.(0 - 24) + 5(0 + 21) - 6(-8 - 14) = 141 \end{aligned}$$

Khai triển định thức theo cột 3 ta có:

$$\begin{aligned} \det(A) =& -3 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} + 0 \\ =& -3(32 - 35) - 6(-8 - 14) = 141 \end{aligned}$$

b) Định thức của ma trận tam giác

Sử dụng công thức khai triển định thức theo hàng 1 hoặc cột 1 dễ thấy định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$$

c) Các phép toán trên định thức

Tổng hai định thức. Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng hai định thức. Chẳng hạn:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Nhân định thức với một số. Khi nhân định thức với một số ta nhân số đó với một hàng (hoặc một cột) của định thức. Ngược lại, khi các phần tử của một hàng (hoặc một cột) có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

•**Ví dụ 4.14.**

$$\begin{aligned} 2 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} && \text{Nhân số 2 vào hàng 1} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 4 \end{vmatrix} && \text{Đưa số 2 ở cột 3 ra ngoài} \end{aligned}$$

Định thức của tích hai ma trận. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì có:

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

•**Ví dụ 4.15.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A^{2010})$

Lời giải.

$$A.A^t = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$\det(A.A^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Mà $\det(A) = \det(A^t)$ nên $\det(AA^t) = \det(A).\det(A^t) = [\det(A)]^2$. Do đó

$$[\det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Vậy:

$$\det(A^{2010}) = [\det(A)]^{2010} = \left\{[\det(A)]^2\right\}^{1005}$$
$$= \left\{(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\right\}^{1005} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{4020}$$

d) Các trường hợp định thức bằng 0

Nếu ma trận có một trong các đặc điểm sau đây thì định thức của nó bằng không:

- Có một hàng (hay một cột) bằng không;
- Có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ;
- Có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác).

e) Ảnh hưởng của các biến đổi sơ cấp đến định thức

- Nếu chuyển vị ma trận thì định thức của ma trận không đổi;
- Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức đổi dấu;
- Nếu cộng nhiều hàng (hoặc nhiều cột) vào một hàng (hoặc một cột) thì định thức không đổi;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) của định thức với số $k \neq 0$ thì định thức mới bằng k nhân với định thức cũ;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) với một số rồi cộng vào hàng (hoặc cột) khác thì định thức không đổi.

4.2.3. Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức bằng biến đổi sơ cấp ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các biến đổi sơ cấp đưa định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi được sử dụng;

Bước 2. Tính định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo, và kể đến tác dụng tổng hợp của các biến đổi đã sử dụng.

∗ **Chú ý:** Có thể kết hợp các công thức khai triển định thức và biến đổi sơ cấp để tính định thức.

•**Ví dụ 4.16.** Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{cộng các hàng vào hàng 1} \\ &= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{đưa thừa số 6 ở hàng 1 ra ngoài} \\ &= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && \text{cộng } -1 \text{ lần hàng 1 vào các hàng khác} \\ &= 6.1.2.2.2 = 48 \end{aligned}$$

•**Ví dụ 4.17.** Tính định thức:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$\Delta =$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$	Cộng -3 hàng 1 vào hàng 2 Cộng -2 hàng 1 vào hàng 3 Cộng 4 hàng 1 vào hàng 4
$= -3$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$	Đưa thừa số 3 ở hàng 3 ra ngoài Đổi chỗ hàng 2 và hàng 3

$= \quad -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	Cộng -2 hàng 2 vào hàng 4
$= \quad -3\begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$	Khai triển định thức theo cột 1 (2 lần)
$= \quad -3(40+55) = -285$	

4.3. Ma trận nghịch đảo

4.3.1. Định nghĩa

⋆ **Định nghĩa 4.10.** Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu có ma trận B vuông cùng cấp sao cho:

$$AB = BA = I_n$$

thì nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A. Ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Như vậy ta có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Khi A có ma trận nghịch đảo ta nói A *không suy biến*.

•**Ví dụ 4.18.** Xét $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, ta có:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2; \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Vậy $B = A^{-1}$ và $A = B^{-1}$.

4.3.2. Tính chất

♢ **Định lý 4.1.** *Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A nếu có thì duy nhất.*

∆.Giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của A, nghĩa là:

$$AB = BA = I_n; \qquad AC = CA = I_n$$

Từ $AB = I_n$ suy ra:

$$C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_nB = C \Rightarrow B = C\square.$$

♢ **Định lý 4.2.** *Nếu ma trận vuông A khả đảo thì* $\det(A) \neq 0$.

∆.Vì A có ma trận nghịch đảo nên tồn tại A^{-1} và $A.A^{-1} = I_n$. Áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận ta có:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

Vậy phải có $\det(A) \neq 0$. Ta cũng có $\det(A^{-1}) \neq 0$ □.

◊ **Định lý 4.3.** *Nếu ma trận vuông $A \in \mathcal{M}_n$ có $\det(A) \neq 0$ thì A khả đảo và:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

ở đó $C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A và $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.

Δ.Áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng (i) ta có:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}) = \det(A)$$
$$\Rightarrow a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \det(A).$$

Vì định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không nên suy ra:

$$a_{k1}c_{i1} + a_{k2}c_{i2} + \cdots + a_{kn}c_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu} \quad k = i \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq i \end{cases}.$$

Do đó $AC^t = \det(A).I$

Áp dụng công thức khai triển định thức theo cột và lập luận tương tự ta cũng có:

$$C^t.A = \det(A).I$$

Như vậy $A.\left(\frac{1}{\det(A)}C^t\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}C^t\right).A = I$ suy ra điều phải chứng minh □.

◊ **Định lý 4.4.** *Cho A là ma trận vuông cấp n.*
i) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $AB = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.
ii) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $BA = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

Δ.i) Vì $AB = I$ nên $\det(AB) = \det(I) \Rightarrow \det(A)\det(B) = 1$. Do đó $\det(A) \neq 0$. Theo định lý (4.3) suy ra A khả đảo và có ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Nhân đẳng thức $AB = I$ bên trái với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Phần (ii) chứng minh tương tự □.

◊ **Định lý 4.5.** *Giả sử $A, B \in \mathcal{M}_n$ là các ma trận khả đảo. Khi đó:*
i) A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$;
ii) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có A^m cũng khả đảo và $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;
iii) $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
iv) AB cũng khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Δ.Các phần được chứng minh tương tự, chẳng hạn chứng minh (iv):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Vậy theo định lý (4.4) suy ra AB khả đảo và có ma trận nghịch đảo là $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ □.

4.3.3. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = [a_{ij}]_n$ ta áp dụng công thức của định lý 4.3:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

ở đó:

$C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A;

$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ là phụ đại số của phần tử a_{ij};

M_{ij} là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j.

•**Ví dụ 4.19.** Tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Các phần tử của ma trận phụ hợp là:

$$\begin{aligned}
&c_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40; \qquad && c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13; \qquad && c_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \\
&c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16; && c_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5; && c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\
&c_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9; && c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; && c_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

Do đó:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

•**Ví dụ 4.20.** Tìm ma trận X, biết:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

Đặt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$; $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

Ta có: $\det(A) = 5 \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Phương trình ma trận đã cho trở thành: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Ma trận nghịch đảo A^{-1} được tìm như sau:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}C^t = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy ma trận X cần tìm là:

$$X = \frac{1}{5}C^tB = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -5 & 14 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & -1 & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}.$$

4.3.4. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

Muốn tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau: [1]

- Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.
- Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận A về ma trận đơn vị I, tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào ma trận I.
- Khi A đã được biến đổi thành ma trận I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

$$A|I \to I|B \Rightarrow B = A^{-1}.$$

•**Ví dụ 4.21.** Tìm ma trận nghịch đảo của:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Lời giải. Quá trình biến đổi có thể ghi tóm tắt thành bảng sau:

1	2	3	1	0	0	H_1
2	5	3	0	1	0	H_2
1	0	8	0	0	1	H_3
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	$-2H_1 + H_2 \to H_2$
0	-2	5	-1	0	1	$-H_1 + H_3 \to H_3$
1	0	9	5	-2	0	$-2H_2 + H_1 \to H_1$
0	1	-3	-2	1	0	
0	0	-1	-5	2	1	$2H_2 + H_3 \to H_3$
1	0	0	-40	16	9	$9H_3 + H_1 \to H_1$
0	1	0	13	-5	-3	$-3H_3 + H_2 \to H_2$
0	0	-1	-5	2	1	
1	0	0	-40	16	9	
0	1	0	13	-5	-3	
0	0	1	5	-2	-1	$-H_3 \to H_3$

[1] Cơ sở lý thuyết của phương pháp này đề nghị xem ở phần 4.5.4

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4.4. Hạng của ma trận

4.4.1. Định nghĩa

$\star$ **Định nghĩa 4.11.** Cho A là ma trận cấp $m \times n$. *Ma trận con* cấp p của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột. Định thức của ma trận đó là *định thức con* cấp p của A.

$\star$ **Định nghĩa 4.12.** Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A, ký hiệu $\rho(A)$ hoặc $r(A)$.

•**Ví dụ 4.22.** Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Các định thức con cấp 3 của A là:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp 2 của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0; \quad \cdots$$

Vậy cấp cao nhất trong các định thức con khác 0 của A là cấp 2, do đó $\rho(A) = 2$.

$\oplus$ **Nhận xét** Các biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

4.4.2. Tìm hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

$\star$ **Định nghĩa 4.13.** Ma trận bậc thang là ma trận có các đặc điểm sau:

- Các hàng bằng 0 ở dưới các hàng khác 0; (nếu ma trận vừa có các hàng bằng 0, vừa có các hàng khác 0).
- Đối với 2 hàng khác không liên tiếp, phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái sang) của hàng trên nằm bên trái phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.

•**Ví dụ 4.23.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận bậc thang có 3 hàng khác 0}$$

Nhận xét 4.2. Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của ma trận đó.

Quy tắc thực hành tìm hạng của ma trận: Để tìm hạng của ma trận A ta sử dụng các biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận bậc thang B. Khi đó:

$$\rho(A) = \rho(B) = \text{ số hàng khác không của } B$$

•**Ví dụ 4.24.** Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_1+H_3\to H_3]{-2H_1+H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[3H_2+5H_3\to H_3]{-\frac{1}{5}H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang với 2 hàng khác không. Vậy: $\rho(A) = 2$.

•**Ví dụ 4.25.** Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất trong các giá trị mà nó có thể nhận:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m hạng của B bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_3\leftrightarrow C_4]{C_1\leftrightarrow C_2, C_2\leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2\leftrightarrow H_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-7H_1+H_3\to H_3 \\ -4H_1+H_4\to H_4}]{-2H_1+H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & -25 & -20 & 15 \\ 0 & 6 & -15 & m^2+m-12 & m+9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-5H_2+H_3\to H_3 \\ H_3\leftrightarrow H_4}]{-3H_2+H_4\to H_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m^2+m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy hạng(B) nhận giá trị nhỏ nhất nếu $m = 0$. Khi đó $\rho(B) = 2$.

4.5. Hệ phương trình tuyến tính

4.5.1. Định nghĩa

⋆ **Định nghĩa 4.14.** Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các ẩn;
- a_{ij} là hệ số của ẩn x_j trong phương trình thứ (i);
- b_i là vế phải của phương trình thứ (i).

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

thì hệ phương trình (4.1) còn có dạng ma trận:

$$Ax = b$$

trong đó A là *ma trận hệ số* ; x là *ma trận ẩn*; b là *ma trận vế phải.*

4.5.2. Giải hệ phương trình bằng ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n không suy biến. Khi đó hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất: $x = A^{-1}b$

•Ví dụ 4.26. Giải hệ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 &= 7 \end{cases}$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A:

$$\det(A) = -14 \neq 0; \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

suy ra:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -26 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$x_1 = \frac{13}{7}; \quad x_2 = \frac{3}{7}$$

4.5.3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

◊ **Định lý 4.6. (Định lý Cramer)** *Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với A là ma trận vuông không suy biến thì hệ có nghiệm duy nhất:*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

ở đó A_j là ma trận có được từ A sau khi thay cột thứ j bởi cột vế phải b.

Δ.Vì A là ma trận không suy biến, $\det(A) \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t$$

Từ phương trình $Ax = b$, nhân bên trái hai vế với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ phương trình.

Sử dụng biểu thức của A^{-1} ở định lý (4.3) ta suy ra:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là có

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Mặt khác, giả sử hệ có hai nghiệm là x và y:

$$Ax = b; \quad Ay = b$$

Suy ra:

$$Ax - Ay = 0 \Rightarrow A(x - y) = 0$$

Nhân hai vế với A^{-1}:

$$A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0 \Rightarrow (x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhấ $\square$.

•**Ví dụ 4.27.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Tính được:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0; \qquad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72; \qquad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$x_1 = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}; \quad x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}; \quad x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

4.5.4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

a) Hệ tam giác trên là hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

với ma trận hệ số là ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Với giả thiết $\det(A) \neq 0$ tức là $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots n$, hệ tam giác được giải dễ dàng bằng cách thế ngược từ dưới lên.

b) Thực hành giải hệ phương trình bằng biến đổi sơ cấp.

Xét hệ phương trình

$$Ax = b; A \in \mathcal{M}_n \qquad \text{với } \det(A) \neq 0$$

Lập ma trận mở rộng bằng cách viết ma trận A và ma trận cột b bên tay phải nó

$$\overline{A} = [\ A \mid b\ ] \qquad (\overline{A} \text{ còn được gọi là ma trận bổ sung của } A)$$

⊕ **Nhận xét** Các biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận $\overline{A}$ tương ứng với các phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

Do đó để giải hệ phương trình tuyến tính ta thực hiện như sau: Áp dụng các biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận $\overline{A}$ để đưa ma trận A về dạng tam giác. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ tam giác cuối cùng. Giải hệ tam giác (bằng cách thế ngược từ dưới lên) ta thu được nghiệm cần tìm.

Phương pháp vừa trình bày còn có tên là *phương pháp Gauss*.

•**Ví dụ 4.28.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \\ 4x_1 & + & 11x_2 & + & 7x_3 & = & 7 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta có:

$$\overline{A} \xrightarrow[-2H_1+H3\to H_3]{3H_1-2H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 13 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3H_2+10H3\to H_3]{H_3\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -29 & -58 \end{array}\right]$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & & - & 29x_3 & = & -58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -1 \\ x_3 & = & 2 \end{cases}$$

4.5.5. Giải và biện luận hệ phương trình dựa vào định lý Kronecker-Capelli

◊ **Định lý 4.7. (Định lý Kronecker-Capelli)** *Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(A) = \rho(\overline{A})$.*

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính tổng quát A$x = b, A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Lập ma trận $\overline{A} = [\ A \mid b\ ]$, sử dụng các *biến đổi sơ cấp về hàng* đưa ma trận $\overline{A}$ về ma trận bậc thang (khi đó A cũng được đưa về ma trận bậc thang)

- $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$: hệ phương trình *vô nghiệm*;
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$: hệ đã cho tương đương với hệ tam giác gồm n phương trình, n ẩn. Giải hệ bằng phương pháp Gauss ta nhận được *nghiệm duy nhất* của phương trình;
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = r < n$: hệ có *vô số nghiệm* và được giải như sau: Từ ma trận bậc thang được biến đổi từ A, chọn một định thức con cấp r khác không, các ẩn ứng với các cột của định thức trên được gọi là ẩn chính, các ẩn còn lại gọi là ẩn phụ. Hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ mới gồm r phương trình tương ứng với các hàng của định thức trên. Giải hệ đó đối với các ẩn chính ta được nghiệm của hệ đã cho (nghiệm của hệ này phụ thuộc vào $n - r$ ẩn phụ).

•**Ví dụ 4.29.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[H_1+H_3\to H_3]{2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-H_2+H_3\to H_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

Vì $\rho(A) = 2; \rho(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

•**Ví dụ 4.30.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{3H_1+H_3\to H_3 \\ 2H_1+H_4\to H_4}]{-2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 8 & 10 & -14 \\ 0 & 7 & 8 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[7H_2+3H_4\to H_4]{8H_2+3H_3\to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -26 & 78 \\ 0 & 0 & -25 & 75 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{25}{26}H_3+H_4\to H_4]{\frac{1}{26}H_3\to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

suy ra $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 3$ nên hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ \quad - 3x_2 - 7x_3 = 15 \\ \qquad\qquad x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

•**Ví dụ 4.31.** Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2H_1+H_3\to H_3 \\ -3H_1+H_4\to H_4}]{2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_2+H_4\to H_4]{\frac{1}{5}H_2\to H_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \qquad \rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$$

Chọn ẩn x_1 và x_3 là ẩn chính, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 \\ \qquad x_3 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_2 \\ x_2 \ ; \ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

•**Ví dụ 4.32.** Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_1\leftrightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-mH_1+H_3\to H_3]{-H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_2+H_3\to H_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1-m)(m+1)^2 \end{array}\right]$$

+ Nếu $(1-m)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ \quad y - z = -m \\ \quad (m+2)z = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{m+1}{m+2} \\ y = \dfrac{1}{m+2} \\ z = \dfrac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}$$

+ Nếu $m = -2$ thì $\rho(A) = 2; \rho(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình vô nghiệm;
+ Nếu $m = 1$ thì $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 1 < 3$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số như sau:

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ z = 1 - x - y \end{cases}$$

4.5.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

⋆ **Định nghĩa 4.15.** Hệ phương trình tuyến tính

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{4.2}$$

được gọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Dạng ma trận của hệ thuần nhất là: $Ax = 0, A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Hệ thuần nhất (4.2) luôn có nghiệm không: $\theta = (0, 0, \ldots 0)$, nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* của hệ.

◇ **Tính chất** Hệ thuần nhất (4.2)) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ chi $\rho(A) < n$. Đặc biệt, nếu hệ thuần nhất là hệ có số phương trình bằng số ẩn thì nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

•**Ví dụ 4.33.** Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Lời giải.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4a - 20$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi $\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = -5$.

