TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
VIỆN KHOA HỌC CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN
——ooOoo——

BÀI GIẢNG

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

TÊN HỌC PHẦN **:ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH**
MÃ HỌC PHẦN: **:18101**
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO: **:ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**
DÙNG CHO SV NGÀNH: **:KỸ THUẬT**

Hải Phòng - 2010

Mục lục

ĐỀ CƯƠNG CHI TIẾT HỌC PHẦN

1. **Tên học phần:** Đại số tuyến tính - Ngành kỹ thuật

2. **Số tín chỉ**: 3 = 60 tiết

3. **Phân bổ thời gian:**

   - Lý thuyết: 42 tiết
   - Bài tập, kiểm tra: 18 tiết

4. **Điều kiện tiên quyết:** Không.

5. **Mục đích của học phần:** Trang bị cho sinh viên những kiến thức cơ bản nhất về nhóm, vành, trường, đại số đa thức, đại số tuyến tính. Những kiến thức này là điều kiện tiên quyết, giúp sinh viên có thể tiếp thu các kiến thức của các học phần giải tích 1, 2, vật lí, cơ học, hóa học, các môn toán chuyên đề và một số môn chuyên môn của các ngành kĩ thuật.

6. **Nội dung chủ yếu:** Tập hợp và ánh xạ. Cấu trúc đại số. Số phức. Đa thức. Phân thức hữu tỉ. Ma trận. Định thức. Hệ phương trình tuyến tính. Không gian véc tơ. Không gian Euclid. Ánh xạ tuyến tính. Trị riêng và véc tơ riêng. Dạng toàn phương.

7. **Người biên soạn:** ThS Nguyễn Đình Dương và ThS Nguyễn Thị Đỗ Hạnh - Giảng viên Bộ môn Toán - Viện Khoa học cơ bản.

8. **Nội dung chi tiết học phần:**

Tên chương mục	**Phân phối chương trình**				
	TS	**LT**	**BT**	**TH**	**KT**
Chương 1. Tập hợp và ánh xạ	6	5	1		
1.1. Tập hợp và phần tử					
1.1.1. Khái niệm về tập hợp và phần tử 1.1.2. Quan hệ thuộc và kí hiệu $\in$ 1.1.3. Cách mô tả tập hợp 1.1.4. Một số tập hợp thông dụng 1.1.5. Tập rỗng 1.1.6. Sự bằng nhau của hai tập hợp 1.1.7. Quan hệ bao hàm. Tập con 1.1.7. Quan hệ bao hàm. Tập con 1.1.7. Sơ đồ Ven 1.2. Các phép toán trên tập hợp 1.2.1. Phép hợp 1.2.2. Phép giao $\in$ 1.2.3. Tính chất 1.2.4. Hiệu của 2 tập. Phần bù 1.2.5. Luật DeMorgan 1.2.6. Suy rộng 1.2.7. Phủ và phân hoạch					

1.3. Tích Decartes					
1.4. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự					
1.4.1. Quan hệ hai ngôi 1.4.2. Đồ thị của quan hệ hai ngôi 1.4.3. Tính phản xạ, tính đối xứng, tính bắc cầu trong quan hệ 2 ngôi 1.4.2. Quan hệ tương đương và lớp tương đương 1.4.2. Quan hệ thứ tự. Thứ tự bộ phận và thứ tự toàn phần					
1.5. Ánh xạ 1.5.1. Định nghĩa ánh xạ. Ảnh và nghịch ảnh 1.5.2. Các loại ánh xạ đặc biệt: đơn ánh, toàn ánh, song ánh 1.5.3. Ánh xạ ngược 1.5.4. Tích các ánh xạ					
1.6. Tập đếm được và không đếm được					
Chương 2. Cấu trúc đại số. Số phức. Đa thức và phân thức hữu tỉ	9	7	2		
2.1. Luật hợp thành trong 2.1.1. Định nghĩa 2.1.2. Các tính chất của luật hợp thành trong 2.1.3. Cấu trúc đại số					
2.2. Nhóm 2.2.1. Định nghĩa 2.2.2. Một số tính chất của nhóm					
2.3. Vành 2.3.1. Định nghĩa 2.3.2. Vành nguyên					
2.4. Trường 2.4.1. Định nghĩa 2.4.2. Tính chất					
2.5. Số phức 2.5.1. Định nghĩa số phức 2.5.2. Trường số phức 2.5.3. Số thực là trường hợp riêng của số phức 2.5.4. Số thuần ảo 2.5.5. Dạng đại số của số phức 2.5.6. Mặt phẳng phức 2.5.7. Dạng lượng giác của số phức. Công thức Moivre 2.5.8. Căn bậc n của số phức					
2.6. Đa thức 2.6.1. Định nghĩa đa thức 2.6.2. Nghiệm của đa thức. Định lí Đalămbe 2.6.3. Sự phân tích một phân thức thực sự với hệ số thực thành tổng các phân thức đơn giản					

Chương 3. Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính	15	10	4		1
3.1. Ma trận 3.1.1. Định nghĩa ma trận 3.1.2. Sự bằng nhau của 2 ma trận. Ma trận không 3.1.3. Cộng hai ma trận 3.1.4. Phép nhân một số với một ma trận 3.1.5. Phép nhân ma trận với ma trận 3.1.6. Ma trận chuyển vị					
3.2. Định thức 3.2.1. Định nghĩa định thức 3.2.2. Tính chất của định thức 3.2.3. Tính định thức nhờ các tính chất 3.2.3. Định thức của tích hai ma trận vuông					
3.3. Ma trận nghịch đảo 3.3.1. Định nghĩa ma trận ngịch đảo 3.3.2. Điều kiện cần và đủ để ma trận khả đảo. Tính ma trận nghịch đảo nhờ ma trận phụ hợp 3.3.3. Ma trận nghịch đảo của tích 2 ma trận khả đảo					
3.4. Hạng của ma trận 3.4.1. Định nghĩa hạng của ma trận 3.4.2. Tính chất của hạng ma trận 3.4.3. Tính hạng của ma trận nhờ các phép biến đổi sơ cấp					
3.5. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát 3.5.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính tổng quát 3.5.2. Hệ Cramer 3.5.3. Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính 3.5.4. Định lí Kronecker-Capelli 3.5.3. Tính ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan.					
Chương 4. Không gian véc tơ-Không gian Euclid	15	10	4		1
4.1. Định nghĩa 4.1.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính tổng quát 4.1.2. Các ví dụ 4.1.3. Các tính chất cơ bản nhất của không gian véc tơ					
4.2. Sự độc lập tuyến tính 4.2.1. Tổ hợp tuyến tính của một hệ véc tơ 4.2.2. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính					
4.3. Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ 4.3.1. Không gian hữu hạn chiều 4.3.2. Cơ sở của không gian hữu hạn chiều					

4.3.3. Các tính chất của cơ sở					
4.4. Tọa độ của véc tơ theo một cơ sở 4.4.1. Định nghĩa tọa độ của một véc tơ 4.4.2. Ma trận chuyển cơ sở					
4.5. Không gian véc tơ con 4.5.1. Định nghĩa 4.5.2. Không gian con sinh bởi hệ véc tơ 4.5.3. Số chiều và cơ sở của không gian con sinh bởi một hệ véc tơ					
4.6. Không gian Euclid 4.6.1. Tích vô hướng trên một không gian véc tơ 4.6.2. Không gian Euclid 4.6.3. Sự trực giao. Cơ sở trực chuẩn. 4.6.4. Phép trực giao hóa Schmidt. 4.6.5. Góc và độ dài trong không gian Euclid. 4.6.6. Hình chiếu vuông góc của một véc tơ lên một không gian con trong không gian Euclid.					
Chương 5. Ánh xạ tuyến tính	8	5	2		1
5.1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính					
5.2. Hạt nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính					
5.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính 5.3.1. Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong một cặp cơ sở 5.3.2. Hạng của ánh xạ tuyến tính 5.3.3. Ma trận đồng dạng					
Chương 6. Trị riêng, véc tơ riêng. Dạng toàn phương	7	5	1		1
6.1. Trị riêng, véc tơ riêng của ma trận					
6.2. Dạng toàn phương 6.2.1. Định nghĩa dạng toàn phương của n biến 5.3.2. Dạng chính tắc của dạng toàn phương. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp Lagrange. 5.3.3. Luật quán tính 5.3.4. Dạng toàn phương xác định dương. Điều kiện cần và đủ để dạng toàn phương n biến là xác định dương.					

9. **Tài liệu tham khảo:**

(a) Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, Toán cao cấp - tập 1, NXB Giáo dục - 2003.

(b) Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, Bài tập toán cao cấp - tập 1, NXB Giáo dục - 2001.

(c) Lê Ngọc Lăng (chủ biên), Nguyễn Chí Bảo, Trần Xuân Hiền, Nguyễn Phú Trường, Ôn thi học kì và thi vào giai đoạn 2, NXB Giáo dục - 1997.

10. **Hình thức và tiêu chuẩn đánh giá sinh viên**

    - Thi viết rọc phách, thời gian làm bài: 75 phút.
    - Thang điểm: thang điểm chữ A, B, C, D, F.
    - Điểm đánh giá học phần: $Z = 0,2X + 0,8Y$.

Bài giảng này là tài liệu chính thức và thống nhất của Bộ môn Toán và được dùng để giảng dạy cho sinh viên

Ngày phê duyệt: .../.../2010

Trưởng Bộ môn: T.S Phạm Văn Minh

Chương 1

Tập hợp và ánh xạ

1.1 Tập hợp

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Tập hợp là một khái niệm "nguyên thủy", không được định nghĩa, mà được hiểu một cách trực giác như sau: Một *tập hợp* là một sự quần tụ các đối tượng có cùng một thuộc tính nào đó; những đối tượng này gọi là các *phần tử* của tập hợp đó.

Người ta thường gọi tắt tập hợp là "tập". Ví dụ tập hợp các sinh viên của một trường đại học, tập hợp các xe tải của một công ty, tập hợp các số nguyên tố, ...

Các tập hợp thường được kí hiệu bởi các chữ in hoa: $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$.

Các phần tử của một tập hợp thường được kí hiệu bởi các chữ in thường: $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

Để nói x là một phần tử của tập hợp X, ta viết $x \in X$ và đọc là "x thuộc X". Trái lại để nói y không là phần tử của X, ta viết $y \notin X$, và đọc là "y không thuộc X".

Để xác định một tập hợp ta có thể liệt kê tất cả các phần tử của nó, chẳng hạn:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Người ta cũng có thể xác định một tập hợp bởi một tính chất đặc trưng $\mathcal{P}(x)$ nào đó của các phần tử của nó. Tập hợp X các phần tử x có tính chất $\mathcal{P}(x)$ được kí hiệu là

$$X = \{x | \mathcal{P}(x)\} \text{ hoặc là } X = \{x : \mathcal{P}(x)\}$$

• **Ví dụ 1.**

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{x | x \textit{ là số tự nhiên}\}. \\ \mathbb{Z} &= \{x | x \textit{ là số nguyên}\}. \\ \mathbb{Q} &= \{x | x \textit{ là số hữu tỉ}\}. \\ \mathbb{R} &= \{x | x \textit{ là số thực}\}. \end{aligned}$$

Nếu các phần tử của tập hợp A cũng là một phần tử của tập hợp X thì ta nói A là một *tập hợp con* của X, và viết $A \subset X$. Tập con A gồm các phần tử x của X có tính chất $\mathcal{P}(x)$ được kí hiệu là

$$A = \{x \in X | \ \mathcal{P}(x)\}.$$

Hai tập A và B được gọi là *bằng nhau* nếu mỗi phần tử của tập hợp này cũng là một phần tử của tập hợp kia và ngược lại, tức là $A \subset B$ và $B \subset A$. Khi đó ta viết $A = B$.