Bài tập chương 4

Bài 4.1. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 4.2. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 4.3. Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Bài 4.4. Tinh định thức sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

Bài 4.5. Tìm định thức của ma trận X biết rằng:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

Bài 4.6. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & m^4 \\ 4 & 9 & 16 & m^3 \\ 9 & 16 & 25 & m^2 \\ 16 & 25 & 49 & m \end{bmatrix}$$

Bài 4.7. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+1 & -x \\ x & 2 & x-1 & x+1 \\ 2 & 2+x & 2x & 1 \\ 3 & -x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Bài 4.8. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} cosx & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2cosx & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2cosx & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2cosx \end{vmatrix} = 1$$

Bài 4.9. Giải bất phương trình

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & x \\ x & x & x & x+\frac{1}{4} \end{vmatrix} > 0$$

Bài 4.10. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $A.A^t$ và $det(A^{2016})$

Bài 4.11. Tính định thức của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ a^2+7a & b^2+7b & c^2+7c \end{bmatrix}$$

Bài 4.12. Giải phương trình

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ 2 & 0 & x & x \\ 2 & 2 & 0 & x \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)^2 + 3$$

Bài 4.13. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 \\ 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 \end{bmatrix}$$

Bài 4.14. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & b+11 & c+1 \\ a^2-3a & b^2-3b & c^2-3c \\ 2a+1 & 2b+11 & 2c+1 \end{bmatrix}$$

Bài 4.15. Cho ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & m \end{bmatrix}$$

Đặt $B = A.A^t$. Tính $det(B^{2016})$

Bài 4.16. Cho ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 2016 & m \\ m & m & 0 \\ 1 & m & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm m biết A khả đảo và $det(A^{2017}) = -2det[(A.A^t)^{1008}]$

Bài 4.17. Cho ma trận Y có dạng:

$$Y = \begin{bmatrix} \sqrt{2}cos\alpha & b \\ c & \sqrt{2}cos\alpha \end{bmatrix}$$

Tìm biểu diễn của b, c theo α biết $Y.Y^t = 2I$. Tính $det(Y^{2000})$

Bài 4.18. Cho ma trận

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $X.X^t$, từ đó suy ra $\det\left(X^{2014}\right)$.

Bài 4.19. Tìm $x \in \mathbb{R}$ nếu biết ma trận A được cho dưới đây khả đảo:

$$A = \begin{bmatrix} 2014 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

và $\det\left(A^{2015}\right) = -2\det\left(A.A^t\right)^{1007}$.

Bài 4.20. Tìm $x \in \mathbb{R}$ nếu biết ma trận B được cho dưới đây khả đảo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 2014 & 0 & x \end{bmatrix}$$

và $\det\left(B^{2015}\right) = 2\det\left(B.B^t\right)^{1007}$.

Bài 4.21. Giải phương trình $f(x) = 0$ biết:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x-1 & x+1 \\ x & 1 & x+1 & x-1 \\ x-1 & x & 1 & x+1 \\ x+1 & x-1 & x & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 4.22. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ m & m \end{bmatrix}$$

Đặt $B = A.A^t$. Tính B^{2016}

Bài 4.23. Tìm tất cả các ma trận X biết

$$X^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bài 4.24. Tìm ma trận Y biết

$$Y.\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.Y = \begin{bmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Bài 4.25. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Tính A^2, A^3 và A^9.

Bài 4.26. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tìm mọi ma trận X giao hoán với A?

Bài 4.27. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

Tính A^2, A^3 và A^9.

Bài 4.28. Tìm tất cả những ma trận vuông cấp hai X thỏa mãn đẳng thức:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} .X = X. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

biết phần tử đứng ở hàng 1 cột 2 của X bằng 0.

Bài 4.29. Tìm ma trận X biết

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 4.30. Cho X là ma trận thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{bmatrix}$$

Biện luận theo m hạng của X

Bài 4.31. Tìm ma trận X biết:

$$X. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 32 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Bài 4.32. Tìm ma trận X biết:

$$X. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 4.33. Tìm ma trận B biết:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & m \end{bmatrix}$$

Bài 4.34. Tìm ma trận X biết:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bài 4.35. Tìm m để ma trận A sau khả đảo. Với các giá trị vừa tìm được của m hãy tìm ma trận nghịch đảo. ($m \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Bài 4.36. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tìm các giá trị thực của m để A khả đảo.

Bài 4.37. Tìm ma trận X thỏa mãn

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} .X = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài 4.38. Cho các ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận X biết rằng: $A(BX) = C$.

Bài 4.39. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = BC$ nếu:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài 4.40. Tìm ma trận B thỏa mãn đẳng thức:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & m \end{bmatrix}$$

Bài 4.41. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Tính $det(A)$ và tìm a, b, c để A không khả đảo.

Bài 4.42. Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & m+5 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 17 & 10 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & m & 3 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m thì $r(A)$ bằng bao nhiêu?

Bài 4.43. Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m thì $r(A)$ bằng bao nhiêu?

Bài 4.44. Tìm hạng của ma trận A tùy theo m

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & m+21 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & m+23 & -1 \end{bmatrix}$$

Bài 4.45. Tìm m sao cho ma trận sau có hạng bé nhất trong các giá trị mà nó có thể nhận.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & m+5 & -1 \\ 2 & -5 & -m-4 & 5 \\ 1 & 14 & 9 & -3 \\ 2 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & m & 3 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m thì hạng của B bằng bao nhiêu?

Bài 4.46. Tính hạng của ma trận sau nếu biết $ad - bc \neq 0$:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & a & b \\ g & h & c & d \end{bmatrix}$$

Bài 4.47. Tìm λ để ma trận sau có hạng nhỏ nhất:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & \lambda+1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Bài 4.48. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 1 \\ 2x & +y & & = & 6 \\ 5x & +3y & -2z & = & 14 \\ 3x & +2y & +z & = & 11 \end{cases}$$

Bài 4.49. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 4 \\ x & +4y & +2z & = & 1 \\ x & -y & +az & = & 2(a+1) \end{cases}$$

Bài 4.50. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & -t & = & 1 \\ 2x & +3y & +z & +3t & = & 2 \\ 3x & +y & +2z & +4t & = & m \\ 7x & +8y & +9z & +5t & = & 3m+1 \end{cases}$$

Bài 4.51. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x & +y & +2z & = & 6 \\ 2x & +5y & -2z & = & 6-3m \\ 2x & +y & +4mz & = & -3 \end{cases}$$

Bài 4.52. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} -x & +5y & -9z & = & -10 \\ -x & +3y & -4z & = & -5 \\ -3x & +10y & -14z & = & -17 \\ 2x & -3y & +z & = & m \end{cases}$$

Bài 4.53. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x & +2y & & -4t & = -3 \\ 2x & -3y & +z & +5t & = -3 \\ 3x & -2y & -5z & +t & = 3 \\ x & -y & -4z & +9t & = 22 \end{cases}$$

Bài 4.54. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 3y & - & 4z & = & -5 \\ 2x & - & 7y & + & 10z & = & 12 \\ 2x & - & 3y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

Bài 4.55. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -x + 3y + z = -1 \\ 4x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Bài 4.56. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = m \\ x + my + z & = m + 1 \\ x + y + mz & = 2 \end{cases}$$

Tìm các giá trị thực của m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 4.57. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x + y - 2z & = 2 \\ x + 2z & = 4 \\ 2x + y - 3z & = 3 \\ 3x + 2y + z & = 11 \end{cases}$$

Bài 4.58. Tìm các giá trị thực của m sao cho hệ thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 0 \\ 3x + 5y + 3z & = 0 \\ mx + 3y + (1 - 5m)z & = 0 \end{cases}$$

Bài 4.59. Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho hệ thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 0 \\ 3x + 7y + 3z & = 0 \\ 2x + my + (3 - 2m)z & = 0 \end{cases}$$

Bài 4.60. Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho hệ thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x + 2y + mz &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \\ x + 3y + (2m-1)z &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.61. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z &= 2 \\ 3x + y - 2z &= 2 \\ 2x + 2y + 3z &= 10 \\ x + 3z &= 8 \end{cases}$$

Bài 4.62. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 4 \\ x - 2z &= -1 \\ 2x - 2y + 3z &= -1 \\ 3x - 3y + 2z &= -4 \end{cases}$$

Bài 4.63. Tìm các giá trị thực của m sao cho hệ thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} 5x + 2y + 2z &= 0 \\ 7x + 3y + 2z &= 0 \\ mx + 3y + (3m-2)z &= 0 \end{cases}$$

Bài 4.64. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 8y - 7z &= 12 \end{cases}$$

Bài 4.65. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z &= 7 \\ 3x + y + 2z &= 9 \\ 5x + 3y - 3z &= 10 \\ x + 4z &= 6 \end{cases}$$

Bài 4.66. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x + 7y + 2z &= 8 \\ 4x + 13y + 7z &= 22 \\ 3x + 9y + 7z &= m + 16 \end{cases}$$

Tìm m để hệ vô nghiệm.

Bài 4.67. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+2y+3z-t=1 \\ 2x+3y+z+3t=2 \\ 3x+y+2z+4t=m \\ 4x+7y+7z+t=2m+1 \end{cases}$$

Bài 4.68. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & -t & =1 \\ 2x & +3y & +z & +3t & =2 \\ 3x & +y & +2z & +4t & =m \\ 4x & +7y & +7z & +t & =2m+1 \end{cases}$$

Bài 4.69. Giải hệ bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x & +2y & -z & +t & =4 \\ 4x & +3y & -z & +2t & =6 \\ 8x & +5y & -3z & +4t & =12 \\ 3x & +3y & -2z & +2t & =6 \end{cases}$$

Bài 4.70. Giải và biện luận hệ phương trình dựa vào định lý Cramer (a là tham số thực)

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & 4 \\ x & +4y & +2z & = & 1 \\ x & -y & +az & = & 2(a+1) \end{cases}$$

Bài 4.71. Giải và biện luận hệ phương trình dựa vào định lý Cramer (m là tham số thực)

$$\begin{cases} x & +y & +2z & =6 \\ x & +4y & -4z & =-3m \\ 2x & +y & +4mz & =-3 \end{cases}$$

Bài 4.72. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x+2y+3z-2t & =6 \\ 2x+y+2z+3t & =-4 \\ 3x+2y-z+2t & =4 \\ 2x-3y+2z+t & =-8 \end{cases}$$

Bài 4.73. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} x+y+2z+3t & =1 \\ 2x+3y-z-t & =-6 \\ 3x-2y-z-2t & =-4 \\ x+2y+3z-t & =-4 \end{cases}$$

Bài 4.74. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y+z & =2 \\ -x+3y-4z & =-5 \\ -2x+7y-10z & =-12 \\ 2x-3y+z & =m \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm.

Bài 4.75. Tìm các giá trị thực của m để hệ thuần nhất dưới đây chỉ có nghiệm tầm thường.

$$\begin{cases} -mx & +2y & +3z & +4t & =0 \\ 2x & -my & +3z & +4t & =0 \\ 2x & +3y & -mz & +4t & =0 \\ 2x & +3y & +4z & -mt & =0 \end{cases}$$

Bài 4.76. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} 2x & +3y & +z & = & 0 \\ x & +2y & +2z & = & 0 \\ mx & +3y & +(1-5m)z & = & 0 \end{cases}$$

Bài 4.77. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x & +2y & +mz & = & 0 \\ 3x & +5y & +(m+2)z & = & 0 \\ x & +3y & +(2m-1)z & = & 0 \end{cases}$$

Bài 4.78. Tìm m để hệ phương trình sau chỉ có nghiệm tầm thường

$$\begin{cases} 2x & +y & & = & 0 \\ 5x & +2y & +2z & = & 0 \\ mx & +3y & +(3m-2)z & = & 0 \end{cases}$$

Bài 4.79. Giải các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +4x_4 = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +6x_3 & +8x_4 = & 0 \\ \lambda x_1 & -6x_2 & -9x_3 & -20x_4 = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & +\lambda x_4 = & 0 \end{cases}, \lambda \neq 0$

Bài 4.80. Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & +3x_2 & -7x_3 & = & 16 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & +3x_2 & -7x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 7x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 15 \\ 5x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & 15 \\ 10x_1 & -11x_2 & +5x_3 & = & 36 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 11 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 = & 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +9x_4 = & 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 = & 2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +9x_4 = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +7x_4 = & 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +x_4 = & 5 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & -4x_4 = & -1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & +x_4 = & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -3x_4 = & 2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +5x_3 & +x_4 = & 5 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & -4x_4 = & -1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & +x_4 = & 8 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -3x_4 = & 2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 8 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

Bài 4.81. Giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính sau:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + bx_2 + x_3 = b \\ x_1 + x_2 + cx_3 = c \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} mx_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + mx_2 + 3x_3 = 5 \\ mx_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = a^3 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = b^3 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = c^3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1 + (m-1)x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + (4m-2)x_3 = -1 \\ 3x_1 + (m+1)x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = m \\ 2x_1 + (m+1)x_2 + (m+1)x_3 = m-1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (m+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = m \\ mx_1 + (m-1)x_2 + x_3 = 2m \\ 3(m+1)x_1 + mx_2 + (m+3)x_3 = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (3m-1)x_1 + 2mx_2 + (3m+1)x_3 = 1 \\ 2mx_1 + 2mx_2 + (3m+1)x_3 = m \\ (m+1)x_1 + (m+1)x_2 + 2(m+1)x_3 = m^2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = m \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2m+1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -m \end{cases}$

l) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}$

m) $\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = m^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = m^3 \end{cases}$

n) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = m \\ x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = m^2 \\ mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = m^3 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + x_2 = m \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \\ 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 16x_4 = m + 1 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = m \end{cases}$

s) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ 5x_1 + 2x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 9 - m \end{cases}$

t) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = m \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 2m - 8 \end{cases}$

Phụ lục A

PHÉP TÍNH VI, TÍCH PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Chúng tôi cho rằng bạn đọc trước khi bước chân qua ngưỡng cửa trường đại học đã được trang bị các kiến thức về tập hợp, số thực, số phức, hàm số, giới hạn của hàm số, hàm số liên tục, đạo hàm, tích phân bất định, tích phân xác định của hàm số. Tuy nhiên, qua kinh nghiệm nhiều năm, chúng tôi thấy vẫn cần trang bị lại cho sinh viên một số trong các kiến thức trên để các em có thể tiếp thu được các chương tiếp theo một cách dễ dàng hơn. Với mục đích đó trong chương 1 chúng tôi sẽ xem xét các vấn đề về ánh xạ và hàm số, phép tính vi phân hàm một biến, phép tính tích phân hàm một biến.

A.1. Ánh xạ và hàm số

A.1.1. Các định nghĩa về ánh xạ và hàm số

Trong mục này, trước tiên chúng tôi đưa ra khái niệm về ánh xạ, một khái niệm quan trọng, được sử dụng rất nhiều trong toán học. Cho hai tập khác rỗng X, Y. Ta có định nghĩa ánh xạ sau.

$\star$ **Định nghĩa A.1.** Ánh xạ từ tập X vào tập Y là quy tắc tương ứng f, đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y \in Y$. Phần tử y tương ứng với phần tử x được ký hiệu là $y = f(x)$. Ánh xạ trong định nghĩa này thường được ký hiệu là:

$$f : X \to Y.$$

Tập X được gọi là tập nguồn, tập Y được gọi là tập đích. Để chỉ rằng phần tử x được cho tương ứng với phần tử y qua ánh xạ f ta ký hiệu $x \mapsto y = f(x)$.

Để nghiên cứu về các ánh xạ người ta phân loại chúng thành đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

$\star$ **Định nghĩa A.2.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là đơn ánh nếu $\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, ta có $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$\star$ **Định nghĩa A.3.** Ta gọi ảnh của tập $A \subset X$ qua ánh xạ f là tập $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$.

Theo định nghĩa A.1, $\forall A \subset X \Rightarrow f(A) \subset Y$. Nói riêng ta có $f(X) \subset Y$. Trong trường hợp $f(X) = Y$ ta có định nghĩa sau.

$\star$ **Định nghĩa A.4.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là toàn ánh nếu $f(X) = Y$.

Theo nhận xét sau định nghĩa A.3 ta có $f(X) \subset Y$. Vì vậy, để chứng minh f là toàn ánh, tức là $f(X) = Y$, ta chỉ còn phải chứng minh $Y \subset f(X)$.

$\star$ **Định nghĩa A.5.** Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là song ánh nếu nó vừa là đơn ánh và vừa là toàn ánh.

Với song ánh $f : X \to Y$ ta có nhận xét sau. Giả sử $y_0 \in Y$. Từ định nghĩa A.5 suy ra f là toàn ánh, do đó $f(X) = Y$ theo định nghĩa A.4. Suy ra tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = y_0$ theo định nghĩa A.3. Giả sử tồn tại thêm t_0 sao cho $f(t_0) = y_0$. Khi đó $f(x_0) = f(t_0)$. Từ định nghĩa A.5 suy ra f là đơn ánh, do đó $x_0 = t_0$. Vậy $\forall y_0 \in Y$ tồn tại duy nhất $x_0 \in X$ sao cho $f(x_0) = y_0$. Nhận xét đó là cơ sở để ta đưa ra định nghĩa sau.

$\star$ **Định nghĩa A.6.** Giả sử $f : X \to Y$ là song ánh. Ánh xạ từ tập Y vào tập X có quy tắc tương ứng là $y \mapsto x$ sao cho $f(x\ ) = y$ được gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f ký hiệu là f^{-1}. Vậy

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Quan hệ tương đương trên cho ta một phương pháp xác định quy tắc của ánh xạ ngược: muốn xác định quy tắc $x = f^{-1}(y)$ ta chỉ việc "rút" x từ "phương trình" $f(x) = y$.

•**Ví dụ A.1.** Xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = 1/x, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*, x_1 \neq x_2$, ta có $1/x_1 \neq 1/x_2$. Suy ra $f(x_1) \neq f(x_2)$. Suy ra f là đơn ánh theo định nghĩa A.2.