Tập hợp không chứa một phần tử nào được kí hiệu bởi $\emptyset$ và được gọi là tập rỗng. Ta quy ước rằng $\emptyset$ là tập con của mọi tập hợp.

1.1.2 Các phép toán trên tập hợp

Cho các tập hợp A và B.

Hợp của A và B được kí hiệu bởi $A \cup B$ và được định nghĩa như sau

$$A \cup B = \{x|\ x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Giao của A và B được kí hiệu bởi $A \cap B$ và được định nghĩa như sau

$$A \cap B = \{x|\ x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

Hiệu của A và B được kí hiệu bởi $A \setminus B$ và được định nghĩa như sau

$$A \setminus B = \{x|\ x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Nếu $A \subset X$ thì $X \setminus A$ được gọi là *phần bù* của A trong X và được ký hiệu là $C_X(A)$ hay đơn giản là $\overline{A}$ nếu X đã được xác định.

Các phép toán hợp, giao và hiệu có các tính chất sơ cấp sau đây:

Giao hoán: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

Kết hợp: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Phân phối: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Công thức De Morgan: $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

1.1.3 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Ta thường cần phải phát biểu các mệnh đề có dạng: "Mọi phần tử x của tập hợp X đều có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Người ta quy ước kí hiệu mệnh đề này như sau:

$$\forall x \in X,\ \mathcal{P}(x).$$

Kí hiệu $\forall$ được gọi là *lượng từ phổ biến*.

Tương tự ta cũng hay gặp các mệnh đề có dạng: "Tồn tại phần tử x của tập hợp X có tính chất $\mathcal{P}(x)$". Người ta quy ước kí hiệu mệnh đề này như sau:

$$\exists x \in X,\ \mathcal{P}(x).$$

Kí hiệu $\exists$ được gọi là *lượng từ tồn tại*.

Mệnh đề "Tồn tại duy nhất phần tử x của tập hợp X có tính chất $\mathcal{P}(x)$" được viết như sau:

$$\exists! x \in X,\ \mathcal{P}(x).$$

1.2 Quan hệ và ánh xạ

1.2.1 Quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự

Tích trực tiếp (hay tích Descartes) của hai tập hợp X và Y là tập hợp sau đây:

$$X \times Y = \{(x, y) |\ x \in X, y \in Y\}.$$

Trường hợp đặc biệt khi $X = Y$, ta có tích trực tiếp $X \times X$ của tập X với chính nó.

□ **Định nghĩa 1.** *Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tập hợp tích $X \times X$ được gọi là một quan hệ hai ngôi trên X. Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói x có quan hệ $\mathcal{R}$ với y, và viết $x\mathcal{R}y$. Ngược lại, nếu $(x, y) \notin \mathcal{R}$ thì ta nói x không có quan hệ $\mathcal{R}$ với y, và viết $x\overline{\mathcal{R}}y$.*

Chẳng hạn, nếu $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ x \vdots y\}$, thì $6\mathcal{R}2$, nhưng $5\overline{\mathcal{R}}2$.

□ **Định nghĩa 2.** *Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X được gọi là tương đương nếu nó có ba tính chất sau đây:*

(a) Phản xạ: $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in X$.

(b) Đối xứng: Nếu $x\mathcal{R}y$ thì $y\mathcal{R}x$, $\forall x, y \in X$.

(c) Bắc cầu: Nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x\mathcal{R}z$, $\forall x, y, z \in X$.

Các quan hệ tương đương thường được ký hiệu bởi dấu $\sim$.

• **Ví dụ 2.** *Giả sử n là một số nguyên dương bất kỳ. Ta xét trên tập $X = \mathbb{Z}$ quan hệ sau đây:*

$$\sim = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} |\ x - y \vdots n\}.$$

Rõ ràng đó là một quan hệ tương đương.

□ **Định nghĩa 3.** *Quan hệ hai ngôi $\mathcal{R}$ trên X được gọi là một quan hệ thứ tự nếu nó có ba tính chất sau đây:*

(a) Phản xạ: $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in X$.

(b) Phản đối xứng: Nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}x$ thì $x = y$, $\forall x, y \in X$.

(c) Bắc cầu: Nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x\mathcal{R}z$, $\forall x, y, z \in X$.

Các quan hệ thứ tự thường được ký hiệu bởi dấu $\leq$.

Tập X được trang bị một quan hệ thứ tự được gọi là một *tập được sắp*. Nếu $x \leq y$ ta nói x đứng trước y, hay x nhỏ hơn hoặc bằng y.

Ta nói X được sắp *toàn phần* bởi quan hệ $\leq$ nếu với mọi $x, y \in X$ thì $x \leq y$ hoặc $y \leq x$. Khi đó $\leq$ được gọi là quan hệ thứ tự toàn phần trên X.

1.2.2 Ánh xạ

Người ta thường mô tả ánh xạ một cách trực giác như sau.

Giả sử X và Y là các tập hợp. Một *ánh xạ* f từ X vào Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử xác định $y = f(x) \in Y$. Ánh xạ đó được ký hiệu bởi $f:\ X \to Y$.

Tất nhiên mô tả nói trên không phải là một định nghĩa chặt chẽ, vì ta không biết thế nào là một quy tắc. Nói cách khác, trong định nghĩa nói trên quy tắc chỉ là một tên gọi khác của ánh xạ.

Ta có thể khắc phục điều đó bằng cách đưa ra một định nghĩa chính xác nhưng hơi cồng kềnh về ánh xạ như sau:

Mỗi tập con $\mathcal{R}$ của tích trực tiếp $X \times Y$ được gọi là một *quan hệ giữa* X *và* Y. Quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là một *ánh xạ* từ X vào Y nếu nó có tính chất sau: với mọi $x \in X$ có một và chỉ một $y \in Y$ để cho $(x, y) \in \mathcal{R}$. Ta kí hiệu phần tử duy nhất đó là $y = f(x)$. Khi đó

$$\mathcal{R} = \{(x, f(x))|\ x \in X\}.$$

Ánh xạ này thường được ký hiệu là $f:\ X \to Y$ và quan hệ $\mathcal{R}$ được gọi là *đồ thị* của ánh xạ f.

Các tập X và Y được gọi lần lượt là tập nguồn và tập đích của ánh xạ f. Tập hợp $f(X) = \{f(x)|\ x \in X\}$ được gọi là tập giá trị của f.

Giả sử A là một tập con của X. Khi đó $f(A) = \{f(x)|\ x \in A\}$ được gọi là ảnh của A bởi f. Nếu B là một tập con của Y thì $f^{-1}(B) = \{x \in X|\ f(x) \in B\}$ được gọi là nghịch ảnh của B bởi f. Trường hợp đặc biệt, tập $B = \{y\}$ chỉ gồm một điểm $y \in Y$ ta viết đơn giản $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$.

□ **Định nghĩa 4.** *(a) Ánh xạ* $f : X \to Y$ *được gọi là một đơn ánh nếu với mọi* $x \neq x'$, $(x, x' \in X)$ *thì* $f(x) \neq f(x')$.

(b) Ánh xạ $f : X \to Y$ *được gọi là một toàn ánh nếu với mọi* $y \in Y$ *tồn tại (ít nhất) một phần tử* $x \in X$ *sao cho* $f(x) = y$.

(c) Ánh xạ $f : X \to Y$ *được gọi là một song ánh (hay một tương ứng một-một) nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.*

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó với mỗi $y \in Y$ tồn tại duy nhất phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Ta kí hiệu phần tử x đó như sau: $x = f^{-1}(y)$. Như thế, tương ứng $y \to x = f^{-1}(y)$ xác định một ánh xạ, được ký hiệu là $f^{-1} : Y \to X$ và được gọi là ánh xạ ngược của f. Hiển nhiên f^{-1} cũng là một song ánh, hơn nữa $(f^{-1})^{-1} = f$.

1.3 Nhóm, Vành và Trường

Giả sử G là một tập hợp. Mỗi ánh xạ

$$\circ : G \times G \to G$$

được gọi là một *phép toán hai ngôi* (hay một *luật hợp thành*) trên G. Ảnh của cặp phần tử $(x, y) \in G \times G$ bởi ánh xạ $\circ$ sẽ được ký hiệu là $x \circ y$ và được gọi là *tích* hay *hợp thành* của x và y.

□ **Định nghĩa 5.** *Một nhóm là một tập hợp khác rỗng G được trang bị một phép toán hai ngôi ∘ thỏa mãn ba điều kiện sau đây:*

(G1) Phép toán có tính kết hợp:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),\ \forall x, y, z \in G.$$

(G2) Có phần tử $e \in G$, được gọi là phần tử trung hòa, với tính chất

$$x \circ e = e \circ x = x,\ \forall x \in G.$$

(G3) Với mọi $x \in G$, tồn tại phần tử $x' \in G$, được gọi là nghịch đảo của x, sao cho

$$x \circ x' = x' \circ x = e.$$

⊕ **Nhận xét**

Phần tử trung hòa của một nhóm là duy nhất. Thật vậy, nếu e và e' đều là các phần tử trung hòa của nhóm G thì

$$e = e \circ e' = e'.$$

Với mọi $x \in G$, phần tử nghịch đảo x' nói ở mục (G3) là duy nhất. Thật vậy, nếu x'_1 và x'_2 là các phần tử nghịch đảo của x thì

$$x'_1 = x'_1 \circ e = x'_1(x \circ x'_2) = (x'_1 \circ x) \circ x'_2 = e \circ x'_2 = x'_2.$$

Trong nhóm có luật giản ước, tức là

$$x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z,$$

$$x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y.$$

Thật vậy, để có luật giản ước, chỉ cần nhân hai vế của đẳng thức $x \circ y = x \circ z$ với nghịch đảo x' của x từ bên trái, và nhân hai vế của đẳng thức $x \circ z = y \circ z$ với nghịch đảo z' của z từ bên phải.

Nếu phép toán ∘ có tính giao hoán, tức là

$$x \circ y = y \circ x,\ \forall x, y \in G,$$

thì G được gọi là một nhóm *giao hoán* (hay *abel*).

Theo thói quen, luật hợp thành ∘ trong một nhóm abel thường được ký hiệu theo lối cộng "+". Hợp thành của cặp phần tử (x, y) được ký hiệu là $x + y$ và được gọi là tổng của x và y. Phần tử trung hòa của nhóm được gọi là *phần tử không*, ký hiệu 0. Nghịch đảo của x được gọi là *phần tử đối* của x, ký hiệu $(-x)$.

Trường hợp tổng quát, phép toán ∘ trong nhóm thường được ký hiệu theo lối nhân "·". Hợp thành của cặp phần tử (x, y) được ký hiệu là $x \cdot y$ và được gọi là tích của x và y. Phần tử trung hòa của nhóm được gọi là *phần tử đơn vị*. Phần tử nghịch đảo của x được ký hiệu là x^{-1}.

• **Ví dụ 3.** *(a) Các tập hợp số $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ lập thành nhóm abel đối với phép cộng.*

(b) Các tập $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}, \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ làm thành nhóm abel đối với phép nhân.

□ **Định nghĩa 6.** *Một vành là một tập hợp $R \neq \emptyset$ được trang bị hai phép toán hai ngôi, gồm phép cộng*

$$+ : R \times R \to R,\ (x, y) \mapsto x + y$$

và phép nhân

$$\cdot : R \times R \to R,\ (x, y) \mapsto xy,$$

thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(R1) R là một nhóm abel đối với phép cộng.

(R2) Phép nhân có tính chất kết hợp:

$$(xy)z = x(yz),\ \forall x, y, z \in R.$$

(R3) Phép nhân phân phối về hai phía đối với phép cộng:

$$(x + y)z = xz + yz,$$

$z(x + y) = zx + zy,\ \forall x, y, z \in R.$

Vành R được gọi là *giao hoán* nếu phép nhân của nó có tính giao hoán:

$$xy = yx,\ \forall x, y \in R.$$

Vành R được gọi là *có đơn vị* nếu phép nhân của nó có đơn vị, tức là có phần tử $1 \in R$ sao cho:

$$1x = x1 = x,\ \forall x \in R.$$

• **Ví dụ 4.** *Các tập hợp số $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ là các vành giao hoán và có đơn vị đối với các phép toán cộng và nhân thông thường. Tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ không là một vành, vì nó không là nhóm đối với phép cộng.*

Phần tử x trong một vành có đơn vị R được gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại phần tử $x' \in R$ sao cho

$$xx' = x'x = 1.$$

Dễ dàng chứng minh rằng phần tử x' có tính chất như vậy nếu tồn tại thì duy nhất. Nó được ký hiệu là x^{-1}.

□ **Định nghĩa 7.** *Một vành giao hoán, có đơn vị $1 \neq 0$ sao cho mọi phần tử khác 0 trong nó đều khả nghịch được gọi là một trường.*

• **Ví dụ 5.** *Vành $\mathbb{Q}$ là một trường. Vành số nguyên $\mathbb{Z}$ không là một trường, vì các số khác ± 1 đều không khả nghịch trong $\mathbb{Z}$.*

Chương 2

Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính

2.1 Ma trận

2.1.1 Khái niệm ma trận

□ **Định nghĩa 1.** *Một bảng số chữ nhật có m hàng n cột được gọi là một ma trận cỡ $m \times n$. a_{ij} là phần tử nằm ở hàng i cột j của ma trận A:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textit{hoặc} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Để nói A là ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử hàng i cột j là a_{ij} ta viết $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ hoặc $A = (a_{ij})_{m \times n}$

Ký hiệu tập các ma trận cỡ $m \times n$ là $\mathcal{M}_{m \times n}$

• **Ví dụ 1.** *Bảng số*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cỡ 2×3 với các phần tử

$$\begin{aligned} &a_{11} = 1; \quad a_{12} = -2; \quad a_{13} = 4; \\ &a_{21} = 3; \quad a_{22} = 5; \quad\;\; a_{23} = -7. \end{aligned}$$

$*$ **Chú ý:** Trong khuôn khổ bài giảng này, chúng ta chỉ xét chủ yếu các ma trận thực, tức là các ma trận với $a_{ij} \in \mathbb{R}$

2.1.2 Một số dạng đặc biệt của ma trận

a) **Ma trận không** là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không. Ma trận không được ký hiệu là 0.

• **Ví dụ 2.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận không cỡ 2×4

b) **Ma trận hàng, ma trận cột**
Ma trận hàng là ma trận chỉ có một hàng. Ma trận cột là ma trận chỉ có một cột.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận hàng;} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận cột}$$

c) **Ma trận vuông cấp** n là ma trận có n hàng và n cột, ký hiệu $A = [a_{ij}]_n$ hoặc $A = (a_{ij})_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là các *phần tử chéo*. Chúng tạo thành *đường chéo chính* của ma trận vuông. Ký hiệu tập các ma trận vuông cấp n là $\mathcal{M}_n$

d) **Ma trận tam giác**
Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ mà $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$ được gọi là *ma trận tam giác trên.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \dots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận vuông $A = [a_{ij}]_n$ mà $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$ được gọi là *ma trận tam giác dưới.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác trên hoặc ma trận tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

e) **Ma trận chéo** là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

f) **Ma trận đơn vị cấp n** là ma trận chéo với tất cả các phần tử chéo đều bằng 1. Ký hiệu I_n hoặc E.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{còn viết} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Phép toán trên ma trận

a) **Ma trận bằng nhau**

□ **Định nghĩa 2.** *Hai ma trận A và B được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng cỡ và các phần tử cùng vị trí bằng nhau.*

b) **Cộng ma trận**

□ **Định nghĩa 3.** *Tổng của hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ là ma trận $A + B$ cỡ $m \times n$ xác định bởi: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$*

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ ta cộng các phần tử cùng vị trí.

• **Ví dụ 3.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với $A, B, C, 0$ là các ma trận cỡ $m \times n$ dễ thấy:

$$\begin{aligned} &A + B = B + A \\ &A + 0 = 0 + A = A \\ &(A + B) + C = A + (B + C) \end{aligned}$$

c) **Nhân ma trận với một số**

□ **Định nghĩa 4.** *Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ với số thực k là ma trận kA cỡ $m \times n$ xác định bởi: $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$*

Như vậy muốn nhân ma trận với một số ta nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận.

• **Ví dụ 4.**

$$2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 2 & 14 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{9} & \dfrac{-1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}; k, l \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{aligned} &k(lA) = (kl)A \\ &(k + l)A = kA + lA \\ &k(A + B) = kA + kB \end{aligned}$$

d) **Nhân hai ma trận**

□ **Định nghĩa 5.** *Tích của ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ với ma trận $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ (theo thứ tự đó) là ma trận $AB = C = [c_{ij}]_{m\times n}$ với các phần tử được xác định như sau:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Như vậy khi nhân hàng i của ma trận thứ nhất với cột j của ma trận thứ hai ta được phần tử hàng i cột j của ma trận tích.

• **Ví dụ 5.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-3) + (-2).2 + 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 6.**

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 12 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 7.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 8.**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho phép nhân thực hiện được, $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{array}{ll} (AB)C = A(BC) & A(kB) = k(AB) \\ A(B+C) = AB + AC & (A+B)C = AC + BC \\ A.I = I.A = A & \end{array}$$

e) **Luỹ thừa ma trận**

□ **Định nghĩa 6.** *Cho A là ma trận vuông cấp n, $k \in \mathbb{N}*$. Lũy thừa bậc k của ma trận A là ma trận vuông cùng cấp được xác định như sau:*

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k ma\ trận\ A}$$

⊕ **Nhận xét** Do tính chất kết hợp của phép nhân ma trận nên:

$$A^k = (A^{k-1}).A = A.(A^{k-1})$$

• **Ví dụ 9.** *Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n.*

Giải

Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dự đoán công thức:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp:

- Công thức đã đúng trong trường hợp $n = 1, n = 2$.
- Giả sử công thức đúng với $n = k$, tức là: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  tức là công thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức dự đoán đã được chứng minh xong.

f) **Chuyển vị ma trận**

□ **Định nghĩa 7.** *Ma trận chuyển vị của ma trận A là ma trận có được từ A sau khi đổi hàng thành cột và đổi cột thành hàng, ký hiệu A^t*

Như vậy nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ thì $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$

• **Ví dụ 10.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

◇ **Tính chất** Với A, B, C là các ma trận sao cho các phép toán thực hiện được, $k \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\begin{array}{ll} (A+B)^t = A^t + B^t; & (kA)^t = k.A^t \\ (AB)^t = B^t.A^t; & (A^n)^t = (A^t)^n \end{array}$$

2.1.4 Biến đổi sơ cấp trên ma trận

Các biến đổi sau đây được gọi là biến đổi sơ cấp trên ma trận:

+) Chuyển vị ma trận;

+) Đổi chỗ 2 hàng (cột);

+) Cộng nhiều hàng (cột) vào một hàng (cột);

+) Nhân một hàng (cột) với một số khác 0;

+) Nhân một hàng (cột) với một số rồi cộng vào hàng (cột) khác.

∗ **Chú ý:** Hiển nhiên khi thực hiện các biến đổi trên thì ma trận thay đổi. Các phép biến đổi chỉ thực hiện trên hàng được gọi là *biến đổi sơ cấp về hàng*, các phép biến đổi chỉ thực hiện trên cột được gọi là *biến đổi sơ cấp về cột.*

2.2 Định thức

2.2.1 Định nghĩa

Xét ma trận vuông cấp n:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

□ **Định nghĩa 8.** Ma trận con *ứng với phần tử a_{ij} của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j, ký hiệu là M_{ij}*

• **Ví dụ 11.** *Với ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ta có:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}; \qquad M_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

□ **Định nghĩa 9.** *Định thức của ma trận A là một số, ký hiệu là $det(A)$ hoặc $|A|$, được định nghĩa như sau:*

A là ma trận cấp 1: $\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$ thì $det(A) = a_{11}$

A là ma trận cấp 2: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ thì $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

A là ma trận cấp n thì:

$$det(A) = a_{11}det(M_{11}) - a_{12}det(M_{12}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}det(M_{1n})$$

(công thức này còn được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng 1)

• **Ví dụ 12.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ &= 1(45 + 48) - 2(-36 - 42) - 3(32 - 35) = 258 \end{aligned}$$

2.2.2 Tính chất

a) Tính chất cơ bản của định thức[1]

◇ **Tính chất 1**. $det(A) = det(A^t)$

Do đó một tính chất của định thức nếu đã đúng với phát biểu về hàng thì cũng đúng với phát biểu về cột.

◇ **Tính chất 2**. Đổi chỗ hai hàng (hay hai cột) của định thức thì định thức đổi dấu.

◇ **Tính chất 3**. Công thức khai triển định thức theo hàng i:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(M_{ij})$$

◇ **Tính chất 4**. Công thức khai triển định thức theo cột j:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(M_{ij})$$

[1]Các chứng minh cụ thể cho các tính chất phát biểu ở đây có thể tìm đọc trong [1]

• **Ví dụ 13.** *Xét ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Khai triển định thức theo hàng 2 ta có:

$$\begin{aligned} det(A) =& 4\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ =& 4.(0-24) + 5(0+21) - 6(-8-14) = 141 \end{aligned}$$

Khai triển định thức theo cột 3 ta có:

$$\begin{aligned} det(A) =& -3\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} + 0 \\ =& -3(32-35) - 6(-8-14) = 141 \end{aligned}$$

b) Định thức của ma trận tam giác

Sử dụng công thức khai triển định thức theo hàng 1 hoặc cột 1 dễ thấy định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}; \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

c) Các phép toán trên định thức

Tổng hai định thức. Khi tất cả các phần tử của một hàng (hay một cột) có dạng tổng của hai số hạng thì định thức có thể phân tích thành tổng hai định thức. Chẳng hạn:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Nhân định thức với một số. Khi nhân định thức với một số ta nhân số đó với một hàng (hoặc một cột) của định thức. Ngược lại, khi các phần tử của một hàng (hoặc một cột) có thừa số chung thì ta có thể đưa thừa số chung đó ra ngoài dấu định thức.

• **Ví dụ 14.**

$$\begin{aligned} 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{vmatrix} && \textit{Nhân số 2 vào hàng 1} \\ &= 2\begin{vmatrix} 2 & -6 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & -9 & 4 \end{vmatrix} && \textit{Đưa số 2 ở cột 3 ra ngoài} \end{aligned}$$

Định thức của tích hai ma trận. Nếu A và B là hai ma trận vuông cùng cấp thì có:

$$det(AB) = det(A).det(B)$$

• **Ví dụ 15.** *Cho ma trận*

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $det(A^{2010})$

Giải

$$A.A^t = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Suy ra:

$$det(A.A^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Mà $det(A) = det(A^t)$ nên $det(AA^t) = det(A).det(A^t) = [det(A)]^2$. Do đó

$$[det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Vậy:

$$\begin{aligned} det(A^{2010}) &= [det(A)]^{2010} = \left\{[det(A)]^2\right\}^{1005} \\ &= \left\{(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\right\}^{1005} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{4020} \end{aligned}$$

d) Các trường hợp định thức bằng 0

Nếu ma trận có một trong các đặc điểm sau đây thì định thức của nó bằng không:

- Có một hàng (hay một cột) bằng không;
- Có hai hàng (hay hai cột) tỷ lệ;
- Có một hàng (hay một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác (hay của các cột khác).

e) Ảnh hưởng của các biến đổi sơ cấp đến định thức

- Nếu chuyển vị ma trận thì định thức của ma trận không đổi;
- Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức đổi dấu;

- Nếu cộng nhiều hàng (hoặc nhiều cột) vào một hàng (hoặc một cột) thì định thức không đổi;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) của định thức với số $k \neq 0$ thì định thức mới bằng k nhân với định thức cũ;
- Nếu nhân một hàng (hoặc một cột) với một số rồi cộng vào hàng (hoặc cột) khác thì định thức không đổi.