•**Ví dụ A.2.** Xét ánh xạ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, g(x) = x^2$. Trước tiên ta có nhận xét với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $g(x) = x^2 \geq 0$ nên $g(x) \in \mathbb{R}_+$. Như vậy đúng là g tác động từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+$. Ta chứng minh g là toàn ánh theo định nghĩa A.4. Theo nhận xét sau định nghĩa đó, ta phải chứng minh $\mathbb{R}_+ \subset g(\mathbb{R})$. Thật vậy, giả sử $y_0 \in \mathbb{R}_+$. Khi đó $y_0 \geq 0$ nên tồn tại $\sqrt{y_0}$. Đặt $x_0 = \sqrt{y_0}$. Ta có $x_0 \in \mathbb{R}, g(x_0) = x_0^2 = (\sqrt{y_0})^2 \Rightarrow g(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in g(\mathbb{R})$ theo định nghĩa A.3. Vì $y_0 \in \mathbb{R}_+$ suy ra $y_0 \in g(\mathbb{R})$ nên $\mathbb{R}_+ \subset g(\mathbb{R})$.

Bạn đọc hãy thử tự chứng minh ánh xạ f trong ví dụ 1.1 không là toàn ánh, còn ánh xạ g trong ví dụ A.2 không là đơn ánh.

•**Ví dụ A.3.** Xét ánh xạ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2x + 1$. Ta chứng minh h là đơn ánh theo định nghĩa A.2. Thật vậy, với $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$, ta có $2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$ hay $h(x_1) \neq h(x_2)$, do đó h là đơn ánh.Ta chứng minh h là toàn ánh theo định nghĩa A.4. Theo nhận xét sau định nghĩa đó, ta phải chứng minh $\mathbb{R} \subset h(\mathbb{R})$. Thật vậy, giả sử $y_0 \in \mathbb{R}$. Đặt $x_0 = (y_0 - 1)/2$. Ta có $x_0 \in \mathbb{R}$, $h(x_0) = 2x_0 + 1 \Rightarrow h(x_0) = 2(y_0 - 1)/2 + 1 \Rightarrow h(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 \in h(\mathbb{R})$ theo định nghĩa A.3. Vì $y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0 \in h(\mathbb{R})$ nên $\mathbb{R} \subset h(\mathbb{R})$. Ta đã chứng minh h là đơn ánh và toàn ánh. Theo định nghĩa A.5, h là song ánh. Để tìm quy tắc tương ứng của ánh xạ ngược h^{-1} theo định nghĩa A.6 ta dựa vào nhận xét sau định nghĩa đó. Với $x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$h(x) = y \Leftrightarrow 2x + 1 = y \Leftrightarrow x = (y - 1)/2.$$

Vậy quy tắc tương ứng của ánh xạ ngược h^{-1} là $h^{-1}(y) = (y - 1)/2$.

Tiếp theo ta đưa vào sử dụng phép lấy tích các ánh xạ.

$\star$ **Định nghĩa A.7.** Cho các ánh xạ $f : E \to F, g : F \to G$. Tích của ánh xạ g và ánh xạ f là ánh xạ từ tập E vào tập G, được ký hiệu là $g \circ f$, với quy tắc tương ứng là $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Như vậy mỗi phần tử $x \in E$ được cho tương ứng với một phần tử $z \in G$ xác định bởi $z = g(f(x))$. Để ý rằng với mỗi $x \in E$ ta có $f(x) \in F$. Lại có g là ánh xạ từ F vào G. Do đó $g(f(x))$ có nghĩa và $z = g(f(x)) \in G$.

•**Ví dụ A.4.** Xét các ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2 + 1$ và $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, g(x) = \sqrt{x}$. Tích của g và f là ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}_+$ có quy tắc tương ứng là

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Trong các định nghĩa về ánh xạ được đưa ra ở trên, khi tập nguồn và tập đích là các tập số thực sẽ nảy sinh các thuật ngữ mới. Một số trong các thuật ngữ ấy sẽ được trình bày dưới đây.

⋆ **Định nghĩa A.8.** Cho X, Y là các tập số thực khác rỗng. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là hàm số.

Tập X được gọi là tập xác định của hàm f, thường được ký hiệu là D_f, ảnh $f(X)$ của X qua ánh xạ f được gọi là tập giá trị của f, thường được ký hiệu là R_f. Trong ký hiệu $y = f(x)$, x được gọi là biến độc lập hay đối số, y được gọi là biến phụ thuộc hay hàm số.

Nếu hàm số $f : X \to Y$ là song ánh thì ánh xạ ngược của ánh xạ ấy được gọi là hàm ngược của hàm f. Tích của các ánh xạ $g : F \to G$, $f : E \to F$ trong định nghĩa A.7 khi các ánh xạ ấy là các hàm số được gọi là hàm hợp của các hàm g và f.

Để kết thúc mục này chúng tôi đưa ra một quy ước quan trọng sau về hàm số. Nếu hàm số có quy tắc tương ứng $y = f(x)$ được cho dưới dạng một biểu thức giải tích và tập xác định của hàm số ấy không được chỉ rõ thì ta quy ước tập xác định của nó là tập tất cả các số thực x, sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

•**Ví dụ A.5.** Hàm số $y = (x^2 + 1)/(x - 1)$ có tập xác định là tập các số thực x, sao cho phép chia $(x^2 + 1)/(x - 1)$ có nghĩa hay sao cho $x - 1 \neq 0$. Từ đó ta có $x \neq 1$. Vậy tập xác định của hàm số trên là $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.

A.1.2. Hàm số sơ cấp

Để xây dựng khái niệm hàm số sơ cấp ta đưa ra khái niệm về các hàm số sơ cấp cơ bản. Hàm số sơ cấp cơ bản là năm loại hàm số sau: hàm số lũy thừa; hàm số mũ; hàm số logarit; các hàm số lượng giác; và các hàm số lượng giác ngược. Chúng ta sẽ lần lượt xét từng loại một.

A.1.2.1. Hàm lũy thừa

Hàm lũy thừa là hàm có dạng $y = x^\alpha$ với α là số thực cố định. Hàm $y = x^\alpha$ có tập xác định và tập giá trị phụ thuộc vào α. Chẳng hạn, tập xác định và tập giá trị của hàm $y = x^3$ lần lượt là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}$; của hàm $y = x^2$ là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}_+$; của hàm $y = x^{-3}$ là $\mathbb{R}^*$ và $\mathbb{R}^*$; của hàm $y = x^{-2}$ là $\mathbb{R}^*$ và $\mathbb{R}^*_+$; của hàm $y = x^{3/2} = \left(\sqrt{x}\right)^3$ là $\mathbb{R}_+$ và $\mathbb{R}_+$; của hàm $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}$; ... Ta có quy ước sau: với α là số vô tỷ dương ta chỉ xét hàm $y = x^\alpha$ với $x \in \mathbb{R}_+$, khi đó tập giá trị của hàm số ấy là $\mathbb{R}_+$; với α là số vô tỷ âm ta chỉ xét hàm $y = x^\alpha$ với $x \in \mathbb{R}^*_+$, khi đó tập giá trị của hàm số ấy là $\mathbb{R}^*_+$. Về tính đơn điệu của hàm lũy thừa trên $\mathbb{R}^*_+$, khi $\alpha > 0$ hàm $y = x^\alpha$ đơn điệu tăng, khi $\alpha < 0$ hàm $y = x^\alpha$ đơn điệu giảm, khi $\alpha = 0$ hàm $y = x^0$ luôn luôn nhận giá trị bằng 1.

A.1.2.2. Hàm số mũ

Hàm mũ là hàm có dạng $y = a^x, 0 < a \neq 1$. Số a được gọi là cơ số của hàm số ấy. Từ đây trở đi ta quy ước cơ số a của hàm mũ $y = a^x$ luôn thỏa mãn điều kiện $0 < a \neq 1$. Hàm mũ $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $\mathbb{R}^*_+$. Hàm mũ $y = a^x$ luôn nhận giá trị bằng 1 tại $x = 0$. Khi $a > 1$ hàm mũ $y = a^x$ đồng biến và thỏa mãn các đẳng thức

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0; \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

Khi $0 < a < 1$ hàm mũ $y = a^x$ nghịch biến và thỏa mãn các đẳng thức

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty; \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

A.1.2.3. Hàm Logarit

Hàm logarit có dạng $y = \log_a x, 0 < a \neq 1$. Số a cũng được gọi là cơ số của hàm số ấy và ta cũng quy ước từ đây trở đi điều kiện $0 < a \neq 1$ luôn được thỏa mãn. Hàm logarit $y = \log_a x$ có tập xác định là $\mathbb{R}_+^*$, tập giá trị là $\mathbb{R}$. Hàm logarit $y = \log_a x$ luôn nhận giá trị bằng 0 tại $x = 1$.

Khi $a > 1$ hàm logarit $y = \log_a x$ đồng biến và thỏa mãn các đẳng thức

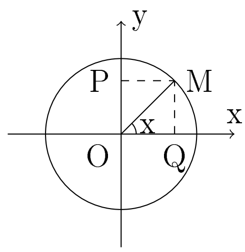
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty; \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Khi $0 < a < 1$ hàm logarit $y = \log_a x$ nghịch biến và thỏa mãn các đẳng thức

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty; \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

A.1.2.4. Hàm lượng giác

Các hàm lượng giác là các hàm $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$. Các tính chất của các hàm số này, các công thức lượng giác, phương trình lượng giác, ... đã được xem xét khá kỹ ở cấp trung học phổ thông. Vì vậy trong phần này chúng tôi chỉ hạn chế bởi việc nhắc lại định nghĩa các hàm số trên. Ký hiệu M là điểm biểu diễn cung x trên đường tròn lượng giác, P, Q là hình chiếu của M lần lượt lên các trục Oy và Ox. Khi đó ta định nghĩa



Hình A.1

$$\sin x = \overline{OP}, \cos x = \overline{OQ}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

trong đó $\overline{OP}$ là độ dài đại số của OP, $\overline{OQ}$ là độ dài đại số của OQ.

A.1.2.5. Hàm lượng giác ngược

Với nhiều bạn sinh viên năm thứ nhất, các khái niệm về hàm lượng giác ngược có lẽ là các khái niệm hoàn toàn mới mẻ. Vì vậy các bạn cần đọc kỹ các khái niệm này để không bị lúng túng về sau. Có bốn hàm lượng giác ngược mà ta sẽ lần lượt xét dưới đây.

a) Thứ nhất là hàm $y = \arcsin x$. Để định nghĩa hàm $y = \arcsin x$ ta xét hàm $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ có quy tắc tương là $f(x) = \sin x$. Dễ thấy hàm số đó là song ánh theo định nghĩa A.5, do đó có hàm ngược $f^{-1} : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Với $y \in [-1; 1]$ ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ là $\arcsin y$ ($\arcsin y$ đọc là ac-sin y). Theo định nghĩa A.6, ta có

$$\arcsin y = x \Leftrightarrow \sin x = y, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Như vậy để tìm $\arcsin y$ với $y \in [-1; 1]$ ta phải giải phương trình ẩn x ở vế phải của quan hệ tương đương trên. Lưu ý rằng ta chỉ xét phương trình này với $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vì quy tắc $f(x) = \sin x$ chỉ được định nghĩa cho $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ví dụ để tìm $\arcsin \frac{1}{2}$ ta phải giải phương trình

$$\sin x = \frac{1}{2}, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Phương trình đó có nghiệm duy nhất là $x = \frac{\pi}{6}$, do đó $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Với quy ước dùng chữ x để chỉ đối số, dùng chữ y để chỉ hàm số, quy tắc cho x tương ứng với $y = \arcsin x$ xác định một hàm số có tập xác định là $[-1;1]$, tập giá trị là $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Hàm này tăng trên tập xác định của nó.

b) Thứ hai là hàm $y = \arccos x$. Để định nghĩa hàm $y = \arccos x$ ta xét hàm $f : [0,\pi] \to [-1;1]$ có quy tắc tương là $f(x) = \cos x$. Dễ thấy hàm số đó là song ánh theo định nghĩa A.5, do đó có hàm ngược $f^{-1} : [-1;1] \to [0,\pi]$. Với $y \in [-1;1]$ ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ là $\arccos y$ ($\arccos y$ đọc là ac-cos y). Theo định nghĩa A.6, ta có

$$\arccos y = x \Leftrightarrow \cos x = y, x \in [0,\pi].$$

Như vậy để tìm $\arccos y$ với $y \in [-1;1]$ ta phải giải phương trình ẩn x ở vế phải của quan hệ tương đương trên. Lưu ý rằng ta chỉ xét phương trình này với $x \in [0,\pi]$ vì quy tắc $f(x) = \cos x$ chỉ được định nghĩa cho $x \in [0,\pi]$. Ví dụ để tìm $\arccos\frac{1}{2}$ ta phải giải phương trình

$$\cos x = \frac{1}{2}, x \in [0,\pi].$$

Phương trình đó có nghiệm duy nhất là $x = \frac{\pi}{3}$, do đó $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Với quy ước dùng chữ x để chỉ đối số, dùng chữ y để chỉ hàm số, quy tắc cho x tương ứng với $y = \arccos x$ xác định một hàm số có tập xác định là $[-1;1]$, tập giá trị là $[0,\pi]$. Hàm này giảm trên tập xác định của nó.

c) Thứ ba là hàm $y = \arctan x$. Để định nghĩa hàm $y = \arctan x$ ta xét hàm $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ có quy tắc tương là $f(x) = \tan x$. Dễ thấy hàm số đó là song ánh theo định nghĩa A.5, do đó có hàm ngược $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Với $y \in \mathbb{R}$ ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ là $\arctan y$ ($\arctan y$ đọc là ac-tan y). Theo định nghĩa A.6, ta có

$$\arctan y = x \Leftrightarrow \tan x = y, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

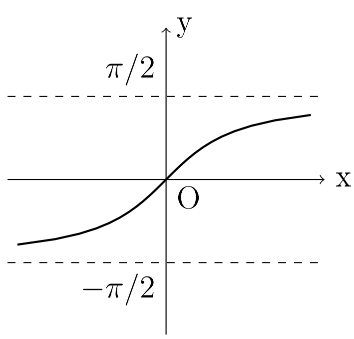
Như vậy để tìm $\arctan y$ với $y \in \mathbb{R}$ ta phải giải phương trình ẩn x ở vế phải của quan hệ tương đương trên. Lưu ý rằng ta chỉ xét phương trình này với $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vì quy tắc $f(x) = \tan x$ chỉ được định nghĩa cho $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ví dụ để tìm $\arctan(-1)$ ta phải giải phương trình

$$\tan x = -1, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Phương trình đó có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{\pi}{4}$, do đó $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Với quy ước dùng chữ x để chỉ đối số, dùng chữ y để chỉ hàm số, quy tắc cho x tương ứng với $y = \arctan x$ xác định một hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hàm này tăng trên tập xác định của nó.

d) Cuối cùng là hàm $y = arc\cot x$. Để định nghĩa hàm $y = arc\cot x$ ta xét hàm $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ có quy tắc tương là $f(x) = \cot x$. Dễ thấy hàm số đó là song ánh theo định nghĩa A.5, do đó có hàm ngược $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$. Với $y \in \mathbb{R}$ ta ký hiệu $f^{-1}(y)$ là $arc\cot y$ ($arc\cot y$ đọc là ac-cot y). Theo định nghĩa A.6 ta có

$$arc\cot y = x \Leftrightarrow \cot x = y, x \in (0,\pi).$$



Hình A.2: Hàm $y = arctang$

Như vậy để tìm $arc\cot y$ với $y \in \mathbb{R}$ ta phải giải phương trình ẩn x ở vế phải của quan hệ tương đương trên. Lưu ý rằng ta chỉ xét phương trình này với $x \in (0, \pi)$ vì quy tắc $f(x) = \cot x$ chỉ được định nghĩa cho $x \in (0, \pi)$. Ví dụ để tìm $arc\cot(-1)$ ta phải giải phương trình

$$\cot x = -1, x \in (0, \pi).$$

Phương trình đó có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{3\pi}{4}$, do đó $arc\cot(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$. Với quy ước dùng chữ x để chỉ đối số, dùng chữ y để chỉ hàm số, quy tắc cho x tương ứng với $y = arc\cot x$ xác định một hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $(0, \pi)$. Hàm này giảm trên tập xác định của nó.

A.1.2.6. Hàm số sơ cấp

Ta còn cần các khái niệm về tổng, hiệu, tích, thương các hàm số trước khi đưa ra định nghĩa hàm số sơ cấp. Cho hai hàm số f và g có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Ta có thể tạo ra các hàm số mới với các quy tắc tương ứng sau:

$$x \mapsto y = f(x) + g(x);$$

$$x \mapsto y = f(x) - g(x);$$

$$x \mapsto y = f(x) \cdot g(x);$$

$$x \mapsto y = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Các hàm số này lần lượt được gọi là tổng, hiệu, tích, thương của các hàm f và g. Tập xác định của ba hàm số đầu tiên là $D_f \cap D_g$, tập xác định của hàm số cuối cùng là $D_f \cap D_g$ trừ tập các số x mà $g(x) = 0$. Bây giờ ta đã có thể đưa ra định nghĩa hàm sơ cấp sau.

$\star$ **Định nghĩa A.9.** Hàm sơ cấp là hàm được tạo bởi một số hữu hạn phép lấy tổng, hiệu, tích, thương và hàm hợp của các hàm sơ cấp cơ bản và các hằng số.

•**Ví dụ A.6.** Các hàm số sau là các hàm số sơ cấp: $y = 3x^2 + \sin x, y = \cos(x^2 + 1)$.

Trong số các hàm sơ cấp người ta đặc biệt quan tâm đến các đa thức và các hàm phân thức vì tính thông dụng của chúng. Đa thức là hàm số có dạng

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

trong đó n là số nguyên dương, $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0, n}, a_n \neq 0$. Đa thức $P(x)$ trên được gọi là có bậc bằng n. Ta quy ước mọi số thực $a_0 \neq 0$ là đa thức bậc 0, số 0 là đa thức bậc $-\infty$. Bậc của đa thức P được ký hiệu là $\deg(P)$. Đôi khi người ta dùng ký hiệu P_n để chỉ đa thức P có bậc là n.