2.2.3 Tính định thức bằng biến đổi sơ cấp

Để tính một định thức bằng biến đổi sơ cấp ta làm như sau:

Bước 1. Áp dụng các biến đổi sơ cấp đưa định thức đã cho về dạng tam giác, nhớ ghi lại tác dụng của từng phép biến đổi được sử dụng;

Bước 2. Tính định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử chéo, và kể đến tác dụng tổng hợp của các biến đổi đã sử dụng.

$*$ **Chú ý:** Có thể kết hợp các công thức khai triển định thức và biến đổi sơ cấp để tính định thức.

• **Ví dụ 16.** *Tính định thức:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Giải

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{cộng các hàng vào hàng 1} \\ &= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \text{đưa thừa số 6 ở hàng 1 ra ngoài} \\ &= 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && \text{cộng } -1 \text{ lần hàng 1 vào các hàng khác} \\ &= 6.1.2.2.2 = 48 \end{aligned}$$

• **Ví dụ 17.** *Tính định thức:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Giải

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$	Cộng -3 hàng 1 vào hàng 2 Cộng -2 hàng 1 vào hàng 3 Cộng 4 hàng 1 vào hàng 4
$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix}$	Đưa thừa số 3 ở hàng 3 ra ngoài Đổi chỗ hàng 2 và hàng 3
$= -3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$	Cộng -2 hàng 2 vào hàng 4
$= -3\begin{vmatrix} 10 & -11 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$	Khai triển định thức theo cột 1 (2 lần)
$= -3(40+55) = -285$	

2.3 Ma trận nghịch đảo

2.3.1 Định nghĩa

□ **Định nghĩa 10.** *Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu có ma trận B vuông cùng cấp sao cho:*

$$AB = BA = I_n$$

thì nói A khả đảo và gọi B là ma trận nghịch đảo của A. Ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1}.

Như vậy ta có: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$

Khi A có ma trận nghịch đảo ta nói A *không suy biến.*

• **Ví dụ 18.** *Xét* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ *và* $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, *ta có:*

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n; \qquad BA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Vậy $B = A^{-1}$ *và* $A = B^{-1}$.

2.3.2 Tính chất

△ **Định lý 1.** *Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A nếu có thì duy nhất.*

Chứng minh Giả sử B và C đều là ma trận nghịch đảo của A, nghĩa là:

$$AB = BA = I_n; \qquad AC = CA = I_n$$

Từ $AB = I_n$ suy ra:

$$C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_nB = C \Rightarrow B = C$$

△ **Định lý 2.** *Nếu ma trận vuông A khả đảo thì $det(A) \neq 0$.*

Chứng minh Vì A có ma trận nghịch đảo nên tồn tại A^{-1} và: $A.A^{-1} = I_n$. Áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận ta có:

$$det(AA^{-1}) = det(I_n) \Rightarrow det(A)det(A^{-1}) = 1$$

Vậy phải có $det(A) \neq 0$. Ta cũng có $det(A^{-1}) \neq 0$.

△ **Định lý 3.** *Nếu ma trận vuông $A \in \mathcal{M}_n$ có $det(A) \neq 0$ thì A khả đảo và:*

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^t$$

ở đó $C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A: $c_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$

Chứng minh

Áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng (i) ta có:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}det(M_{ij}) = det(A)$$
$$\Rightarrow a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = det(A)$$

Hơn nữa, do định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không nên suy ra:

$$a_{k1}c_{i1} + a_{k2}c_{i2} + \cdots + a_{kn}c_{in} = \begin{cases} det(A) & \text{nếu} \quad k = i \\ 0 & \text{nếu} \quad k \neq i \end{cases}$$

Do đó: $AC^t = det(A).I$

Áp dụng công thức khai triển định thức theo cột và lập luận tương tự ta cũng có:

$$C^t.A = det(A).I$$

Như vậy:

$$A.\left(\frac{1}{det(A)}C^t\right) = \left(\frac{1}{det(A)}C^t\right).A = I$$

suy ra điều phải chứng minh.

△ **Định lý 4.** *Cho A là ma trận vuông cấp n.*

i) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $AB = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

ii) Nếu B là ma trận vuông cùng cấp với A sao cho $BA = I$ thì A khả đảo và $B = A^{-1}$.

Chứng minh

i) Vì $AB = I$ nên $det(AB) = det(I) \Rightarrow det(A)det(B) = 1$. Do đó $det(A) \neq 0$. Theo định lý (3) suy ra A khả đảo và có ma trận nghịch đảo A^{-1}.

Nhân đẳng thức $AB = I$ bên trái với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}I \Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Phần (ii) chứng minh tương tự

△ **Định lý 5.** *Giả sử $A, B \in \mathcal{M}_n$ là các ma trận khả đảo. Khi đó:*

i) A^{-1} cũng khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$;

ii) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ta có A^m cũng khả đảo và $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$;

iii) $\forall k \neq 0$ ta có kA cũng khả đảo và $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;

iv) AB cũng khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh Các phần được chứng minh tương tự, chẳng hạn chứng minh (iv):

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Vậy theo định lý (4) suy ra AB khả đảo và có ma trận nghịch đảo là $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.3.3 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phụ đại số

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = [a_{ij}]_n$ ta áp dụng công thức của định lý 3:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}C^t$$

ở đó:

$C = [c_{ij}]_n$ là ma trận phụ hợp của ma trận A

$c_{ij} = (-1)^{i+j}det(M_{ij})$ là phụ đại số của phần tử a_{ij}

M_{ij} là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi hàng i và cột j.

• **Ví dụ 19.** *Tìm ma trận nghịch đảo của:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải

$$det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Các phần tử của ma trận phụ hợp là:

$$c_{11} = +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40; \qquad c_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13; \qquad c_{11} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16; \qquad c_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5; \qquad c_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$c_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9; \qquad c_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad c_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Do đó:

$$C = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 20.** *Tìm ma trận X, biết:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Giải

Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$det(A) = 5 \neq 0$$

do đó A có ma trận nghịch đảo A^{-1} được tìm như sau:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}C^t$$

Phương trình ma trận đã cho trở thành:

$$AX = B$$

Nhân bên trái cả hai vế phương trình với A^{-1} ta được:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Vậy ma trận X cần tìm là:

$$X = \frac{1}{5}C^tB = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -5 & 14 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & -1 & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$$

2.3.4 Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp Gauss-Jordan

Muốn tính ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A bằng các biến đổi sơ cấp về hàng ta làm như sau: [2]

- Viết ma trận đơn vị I bên cạnh ma trận A.
- Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng để đưa dần ma trận A về ma trận đơn vị I, tác động đồng thời phép biến đổi sơ cấp vào ma trận I.
- Khi A đã được biến đổi thành ma trận I thì I trở thành ma trận nghịch đảo A^{-1}.

• **Ví dụ 21.** *Tìm ma trận nghịch đảo của:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Giải

Quá trình biến đổi có thể ghi tóm tắt thành bảng sau:

1	2	3	1	0	0	H_1
2	5	3	0	1	0	H_2
1	0	8	0	0	1	H_3
1	2	3	1	0	0	
0	1	-3	-2	1	0	$-2H_1 + H_2 \to H_2$
0	-2	5	-1	0	1	$-H_1 + H_3 \to H_3$
1	0	9	5	-2	0	$-2H_2 + H_1 \to H_1$
0	1	-3	-2	1	0	
0	0	-1	-5	2	1	$2H_2 + H_3 \to H_3$
1	0	0	-40	16	9	$9H_3 + H_1 \to H_1$
0	1	0	13	-5	-3	$-3H_3 + H_2 \to H_2$
0	0	-1	-5	2	1	
1	0	0	-40	16	9	
0	1	0	13	-5	-3	
0	0	1	5	-2	-1	$-H_3 \to H_3$

Vậy ma trận nghịch đảo của A là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

[2] Cơ sở lý thuyết của phương pháp này đề nghị xem ở phần 2.5.4

2.4 Hạng của ma trận

2.4.1 Định nghĩa

□ **Định nghĩa 11.** *Cho A là ma trận cấp $m \times n$.* Ma trận con *cấp p của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi $m - p$ hàng và $n - p$ cột. Định thức của ma trận đó là* định thức con *cấp p của A.*

□ **Định nghĩa 12.** *Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A, ký hiệu $\rho(A)$*

• **Ví dụ 22.** *Xét ma trận:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Các định thức con cấp 3 của A là:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Các định thức con cấp 2 của A là:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \cdots$$

Vậy trong các định thức con khác 0 của A thì cấp cao nhất của định thức là cấp 2, do đó $\rho(A) = 2$.

⊕ **Nhận xét** Các biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.

2.4.2 Tìm hạng của ma trận bằng biến đổi sơ cấp

□ **Định nghĩa 13.** *Ma trận bậc thang là ma trận có các đặc điểm sau:*

- *Các hàng bằng 0 ở dưới các hàng khác 0;*
- *Đối với 2 hàng khác không liên tiếp, phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái sang) của hàng trên nằm bên trái phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.*

• **Ví dụ 23.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận bậc thang có 3 hàng khác 0}$$

⊕ **Nhận xét** Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của ma trận đó.

Quy tắc thực hành tìm hạng của ma trận: Để tìm hạng của ma trận A ta sử dụng các biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận bậc thang B. Khi đó:

$$\rho(A) = \rho(B) = \text{số hàng khác không của } B$$

• **Ví dụ 24.** *Tìm hạng của ma trận:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_1+H_3\to H_3]{-2H_1+H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[3H_2+5H_3\to H_3]{-\frac{1}{5}H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang với 2 hàng khác không. Vậy: $\rho(A) = 2$.

• **Ví dụ 25.** *Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất trong các giá trị mà nó có thể nhận:*

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m hạng của B bằng bao nhiêu?

Giải

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1\to C_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2\leftrightarrow H_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-7H_1+H_3\to H_3 \\ -4H_1+H_4\to H_4}]{-2H_1+H_2\to H_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & -25 & -20 & 15 \\ 0 & 6 & -15 & m^2+m-12 & m+9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5H_2+H_3\to H_4]{-3H_2+H_4\to H_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m^2+m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy hạng(B) nhận giá trị nhỏ nhất nếu $m = 0$. Khi đó $\rho(B) = 2$.

2.5 Hệ phương trình tuyến tính

2.5.1 Định nghĩa

□ **Định nghĩa 14.** *Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2.1}$$

trong đó:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các ẩn;*
- a_{ij} *là hệ số của ẩn* x_j *trong phương trình thứ* (i)*;*
- b_i *là vế phải của phương trình thứ* (i)*.*

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính

Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

thì hệ phương trình (2.1) còn có dạng ma trận:

$$Ax = b$$

trong đó A là *ma trận hệ số* ; x là *ma trận ẩn*; b là *ma trận vế phải.*

2.5.2 Giải hệ phương trình bằng ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n không suy biến. Khi đó hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất: $x = A^{-1}b$

- **Ví dụ 26.** *Giải hệ:* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ 4x_1 - x_2 & = & 7 \end{cases}$

Giải

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A:

$$\det(A) = -14 \neq 0; \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

suy ra:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -26 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$x_1 = \frac{13}{7}; \quad x_2 = \frac{3}{7}$$

2.5.3 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

△ **Định lý 6. (Định lý Cramer)** *Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với A là ma trận vuông không suy biến, có nghiệm duy nhất:*

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det(A)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

ở đó A_j là ma trận có được từ A sau khi thay cột thứ j bởi cột vế phải b.