Hàm phân thức là tỉ số của hai đa thức và có dạng

$$R(x) = \frac{a_m x^m + ... + a_0}{b_n x^n + ... + b_0},$$

trong đó $a_m \neq 0, b_n \neq 0$. Nếu $m < n$ thì $R(x)$ được gọi là phân thức thực sự, nếu $m \geq n$ thì $R(x)$ được gọi là phân thức không thực sự. Hàm phân thức còn được gọi là hàm hữu tỉ.

Sau khi nhắc lại các khái niệm về hàm số và làm quen với các hàm số mới là các hàm lượng giác ngược, trong bài sau chúng tôi sẽ nhắc lại các khái niệm về phép tính vi phân hàm một biến.

A.2. Phép tính vi phân hàm một biến

A.2.1. Đạo hàm và vi phân cấp một

A.2.1.1. Định nghĩa đạo hàm

Một trong các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm của hàm một biến là bài toán về vận tốc của chuyển động thẳng. Xét chuyển động thẳng có quãng đường đi được ở thời điểm t là $s = f(t)$. Quãng đường đi được tại các thời điểm t_0 và $t_0 + \Delta t$ lần lượt là $s_0 = f(t_0)$ và $s = f(t_0 + \Delta t)$. Quãng đường đi được từ thời điểm t_0 đến thời điểm $t_0 + \Delta t$ là $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ thời điểm t_0 đến thời điểm $t_0 + \Delta t$ là

$$v_{tb} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Nếu đại lượng v_{tb} dần đến một giới hạn xác định khi $\Delta t \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0, ký hiệu là $v(t_0)$. Trong toán học giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm f tại t_0. Dưới đây ta sẽ đưa ra định nghĩa chính xác về đạo hàm của hàm một biến.

Cho hàm f xác định trên khoảng $(a, b), x_0 \in (a, b)$. Với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ ta đặt $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Các đại lượng Δx và Δf lần lượt được gọi là số gia của đối số và số gia của hàm số. Ta có định nghĩa sau.

⋆ **Định nghĩa A.10.** Hàm f được gọi là có đạo hàm tại x_0 là

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại.

Dễ thấy rằng nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì ta cũng có thể tính đạo hàm ấy theo công thức

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Với định nghĩa A.10 về đạo hàm, vận tốc của chuyển động được mô tả ở trên là $v(t_0) = f'(t_0)$. Dưới đây ta đưa ra hai nhận xét liên quan đến định nghĩa A.10 để sử dụng về sau.

Nhận xét A.1. Nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ thì số gia hàm số Δf có dạng

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \tag{A.1}$$

trong đó $o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ [1, tr. 87] và $o(0) = 0$.

Thật vậy, với $\Delta x \neq 0$ đặt $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$. Thế thì $\alpha(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$ theo định nghĩa A.10. Ta có $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x) \Leftrightarrow \Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Vì $\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(\Delta x) \to 0$ nên $\alpha(\Delta x)\Delta x$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$, tức là ta có biểu diễn (A.1). Với $\Delta x = 0$ đẳng thức (A.1) cũng thỏa mãn vì cả hai vế đều bằng 0.

Nhận xét A.2. Nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì từ biểu diễn (A.1) suy ra f liên tục tại x_0. Khẳng định ngược lại không đúng.

Nếu giới hạn ở định nghĩa A.10 chỉ tồn tại khi $\Delta x \to 0$ từ phía phải hoặc phía trái thì ta có khái niệm về đạo hàm phải, đạo hàm trái sau.

⋆ **Định nghĩa A.11.** Hàm f được gọi là có đạo hàm phải tại x_0 là

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại và được gọi là có đạo hàm trái tại x_0 là

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại.

Dễ thấy nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì hàm f có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại x_0 đều bằng $f'(x_0)$. Ngược lại nếu hàm f có đạo hàm phải và đạo hàm trái tại x_0 bằng nhau thì hàm f có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Khi hàm f có đạo hàm phải (trái) tại x_0 ta có các nhận xét tương tự như như các nhận xét A.1 và A.2 như sau.

Nhận xét A.3. Nếu hàm f có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thì số gia hàm số Δf có dạng

$$\Delta f = f'_\pm(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \tag{A.2}$$

trong đó $o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0^+$ ($\Delta x \to 0^-$) và $o(0) = 0$.

Nhận xét A.4. Nếu hàm f có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thì hàm f liên tục phải (trái) tại x_0. Khẳng định ngược lại không đúng.

A.2.1.2. Phương pháp tính đạo hàm

A.2.1.2.1. Đạo hàm các hàm thông dụng

Dựa vào định nghĩa A.10 chúng tôi sẽ lần lượt thiết lập công thức tính đạo hàm của hàm hằng và các hàm số $f(x) = x, f(x) = \sin x, f(x) = e^x$.

a) Với $f(x) = c, \forall x \in (a, b)$, và $x_0 \in (a, b)$ ta có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c$. Suy ra $\Delta f = 0$, do đó $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, với mọi $\Delta x \neq 0$ và Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Từ đó ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, tức là $f'(x_0) = 0$. Suy ra $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$. Ta nhận được công thức thứ nhất

$$(c)' = 0, \forall x \in (a, b).$$

b) Với $f(x) = x, \forall x \in (a, b)$, và $x_0 \in (a, b)$ ta có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0$. Suy ra $\Delta f = \Delta x$, do đó $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 1$, với mọi $\Delta x \neq 0$ và Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Từ đó ta có $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 1$, tức là $f'(x_0) = 1$. Suy ra $f'(x) = 1, \forall x \in (a, b)$. Ta nhận được công thức thứ hai

$$(x)' = 1, \forall x \in (a, b).$$

c) Với $f(x) = \sin x, \forall x \in (a, b)$, và $x_0 \in (a, b)$ ta có $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2})\sin\dfrac{\Delta x}{2}$. Suy ra $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \cos(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2})\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}$, với mọi $\Delta x \neq 0$

và Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Từ đó ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x_0+\dfrac{\Delta x}{2})\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} =$ $\cos x_0.1 = \cos x_0$, tức là $f'(x_0) = \cos x_0$ (ta đã sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$). Suy ra $f'(x) = \cos x, \forall x \in (a,b)$. Ta nhận được công thức thứ ba

$$(\sin x)' = \cos x, \forall x \in (a,b).$$

d) Với $f(x) = e^x, \forall x \in (a,b)$, và $x_0 \in (a,b)$ ta có $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0}(e^{\Delta x}-1)$. Suy ra $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = e^{x_0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$, với mọi $\Delta x \neq 0$ và Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Từ đó ta có $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = e^{x_0}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^{x_0}.1 = e^{x_0}$, tức là $f'(x_0) = e^{x_0}$ (ta đã sử dụng giới hạn cơ bản $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1$). Suy ra $f'(x) = e^x, \forall x \in (a,b)$. Ta nhận được công thức thứ tư

$$(e^x)' = e^x, \forall x \in (a,b).$$

A.2.1.2.2. Quy tắc tính đạo hàm

Dưới đây chúng tôi đưa ra ba định lý về đạo hàm của hàm số. Đó là định lý về đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số; định lý về đạo hàm hàm hợp; định lý về đạo hàm hàm ngược. Chúng tôi cũng áp dụng các định lý này và các kết quả của mục 1.2.1.2.1 về đạo hàm các hàm thông dụng để nhận được các công thức tính đạo hàm mới.

$\Diamond$ **Định lý A.1.** *(Định lý về đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số). Giả sử các hàm $u(x), v(x)$ xác định trên khoảng (a,b), có đạo hàm tại $x_0 \in (a,b)$. Khi đó $u(x)+v(x)$,$u(x)-v(x)$, $u(x)v(x)$ cũng có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn*

(i) $(u(x)+v(x))'|_{x=x_0} = u'(x_0)+v'(x_0)$;

(ii) $(u(x)-v(x))'|_{x=x_0} = u'(x_0)-v'(x_0)$;

(iii) $(u(x)v(x))'|_{x=x_0} = u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)$;

(iv) Nếu ngoài ra $v(x_0) \neq 0$ thì $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ cũng có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn

$$\left.\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right|_{x=x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Định lý về đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số đã được xem xét khá kỹ ở cấp phổ thông, vì vậy chúng tôi không chứng minh định lý này ở đây. Từ định lý A.1 và công thức tính đạo hàm hàm hằng ta dễ dàng nhận được hai hệ quả sau.

$\bigtriangledown$ ***Hệ quả* A.1.** *Nếu hàm $u(x)$ xác định trên khoảng (a,b), có đạo hàm tại $x_0 \in (a,b)$, thì với mọi hằng số c hàm $cu(x)$ có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn $(cu(x))'|_{x=x_0} = cu'(x_0)$.*

$\bigtriangledown$ ***Hệ quả* A.2.** *Nếu hàm u xác định trên khoảng (a,b), có đạo hàm tại $x_0 \in (a,b)$, $u(x_0) \neq 0$, thì hàm $\dfrac{1}{u}$ có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn $\left.\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'\right|_{x=x_0} = -\dfrac{u'(x_0)}{u^2(x_0)}$.*

$\Diamond$ **Định lý A.2.** *(Định lý về đạo hàm hàm hợp). Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm tại x_0, hàm $f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = u(x_0)$ thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn*

$$g'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0).$$

Δ.Đặt $\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0), \Delta g = g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$. Ta có

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x_0+\Delta x) - g(x_0)\\ &= f(u(x_0+\Delta x)) - f(u(x_0))\\ &= f(u_0+\Delta u)) - f(u_0).\end{aligned}$$

Vì hàm $f(u)$ có đạo hàm tại u_0 nên $f(u_0+\Delta u)) - f(u_0) = f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$ theo nhận xét 1.1, suy ra $\Delta g = f'(u_0)\Delta u + o(\Delta u)$. Từ đó với $\Delta x \neq 0$ ta có

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{o(\Delta u)}{\Delta x}. \tag{A.3}$$

Khi $\Delta x \to 0$ số hạng thứ nhất ở vế phải của (A.3) có giới hạn là

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}] = f'(u_0)u'(x_0). \tag{A.4}$$

Giới hạn của số hạng thứ hai ở vế phải của (A.3) được tính như sau: Nếu $\Delta u = 0$ thì $o(\Delta u) = 0$, do đó $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta x} = 0$. Nếu $\Delta u \neq 0$ thì $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{o(\Delta u)}{\Delta u}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}] = 0.u'(x_0) = 0$ (lưu ý rằng vì hàm u có đạo hàm tại x_0 nên liên tục tại x_0 theo nhận xét A.2, do đó $\Delta u \to 0$ khi $\Delta x \to 0$). Trong cả hai trường hợp ta đều có

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta u)}{\Delta x} = 0. \tag{A.5}$$

Từ (A.3), (A.4), (A.5) suy ra $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0)$ hay $g'(x_0) = f'(u_0)u'(x_0)$ theo định nghĩa A.10 $\square$.

Liên quan đến định lý A.2, chúng tôi đưa ra một số nhận xét, sẽ được sử dụng về sau.

Nhận xét A.5.

(i) Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm tại x_0, hàm $f(u)$ có đạo hàm phải (trái) tại $u_0 = u(x_0)$, tồn tại khoảng (a,b) chứa x_0 sao cho $u(x)$ nhận giá trị ở bên phải (trái) của $u_0, \forall x \in (a,b)$, thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 thỏa mãn

$$g'(x_0) = f'_\pm(u_0)u'(x_0).$$

(ii) Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0, hàm $f(u)$ có đạo hàm phải tại $u_0 = u(x_0)$, tồn tại khoảng (a,b) chứa x_0 sao cho $u(x)$ nhận giá trị ở bên phải của $u_0, \forall x \in (a,b)$, và x ở bên phải (trái) của x_0, thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thỏa mãn

$$g'_\pm(x_0) = f'_+(u_0)u'_\pm(x_0).$$

Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0, hàm $f(u)$ có đạo hàm trái tại $u_0 = u(x_0)$, tồn tại khoảng (a,b) chứa x_0 sao cho $u(x)$ nhận giá trị ở bên trái của $u_0, \forall x \in (a,b)$, và x ở bên phải (trái) của x_0, thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thỏa mãn

$$g'_\pm(x_0) = f'_-(u_0)u'_\pm(x_0).$$

(iii) Nếu hàm $u(x)$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0, hàm $f(u)$ có đạo hàm tại $u_0 = u(x_0)$, thì hàm hợp $g(x) = f(u(x))$ có đạo hàm phải (trái) tại x_0 thỏa mãn

$$g'_\pm(x_0) = f'(u_0)u'_\pm(x_0).$$

Chứng minh của các khẳng định trên tương tự chứng minh của định lý A.2. Chỉ lưu ý rằng ở đây có thể phải sử dụng cả biểu biểu diễn (A.1) lẫn (A.2).

◊ **Định lý A.3.** *(Định lý về đạo hàm hàm ngược). Giả sử hàm $f : [a,b] \to [c,d]$ là hàm ngược của hàm liên tục $g : [c,d] \to [a,b] (a < b, c < d)$. Nếu hàm g có đạo hàm tại $y_0 \in [c,d]$, $g'(y_0) \neq 0$, thì hàm f có đạo hàm tại $x_0 = g(y_0)$ thỏa mãn*

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

Δ.Giả sử $x_0 \in [a,b), x > x_0, |x - x_0|$ đủ nhỏ. Đặt $f(x) = y$. Vì hàm f là đơn ánh nên $f(x) \neq f(x_0)$ hay $y \neq y_0$. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}} \end{aligned}$$

Cho $x \to x_0^+$ thì $y \to y_0$ vì hàm f liên tục trên $[a,b]$ [1, tr. 104]. Suy ra

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}},$$

hay

$$f'_+(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

Chứng minh tương tự với $x_0 \in (a,b]$ ta có

$$f'_-(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

Từ hai đẳng thức cuối cùng ta nhận được khẳng định của định lý A.3, trong đó đạo hàm của hàm f tại a là đạo hàm phải, tại b là đạo hàm trái □.

Sử dụng ba định lý trên ta có thể bổ sung kết quả của mục 1.2.1.2.1 như sau.

•Ví dụ A.7.

(i) $(\cos x)' = -\sin x$.

Thật vậy, ta có $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, do đó nếu đặt $f(u) = \sin u, u(x) = x + \frac{\pi}{2}$ thì $\cos x = f(u(x))$. Theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp, $(\cos x)' = f'(u(x))u'(x)$. Ta có $f'(u) = \cos u, u'(x) = 1 \Rightarrow (\cos x)' = \cos(u(x)).1 = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \Rightarrow (\cos x)' = -\sin x$.

(ii) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Thật vậy, sử dụng định lý A.1 về đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương các hàm số ta được:
$(\tan x)' = (\dfrac{\sin x}{\cos x})' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$
$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow (\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

(iii) $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Chứng minh tương tự như (ii).

(iv) $(a^x)' = a^x \ln a$.

Thật vậy, ta có $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x\ln a}$, do đó nếu đặt $f(u) = e^u, u(x) = x\ln a$ thì $a^x = f(u(x))$. Theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp, $(a^x)' = f'(u(x))u'(x)$. Ta có $f'(u) = e^u, u'(x) = \ln a \Rightarrow (a^x)' = e^{u(x)}\ln a = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a \Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a$.

(v) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Thật vậy, ta có hàm $y = \ln x$ là hàm ngược của hàm $x = e^y$. Hàm $x = e^y$ liên tục, có đạo hàm $(e^y)' = e^y \neq 0, \forall y \in \mathbb{R}$, nên theo định lý A.3 về đạo hàm hàm ngược, hàm $y = \ln x$ có đạo hàm tại mọi $x = e^y > 0$ thỏa mãn $(\ln x)' = \dfrac{1}{(e^y)'} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

(vi) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

Thật vậy, theo hệ quả A.1,

$(\log_a x)' = (\dfrac{\ln x}{\ln a})' = (\dfrac{1}{\ln a}\ln x)' = \dfrac{(\ln x)'}{\ln a} = \dfrac{1}{x\ln a} \Rightarrow (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

(vii) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (x thỏa mãn: $x^{\alpha-1}$ xác định).

Thật vậy, ta có $x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \forall x > 0$, do đó nếu đặt $f(u) = e^u, u(x) = \alpha \ln x$ thì $x^\alpha = f(u(x))$. Theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp, $(x^\alpha)' = f'(u(x))u'(x)$. Ta có $f'(u) = e^u, u'(x) = \dfrac{\alpha}{x} \Rightarrow (x^\alpha)' = e^{u(x)}\dfrac{\alpha}{x} = e^{\alpha\ln x}\dfrac{\alpha}{x} = x^\alpha \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Nếu x^α xác định khi $x < 0$ thì với $x < 0$ ta viết $x^\alpha = (-1)^\alpha(-x)^\alpha$, do đó nếu đặt $f(u) = u^\alpha, u(x) = -x$ thì $x^\alpha = (-1)^\alpha f(u(x))$. Ta có $f'(u) = \alpha u^{\alpha-1}, \forall u > 0$ theo chứng minh trên, $u'(x) = -1$. Với $x < 0$ ta có $u(x) > 0$ nên theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp, $(x^\alpha)' = (-1)^\alpha f'(u(x))u'(x) = (-1)^\alpha \alpha (u(x))^{\alpha-1}(-1) = \alpha(-1)^{\alpha-1}(-x)^{\alpha-1} = \alpha x^{\alpha-1} \Rightarrow (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Cuối cùng, về đạo hàm của hàm x^α tại 0. Nếu hàm x^α xác định trên $\mathbb{R}$ (nói riêng tại 0, do đó $\alpha > 0$) thì hàm số ấy có đạo hàm tại 0 khi và chỉ khi tồn tại giới hạn của $\dfrac{x^\alpha - 0}{x - 0} = x^{\alpha-1}$ khi $x \to 0$, hay khi và chỉ khi $\alpha - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$. Với $\alpha > 1$ đạo hàm của x^α tại 0 là $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha-1} = 0 = \alpha 0^{\alpha-1}$, tức là thỏa mãn công thức chung $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Tương tự, nếu hàm x^α xác định trên $\mathbb{R}_+$ (nói riêng tại 0, do đó $\alpha > 0$) thì hàm số ấy có đạo hàm phải tại 0 khi và chỉ $\alpha \geq 1$, với $\alpha > 1$ đạo hàm phải tại 0 ấy thỏa mãn công thức chung $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Tóm lại, nếu $x^{\alpha-1}$ xác định thì $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

(viii) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$.