Chứng minh Vì A là ma trận không suy biến, $det(A) \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^t$$

Từ phương trình $Ax = b$, nhân bên trái hai vế với A^{-1} ta có:

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ phương trình.

Sử dụng biểu thức của A^{-1} ở định lý (3) ta suy ra:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là có

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{nj}b_n}{det(A)} = \frac{det(A_j)}{det(A)}$$

Mặt khác, giả sử hệ có hai nghiệm là x và y:

$$Ax = b; \quad Ay = b$$

Suy ra:

$$Ax - Ay = 0 \Rightarrow A(x - y) = 0$$

Nhân hai vế với A^{-1}:

$$A^{-1}A(x - y) = A^{-1}0 \Rightarrow (x - y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

• **Ví dụ 27.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 6 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 30 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Tính được:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0; \qquad det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72; \qquad det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là:

$$x_1 = \frac{-40}{44} = -\frac{10}{11}; \quad x_2 = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}; \quad x_3 = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.5.4 Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

a) Hệ tam giác là hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

với ma trận hệ số là ma trận tam giác trên:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Với giả thiết $det(A) \neq 0$, tức là $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots n$, hệ tam giác được giải dễ dàng bằng cách thế ngược từ dưới lên.

b) Thực hành giải hệ phương trình bằng biến đổi sơ cấp.

Xét hệ phương trình

$$Ax = b; \qquad \text{với } det(A) \neq 0$$

Viết ma trận A và cạnh nó là ma trận cột b ta được ma trận chữ nhật:

$$\overline{A} = [\ A \mid b\ ] \qquad \overline{A} \text{ còn được gọi là ma trận bổ sung của } A$$

⊕ **Nhận xét** Các biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận $\overline{A}$ tương ứng với các phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

Do đó để giải hệ phương trình tuyến tính ta thực hiện như sau: Áp dụng các biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận $\overline{A}$ để đưa ma trận A về dạng tam giác. Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ tam giác cuối cùng. Giải hệ tam giác (bằng cách thế ngược từ dưới lên) ta thu được nghiệm cần tìm.

Phương pháp vừa trình bày còn có tên là *phương pháp Gauss*.

• **Ví dụ 28.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải

Ta có:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

Áp dụng các phép biến đổi sơ cấp về hàng ta có:

$$\overline{A} \xrightarrow[-2H_1+H3\to H_3]{3H_1-2H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 13 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3H_2+10H3\to H_3]{H_3\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -29 & -58 \end{array}\right]$$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\quad - 29x_3 = -58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

2.5.5 Giải và biện luận hệ phương trình bằng định lý Kronecker-Capelli

△ **Định lý 7. (Định lý Kronecker-Capelli)** *Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$ có nghiệm khi và chỉ khi $\rho(A) = \rho(\overline{A})$.*

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính tổng quát $\mathbf{A}x = b, A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Lập ma trận $\overline{A} = [\ A \mid b\ ]$, sử dụng các *biến đổi sơ cấp về hàng* đưa ma trận $\overline{A}$ về ma trận bậc thang (khi đó A cũng được đưa về ma trận bậc thang)

- $\rho(\overline{A}) \neq \rho(A)$: hệ phương trình *vô nghiệm*;
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = n$: hệ đã cho tương đương với hệ tam giác gồm n phương trình, n ẩn. Giải hệ bằng phương pháp Gauss ta nhận được *nghiệm duy nhất* của phương trình;
- $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = r < n$: hệ có *vô số nghiệm* và được giải như sau: Từ ma trận bậc thang được biến đổi từ A, chọn một định thức con cấp r khác không, các ẩn ứng với các cột của định thức trên được gọi là ẩn chính, các ẩn còn lại gọi là ẩn phụ. Hệ phương trình ban đầu tương đương với hệ mới gồm r phương trình tương ứng với các hàng của định thức trên. Giải hệ đó đối với các ẩn chính ta được nghiệm của hệ đã cho (phụ thuộc vào $n - r$ ẩn phụ).

• **Ví dụ 29.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[H_1+H_3\to H_3]{2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[-H_2+H_3\to H_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

Vì $\rho(A) = 2; \rho(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

• **Ví dụ 30.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Giải

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{3H_1+H_3\to H_3 \\ 2H_1+H_4\to H_4}]{-2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 8 & 10 & -14 \\ 0 & 7 & 8 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[7H_2+3H_4\to H_4]{8H_2+3H_3\to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & -26 & 78 \\ 0 & 0 & -25 & 75 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{25}{26}H_3+H_4\to H_4]{\frac{1}{26}H_3\to H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

suy ra $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -6 \\ \quad - 3x_2 - 7x_3 = 15 \\ \quad\quad x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

• **Ví dụ 31.** *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

Giải

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{2H_1+H_3\to H_3 \\ -3H_1+H_4\to H_4}]{2H_1+H_2\to H_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_2+H_4\to H_4]{\frac{1}{5}H_2\to H_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]; \qquad \rho(A) = \rho(\overline{A}) = 2$$

Chon ẩn x_1 và x_3 là ẩn chính, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_4 + 1 \\ x_3 = x_2 \\ x_2 \; ; \; x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• **Ví dụ 32.** *Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m:*

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Giải

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right] \xrightarrow{H_1 \leftrightarrow H_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-mH_1+H_3 \to H_3]{-H_1+H_2 \to H_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[H_2+H_3 \to H_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m(1-m) \\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & (1-m)(m+1)^2 \end{array}\right]$$

+ Nếu $(1-m)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì $\rho(\overline{A}) = \rho(A) = 3$, hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ y - z = -m \\ (m+2)z = (m+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m+1}{m+2} \\ y = \frac{1}{m+2} \\ z = \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{cases}$$

+ Nếu $m = -2$ thì $\rho(A) = 2; \rho(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình vô nghiệm;
+ Nếu $m = 1$ thì $\rho(A) = \rho(\overline{A}) = 1 < 3$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số như sau:

$$x + y + z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ z = 1 - x - y \end{cases}$$

2.5.6 Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

□ **Định nghĩa 15.** *Hệ phương trình tuyến tính*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

được gọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

Dạng ma trận của hệ thuần nhất là: $Ax = 0, A = [a_{ij}]_{m\times n}$

Hệ thuần nhất (2.2) luôn có nghiệm không: $\theta = (0, 0, \dots 0)$, nghiệm này được gọi là *nghiệm tầm thường* của hệ.

◇ **Tính chất** Hệ thuần nhất 2.2) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ chi $\rho(A) < n$. Đặc biệt, nếu hệ thuần nhất là hệ vuông thì nó có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $det(A) = 0$.

• **Ví dụ 33.** *Xác định a để hệ sau có nghiệm không tầm thường:*

$$\begin{cases} ax & - & 3y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

Giải

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4a - 20$$

Hệ có nghiệm không tầm thường khi

$$det(A) = 0 \Leftrightarrow a = -5$$

Bài tập chương 2

1. *Hãy nhân các ma trận*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

2. *Hãy thực hiện các phép tính sau:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^2$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^3$ c) $\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^n$

ĐS: a) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}$

3. *Hãy tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận A dưới đây:*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $\begin{bmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{bmatrix}$

4. *a) Hãy tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận không;*
b) Hãy tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận đơn vị.

ĐS: a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ *với* $a^2+bc \neq 0$ b) $\pm I_2$; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ *với* $a^2+bc=1$

5. *Tính các định thức sau:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

ĐS: a) 1; b) 2; c) 1; d) 1; e) 160; f) 12.

6. *Chứng minh rằng:*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

HD: Lấy hàng $i+1$ trừ hàng i, đưa nhân tử chung của mỗi hàng ra ngoài, sau đó sử dụng công thức truy hồi.

7. *Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau nếu có:*

$a)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ĐS:

$a)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ $b)$Không khả đảo $c)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{33}{2} & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ \frac{5}{2} & 2 & 7 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & -4 & \frac{15}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

8. *Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình:*

$a)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b) X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$c) AX = B$ *với* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ĐS: $a)\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; $b)\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $c)\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

9. *Tìm hạng của các ma trận sau:*

$a)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

ĐS: a) 2; b) 3; c) 2.

10. *Tùy theo giá trị của tham số $\lambda \in \mathbb{R}$ hãy xác định hạng của các ma trận sau:*

a) $\begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $\rho(A) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } \lambda = 0 \\ 3 & \text{nếu } \lambda \neq 0 \end{cases}$ b) $\rho(A) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } \lambda = 1 \\ 4 & \text{nếu } \lambda \neq 1 \end{cases}$

11. *Hãy giải các hệ phương trình sau bằng cách tính ma trận nghịch đảo:*

a) $\begin{cases} 3x + 4y &= 2 \\ 4x + 5y &= 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x + 2y &= 1 \\ 2x + 4y &= -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 4y &= 3 \\ 4x + 5y &= 2 \end{cases}$

ĐS: a) $(2, -1)$; b) $(-1, -1)$; c) $(-7, 6)$.

12. *Áp dụng định lý Cramer giải các hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} 2x + 5y &= 1 \\ 4x + 5y &= -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 2y - z &= -1 \\ y + z &= 1 \\ -x + y + z &= -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{cases}$

ĐS: a) $(-3, \frac{7}{5})$; b) $(2, 4, -3)$; c) $(2, -2, 3)$.

13. *Áp dụng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x + 4y + 9z &= -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 6 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_4 + x_5 &= -3 \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 - x_5 &= 9 \end{cases}$

ĐS: a) $(1, 2, -2)$; b) $(2, 1, 0, -1)$; c) $(-3, 0, 2, 1, 0)$.

14. *Giải các hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 12 \end{cases}$

ĐS:a)$x_1 = \frac{3x_3 - 13x_4}{17}, x_2 = \frac{19x_3 - 20x_4}{17}$; b) $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5, x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$

15. *Giải và biện luận các hệ phương trình sau:*

$$a)\begin{cases} (2m+1)x - my + (m+1)z &= m-1 \\ m-2x + (m-1)y + (m-2)z &= m \\ (2m-1)x + (m-1)y + (2m-1)z &= m \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 - x_2 + mx_3 + x_4 &= m \\ x_1 + mx_2 - x_3 + x_4 &= -1 \\ mx_1 + mx_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -m \end{cases}$$

ĐS: a) $m \in \{0, 1\}$: hệ vô nghiệm; $m = -1$: hệ có vô số nghiệm; $m \notin \{0, \pm 1\}$: hệ có nghiệm duy nhất;

b) $m = 3$: hệ vô nghiệm; $m = -1$: hệ vô số nghiệm; $m \notin \{3, -1\}$: hệ có nghiệm duy nhất.

16. *Tìm m để hệ phương trình có nghiệm không tầm thường:*

$$a)\begin{cases} mx - 3y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + (m+1)x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + (m+4)x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + (3m-2)x_4 &= 0 \\ -2x_2 + 3x_3 + (3m-6)x_4 &= 0 \end{cases}$$

ĐS: a) $m = -5$, b) $m = -1$

Chương 3

Không gian véc tơ

%minitoc Đối tượng ban đầu của môn Đại số tuyến tính là việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Tuy vậy, để có thể hiểu thấu đáo điều kiện đảm bảo cho một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm và cấu trúc nghiệm của nó, người ta đã đưa ra khái niệm không gian véc tơ và khái niệm này đã trở thành một trong những trụ cột của môn Đại số tuyến tính.

3.1 Khái niệm không gian véc tơ

Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường.