Thật vậy, ta có hàm $y = \arcsin x$ từ đoạn $[-1, 1]$ vào đoạn $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ là hàm ngược của hàm $x = \sin y$ từ đoạn $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$ vào đoạn $[-1, 1]$. Vì hàm $x = \sin y$ liên tục trên đoạn $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, có đạo hàm $(\sin y)' = \cos y \neq 0, \forall y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ nên theo định lý A.3 về đạo hàm của hàm ngược, hàm $\arcsin x$ có đạo hàm tại $x = \sin y \in (-1, 1)$ thỏa mãn:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(ix) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$.

(x) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(xi) $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Các công thức (ix) – (xi) được chứng minh tương tự như công thức (viii).

A.2.1.2.3. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

Tổng hợp các kết quả của mục 1.2.1.2.1 và của ví dụ A.7 mục 1.2.1.2.2 ta có bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản sau.

1. $(C)' = 0$;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (x thỏa mãn: $x^{\alpha-1}$ xác định);
3. $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
10. $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$;
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} (-1 < x < 1)$;
13. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
14. $(arc\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

A.2.1.3. Vi phân cấp một

$\star$ **Định nghĩa A.12.** Hàm f xác định trên khoảng (a, b) được gọi là khả vi tại $x_0 \in (a, b)$ nếu với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ số gia hàm số $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ có dạng

$$\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{A.6}$$

trong đó A không phụ thuộc vào Δx, $o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ [1, tr. 87]. Biểu thức $df = A\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm f tại x_0.

Theo nhận xét A.1, nếu hàm f có đạo hàm tại x_0 thì $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, tức là Δf có dạng (A.6) với $A = f'(x_0)$, do đó f khả vi tại x_0. Ngược lại, nếu f khả vi tại x_0, tức là ta có biểu diễn (A.6), thì hàm f có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) = A$. Thật vậy, với $\Delta x \neq 0$ chia hai vế của (A.6) cho Δx ta được $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$, từ đó suy ra $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = A$ vì $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, hay $f'(x_0) = A$. Như vậy tính có đạo hàm và tính khả vi tại một điểm của hàm số là như nhau, ngoài ra khi f khả vi tại x_0, vi phân của nó tại x_0 là

$$df = f'(x_0)\Delta x. \tag{A.7}$$

Áp dụng công thức (A.7) với $f(x) = x$, khi đó $f'(x) = 1$, ta được $dx = 1.\Delta x \Rightarrow \Delta x = dx$. Do đó công thức (A.7) có thể viết dưới dạng khác như sau:

$$df = f'(x_0)dx. \tag{A.8}$$

Từ (A.8) lại suy ra

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}. \tag{A.9}$$

Tiếp theo ta xét một tình huống dẫn đến tính chất khá đặc biệt của vi phân của hàm số. Giả sử hàm $x(t)$ khả vi tại t_0, $f(x)$ khả vi tại $x_0 = x(t_0)$. Khi đó theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp, hàm $g(t) = f(x(t))$ khả vi tại t_0 và $g'(t_0) = f'(x_0)x'(t_0)$. Áp dụng công thức (A.8) đầu tiên với hàm $g(t)$, sau đó với hàm $x(t)$, ta được vi phân của hàm $g(t) = f(x(t))$ tại t_0 là

$$dg = g'(t_0)dt = f'(x_0)x'(t_0)dt = f'(x_0)dx.$$

Ta thấy dạng của vi phân của hàm $f(x)$ khi x là biến phụ thuộc (ở đây là phụ thuộc vào biến t) không thay đổi so với dạng của vi phân của $f(x)$ khi x là biến độc lập. Tính chất này gọi là tính bất biến dạng của vi phân.

A.2.2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

Giả sử hàm f có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b). Nếu $f'(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \in (a, b)$ thì đạo hàm ấy được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm f tại x_o, ký hiệu là $f^{(2)}(x_0)$. Tiếp tục quá trình trên ta có khái niệm về đạo hàm cấp n của hàm f tại x, ký hiệu là $f^{(n)}(x)$, như sau:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f'(x) \text{ khi } n = 1; \\ (f^{(n-1)}(x))' \; khi \; n \geq 2. \end{cases}$$

Đạo hàm cấp một, cấp hai, cấp ba của hàm f cũng được ký hiệu lần lượt là f', f'', f'''. Cần nói rõ thêm rằng, để hàm f có đạo hàm cấp n, $n \geq 2$, tại x_0, ta cần hàm f có đạo hàm cấp n-1 tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b) nào đó chứa x_o và $f^{(n-1)}(x)$ có đạo hàm tại x_o.

Ta có các quy tắc tính đạo hàm cấp cao sau:

(i) $(\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$;

(ii) $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

Công thức thứ hai ở trên được gọi là công thức Lepnit (Leibniz). Ở đây ta sử dụng quy ước đạo hàm cấp 0 của hàm u bất kỳ xác định tại x là $u^{(0)}(x) = u(x)$.

•Ví dụ A.8. Ta chứng minh bằng quy nạp

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax} (a \neq 0), \tag{A.10}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Δ.Thật vậy, ta có (A.10) thỏa mãn với $n = 0$ vì khi đó cả hai vế của nó đều bằng e^{ax}. Giả sử (A.10) đúng với n nào đó, $n \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa đạo hàm cấp cao và quy tắc tính đạo hàm hàm hợp

$$(e^{ax})^{(n+1)} = [(e^{ax})^{(n)}]' = [a^n e^{ax}]' = a^n a e^{ax} = a^{n+1} e^{ax} \Rightarrow (e^{ax})^{(n+1)} = a^{n+1} e^{ax}.$$

Theo nguyên lý quy nạp toán học, (A.10) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Nói riêng khi $a = 1$ ta có $(e^x)^{(n)} = e^x$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ $\square$.

•Ví dụ A.9. Sử dụng quy tắc Lepnit tính đạo hàm cấp cao ta nhận được

$$(e^x x)^{(n)} = e^x (x + n)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Δ.Thật vậy, ta có

$$(e^x x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^x)^{(n-k)} (x)^{(k)}.$$

Các số hạng ứng với $k \geq 2$ trong tổng ở vế phải của đẳng thức trên bằng 0 vì khi đó $(x)^{(k)} = 0$, do đó

$$\begin{aligned} (e^x x)^{(n)} &= \textstyle\sum_{k=0}^{1} C_n^k (e^x)^{(n-k)} (x)^{(k)} \\ &= C_n^0 (e^x)^{(n-0)} (x)^{(0)} + C_n^1 (e^x)^{(n-1)} (x)^{(1)}. \end{aligned}$$

Sử dụng kết quả của ví dụ A.8 khi $a = 1$ và các đẳng thức $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, (x)^{(0)} = x, (x)^{(1)} = 1$ ta được $(e^x x)^{(n)} = 1.e^x.x + ne^x.1 = e^x(x + n) \Rightarrow (e^x x)^{(n)} = e^x(x + n)$ $\square$.

Trong phần tiếp theo của mục này chúng tôi giới thiệu sơ lược về vi phân cấp cao của hàm số. Giả sử hàm f có đạo hàm (khả vi) tại mọi điểm thuộc khoảng (a, b). Theo công thức (A.8), vi phân của hàm f là $df = f'(x)dx$. Ta thấy df về phần mình lại là hàm số của x, ta có thể xét tính khả vi của nó tại điểm nào đó. Nếu df khả vi tại điểm nào đó thì vi phân của df được gọi là vi phân cấp hai của hàm f tại điểm ấy, ký hiệu là d^2f. Tiếp tục quá trình ấy ta có khái niệm về vi phân cấp n của hàm f tại x, ký hiệu là d^nf, như sau:

$$d^nf = \begin{cases} df \text{ khi } n = 1; \\ d(d^{n-1}f)\ khi\ n \geq 2. \end{cases}$$

Xét hàm f của biến độc lập x. Vi phân (vi phân cấp một) của nó là $df = f'(x)dx$, trong đó $dx = \Delta x$ là hằng số. Do đó vi phân cấp hai của hàm f là

$$d^2f = d(df) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = [(f'(x))'dx]dx = [f''(x)dx]dx = f''(x)dx^2.$$

Suy ra $d^2f = f''(x)dx^2$. Tương tự với $n > 2$ ta có $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}^*, d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$. Từ đó ta cũng nhận được công thức $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Lưu ý rằng, khác với trường hợp n=1, với $n \geq 2$ biểu thức của vi phân cấp n d^nf của $f(x)$ khi x là biến độc lập và khi x là biến phụ thuộc là khác nhau. Ta nói rằng, vi phân cấp cao (cấp $n \geq 2$) của hàm số không có tính bất biến.

A.2.3. Các định lý về giá trị trung bình và một số ứng dụng của chúng

A.2.3.1. Các định lý về giá trị trung bình

Trong mục này chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý Phéc-ma (Fermat), định lý Rolle, định lý Lag-răng-giơ (Lagrange), định lý Cô-si (Cauchy), đưa ra công thức khai triển Tây-lơ (Taylor) hữu hạn của hàm số tại một điểm.

Trước hết ta nhắc lại định nghĩa về cực trị của hàm số.

$\star$ **Định nghĩa A.13.** Ta nói hàm f có cực đại (cực tiểu) địa phương tại x_o nếu tồn tại khoảng (a, b) chứa x_o, sao cho f xác định trên khoảng (a, b) và $\forall x \in (a, b)\backslash\{x_0\}$ ta có $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. Khi đó điểm x_o được gọi là điểm cực đại (cực tiểu) địa phương của hàm f. Điểm cực đại địa phương và điểm cực tiểu địa phương của một hàm số được gọi chung là điểm cực trị địa phương của hàm số ấy. Để cho gọn, cụm từ cực đại (cực tiểu, cực trị) địa phương sẽ được thay bằng cụm từ cực đại (cực tiểu, cực trị).

Nếu trong định nghĩa A.13 thay bất đẳng thức $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ bởi bất đẳng thức không ngặt $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ thì ta có một loại cực trị khác. Để phân biệt, ta gọi loại thứ nhất là cực trị ngặt, loại thứ hai là cực trị không ngặt. Khi nói hàm số có cực trị tại một điểm ta hiểu là nó có cực trị ngặt tại điểm đó.

$\Diamond$ **Định lý A.4.** *(Định lý Fermat). Nếu hàm f có cực trị và khả vi tại x_o thì $f'(x_0) = 0$.*

Δ.Giả sử hàm f có cực đại và khả vi tại x_o và (a, b) là khoảng được nói tới trong định nghĩa A.13. Khi đó $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a, b)\backslash\{x_0\} \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0, \forall x \in (a, b)\backslash\{x_0\}$. Từ đó, một mặt ta có $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0, \forall x \in (x_0, b)$, do đó và do f khả vi tại x_o, $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$. Mặt khác ta có $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0, \forall x \in (a, x_0)$, do đó và do f khả vi tại x_o, $f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$. Do $f'(x_0) \leq 0$

và $f'(x_0) \geq 0$ nên $f'(x_0) = 0$. Tương tự khi hàm f có cực tiểu và khả vi tại x_o ta cũng có $f'(x_0) = 0$ □.

Nhận xét A.6. Từ chứng minh của định lý A.4 dễ thấy rằng, nếu thay điều kiện hàm f có cực trị tại x_o bởi điều kiện hàm f có cực trị không ngặt tại x_o, điều kiện hàm f khả vi tại x_o giữ nguyên, thì định lý A.4 vẫn đúng.

◊ **Định lý A.5.** *(Định lý Rolle). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b), $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Δ.Vì hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên tồn tại $x_1, x_2 \in [a, b]$, sao cho $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$ [1, tr. 99]. Nếu $x_1, x_2 \in \{a, b\}$ thì $f(x_1) = f(x_2)$ vì đều bằng $f(a) = f(b)$. Vì $f(x_1) = f(x_2)$ và $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$ nên $f(x) = f(x_1) = f(x_2), \forall x \in [a, b]$. Suy ra $f'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$. Nếu $x_1 \notin \{a, b\}$ thì $x_1 \in (a, b)$. Ta có $x_1 \in (a, b)$ và $f(x) \geq f(x_1), \forall x \in (a, b)$ nên x_1 là điểm cực tiểu không ngặt của hàm f. Theo nhận xét A.6 ta có $f'(x_1) = 0$. Nếu $x_2 \notin \{a, b\}$ thì lập luận tương tự ta được $f'(x_2) = 0$. Vậy trong mọi trường hợp đều tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$ □.

◊ **Định lý A.6.** *(Định lý Lagrange). Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{A.11}$$

Δ.Đặt $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Dễ thấy hàm g liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b), $g(a) = g(b)$ vì đều bằng 0 nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ □.

Công thức (A.11) có dạng khác như sau:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Đặt $\Delta x = b - a \Leftrightarrow b = a + \Delta x$ ta được

$$f(a + \Delta x) - f(a) = f'(c)\Delta x \tag{A.12}$$

Công thức (A.12) được gọi là công thức số gia hữu hạn. Nó cho phép ước lượng số gia của hàm số $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ theo số gia của đối số Δx.

◊ **Định lý A.7.** *(Định lý Cauchy). Nếu các hàm f, g liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b), $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{A.13}$$

Δ.Nếu $g(a) = g(b)$ thì theo định lý Rolle tồn tại $\xi \in (a, b)$ sao cho $g'(\xi) = 0$ trái với giả thiết của định lý. Suy ra $g(a) \neq g(b)$. Đặt $h(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$. Dễ thấy hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b), $h(a) = h(b)$ vì đều bằng 0 nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$ hay $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ do $g'(c) \neq 0$ theo giả thiết của định lý □.

Dưới đây chúng tôi phát biểu không chứng minh định lý mở rộng của định lý Lagrange. Bạn đọc có thể tìm thấy chứng minh của nó trong [1, tr. 147-150].

◊ **Định lý A.8.** *(Công thức Taylor với phần dư dạng Lagrange). Nếu hàm f khả vi liên tục đến cấp $n \in \mathbb{N}$ trên đoạn $[a,b]$, khả vi đến cấp n+1 trên khoảng (a,b), $x_0 \in (a,b)$ thì $\forall x \in [a,b]$ tồn tại $\theta : 0 < \theta < 1$, sao cho*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ + \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned} \tag{A.14}$$

Công thức (A.14) được gọi là công thức Taylor hay khai triển Taylor hữu hạn của hàm f tại x_o với phần dư dạng Lagrange.

Với $x_o = 0$ công thức (A.14) trở thành

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{A.15}$$

Công thức (A.15) được gọi là công thức Maclaurin hay khai triển Maclaurin hữu hạn của hàm f.

Bạn đọc có thể kiểm tra lại rằng, định lý A.8 vẫn đúng với điều kiện yếu hơn là hàm f liên tục trên đoạn $[a,b]$, khả vi đến cấp n+1 trên khoảng (a,b). Một dạng khác của công thức Taylor được cho trong định lý sau.

◊ **Định lý A.9.** *(Công thức Taylor với phần dư dạng Peano). Nếu hàm f có đạo hàm đến cấp n-1 ($n \in \mathbb{N}^*$) trên (a,b), có đạo hàm cấp n tại $x_0 \in (a,b)$ thì*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \tag{A.16}$$

trong đó $o((x-x_0)^n)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $(x-x_0)^n$ khi $x \to x_0$ [1, tr. 87].

Δ.Với $n = 1$ giả thiết của định lý có nghĩa là hàm f có đạo hàm tại x_o. Theo nhận xét A.1 ta có biểu diễn

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

trong đó $o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ [1, tr. 87]. Đặt $x = x_0 + \Delta x$. Ta có $\Delta x = x - x_0, \Delta x \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$. Do đó công thức cuối cùng có thể viết lại dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),$$

trong đó $o(x-x_0)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $(x-x_0)$ khi $x \to x_0$ [1, tr. 87], tức là định lý A.9 đúng với $n = 1$. Giả sử định lý A.9 đúng với $n = k \geq 1$. Với $n = k+1$ đặt

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - ... - \tfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1},$$

ta có

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) - \tfrac{f''(x_0)}{1!}(x-x_0) - ... - \tfrac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho hàm $f'(x)$ ta được

$$f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) - ... - \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = o((x - x_0)^k),$$

tức là $g'(x) = o((x - x_0)^k)$. Theo định lý lagrange $\forall x \in (a, b)\backslash\{x_0\}$ tồn tại c ở giữa x_o và x sao cho $g(x) - g(x_0) = g'(c)(x - x_0) \Leftrightarrow g(x) = g'(c)(x - x_0)$ vì $g(x_0) = 0$. Từ đó ta có

$$g(x) = o((c - x_0)^k)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{g(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = \frac{o((c-x_0)^k)(x-x_0)}{(x-x_0)^{k+1}} = \frac{o((c-x_0)^k)}{(c-x_0)^k}\frac{(c-x_0)^k}{(x-x_0)^k}$$

$$\Rightarrow |\frac{g(x)}{(x-x_0)^{k+1}}| = |\frac{o((c-x_0)^k)}{(c-x_0)^k}|.|\frac{(c-x_0)^k}{(x-x_0)^k}| \leq |\frac{o((c-x_0)^k)}{(c-x_0)^k}|$$

$$\Rightarrow |\frac{g(x)}{(x-x_0)^{k+1}}| \leq |\frac{o((c-x_0)^k)}{(c-x_0)^k}|$$

Khi $x \to x_0$ thì $c \to x_0$ vì c ở giữa x_o và x, do đó $\lim\limits_{x\to x_0} |\frac{o((c-x_0)^k)}{(c-x_0)^k}| = 0$. Vì vậy từ bất đẳng thức cuối cùng ở trên suy ra $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^{k+1}} = 0$, tức là $g(x) = o((x - x_0)^{k+1})$ hay

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1} + o((x - x_0)^{k+1})$$

khi $x \to x_0$. Vậy định lý A.9 đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học định lý A.9 đúng với mọi n nguyên dương □.

Trong phần cuối cùng của mục này chúng tôi giới thiệu khai triển Maclaurin của một số hàm số.

(a) Khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = e^x$. Ta có

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{A.17}$$

Thật vậy, ta có $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1, \forall k = \overline{0, n}, f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$. Do đó áp dụng công thức (A.15) ta nhận được công thức (A.17).

(b) Khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = \sin x$. Ta có

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n\frac{\sin(\theta x)}{(2n)!}x^{2n} \tag{A.18}$$

Thật vậy, bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $f^{(k)}(x) = sin(x + \frac{k\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{N}$. Từ đó, một mặt ta có $f^{(k)}(0) = sin\frac{k\pi}{2}, \forall k = \overline{0, 2n-1}$. Suy ra

$$f^{(2m)}(0) = sin\frac{2m\pi}{2} = sin(m\pi) = 0 \Rightarrow f^{(2m)}(0) = 0, \forall m = \overline{0, n-1};$$

$$f^{(2m-1)}(0) = sin\frac{(2m-1)\pi}{2} = (-1)^{m-1} \Rightarrow f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}, \forall m = \overline{0, n}.$$

Mặt khác ta có

$$f^{(2n)}(\theta x) = sin(\theta x + \frac{2n\pi}{2}) = (-1)^n sin(\theta x) \Rightarrow f^{(2n)}(\theta x) = (-1)^n sin(\theta x).$$

Do đó áp dụng công thức (A.15) ta nhận được công thức (A.18).

(c) Khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = \cos x$. Ta có

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{A.19}$$

Chứng minh công thức (A.19) tương tự chứng minh công thức (A.18). Ở đây ta dựa vào kết quả $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2}), \forall k \in \mathbb{N}$ mà ta có thể nhận được bằng phương pháp quy nạp.

(d) Khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = (1+x)^\alpha$. Ta có

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \tfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \tfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad \text{(A.20)}$$

Thật vậy, dễ thấy $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$f(0) = 1, f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) \forall k = \overline{1,n}, f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Thay các kết quả trên vào công thức (A.15) ta nhận được công thức (A.20).

Đặc biệt với $\alpha = -1$ ta có

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\tfrac{1}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1}.$$

Thay x bởi $-x$ ta nhận được khác

$$\tfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \tfrac{1}{(1-\theta x)^{n+2}}x^{n+1}.$$

(e) Khai triển Maclaurin của hàm $f(x) = \ln(1+x)$. Ta có

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n} + (-1)^n \tfrac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}. \quad \text{(A.21)}$$

Thật vậy, ta có $f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$,
do đó $f^{(k)}(x) = (k-1)!(-1)^{k-1}(1+x)^{-k}, \forall k \in \mathbb{N}^*$. Ta suy ra

$$f(0) = 0, f^{(k)}(0) = (k-1)!(-1)^{k-1}, \forall k = \overline{1,n}, f^{(n+1)}(\theta x) = n!(-1)^n(1+\theta x)^{-n-1}.$$

Thay các kết quả trên vào công thức (A.15) ta nhận được công thức (A.21).

Áp dụng định lý A.9 ta còn có thể nhận được các công thức khác khá thuận tiện, bên cạnh các công thức từ (A.17) đến (A.21). Chẳng hạn áp dụng định lý A.9 ta nhận được công thức sau bên cạnh công thức (A.17)

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + ... + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

khi $x \to 0$. Sử dụng các công thức dạng này trong nhiều trường hợp ta có thể tính giới hạn của hàm số một cách khá nhanh gọn.

A.2.3.2. Một số ứng dụng của các định lý về giá trị trung bình

Trong mục này chúng tôi đưa ra hai ứng dụng của các định lý về giá trị trung bình là áp dụng quy tắc L'Hospital tính giới hạn của hàm số và sử dụng các định lý về giá trị trung bình khảo sát sự biến thiên của hàm số.

A.2.3.2.1. Quy tắc L'Hospital

◊ **Định lý A.10.** *(Quy tắc L'Hospital 1). Giả sử các hàm f, g khả vi trên khoảng (a,b) nào đó chứa $x_o \in \mathbb{R}$ có thể trừ tại x_o. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0, g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$, và giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ cũng tồn tại và $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Δ.Vì f, g khả vi trên $(a,b)\backslash\{x_0\}$ nên f,g liên tục trên $(a,b)\backslash\{x_0\}$. Nếu f không xác định tại x_o thì ta bổ sung giá trị của nó tại x_o bằng cách đặt $f(x_0)=0$. Tương tự đối với hàm g. Khi đó từ giả thiết suy ra các hàm f,g còn liên tục tại x_o. Giả sử $x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$. Theo định lý Cauchy, tồn tại c ở giữa x_o và x sao cho

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

vì $f(x_0)=g(x_0)=0$. Cho $x\to x_o$ thì $c\to x_o$ vì c ở giữa x và x_o. Khi đó $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ có giới hạn theo giả thiết. Suy ra $\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng có giới hạn và giới hạn của nó bằng giới hạn của $\frac{f'(c)}{g'(c)}$. Vậy khi $x\to x_o$ biểu thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ có giới hạn và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\square$.

$\Diamond$ **Định lý A.11.** *(Quy tắc L'Hospital 2). Giả sử các hàm f,g khả vi trên khoảng (a,b) nào đó chứa $x_o\in\mathbb{R}$ có thể trừ tại x_o. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty, g'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$ và giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ cũng tồn tại và $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Δ.Vì $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ nên $g(x)\neq 0$ với mọi x đủ gần x_o. Không mất tổng quát có thể giả thiết $g(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)\backslash\{x_0\}$. Đặt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l. \tag{A.22}$$

Giả sử $\varepsilon>0$. Do (A.22) tồn tại $\Delta>0$ sao cho $x_0+\Delta<b$ và $\forall c\in(x_0,x_0+\Delta)$

$$|\frac{f'(c)}{g'(c)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{A.23}$$

Giả sử $x,y\in(x_0,x_0+\Delta), x\neq y$. Theo định lý Cauchy, tồn tại c ở giữa x và y sao cho

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Từ đẳng thức trên và (A.23) suy ra

$$|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\Leftrightarrow |(f(x)-f(y))-l(g(x)-g(y))|<\frac{\varepsilon}{2}|g(x)-g(y)|.$$

Khi $x=y\in(x_0,x_0+\Delta)$ thì hai vế của bất đẳng thức cuối cùng bằng nhau vì đều bằng 0. Vậy $\forall x,y\in(x_o,x_o+\Delta)$ ta có $|(f(x)-f(y))-l(g(x)-g(y))|\leq\frac{\varepsilon}{2}|g(x)-g(y)|$.

Kết hợp bất đẳng thức cuối cùng với bất đẳng thức

$$|f(x)-lg(x)|\leq|(f(x)-f(y))-l(g(x)-g(y))|+|f(y)-lg(y)|$$

ta được

$$|f(x)-lg(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}|g(x)-g(y)|+|f(y)-lg(y)|.$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho $|g(x)|>0$ ta được

$$|\frac{f(x)}{g(x)}-l|\leq\frac{\varepsilon}{2}|1-\frac{g(y)}{g(x)}|+|\frac{f(y)-lg(y)}{g(x)}|.$$

Khi $x\to x_0^+$ thì vì $g(x)\to\infty$ theo giả thiết, vế phải của bất đẳng thức trên dần đến $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Do đó, với y cố định thuộc khoảng $(x_0,x_0+\Delta)$ tồn tại δ thỏa mãn $0<\delta<\Delta$ sao cho $\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ ta có

$$|\frac{f(x)}{g(x)}-l|<\varepsilon,$$

có nghĩa là $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Chứng minh tương tự ta được $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$, do đó $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. Đẳng thức này cùng đẳng thức (A.22) chứng minh khẳng định của định lý $\square$.

Nhận xét A.7. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$ hoặc nếu $x_0=\infty$ thì định lý A.10 và A.11 vẫn đúng.

Sau đây là một số ví dụ áp dụng các quy tắc L'Hospital.

•Ví dụ A.10.

(a) Xét $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$. Áp dụng quy tắc L'Hospital 1 (định lý A.10) ba lần ta được

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=6\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=6$.

(b) Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$ với $\alpha>0$. Áp dụng quy tắc L'Hospital 2 (định lý A.11) ta được

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

(c) Xét $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}]$. Ta có $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\cot(\pi x/4)}$. Do đó áp dụng quy tắc L'Hospital 1 (định lý A.10) ta được

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}[(x^2-4)\tan\tfrac{\pi x}{4}] &= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)'}{(\cot(\pi x/4))'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{-(\pi/4)(\sin^2(\pi x/4))^{-1}}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{2x.4\sin^2(\pi x/4)}{-\pi}=-\frac{16}{\pi}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}]=-\frac{16}{\pi}$.

Chú ý rằng, các định lý A.10 và A.11 khẳng định sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ kéo theo sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, nhưng không khẳng định điều ngược lại. Vì vậy, khi giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại chưa thể nói được gì về sự tồn tại của giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Sau đây là một ví dụ khi $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ tồn tại nhưng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ không tồn tại. Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}[1+\frac{\sin x}{x}]=1$$

vì $|\frac{\sin x}{x}|\le\frac{1}{x}\forall x>0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$. Còn

$$\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=1+\cos x$$

không có giới hạn khi $x\to+\infty$ vì giá trị của hàm $1+\cos x$ tại các dãy dần đến $+\infty$ là $2n\pi$ và $(2n+1)\pi$ lần lượt là $1+\cos(2n\pi)=2$ và $1+\cos((2n+1)\pi)=0$ có các giới hạn khác nhau là 2 và 0.

A.2.3.2.2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Các định lý được xét trong mục này là các công cụ để khảo sát sự đơn điệu [1, tr. 46] và để tìm cực trị của hàm số. Trước tiên là định lý về sự đơn điệu của hàm số.

◊ **Định lý A.12.** *Giả sử hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b). Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ thì f tăng nghiêm ngặt trên $[a, b]$. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$ thì f giảm nghiêm ngặt trên $[a, b]$.*

Δ.Giả sử $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ và $x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Vì $f'(c) > 0$ theo giả thiết và $x_2 - x_1 > 0$ theo cách chọn x_1, x_2 nên $f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$. Suy ra f tăng nghiêm ngặt trên $[a, b]$. Phần thứ hai của định lý được chứng minh tương tự □.

Tiếp theo ta có định lý về cực trị của hàm số.

◊ **Định lý A.13.** *Giả sử hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) trừ một số hữu hạn điểm. Giả sử $x_0 \in (a, b)$.*

(a) Nếu khi x vượt qua x_o và $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì f có cực đại tại x_o;

(b) Nếu khi x vượt qua x_o và $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì f có cực tiểu tại x_o;

(c) Nếu khi x vượt qua x_o và $f'(x)$ không đổi dấu thì f không có cực trị tại x_o.

Δ.Trước tiên ta chứng minh khẳng định (a). Từ các giả thiết về hàm f suy ra tồn tại số dương ε sao cho $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, hàm f khả vi tại mọi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$, $f'(x)$ dương khi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $f'(x)$ âm khi $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Với $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ thì hàm f tăng nghiêm ngặt trên $[x_1, x_0]$ theo định lý A.12 nên $f(x_1) < f(x_0)$, với $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ thì hàm f giảm nghiêm ngặt trên $[x_0, x_2]$ theo định lý A.12 nên $f(x_2) < f(x_0)$, do đó $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$, tức là x_o là điểm cực đại của hàm f.

Khẳng định (b) được chứng minh tương tự.

Để chứng minh khẳng định (c) trước tiên ta thấy từ các giả thiết về hàm f suy ra tồn tại số dương ε sao cho $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$, hàm f khả vi tại mọi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$ và có đạo hàm $f'(x)$ không đổi dấu khi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$. Giả sử $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. Nếu $f'(x)$ dương khi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$ thì chứng minh tương tự phần (a) ta có $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, suy ra x_o không là điểm cực trị của hàm f. Tương tự nếu $f'(x)$ âm khi $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \backslash \{x_0\}$ thì x_o cũng không là điểm cực trị của hàm f □.

Bên cạnh định lý A.13 ta cũng có thể sử dụng định lý sau để tìm cực trị của hàm số.

◊ **Định lý A.14.** *Giả sử $n \in \mathbb{N}^*$, hàm f khả vi đến cấp $n-1$ trên khoảng (a, b) nào đó chứa x_o và khả vi cấp n tại x_o. Ngoài ra giả sử $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Khi đó*

(a) Nếu n chẵn thì x_o là điểm cực trị của hàm f. Hơn thế nữa, nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì x_o là điểm cực tiểu của hàm f, nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì x_o là điểm cực đại của hàm f.

(b) Nếu n lẻ thì x_o không là điểm cực trị của hàm f.

Δ.Theo định lý A.9 ta có

$$f(x) = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

trong đó $o((x - x_0)^n)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $(x - x_0)^n$ khi $x \to x_0$ [1, tr. 87]. Từ đó và các giả thiết của định lý A.14 suy ra

$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n[\tfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)],$$

trong đó ký hiệu $o(1)$ chỉ hàm số dần đến 0 khi $x \to x_o$. Khi $x \to x_o$ thì $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ nên với x đủ gần x_o và $x \neq x_0$ dấu của $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)$ được xác định bởi dấu của $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Suy ra dấu của $(x - x_0)^n[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)]$ hay của $f(x) - f(x_0)$ được xác định bởi dấu của $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Giả sử n chẵn. Khi đó $(x - x_0)^n > 0$ với mọi x đủ gần x_o và $x \neq x_o$. Nếu $f^{(n)}(x_0) > 0$ thì $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n > 0$, do đó $f(x) - f(x_0) > 0$ với mọi x đủ gần x_o và $x \neq x_o$, suy ra x_o là điểm cực tiểu của hàm f. Nếu $f^{(n)}(x_0) < 0$ thì $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n < 0$, do đó $f(x) - f(x_0) < 0$ với mọi x đủ gần x_o và $x \neq x_o$, suy ra x_o là điểm cực đại của hàm f.

Giả sử n lẻ. Khi đó $(x - x_0)^n$ đổi dấu, do đó $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ đổi dấu khi x vượt qua x_o, x đủ gần x_o. Suy ra $f(x) - f(x_0)$ đổi dấu khi x vượt qua x_o, x đủ gần x_o, do đó x_o không là điểm cực trị của hàm f □.

A.3. Phép tính tích phân hàm một biến

Các nội dung chính của bài này là tích phân bất định, tích phân xác định và tích phân suy rộng trong trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn.

A.3.1. Tích phân bất định

A.3.1.1. Nguyên hàm và tích phân bất định

A.3.1.1.1. Định nghĩa nguyên hàm và tích phân bất định

Trong mục 1.2.1.1 ta đã biết nếu chuyển động thẳng có quãng đường đi là hàm số $s = f(t)$ của thời gian t thì vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $v(t) = f'(t)$. Vậy nếu biết vận tốc tức thời của chuyển động thẳng tại thời điểm t là $v(t)$ thì để tìm quãng đường đi của chuyển động ta phải tìm hàm $f(t)$ sao cho đạo hàm $f'(t)$ của nó bằng $v(t)$ với mọi t. Bài toán này là một trong các bài toán dẫn đến định nghĩa sau về nguyên hàm của hàm số.

⋆ **Định nghĩa A.14.** Giả sử hàm f xác định trên khoảng (a, b). Ta nói hàm F xác định trên khoảng (a, b) là một nguyên hàm của hàm f nếu hàm F khả vi trên (a, b) và $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$.

♢ **Định lý A.15.** *Giả sử F là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a, b). Khi đó*

(a) Với mọi hằng số C hàm $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên (a, b);

(b) Nếu Φ cũng là nguyên hàm của hàm f trên (a, b) thì tồn tại hằng số C sao cho $\Phi(x) = F(x) + C, \forall x \in (a, b)$.

Δ.(a) Ta có $(F(x)+C)' = F'(x)+(C)' = f(x)+0 = f(x) \Rightarrow (F(x)+C)' = f(x), \forall x \in (a, b)$. Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm của hàm f trên (a, b).
(b) Giả sử Φ cũng là nguyên hàm của hàm f trên (a, b). Đặt $G(x) = \Phi(x) - F(x)$. Ta có

$$G'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow G'(x) = 0, \forall x \in (a, b).$$

Giả sử $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$. Theo định lý Lagrange

$$\exists c \in (x_1, x_2) : G(x_2) - G(x_1) = G'(c)(x_2 - x_1) = 0.(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Rightarrow G(x_2) - G(x_1) = 0 \Rightarrow G(x_1) = G(x_2).$$

Suy ra $G(x)$ là hàm hằng, tức là tồn tại hằng số C, sao cho $G(x) = C, \forall x \in (a,b)$ hay $\Phi(x) - F(x) = C, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow \Phi(x) = F(x) + C, \forall x \in (a,b)$ $\square$.

Như vậy tập các hàm $F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$ trùng với tập các nguyên hàm của hàm f. Ta có định nghĩa sau.

⋆ **Định nghĩa A.15.** Giả sử F là một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a,b). Biểu thức $F(x) + C$ với C là hằng số bất kỳ được gọi là tích phân bất định của hàm f trên khoảng (a,b), và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Dấu $\int$ được gọi là dấu tích phân, x được gọi là biến lấy tích phân, $f(x)$ được gọi là hàm số lấy tích phân, $f(x)dx$ được gọi là biểu thức dưới dấu tích phân.

Ta thấy nếu biết một nguyên hàm của hàm f trên khoảng (a,b) thì có thể biết tất cả các nguyên hàm của hàm số ấy. Vấn đề là hàm số f nào có nguyên hàm trên khoảng (a,b). Hay tổng quát hơn hàm số nào có nguyên hàm trên một tập số thực liên thông. Nhận xét A.8 mục 1.3.2.4 cho thấy mọi hàm số xác định liên tục trên đoạn $[a,b]$ có nguyên hàm trên đoạn ấy.