□ **Định nghĩa 1.** *Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$ nếu nó được trang bị hai phép toán, gồm*

(a) Phép cộng véc tơ:

$$+ : V \times V \to V,\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

(b) Phép nhân véc tơ với vô hướng:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,\ (k, \alpha) \mapsto k\alpha$$

Các phép toán này thỏa mãn những tiên đề sau đây:

(V1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\ \forall \alpha, \beta\gamma \in V,$

(V2) $\exists \theta \in V : \theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha,\ \forall \alpha \in V,$

(V3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = \theta,$

(V4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha,\ \forall \alpha, \beta \in V,$

(V5) $(k + h)\alpha = k\alpha + h\alpha,\ \forall k, h \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in V,$

(V6) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta,\ \forall k \in \mathbb{K}, \forall \alpha, \beta \in V,$

(V7) $k(h\alpha) = (kh)\alpha,\ \forall k, h \in \mathbb{K}, \alpha \in V,$

(V8) $1\alpha = \alpha,\ \forall \alpha \in V.$

Các phần tử của V được gọi là các *véc tơ*, các phần tử của $\mathbb{K}$ được gọi là các *vô hướng*, θ được gọi là *phần tử trung hòa*, α' được gọi là phần tử đối của α.

Một không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$ còn được gọi là một $\mathbb{K}$-không gian véc tơ, hay đơn giản: một không gian véc tơ, nếu $\mathbb{K}$ đã rõ.

Khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V được gọi là một không gian véc tơ thực. Khi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, V được gọi là một không gian véc tơ phức. Ở giáo trình này ta chỉ quan tâm đến các không gian véc tơ trên trường số thực.

• **Ví dụ 1.** *Các véc tơ tự do trong hình học sơ cấp với các phép toán cộng véc tơ và nhân véc tơ với số thực lập nên một không gian véc tơ thực.*

• **Ví dụ 2.** *Xét $\mathbb{R}^n$ là tập hợp mà mỗi phần tử là một bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, còn gọi là một véc tơ n thành phần. Nó lập nên một không gian véc tơ với hai phép toán sau đây:*

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\ k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), k \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

trong đó phần tử trung hòa là $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, phần tử đối của véc tơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ là $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

• **Ví dụ 3.** *Gọi $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các ma trận m hàng, n cột với các phần tử thực. Nó lập nên một không gian véc tơ với hai phép toán cộng ma trận và phép nhân ma trận với một số thực.*

• **Ví dụ 4.** *Tập hợp $C[a, b]$ các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là một không gian véc tơ với các phép toán thông thường*

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (kf)(x) &= kf(x),\end{aligned}$$

trong đó phần tử trung hòa là hàm số đồng nhất không, tức là bằng 0, $\forall x \in [a, b]$, phần tử đối của hàm f là $-f$: $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

• **Ví dụ 5.** *Xét $W \subset C[a, b]$ gồm những hàm số có giá trị bằng 1 tại $x = 0$ với hai phép toán đã định nghĩa trong $C[a, b]$. Lấy $f(x) = x+1 \in W, g(x) = x^2+1 \in W$ thì $(f+g)(x) = x^2+x+2$ nên $(f + g)(0) = 2$, do đó $f + g \notin W$. Vậy W không phải là một không gian véc tơ.*

◇ **Tính chất** Giả sử V là một không gian véc tơ.

(1) Phần tử trung hòa $\theta \in V$ là duy nhất. Nó được gọi là *véc tơ không.*
Thật vậy, giả sử θ_1 cũng là một phần tử trung hòa của phép cộng trong V. Khi đó

$$\begin{aligned}\theta + \theta_1 &= \theta_1 \quad \text{(vì } \theta \text{ là trung hòa)},\\ \theta + \theta_1 &= \theta \quad \text{(vì } \theta_1 \text{ là trung hòa)}.\end{aligned}$$

Vậy $\theta = \theta_1$.

(2) Với mọi véc tơ $\alpha \in V$, phần tử đối α' là duy nhất. Nó sẽ được ký hiệu là $(-\alpha)$.
Thật vậy, giả sử α'_1 cũng là một phần tử đối của α. Khi đó

$$(\alpha' + \alpha) + \alpha'_1 = \theta + \alpha'_1 = \alpha'_1 = \alpha' + (\alpha + \alpha'_1) = \alpha' + \theta = \alpha'.$$

Như vậy $\alpha' = \alpha'_1$.
Ta định nghĩa: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

(3) Ta có các quy tắc giản ước và chuyển vế: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$

$$\begin{array}{lcl} \alpha+\gamma & = & \beta+\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha=\beta, \\ \alpha+\beta & = & \gamma \qquad\quad \Rightarrow \quad \alpha=\gamma-\beta. \end{array}.$$

(4) $0\alpha = \theta$ và $k\theta = \theta$, $\forall \alpha \in V, \forall k \in \mathbb{R}$.
Thật vậy,

$$0\alpha + \theta = 0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha.$$

Từ đó theo luật giản ước, $0\alpha = \theta$. Tương tự,

$$k\theta + \theta = k\theta = k(\theta + \theta) = k\theta + k\theta.$$

Cũng theo luật giản ước, ta có $k\theta = \theta$.

(5) Nếu $k\alpha = \theta$ (với $k \in \mathbb{K}, \alpha \in V$), thì hoặc $k = 0$ hoặc $\alpha = \theta$.
Thật vậy, giả sử $k \neq 0$, nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $k^{-1} \in \mathbb{K}$ ta có

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta.$$

(6) $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$, $\forall k \in \mathbb{K}, \alpha \in V$.
Thật vậy,

$$k\alpha + (-k)\alpha = (k + (-k))\alpha = 0\alpha = \theta.$$

Từ đó, $(-k)\alpha = -(k\alpha)$. Tương tự,

$$k\alpha + k(-\alpha) = k(\alpha + (-\alpha)) = k\theta = \theta.$$

Do đó, $k(-\alpha) = -(k\alpha)$.

3.2 Độc lập tuyến tính và Phụ thuộc tuyến tính

□ **Định nghĩa 2.** *(a) Một* **tổ hợp tuyến tính** *của các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ là một biểu thức dạng*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

trong đó $c_i = const \in \mathbb{R}$.

(b) Giả sử $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \in V$. Đẳng thức đó được gọi là một **biểu diễn tuyến tính** *của α qua các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Khi có đẳng thức đó, ta nói α biểu diễn tuyến tính được qua $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.*

⊕ **Nhận xét**

- Một véc tơ có thể nhiều biểu diễn tuyến tính khác nhau qua một hệ véc tơ.

- Ta nói hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ nếu mỗi véc tơ α_i, $1 \leq i \leq n$, biểu diễn tuyến tính được qua $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

  Giả sử hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, và hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$. Khi đó, rõ ràng $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ cũng biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$.

• **Ví dụ 6.** *(a) Trong* $\mathbb{R}^3$ *cho* $\{\alpha = (2, -1, 3), \alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (1, -2, 3)\}$. *Hãy biểu diễn* α *qua tổ hợp tuyến tính của* α_1, α_2.

Ta xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \alpha$.

Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 2 \\ -c_1 - 2c_2 &= -1 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 3 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $c_1 = 3, c_2 = -1$. *Vậy* $\alpha = 3\alpha_1 - \alpha_3$.

(b) Trong $\mathbb{R}^3$ *cho hệ* $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1); \alpha_2 = (2, 1, 3); \alpha_3 = (1, 2, 0)\}$. *Véc tơ* $\alpha = (2, -1, 3)$ *có là tổ hợp tuyến tính của* S *?*

Xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \alpha$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_1 + 3c_2 &= 3 \end{cases}$$

Hệ này có $r(A) \neq r(\overline{A})$ *nên vô nghiệm. Vậy* α *không biểu diễn tuyến tính được qua* S.

□ **Định nghĩa 3.** *(a) Hệ* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *được gọi là* **độc lập tuyến tính** *nếu hệ thức*

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \theta$$

chỉ xảy ra khi $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(b) Hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ *được gọi là* **phụ thuộc tuyến tính** *nếu nó không độc lập tuyến tính.*

Nếu hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính, ta cũng nói các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính.

• **Ví dụ 7.** *(a) Trong không gian các véc tơ tự do của hình học sơ cấp, hệ 2 véc tơ là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu chúng không đồng phương, hệ 3 véc tơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng, hệ 4 véc tơ bất kỳ luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.*

(b) Trong không gian $\mathbb{R}^2$, *các véc tơ* $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ *độc lập tuyến tính. Thật vậy, hệ thức*

$$c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1, c_2) = (0, 0)$$

xảy ra khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = 0$.

Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^2$, *các véc tơ* $\{e_1, e_2, \alpha\}$ *phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, nếu* $\alpha = (a, b)$ *thì*

$$\alpha - ae_1 - be_2 = \theta.$$

(c) Xét xem các véc tơ sau đây độc lập hay tuyến tính phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$*:* $\alpha_1 = (5, 3, 4); \alpha_2 = (3, 2, 3); \alpha_3 = (8, 3, 1)$.

Ta xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \theta$.

Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 5c_1 + 3c_2 + 8c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $c_1 = 7, c_2 = -9, c_3 = -1$.
Như vậy, ba véc tơ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

(d) *Xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ* $S = \{x^2+x+1, 2x^2+3x+2, 2x+1\}$ *trong* $P_2[x]$.
Ta xét hệ thức $c_1(x^2 + x + 1) + c_2(2x^2 + 3x + 2) + c_3(2x + 1) = \theta$.
Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 & = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 & = 0 \\ c_1 + 2c_2 + c_3 & = 0 \end{cases}$$

Hệ này có $\det A = 1 \neq 0$ *nên chỉ có nghiệm tầm thường* $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
Như vậy, hệ S *đã cho độc lập tuyến tính.*

⊕ **Nhận xét** Từ ví dụ trên ta thấy rằng việc xét xem một hệ véc tơ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Tương tự, việc xét xem một véc tơ có biểu thị tuyến tính được hay không qua một hệ véc tơ được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính.

◇ **Tính chất**

(1) Hệ một véc tơ (α) phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $\alpha = \theta$.
Thật vậy vì $1\theta = \theta$ nên hệ $\{\theta\}$ phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, giả sử $\{\alpha\}$ phụ thuộc tuyến tính, tức là có $k \neq 0$ sao cho $k\alpha = \theta$. Nhân hai vế với k^{-1} ta có

$$\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta.$$

(2) Với $n > 1$, hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một véc tơ nào đó của hệ biểu thị tuyến tính được qua các véc tơ còn lại của hệ.
Thật vậy, giả sử có ít nhất một $c_i \neq 0, i = 1, \dots n$ thỏa mãn hệ thức

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \theta.$$

Nhân hai vế với c_i^{-1} ta thu được

$$\alpha_i = -\sum_{j \neq i} (c_i^{-1}c_j)\alpha_j.$$

Ngược lại, nếu α_i biểu thị tuyến tính được qua hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n\}$, tức là có các d_j sao cho

$$\alpha_i = d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + d_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + d_n\alpha_n,$$

thì ta có

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + d_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + d_n\alpha_n = \theta.$$

Do đó hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ phụ thuộc tuyến tính.

▽ **Hệ quả 1.** *Mọi hệ véc tơ có chứa* θ *là hệ phụ thuộc tuyến tính.*

(3) Giả sử hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu β biểu diễn tuyến tính được qua $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Trong trường hợp đó, biểu diễn tuyến tính này là duy nhất.
Thật vậy, nếu $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại bộ $(c_1, \dots, c_n, d)$ không đồng thời bằng 0 sao cho
$$c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n + d\beta = \theta.$$
Rõ ràng, $d \neq 0$ vì nếu trái lại thì hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ phụ thuộc tuyến tính. Vì $d \neq 0$ nên ta có thể viết
$$\beta = -\sum_{i=1}^{n}(d^{-1}c_i)\alpha_i.$$
Ngược lại, mỗi biểu diễn tuyến tính $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + (-1)\beta = \theta$, do đó hệ này phụ thuộc tuyến tính.
Giả sử có hai biểu thị tuyến tính của β qua hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$:
$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = d_1\alpha_1 + \dots + d_n\alpha_n.$$
Khi đó $\theta = (c_1 - d_1)\alpha_1 + \dots + (c_n - d_n)\alpha_n$. Do $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính nên hệ thức trên kéo theo
$$c_1 = d_1, \dots, c_n = d_n.$$

• **Ví dụ 8.** *Trong không gian véc tơ V cho hệ $S = \{x, y, z\}$ và $S_1 = \{x + y + z, 2x + 3y - z, 3x + 4y + z\}$. Chứng minh rằng nếu S độc lập tuyến tính thì S_1 độc lập tuyến tính.*

Giải

Xét hệ thức $c_1(x + y + z) + c_2(2x + 3y - z) + c_3(3x + 4y + z) = \theta \Leftrightarrow (c_1 + 2c_2 + 3c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 4c_3)y + (c_1 - c_2 + c_3)z = \theta.$
Do S độc lập tuyến tính nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$
Hệ này chỉ có nghiệm tầm thường $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ nên S_1 độc lập tuyến tính.

3.3 Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

□ **Định nghĩa 4.** *(a) Một hệ véc tơ của V được gọi là* **một hệ sinh** *của V nếu mọi véc tơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ đó.*

(b) Một hệ véc tơ của V được gọi là **một cơ sở** *của V nếu mọi véc tơ của V đều biểu diễn tuyến tính duy nhất qua hệ đó.*

Như vậy mỗi cơ sở đều là một hệ sinh.

• **Ví dụ 9.** *(a) Hệ $S = \{(1,0),(0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ vì $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ta đều có $x = x_1(1,0) + x_2(0,1)$.*

(b) Trong không gian $P_2[x]$ hệ $S = \{1, x, x^2\}$ là một hệ sinh vì ta có $p = c + bx + ax^2, \forall p \in P_2[x]$.

(c) Trong không gian $P_2[x]$ cho hệ $S_1 = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + 3x + 1, x^2 + 2x\}$. Hỏi S_1 có là hệ sinh của $P_2[x]$ hay không?
Với $\forall p = ax^2 + bx + c \in P_2[x]$ xét hệ thức $p = c_1(x^2 + x + 1) + c_2(2x^2 + 3x + 1) + c_3(x^2 + 2x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 & = & a \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 & = & b \\ c_1 + c_2 & = & c \end{cases}$$

Tồn tại p để hệ trên vô nghiệm, ví dụ $p = 2x^2 + x$, do đó S_1 không là hệ sinh của $P_2[x]$.

Một hệ véc tơ của không gian V được gọi là **độc lập tuyến tính cực đại** nếu nó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của V vào hệ đó thì hệ mới thu được trở thành phụ thuộc tuyến tính.

△ **Định lý 1.** *Cho hệ hữu hạn các véc tơ $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ của V. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương:*

(i) S là một cơ sở của V.

(ii) S là một hệ sinh độc lập tuyến tính của V.

(iii) S là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính cực đại của V.

Chứng minh

(i) ⇒ (ii): S là một cơ sở của V nên nó là một hệ sinh của V. Hơn nữa, véctơ θ có biểu diễn tuyến tính duy nhất qua $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:

$$\theta = 0\alpha_1 + \dots + 0\alpha_n.$$

Nói cách khác, hệ thức $c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \theta$ tương đương với $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Điều này có nghĩa là hệ S độc lập tuyến tính.

(ii) ⇒ (iii): Mọi véc tơ $\beta \in V$ đều biểu diễn tuyến tính được qua S cho nên hệ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính.

(iii) ⇒ (i): Vì hệ S độc lập tuyến tính cực đại nên mỗi véc tơ $\beta \in V$ đều biểu diễn tuyến tính qua S. Nói cách khác, hệ này sinh ra V. Biểu diễn tuyến tính của mỗi véc tơ $\beta \in V$ qua hệ độc lập tuyến tính $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ là duy nhất, do đó S là cơ sở.

□ **Định nghĩa 5.** *Không gian véc tơ V được gọi là hữu hạn sinh nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.*

□ **Định nghĩa 6.** *(a) Số phần tử của mỗi cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn sinh $V \neq \{\theta\}$ được gọi là số chiều của V và được ký hiệu là $\dim V$. Nếu $V = \{\theta\}$ ta quy ước $\dim V = 0$.*

(b) Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một không gian véc tơ vô hạn chiều.

Trong tài liệu này ta chỉ xét các không gian hữu hạn chiều.

⊙ **Bổ đề** Trong không gian véc tơ V, giả sử hệ véc tơ $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ độc lập tuyến tính, $T = \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ là một hệ sinh. Khi đó $r \le s$.

Chứng minh Vì T là hệ sinh của V nên

$$\begin{cases} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{s1}\beta_s \\ \alpha_2 &= a_{12}\beta_1 + \cdots + a_{s2}\beta_s \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_r &= a_{1r}\beta_1 + \cdots + a_{sr}\beta_s \end{cases}$$

Xét hệ phương trình tuyến tính mà ẩn là c_i:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \cdots + a_{1r}c_r &= 0 \\ a_{21}c_1 + \cdots + a_{2r}c_r &= 0 \\ \qquad\vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{s1}c_1 + \cdots + a_{sr}c_r &= 0 \end{cases}$$

Nếu $r \ge s$ thì hệ thuần nhất này có số phương trình ít hơn số ẩn, do đó nó có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại r số thực c_i không đồng thời bằng 0 thỏa mãn s đẳng thức trên. Nhân đẳng thức thứ nhất với β_1, đẳng thức thứ hai với β_2, ..., đẳng thức thứ s với β_s rồi cộng lại ta được

$$(a_{11}c_1 + \cdots + a_{1r}c_r)\beta_1 + \cdots + (a_{s1}c_1 + \cdots + a_{sr}c_r)\beta_s = \theta$$

hay là

$$c_1(a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{s1}\beta_s) + \cdots + c_r(a_{1r}\beta_1 + \cdots + a_{sr}\beta_s) = \theta$$

nghĩa là có

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = \theta,$$

Điều này trái với giả thiết rằng $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ độc lập tuyến tính. Vậy $r \le s$.

△ **Định lý 2.** *Giả sử $V \ne \{\theta\}$ là một không gian hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Chứng minh Giả sử $T = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ là một hệ sinh hữu hạn của V. Vì $V \ne \{\theta\}$, nên có véc tơ $\alpha_1 \ne \theta$ trong V. Hệ gồm một véc tơ khác không $\{\alpha_1\}$ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại, thì có hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V. Hệ này biểu diễn tuyến tính qua T. Theo bổ đề trên, ta có $r \le s$. Như thế quá trình chọn các véc tơ $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ để thu được một hệ độc lập tuyến tính phải dừng lại sau một số hữu hạn bước. Ta có một hệ véc tơ $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại trong V, với $n \le s$. Theo định lý (1), hệ này là một cơ sở của V.

Giả sử $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ cũng là một cơ sở của V. Vì $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính và biểu diễn tuyến tính được qua $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ nên theo Bổ đề trên, ta có $n \le m$. Đổi vai trò của hai cơ sở trên, ta cũng có $m \le n$. Như vậy, $m = n$.

• **Ví dụ 10.** *Trong $\mathbb{R}^n$ xét hệ véc tơ*

$$B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Hệ B độc lập tuyến tính vì hệ thức

$$c_1e_1 + \cdots + c_ne_n = (0, \ldots, 0)$$

xảy ra khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Hệ B sinh ra $\mathbb{R}^n$ vì mọi véc tơ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có biểu thị tuyến tính

$$x = x_1e_1 + \cdots + c_ne_n.$$

Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$ và B là một cơ sở. B được gọi là **cơ sở chính tắc** của không gian $\mathbb{R}^n$.

• **Ví dụ 11.** *Trong $P_n[x]$ xét hệ véc tơ*

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Hệ này sinh ra $P_n[x]$ vì mọi đa thức $p(x)$ có bậc $\leq n$ đều viết được dưới dạng

$$p(x) = a_0.1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}.$$

Hệ B độc lập tuyến tính vì hệ thức

$$c_0.1 + c_1x + \cdots + c_nx^n = 0, \forall x$$

chứng tỏ phương trình này có vô số nghiệm, điều đó chỉ xảy ra khi $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Vậy $\dim P_n[x] = n+1$ và B là một cơ sở. B được gọi là **cơ sở chính tắc** của không gian $P_n[x]$.

△ **Định lý 3.** *Giả sử V là một không gian véc tơ hữu hạn sinh. Mọi hệ độc lập tuyến tính trong V đều có thể bổ sung để trở thành một cơ sở của V. Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n véc tơ của V đều là một cơ sở.*

Chứng minh Giả sử $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại thì có thể bổ sung các véc tơ $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots$ để hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Quá trình này phải dừng lại sau một số hữu hạn bước, bởi vì theo định lý (2), $\dim V < \infty$. Ta thu được hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại trong V, tức là một cơ sở của V.

Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n véc tơ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ đều cực đại. Thật vậy, giả sử phản chứng có thể thêm vào hệ đó một véc tơ β_{n+1} nào đó của V sao cho hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}\}$ biểu thị tuyến tính qua một cơ sở $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ nào đó nên theo Bổ đề, ta có $n+1 \leq n$. Điều này vô lý. Vậy theo định lý (1) hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ là một cơ sở của V.

• **Ví dụ 12.** *(a) Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $S = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$. Chứng minh S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.*

Xét hệ thức $c_1(1,1,1) + c_2(1,0,1) + c_3(1,1,0) = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 & = & 0 \\ c_1 + c_3 & = & 0 \\ c_1 + c_2 & = & 0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này chỉ có nghiệm tầm thường nên S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim \mathbb{R}^3 = 3$*, do đó S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.*

(b) Cho hệ $S = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 2\}$. Hỏi S có là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Giải

Xét hệ thức $c_1(x^2+x+1)+c_2(2x^2+x+1)+c_3(x^2+2x+2)=\theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+c_3 &= 0\\ c_1+c_2+2c_3 &= 0\\ c_1+c_2+2c_3 &= 0\end{cases}$$

Dễ thấy S *phụ thuộc tuyến tính do đó* S *không là cơ sở của* $P_2[x]$.

Giả sử $S=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Mỗi véc tơ $\alpha\in V$ có biểu diễn tuyến tính duy nhất

$$\alpha = c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=\sum c_i\alpha_i,\quad c_i\in\mathbb{R}.$$

□ **Định nghĩa 7** (Tọa độ). *Bộ giá trị* $(c_1,\dots,c_n)$ *xác định bởi điều kiện* $\alpha=\sum c_i\alpha_i$ *được gọi là* **tọa độ của véc tơ** α *trong cơ sở* S, c_i *được gọi là tọa độ thứ* i *của* α *trong cơ sở đó.*

Véc tơ $(\alpha)_S=(c_1,\dots,c_n)$ là một véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ và được gọi là **véc tơ tọa độ** của α đối với cơ sở S. Véc tơ $(\alpha)_S$ viết ở dạng cột dẫn đến ma trận $[\alpha]_S=(c_1,\dots,c_n)^t$ là một ma trận cỡ $n\times 1$ và được gọi là **ma trận tọa độ** của α đối với cơ sở S.