A.3.1.1.2. Các tính chất của tích phân bất định

Tính chất 1. Nếu hàm f có nguyên hàm trên khoảng (a,b) thì với k là hằng số khác 0 hàm $k.f$ cũng có nguyên hàm trên khoảng (a,b) và

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \tag{A.24}$$

Tính chất 2. Nếu các hàm f,g có nguyên hàm trên khoảng (a,b) thì hàm $f+g$ cũng có nguyên hàm trên khoảng (a,b) và

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \tag{A.25}$$

Δ.Ta chứng minh (A.24). Giả sử F là nguyên hàm của f trên (a,b). Thế thì vế phải của (A.24) là $k(F+C)$ với $C \in \mathbb{R}$. Mặt khác $(kF)' = k(F)' = kf$, suy ra $k.F$ là nguyên hàm của $k.f$, do đó vế trái của (A.24) là $kF + D$ với $D \in \mathbb{R}$. Mỗi hàm số có dạng $k(F+C)$ đều có dạng $kF + D$ với $D = kC$. Ngược lại mỗi hàm số có dạng $kF + D$ đều có dạng $k(F+C)$ với $C = \frac{D}{k}$. Tức là hai vế của (A.24) trùng nhau.

Bây giờ ta chứng minh (A.25). Giả sử F, G lần lượt là nguyên hàm của f, g trên (a,b). Thế thì vế phải của (A.25) là $F + C_1 + G + C_2$ với $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Mặt khác $(F+G)' = F' + G' = f + g$, suy ra $F + G$ là nguyên hàm của $f + g$, do đó vế trái của (A.25) là $F + G + C$ với $C \in \mathbb{R}$. Mỗi hàm số có dạng $F + C_1 + G + C_2$ đều có dạng $F + G + C$ với $C = C_1 + C_2$. Ngược lại mỗi hàm số có dạng $F + G + C$ đều có dạng $F + C_1 + G + C_2$ với C_1 là số thực nào đó, còn $C_2 = C - C_1$. Tức là hai vế của (A.25) trùng nhau $\square$.

A.3.1.2. Các phương pháp tính tích phân bất định

A.3.1.2.1. Phương pháp đổi biến

Khi tính tích phân bất định đôi khi cần dùng phương pháp đổi biến. Dưới đây chúng tôi trình bày hai dạng đổi biến khi tính tích phân bất định.

◊ **Định lý A.16.** *(Đổi biến dạng 1)***.** *Giả sử* *(i) Hàm f xác định trên khoảng (a,b), $f(x)dx = g(u(x))u'(x)dx, \forall x \in (a,b)$, $u(x)$ khả vi trên (a,b) và $u'(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên (a,b);*

(ii) $\int g(t)dt = G(t) + C$ trên tập $I = \{u(x) | x \in (a,b)\}$.

Khi đó

$$\int f(x)dx = G(u(x)) + C.$$

Δ.Vì $u(x)$ khả vi trên (a,b) nên $u(x)$ liên tục trên (a,b) theo nhận xét A.2. Do đó ảnh I của (a,b) qua hàm $u(x)$ là tập liên thông [2, tr. 103], tức là có một trong 4 dạng sau: 1) $[m,M]$; 2) $[m,M)$; 3) $(m,M]$; 4) (m,M) [2, tr. 54]. Nếu I có một trong các dạng 2) 3) 4) thì $m < M$. Vì $u'(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên (a,b) nên $u(x)$ không là hàm hằng, do đó nếu I có dạng 1) thì ta cũng có $m < M$. Vì vậy việc xét tích phân $\int g(t)dt$ trên I là có ý nghĩa.

Đặt $F(x) = G(u(x))$. Giả sử $x_0 \in (a,b), t_0 = u(x_0)$. Nếu $t_0 \in (m,M)$ thì theo định lý A.2 về đạo hàm hàm hợp ta có

$$F'(x_0) = G'(t_0)u'(x_0) = g(t_0)u'(x_0) = g(u(x_0))u'(x_0) = f(x_0) \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0).$$

Nếu m hữu hạn, $m \in I$ và $t_0 = m$ thì theo nhận xét A.5 ta có

$$F'(x_0) = G'_+(t_0)u'(x_0) = g(t_0)u'(x_0) = g(u(x_0))u'(x_0) = f(x_0) \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0).$$

Tương tự nếu M hữu hạn, $M \in I$ và $t_0 = M$ thì $F'(x_0) = f(x_0)$. Như vậy $F'(x_0) = f(x_0)$ trong mọi trường hợp, suy ra $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ $\square$.

$\Diamond$ **Định lý A.17.** *(Đổi biến dạng 2). Giả sử*

(i) $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ là song ánh, φ có đạo hàm không đổi dấu trên (α,β);

(ii) $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + C$ trên (α,β).

Khi đó

$$\int f(x)dx = G(u(x)) + C,$$

trong đó $t = u(x)$ là hàm ngược của hàm $x = \varphi(t)$.

Δ.Đặt $F(x) = G(u(x))$. Hàm $t = u(x)$ có đạo hàm trên (a,b) thỏa mãn $u'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$ theo định lý A.3 về đạo hàm hàm ngược, hàm $G(t)$ có đạo hàm thỏa mãn $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ với mọi $t \in (\alpha,\beta)$ theo giả thiết (ii). Suy ra hàm F có đạo hàm là

$$F'(x) = G'(u(x))u'(x) = f(\varphi(t))\varphi'(t)\tfrac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Từ đó suy ra khẳng định của định lý $\square$.

•Ví dụ A.11.

(a) Tính $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$. Ta có

$$\int \tfrac{dx}{x^2-a^2} = \int [\tfrac{1}{2a}(\tfrac{1}{x-a} - \tfrac{1}{x+a})]dx = \tfrac{1}{2a}\int \tfrac{dx}{x-a} - \tfrac{1}{2a}\int \tfrac{dx}{x+a}$$

$$\Rightarrow \int \tfrac{dx}{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2a}\int \tfrac{dx}{x-a} - \tfrac{1}{2a}\int \tfrac{dx}{x+a}.$$

Xét tích phân thứ nhất ở vế phải của đẳng thức cuối cùng. Đặt $t = x - a$. Ta có $dt = dx$, suy ra $\frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2a}\ln|t| + C_1 = \frac{1}{2a}\ln|x-a| + C_1 \Rightarrow \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| + C_1$.

Tương tự ta có $\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=\frac{1}{2a}\ln|x+a|+C_2$. Suy ra

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|x-a|+C_1-\frac{1}{2a}\ln|x+a|-C_2=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C_1-C_2$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}|+C,$$

với $C=C_1-C_2$ là hằng số bất kỳ.

(b) Tính $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. Ta có $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\frac{(x+\sqrt{x^2+a})dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+a}\Rightarrow dt=\frac{(x+\sqrt{x^2+a})dx}{\sqrt{x^2+a}}$, do đó

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

(c) Tính $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, a>0$. Tập xác định của hàm dưới dấu tích phân là $-a<x<a$.

Đặt $x=a\sin t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Dễ thấy phép đổi biến này thỏa mãn điều kiện (i) của định lý A.17. Ta có $dx=a\cos t dt, \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a|\cos t|=a\cos t$ vì $\cos t>0$ do $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. Suy ra

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos t dt}{a\cos t}=\int dt=t+C\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=t+C.$$

Ta có $x=a\sin t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\arcsin\frac{x}{a}$.

Vậy $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

(d) Tính $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

Hàm dưới dấu tích phân xác định với mọi x. Đặt $x=a\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.

Ta có $dx=\frac{adt}{\cos^2 t}, a^2+x^2=a^2+a^2\tan^2 t=a^2(1+\tan^2 t)=\frac{a^2}{\cos^2 t}$. Suy ra

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{adt}{\cos^2 t}.\frac{1}{a^2/\cos^2 t}=\int\frac{dt}{a}=\frac{1}{a}t+C\Rightarrow\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}t+C.$$

Ta có $x=a\tan t, -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=\arctan\frac{x}{a}$.

Vậy $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

A.3.1.2.2. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng (a,b). Khi đó $u.v$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) và thỏa mãn

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

với mọi $x\in(a,b)$. Các số hạng ở vế phải của đẳng thức trên đều liên tục nên có nguyên hàm trên khoảng (a,b). Do đó theo tính chất thứ hai của tích phân bất định ta có

$$\int(u(x)v(x))'dx=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx.$$

Tích phân ở vế trái của đẳng thức trên bằng $u(x)v(x)$ vì đạo hàm của $u(x)v(x)$ bằng hàm số dưới dấu tích phân (hằng số của tích phân ở vế trái ta dồn sang các tích phân ở vế phải của đẳng thức trên). Từ đó thay $u'(x)dx=du(x), v'(x)dx=dv(x)$ ta được

$$u(x)v(x)=\int v(x)du(x)+\int u(x)dv(x)\Rightarrow\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x).$$

Vậy ta có công thức sau, gọi là công thức tích phân từng phần

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

•Ví dụ A.12.

(a) Tính $\int \sqrt{x^2+a}dx$.

Đặt $u = \sqrt{x^2+a}$ và chọn v sao cho $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}$ và có thể chọn $v = x$. Ta có

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a}dx &= x\sqrt{x^2+a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}\\ &= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + \int \frac{adx}{\sqrt{x^2+a}}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\int \sqrt{x^2+a}dx = x\sqrt{x^2+a} + \int \frac{adx}{\sqrt{x^2+a}} \Rightarrow \int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Từ đó áp dụng kết quả của ví dụ A.11 phần (b) ta được

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$$

(b) Tính $\int \sqrt{a^2-x^2}dx, a > 0$.

Đặt $u = \sqrt{a^2-x^2}$ và chọn v sao cho $dv = dx$. Khi đó $du = \frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ và có thể chọn $v = x$. Ta có

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\frac{-xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}\\ &= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}dx + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\int \sqrt{a^2-x^2}dx = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Từ đó áp dụng kết quả của ví dụ A.11 phần (c) ta được

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

1.3.1.2.3. Bảng tích phân cơ bản

Từ bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản (mục 1.2.1.2.3) và các kết quả của mục 1.3.1.2 ta nhận được bảng tích phân các hàm thông dụng sau.

$\int 0dx = C;$ $\int dx = x + C$;
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$ $\int e^x dx = e^x + C$;
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$ $\int \cos x dx = \sin x + C$;
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C;$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$ $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C;$ $\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C.$

A.3.2. Tích phân xác định

A.3.2.1. Định nghĩa tích phân xác định

Trong mục này ta cần khái niệm về cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập số thực. Cho E là tập số thực khác rỗng. Nếu tồn tại số y sao cho $x \leq y, \forall x \in E$ thì tập E được gọi là bị chặn trên, và số y được gọi là cận trên của tập E.

Cận dưới được định nghĩa tương tự. Nếu tập E bị chặn trên và bị chặn dưới thì E được gọi là bị chặn.

⋆ **Định nghĩa A.16.** Nếu tập E bị chặn trên thì cận trên nhỏ nhất trong số các cận trên được gọi là cận trên đúng của E và được ký hiệu là $\sup E$ hoặc $\sup\limits_{x \in E}\{x\}$. Nếu tập E bị chặn dưới thì cận dưới lớn nhất trong số các cận dưới được gọi là cận dưới đúng của E và được ký hiệu là $\inf E$ hoặc $\inf\limits_{x \in E}\{x\}$.

Từ định nghĩa trên dễ thấy mỗi tập số thực có không quá một cận trên đúng, và không quá một cận dưới đúng. Sự tồn tại của cận trên đúng được chứng minh trong [2, định lý 1.36]. Sự tồn tại của cận dưới đúng được chứng minh tương tự.

⋆ **Định nghĩa A.17.** Giả sử hàm f xác định và bị chặn trên đoạn $[a, b]$, a < b. Chia đoạn $[a, b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm $x_0, x_1, ..., x_n : x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$. Tập $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ được gọi là một phân điểm của đoạn $[a, b]$. Đặt

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1, n},$$

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}, i = \overline{1, n},$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}, i = \overline{1, n},$$

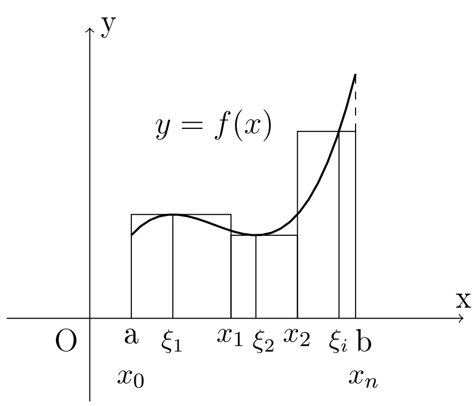
$$U(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

$$U = \inf U(\mathcal{P}) \tag{A.26}$$

$$L = \sup L(\mathcal{P}) \tag{A.27}$$

trong đó cận trên đúng và cận dưới đúng lấy theo tất cả các phân điểm của đoạn $[a, b]$.



Hình A.4

Nếu $U = L$ thì ta nói hàm f khả tích trên $[a, b]$, giá trị chung của các đại lượng (A.26) và (A.27) sẽ được ký hiệu là

$$\int_a^b f(x)dx \tag{A.28}$$

và được gọi là tích phân xác định của hàm f trên đoạn $[a, b]$. Các ký hiệu $a, b, x, f(x), f(x)dx$ lần lượt được gọi là cận dưới, cận trên, biến lấy tích phân, hàm số lấy tích phân, biểu thức dưới dấu tích phân.

Ta định nghĩa thêm:

Nếu $a > b$ và hàm f khả tích trên đoạn [b, a], thì $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, còn nếu $a = b$ và hàm f xác định tại a, thì $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Vì hàm f bị chặn nên tồn tại các số m và M sao cho

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b].$$

Nghĩa là với mọi phân điểm $\mathcal{P}$

$$m(b-a) \leq L(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P}) \leq M(b-a),$$

vì vậy các số $U(\mathcal{P})$ và $L(\mathcal{P})$ tạo thành các tập bị chặn. Điều đó chứng tỏ rằng các đại lượng (A.26) và (A.27) tồn tại. Vấn đề về sự trùng nhau giữa các đại lượng ấy, hay tính khả tích của hàm f trên đoạn $[a, b]$, là vấn đề tinh tế hơn. Ta sẽ xem xét vấn đề ấy trong phần tiếp theo.

A.3.2.2. Điều kiện khả tích

Ta gọi phân điểm $\mathcal{Q}$ của đoạn $[a, b]$ là sự tán nhỏ của $\mathcal{P}$ nếu $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$. Trước tiên giả sử $\mathcal{Q}$ chứa nhiều hơn $\mathcal{P}$ đúng một điểm. Ký hiệu điểm mới ấy là x^*. Giả sử $x_{i-1} < x^* < x_i$ với x_{i-1} và x_i là hai điểm liên tiếp của phân điểm $\mathcal{P}$. Đặt

$$\omega_1 = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x^*]\},$$

$$\omega_2 = \inf\{f(x) | x \in [x^*, x_i]\}.$$

Rõ ràng là $\omega_1 \geq m_i$ và $\omega_2 \geq m_i$, trong đó, vẫn như trước

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Tức là

$$\begin{aligned} L(\mathcal{Q}) - L(\mathcal{P}) &= \omega_1(x^* - x_{i-1}) + \omega_2(x_i - x^*) - m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= (\omega_1 - m_i)(x^* - x_{i-1}) + (\omega_2 - m_i)(x_i - x^*) \geq 0, \end{aligned}$$

hay $L(Q) \geq L(P)$. Nếu $\mathcal{Q}$ chứa nhiều hơn $\mathcal{P}$ k điểm thì lặp lại lập luận trên k lần ta nhận được

$$L(\mathcal{P}) \leq L(\mathcal{Q}) \tag{A.29}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$U(\mathcal{Q}) \leq U(\mathcal{P}) \tag{A.30}$$

◊ **Định lý A.18.** *Số U trong công thức* (A.26) *và số L trong công thức* (A.27) *thỏa mãn*

$$L \leq U.$$

Δ. Giả sử $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ là hai phân điểm của $[a,b]$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Theo (A.29) và (A.30)

$$L(\mathcal{P}_1) \le L(\mathcal{P}) \le U(\mathcal{P}) \le U(\mathcal{P}_2).$$

Tức là

$$L(\mathcal{P}_1) \le U(\mathcal{P}_2) \tag{A.31}$$

Coi $\mathcal{P}_2$ cố định, lấy cận trên đúng của tập $\{L(\mathcal{P}_1)\}$ theo tất cả các phân điểm $\mathcal{P}_1$, từ (A.31) ta nhận được

$$L \le U(\mathcal{P}_2) \tag{A.32}$$

Lấy cận dưới đúng của tập $\{U(\mathcal{P}_2)\}$ theo tất cả $\mathcal{P}_2$ trong (A.32) ta nhận được khẳng định của định lý $\square$.

$\diamondsuit$ **Định lý A.19.** *Hàm f khả tích trên đoạn $[a,b]$ khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại phân điểm $\mathcal{P}$ sao cho*

$$U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{A.33}$$

Δ. Với mọi phân điểm $\mathcal{P}$ ta có

$$L(\mathcal{P}) \le L \le U \le U(\mathcal{P}).$$

Vì vậy từ (A.33) suy ra $\forall \varepsilon > 0$ có bất đẳng thức:

$$0 \le U - L < \varepsilon. \tag{A.34}$$

Nghĩa là, với mọi $\varepsilon > 0$ bất đẳng thức (A.34) được thỏa mãn, do đó $U = L$, hay f khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Bây giờ giả sử f khả tích trên đoạn $[a,b]$ và cho số $\varepsilon > 0$. Khi đó tồn tại các phân điểm $\mathcal{P}_1$ và $\mathcal{P}_2$ thỏa mãn

$$U(\mathcal{P}_2) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \tag{A.35}$$

$$\int_a^b f(x)dx - L(\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{A.36}$$

Chọn $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$. Khi đó các bất đẳng thức (A.29), (A.30), (A.35), (A.36) cho thấy

$$U(\mathcal{P}) \le U(\mathcal{P}_2) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} < L(\mathcal{P}_1) + \varepsilon \le L(\mathcal{P}) + \varepsilon,$$

đối với phân điểm này (A.33) được thỏa mãn $\square$.

Sử dụng định lý A.19 người ta chứng minh được tính khả tích của ba lớp hàm quan trọng.

$\diamondsuit$ **Định lý A.20.** *Nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$.*

$\diamondsuit$ **Định lý A.21.** *Nếu hàm f bị chặn trên $[a,b]$ và có chỉ một số hữu hạn điểm gián đoạn trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$.*

$\diamondsuit$ **Định lý A.22.** *Nếu hàm f đơn điệu và bị chặn trên $[a,b]$ thì f khả tích trên $[a,b]$.*

Tiếp theo chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh một định lý cho phép tính tích phân xác định như là giới hạn của một tổng. Nhưng trước tiên chúng tôi đưa ra hai định nghĩa sau.

⋆ **Định nghĩa A.18.** Đường kính của phân điểm $\mathcal{P}$ là

$$\lambda(\mathcal{P}) = \max\{\Delta x_i | i = \overline{1,n}\}.$$

⋆ **Định nghĩa A.19.** Giả sử $\mathcal{P}$ là một phân điểm nào đó của đoạn $[a,b]$. Chọn các điểm t_i sao cho $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i = \overline{1,n}$, và xét tổng

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i. \tag{A.37}$$

Ta định nghĩa

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} S(P) = I, \tag{A.38}$$

nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ta có

$$|S(\mathcal{P}) - I| < \varepsilon. \tag{A.39}$$

Cần nói rõ thêm rằng vế phải của (A.37) ngoài phụ thuộc vào $\mathcal{P}$ còn phụ thuộc vào bộ các số t_i: $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, $i = \overline{1,n}$ nữa, nhưng để cho công thức đỡ cồng kềnh chúng tôi không thể hiện sự phụ thuộc ấy trong ký hiệu $S(\mathcal{P})$.

◊ **Định lý A.23.**

(a) Nếu tồn tại $\lim S(\mathcal{P})$ khi $\lambda(\mathcal{P}) \to 0$ thì hàm f khả tích trên $[a,b]$ và

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}) = \int_a^b f(x)dx. \tag{A.40}$$

(b) Nếu hàm f khả tích trên $[a,b]$ thì thỏa mãn (A.40).

Δ.Trước tiên giả sử rằng giới hạn ở vế trái của (A.40) tồn tại và bằng I. Giả sử $\varepsilon > 0$. Tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ ta có

$$I - \tfrac{\varepsilon}{2} < S(\mathcal{P}) < I + \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{A.41}$$

Chọn một phân điểm $\mathcal{P}$ sao cho $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$. Cho t_i chạy trên $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$, và lấy cận trên đúng và cận dưới đúng của các số $S(\mathcal{P})$ nhận được bằng cách ấy ta đi đến

$$I - \tfrac{\varepsilon}{2} \leq L(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P}) \leq I + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Theo định lý A.19 f khả tích trên $[a,b]$ và điều đó kết thúc chứng minh khẳng định (a) vì

$$L(\mathcal{P}) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(\mathcal{P}).$$

Để chứng minh khẳng định (b) giả sử rằng f khả tích trên $[a,b]$. Tồn tại $\mathcal{Q}$ sao cho

$$U(\mathcal{Q}) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4} \tag{A.42}$$

Đặt $M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$.

Chọn $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8Mn}$, trong đó n là số đoạn nhỏ của phân điểm $\mathcal{Q}$. Giả sử $\mathcal{P}$ là phân điểm bất kỳ, sao cho $\lambda(\mathcal{P}) < \delta_1$. Xét các tổng $U(\mathcal{P}), U(\mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$. Hai tổng ấy trùng nhau trên các đoạn con của $\mathcal{P}$ không chứa các điểm của $\mathcal{Q}$ ở phía trong. Trên các đoạn con của $\mathcal{P}$ có chứa các điểm của $\mathcal{Q}$ ở phía trong độ lệch của hai tổng ấy có giá trị tuyệt đối không vượt quá

$$(n-1)\max_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i 2M < \tfrac{(n-1)\varepsilon 2M}{8Mn} < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Kết hợp với (A.42) bất đẳng thức cuối cùng cho

$$U(\mathcal{P}) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{A.43}$$

với mọi $\mathcal{P}$ thỏa mãn $\lambda(\mathcal{P}) < \delta_1$.

Cũng bằng cách ấy ta có thể chứng minh tồn tại $\delta_2 > 0$ sao cho

$$L(\mathcal{P}) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{A.44}$$

với mọi $\mathcal{P}$ thỏa mãn $\lambda(\mathcal{P}) < \delta_2$.

Đặt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ta thấy (A.43) và (A.44) thỏa mãn với mọi $\mathcal{P}$ sao cho $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$.

Vì rõ ràng là

$$L(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P})$$

nên từ (A.43) và (A.44) suy ra

$$S(\mathcal{P}) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$S(\mathcal{P}) > \int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{2},$$

còn từ hai bất đẳng thức cuối cùng dễ thấy

$$|S(\mathcal{P}) - \int_a^b f(x)dx| < \varepsilon$$

với mọi $\mathcal{P}$ sao cho $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ □.

Để kết thúc phần này chúng tôi nêu một ví dụ đơn giản áp dụng các định lý A.20 và A.23.

•Ví dụ A.13. Áp dụng định lý A.20 ta thấy hàm $f(x) = x$ khả tích trên đoạn $[0,1]$ vì f liên tục trên đoạn ấy. Do đó hàm f thỏa mãn đẳng thức (A.40). Chọn phân điểm của đoạn $[0,1]$ là $\mathcal{P} = \{\frac{i}{n}, n \in \mathbb{N}^*, i = \overline{0,n}\}$ thỏa mãn $\lambda(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Lấy $t_i = \frac{i}{n} \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i = \overline{1,n}$. Ta có

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \tfrac{i}{n}\tfrac{1}{n} = \tfrac{n(n+1)}{2n^2} = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{n}),$$

$$\lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0} S(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} [\tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{n})] = \tfrac{1}{2}.$$

Vậy $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.

A.3.2.3. Tính chất của tích phân xác định

Trong các tính chất dưới đây ta có giả thiết $a < b$.

Tính chất 1.

(a) Nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì với mọi hằng số C hàm Cf cũng khả tích trên $[a, b]$. Hơn nữa $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$.

(b) Nếu các hàm f, g khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì hàm $f + g$ cũng khả tích trên $[a, b]$. Hơn nữa $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Tính chất 2. Nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$ thì khả tích trên $[a, c]$ và $[c, b]$ với mọi $c \in (a, b)$. Hơn nữa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Tính chất 3.

(a) Nếu hàm f khả tích trên $[a, b]$, $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(b) Nếu các hàm f, g khả tích trên $[a, b]$, $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, thì

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

(c) Nếu hàm f khả tích trên $[a, b]$ thì $|f|$ khả tích trên $[a, b]$. Hơn nữa

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

(d) Nếu hàm f khả tích trên $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, thì

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

Tính chất 4.

(a) Định lý trung bình thứ nhất. Nếu hàm f khả tích trên $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, thì thì tồn tại $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a).$$

Đặc biệt nếu hàm f liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

(b) Định lý trung bình thứ hai. Nếu các hàm f, g khả tích trên $[a, b]$, g không âm hoặc không dương trên $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$, thì thì tồn tại $\mu \in [m, M]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx.$$

Đặc biệt nếu hàm f liên tục trên $[a, b]$, g khả tích trên $[a, b]$, g không âm hoặc không dương trên $[a, b]$, thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

A.3.2.4. Định lý đạo hàm theo cận trên. Công thức Newton-Leibniz

Giả sử $a < b$ và hàm f khả tích trên $[a, b]$. Theo tính chất 2 của tích phân xác định (mục 1.3.2.3) f khả tích trên $[a, x]$ với mọi $x \in [a, b]$. Đặt

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]. \tag{A.45}$$

◊ **Định lý A.24.**

(a) Hàm Φ trong công thức (A.45) liên tục trên $[a, b]$.

(b) Nếu f liên tục tại $x_0 \in [a, b]$ thì Φ có đạo hàm tại x_o thỏa mãn

$$\Phi'(x_0) = f(x_0). \tag{A.46}$$

Δ.Vì hàm f bị chặn nên tồn tại các số m và M sao cho $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a, b]$.

Giả sử $x_0 \in [a, b)$. Với $h > 0, x_0 + h \le b$ theo tính chất 2 của tích phân xác định (mục 1.3.2.3)

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

do đó theo tính chất 4 phần (a) của tích phân xác định (mục 1.3.2.3) tồn tại μ sao cho

$$\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \mu h. \tag{A.47}$$

$$\mu \in \left[\inf_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t), \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t)\right] \subset [m, M]\,. \tag{A.48}$$

Cho $h \to 0^+$. Vì μ bị chặn do (A.48) nên $\mu h \to 0$, suy ra $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \to 0$, tức là hàm Φ liên tục phải tại x_o.

Bây giờ giả sử f liên tục tại x_o. Từ (A.47) suy ra

$$\tfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = \mu.$$

Cho $h \to 0^+$. Vì f liên tục tại x_o nên $\inf\limits_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t)$ và $\sup\limits_{t\in[x_0,x_0+h]} f(t)$ đều dần đến $f(x_0)$. Do (A.48) μ cũng dần đến $f(x_0)$, tức là

$$\lim_{h\to 0^+} \tfrac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

hay $\Phi'_+(x_0) = f(x_0)$.

Giả sử $x_0 \in (a, b]$. Một cách hoàn toàn tương tự có thể chứng tỏ hàm Φ liên tục trái tại x_o và nếu f liên tục tại x_o thì $\Phi'_-(x_0) = f(x_0)$. Điều đó kết thúc chứng minh cả hai phần (a) và (b) của định lý □.

Nhận xét A.8. Từ định lý A.24 suy ra nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $\Phi'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$. Có nghĩa là Φ là một nguyên hàm của hàm f trên $[a, b]$.

◊ **Định lý A.25.** *Giả sử $a < b$. Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và F là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$ thì*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Hiệu số $F(b) - F(a)$ thường được ký hiệu là $F(x)|_a^b$, do đó công thức trên còn có dạng

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b \tag{A.49}$$

Công thức (A.49) được gọi là công thức Newton-Leibniz.

Δ.Vì F là một nguyên hàm của f trên $[a, b]$ và theo nhận xét A.7 thì Φ cũng là nguyên hàm của hàm f trên $[a, b]$ nên

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \forall x \in [a, b].$$

Cho $x = a$ ta được $0 = \Phi(a) = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$. Do đó

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \forall x \in [a, b].$$

Cuối cùng cho $x = b$ ta được công thức (A.49) $\square$.

•**Ví dụ A.14.** Vì $\dfrac{x^2}{2}$ là nguyên hàm của hàm x trên đoạn $[0, 1]$ nên theo công thức (A.49)

$$\int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ta thấy lại kết quả của ví dụ A.13.

A.3.2.5. Các phương pháp tính tích phân xác định

A.3.2.5.1. Phương pháp đổi biến

Trong các định lý A.26 và A.27 a và b là các số thực thỏa mãn $a < b$.

$\Diamond$ **Định lý A.26.** *(Đổi biến dạng 1)***.** *Giả sử*

(i) Hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$;

(ii) Hàm $u(x)$ khả vi trên $[a, b]$, $u'(x)$ không đồng nhất bằng 0 trên $[a, b]$, và $f(x)dx = g(u(x))u'(x)dx, \forall x \in [a, b]$;

(iii) $g(t)$ liên tục trên tập $I = \{u(x)|x \in [a, b]\}$.

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt.$$

Δ.Vì hàm g liên tục trên tập I nên có nguyên hàm trên tập ấy. Giả sử G là một nguyên hàm của g trên I. Đặt $F(x) = G(u(x))$. Chứng minh tương tự như định lý A.16 có thể thấy F là nguyên hàm của f trên $[a, b]$. Điểm khác ở đây là khẳng định $F'(x) = f(x)$ tại $x = a$ và $x = b$. Ta thừa nhận khẳng định này. Theo định lý A.25

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = G(u(b)) - G(u(a)),$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt = G(u(b)) - G(u(a)).$$

Từ các đẳng thức trên ta nhận được khẳng định của định lý $\square$.

◊ **Định lý A.27.** *(Đổi biến dạng 2). Giả sử*

(i) Hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$;

(ii) Hàm $\varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$;

(iii) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

(iv) $\varphi(t) \in [a, b], \forall t \in [\alpha, \beta]$.

Khi đó

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Δ.Giả sử $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a, b]$. Khi đó $F(\varphi(t))$ là nguyên hàm của $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ trên $[\alpha, \beta]$. Theo định lý A.25

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Từ các đẳng thức trên ta nhận được khẳng định của định lý □.

•Ví dụ A.15.

(a) Tính $\int_0^{\pi/2} \dfrac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x}$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Do đó biểu thức dưới dấu tích phân trở thành $\dfrac{dt}{1 + t^2}$. Ta thấy hàm $\frac{1}{1+t^2}$ liên tục trên tập $[0, 1]$, là ảnh của đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$ qua hàm $sinx$. Với $x = 0$ thì $t = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ thì $t = 1$. Theo định lý A.26

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \sin^2 x} = \int_0^1 \tfrac{dt}{1+t^2} = \arctan t|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \tfrac{\pi}{4} - 0 = \tfrac{\pi}{4}$$

(b) Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Đặt $x = \tan t, 0 \le t \le \frac{\pi}{4}, \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. Hàm $\frac{1}{\cos^2 t}$ liên tục trên $[0, \frac{\pi}{4}]$. Ta có $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$, $\tan t \in [0, 1], \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Theo định lý A.27

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{(1/\cos^2 t)^3}} = \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t|1/\cos^3 t|}$

$= \int_0^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^2 t.1/\cos^3 t} = \int_0^{\pi/4} \cos t dt = \sin t|_0^{\pi/4} = \sin(\pi/4) - \sin 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

A.3.2.5.2. Phương pháp tích phân từng phần

Nếu các hàm u, v có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ thì ta có công thức sau gọi là công thức tích phân từng phần

$$\int_a^b u dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v du \tag{A.50}$$

•Ví dụ A.16. Tính

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \tag{A.51}$$

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, \tag{A.52}$$

với $n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = x|_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x|_0^{\pi/2} = 1.$$

Với $n \geq 2$ ta có

$$\begin{aligned} I_n &= \textstyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x d(\sin^{n-1} x) = \\ &= (n-1)\textstyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = \\ &= (n-1)\textstyle\int_0^{\pi/2} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Suy ra $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Từ đó bằng phương pháp quy nạp ta nhận được $I_{2m} = \dfrac{2m-1}{2m} . \dfrac{2m-3}{2m-2} ... \dfrac{1}{2} I_0$, với mọi $m \in \mathbb{N}^*$. Ký hiệu tích các số lẻ liên tiếp từ 1 đến $2m-1$ là $(2m-1)!!$ (đọc là $2m-1$ giai thừa cách), tích các số chẵn liên tiếp từ 2 đến $2m$ là $(2m)!!$ (đọc là $2m$ giai thừa cách), và thay $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ta được $I_{2m} = \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \dfrac{\pi}{2}$.

Tương tự $I_{2m+1} = \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$ với mọi $m \in \mathbb{N}^*$.

Tính toán tương tự với J_n ta đi đến

$$I_{2m} = J_{2m} = \tfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \tfrac{\pi}{2}, I_{2m+1} = J_{2m+1} = \tfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \text{ với mọi } m \in \mathbb{N}^*.$$

A.3.3. Tích phân suy rộng trong trường hợp cận lấy tích phân là vô hạn

Giả sử hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$ với mọi b thỏa mãn $b > a$. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm f trên khoảng $[a, +\infty)$, và được ký hiệu là

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{A.53}$$

Tương tự, nếu hàm f khả tích trên đoạn $[a, b]$ với mọi a thỏa mãn $a < b$, và tồn tại giới hạn

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân suy rộng của hàm f trên khoảng $(-\infty, b]$, và được ký hiệu là

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \tag{A.54}$$

Nếu với mọi a tích phân suy rộng của hàm f trên các khoảng $(-\infty, a]$ và $[a, +\infty)$ tồn tại thì tích phân suy rộng của hàm f trên khoảng $(-\infty, +\infty)$ là

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx. \tag{A.55}$$

Khi vế trái của các công thức (A.53) - (A.55) tồn tại thì ta nói các tích phân suy rộng ấy hội tụ. Trong trường hợp ngược lại ta nói chúng phân kỳ.

•Ví dụ A.17.

(a) Ta có $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} [\arctan x|_0^b] = \lim\limits_{b\to+\infty} \arctan b = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Tiếp theo $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} [\arctan x|_a^0] = \lim\limits_{a\to-\infty} [-\arctan a] = \dfrac{\pi}{2}$.

(c) Từ kết quả của các phần (a) và (b), và công thức (A.55) ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \tfrac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \tfrac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

(d) Xét $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$. Ta có

$$\int_a^0 xe^x dx = \int_a^0 xde^x = xe^x|_a^0 - \int_a^0 e^x dx = -ae^a - e^x|_a^0 = -ae^a - 1 + e^a = e^a(1-a) - 1.$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\lim_{a\to-\infty} [e^a(1-a) - 1] = \lim_{a\to-\infty} \tfrac{1-a}{e^{-a}} - 1 = \lim_{a\to-\infty} \tfrac{-1}{-e^{-a}} - 1 = \lim_{a\to-\infty} e^a - 1 = -1$$

Vậy $\int_{-\infty}^0 xe^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^0 xe^x dx = -1$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Văn Minh, Nguyễn Thị Hằng, Phạm Thu Hoài, **Bài giảng giải tích**. Tài liệu lưu hành nội bộ, Đại học Hàng Hải Việt Nam, 2012.

[2] У. Рудин, основы математического анализа, издательство "мир", Москва 1976.