Giả sử α,β có tọa độ trong cơ sở $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ tương ứng là $(c_1,\dots,c_n)$ và $(d_1,\dots,d_n)$. Khi đó từ tính độc lập tuyến tính của $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ suy ra rằng $\alpha=\beta$ nếu và chỉ nếu $(c_1,\dots,c_n)=(d_1,\dots,d_n)$. Thật vậy, $\alpha=\beta$ khi và chỉ khi

$$\alpha-\beta=(c_1-d_1)\alpha_1+\cdots+(c_n-d_n)\alpha_n=\theta.$$

Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $c_1=d_1,\dots,c_n=d_n$.
Hơn nữa $\alpha+\beta$ có tọa độ là $(c_1+d_1,\dots,c_n+d_n)$ và $k\alpha$ có tọa độ là $(kc_1,\dots,kc_n)$ trong hệ cơ sở $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$.

• **Ví dụ 13.** *Cho* $S=\{x^2+x+1,x^2+2x+1,x^2+x+2\}$ *là cơ sở của không gian* $P_2[x]$. *Tìm véc tơ* $p(x)$ *biết* $[p(x)]_S=(3,-5,2)^t$.

Giải

$[p(x)]_S=(3,-5,2)^t \Leftrightarrow p(x)=3(x^2+x+1)-5(x^2+2x+1)+2(x^2+x+2)=-5x+2.$

• **Ví dụ 14.** *Cho* $S=\{(1,1,1);(1,0,1);(1,1,0)\}$ *là cơ sở của* $\mathbb{R}^3$ *và* $x=(3,1,-2)\in\mathbb{R}^3$. *Tìm tọa độ của* x *trong cơ sở* S.

Giải

Giả sử $(x)_S=(x_1,x_2,x_3)\Leftrightarrow(3,1,-2)=x_1(1,1,1)+x_2(1,0,1)+x_3(1,1,0)$.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 3\\ x_1+x_3=1\\ x_1+x_2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4\\ x_2=2\\ x_3=5\end{cases}\Leftrightarrow (x)_S=(-4,2,5).$$

• **Ví dụ 15.** *Cho* $S = \{x^2 + x + 1, x + 1, 2x + 1\}$ *là cơ sở của* $P_2[x]$. *Tìm tọa độ của véc tơ* $p(x) = 3x^2 + 4x - 1$ *trong cơ sở* S.

Giải

Giả sử $(p(x))_S = (a, b, c) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = a(x^2 + x + 1) + b(x + 1) + c(2x + 1)$.

$$\begin{cases} a & & & & & = & 3 \\ a & + & b & + & 2c & = & 4 \\ a & + & b & + & c & = & -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & 3 \\ b & = & -9 \\ c & = & 5 \end{cases} \Leftrightarrow (p(x))_S = (3, -9, 5).$$

3.3.1 Bài toán đổi cơ sở

Bây giờ ta xét xem tọa độ của một véc tơ trong những cơ sở khác nhau có liên hệ với nhau như thế nào?

Giả sử $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ và $T = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ là hai cơ sở của không gian véc tơ V. Mỗi véc tơ β_j biểu diễn tuyến tính được qua cơ sở S, tức là có các p_{ij} để cho:

$$\begin{array}{rcl} \beta_1 & = & p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 & = & p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n & = & p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{array}$$

Giả sử $\alpha \in V$ có tọa độ $(c_1, \dots, c_n)$ và $(d_1, \dots, d_n)$ tương ứng trong các cơ sở S và T. Khi đó ta có:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & d_1\beta_1 + \cdots + d_n\beta_n = d_1(p_{11}\alpha_1 + \cdots + p_{n1}\alpha_n) + \cdots + d_n(p_{1n}\alpha_1 + \cdots + p_{nn}) \\ & = & (p_{11}d_1 + \cdots + p_{1n}d_n)\alpha_1 + \cdots + (p_{n1}d_1 + \cdots + p_{nn}d_n)\alpha_n. \end{array}$$

Do tính duy nhất của tọa độ của α trong cơ sở S, ta nhận được

$$\begin{cases} c_1 & = & p_{11}d_1 + p_{12}d_2 + \cdots + p_{1n}d_n \\ c_2 & = & p_{21}d_1 + p_{22}d_2 + \cdots + p_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & = & p_{n1}d_1 + p_{n2}d_2 + \cdots + p_{nn}d_n \end{cases} \tag{3.1}$$

Đặt $P = (p_{ij})_{n\times n} = \big([\beta_1]_S[\beta_2]_S \dots [\beta_n]_S\big)$. Khi đó (3.1) có thể viết

$$[\alpha]_S = P\ [\alpha]_T \tag{3.2}$$

Ma trận P thỏa mãn (3.2) được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ S sang T, thường ký hiệu là $P_{S\to T}$.

Ma trận chuyển cơ sở P có tính chất sau:

△ **Định lý 4.** *Nếu* P *là ma trận chuyển cơ sở từ* S *sang* T *thì*

(a) P *khả đảo, tức là* $\det P \neq 0$.

(b) P^{-1} *là ma trận chuyển cơ sở từ* T *sang* S, *tức là:*

$$[\alpha]_T = P^{-1}[\alpha]_S$$

• **Ví dụ 16.** *Trong* $\mathbb{R}^2$ *cho các cơ sở* $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $T = \{\beta_1, \beta_2\}$, *trong đó* $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (0,1), \beta_1 = (1,1), \beta_2 = (2,1)$.

(a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S *sang* T.

(b) Tìm $[\alpha]_T$ *biết* $\alpha = (7,2)$.

Giải

(a) Ta có biểu diễn $\{\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2\}$, do đó $[\beta_1]_S = (1,1)^t, [\beta_2]_S = (2,1)^t$.
Vậy ma trận chuyển cơ sở từ S sang T là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Ma trận chuyển cơ sở từ T sang S là

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vì $\alpha = (7,2) = 7\alpha_1 + 2\alpha_2$ nên $[\alpha]_S = (7,2)^t$.
Do đó

$$[\alpha]_T = P^{-1}[\alpha]_S = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3.4 Không gian con - Hạng của một hệ véc tơ

Giả sử V là một không gian véc tơ. Ta quan tâm đến những tập con của V có tính chất là chúng cũng lập nên những không gian véc tơ đối với các phép toán là thu hẹp của những phép toán tương ứng trên V. Ta có định nghĩa sau đây:

□ **Định nghĩa 8.** *Tập con khác rỗng* $W \subset V$ *được gọi là một không gian véc tơ con của* V *nếu* W *đóng kín đối với hai phép toán trên* V, *nghĩa là*

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \in W, &\quad \forall \alpha, \beta \in W, \\ k\alpha \in W, &\quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in W. \end{aligned}$$

⊕ **Nhận xét** Khi đó W cũng là một không gian véc tơ. Thật vậy các tiên đề (V1), (V4), (V5), (V6), (V7), (V8) nghiệm đúng với mọi phần tử của V nên cũng nghiệm đúng với mọi phần tử của W. Ta chỉ cần kiểm tra lại các tiên đề (V2), (V3) nói về sự tồn tại của phần tử θ và phần tử đối.

Vì $W \neq \emptyset$ nên có ít nhất một phần tử $\alpha \in W$. Khi đó $\theta = 0\alpha \in W$. Phần tử $\theta \in V$ đóng vai trò phần tử $\theta \in W$. Mặt khác, với mọi $\alpha \in W$ ta có $(-\alpha) = (-1)\alpha \in W$. Đó cũng chính là phần tử đối của α trong W.

• **Ví dụ 17.** *(a)* $\{\theta\}$ *và* V *là hai không gian con của* V.

(b) Không gian $C^1[a,b]$ *các hàm khả vi liên tục trên* $[a,b]$ *là một không gian con của không gian các hàm liên tục* $C[a,b]$.

△ **Định lý 5.** *Nếu W là một không gian con của V thì* $\dim W \leq \dim V$*. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $W = V$.*

Chứng minh Vì W là một không gian con của V nên mỗi hệ độc lập tuyến tính trong W thì cũng độc lập tuyến tính trong V. Do đó dim$W$ $\leq$dim$V$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi mỗi cơ sở của W cũng là một cơ sở của V. Điều này tương đương với $W = V$.

3.4.1 Tổng và Tổng trực tiếp

Giả sử $W_1, \ldots, W_m$ là các không gian con của V. Tập hợp

$$W_1 + \cdots + W_m = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m | \alpha_i \in W_i, i = 1, \ldots, m\}$$

lập nên một không gian véc tơ con của V.

□ **Định nghĩa 9.** *Không gian véc tơ $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là tổng của các không gian $W_1, \ldots, W_m$, ký hiệu bởi $\sum\limits_{i=1}^{m} W_i$.*

Mỗi véc tơ của $W_1 + \cdots + W_m$ có thể viết dưới dạng

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \qquad \alpha_i \in W_i.$$

Cách viết này nói chung không duy nhất. Chẳng hạn nếu $W_1 \cap W_2 \neq \{\theta\}$, thì mỗi véc tơ $\alpha \in W_1 \cap W_2 \setminus \{\theta\}$ có hai biểu thị $\alpha = \alpha + \theta = \theta + \alpha$, trong đó véc tơ thứ nhất trong tổng thuộc W_1 còn véc tơ thứ hai trong tổng thuộc W_2.

□ **Định nghĩa 10.** *Nếu mọi véc tơ trong tổng $W_1 + \cdots + W_m$ đều viết được duy nhất dưới dạng $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, với $\alpha_i \in W_i (i = 1, \ldots, m)$ thì $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là tổng trực tiếp của các không gian $W_1, \ldots, W_m$, và được ký hiệu là $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.*

△ **Định lý 6.** *Giả sử U và W là các không gian con của không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Khi đó*

$$dimU + dimW = dim(U + W) + dim(U \cap W).$$

Chứng minh Giả sử $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ là một cơ sở của $U \cap W$. (Nếu $U \cap W = \{\theta\}$ thì ta coi $r = 0$). Ta bổ sung hệ này để có một cơ sở $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ của U và một cơ sở $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ của W.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ là một cơ sở của $U + W$.

Rõ ràng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ là một hệ sinh của $U + W$. Để chứng minh đó là hệ độc lập tuyến tính, ta xét hệ thức

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = \theta,$$

Véc tơ

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = -c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t$$

vừa thuộc U, vừa thuộc W nên nó thuộc $U \cap W$, và do đó biểu thị tuyến tính qua $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$:

$$-c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t = d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r.$$

Ta viết lại đẳng thức này như sau

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = \theta.$$

Vì hệ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, nên $c_1 = \ldots = c_t = d_1 = \cdots = d_r = 0$. Do đó

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = \theta.$$

Hệ véc tơ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ cũng độc lập tuyến tính, cho nên $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Kết hợp điều này với các hệ thức $c_1 = \cdots = c_t = 0$ ta suy ra hệ véc tơ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, và do đó nó là một cơ sở của $U + W$.

Đếm số véc tơ của các cơ sở đã xây dựng cho $U, W, U \cap W, U + W$, ta có:

$$dim(U + W) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

▽ **Hệ quả 2.**

$$dim(U \oplus W) = dimU + dimW.$$

3.4.2 Hạng của hệ véc tơ

Trong không gian véc tơ V cho hệ $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Ta gọi một hệ con của S là **độc lập tuyến tính cực đại** trong S nếu hệ đó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào hệ đó thì ta thu được một hệ phụ thuộc tuyến tính.

♢ **Mệnh đề 1.** *Hai hệ con độc lập tuyến tính cực đại trong S có cùng số phần tử.*

Từ kết quả trên dẫn đến định nghĩa hạng của hệ véc tơ.

□ **Định nghĩa 11.** *Hạng của hệ véc tơ S bằng số véc tơ của mỗi hệ con độc lập tuyến tính cực đại trong S và được ký hiệu là $r(S)$.*

3.4.3 Cách tìm hạng của hệ véc tơ

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là cơ sở của không gian V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ là một hệ véc tơ của V. Mỗi véc tơ β_j biểu thị tuyến tính được qua cơ sở S, tức là có các a_{ij} để cho:

$$(\beta_1)_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}, (\beta_2)_S = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, (\beta_m)_S = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Khi đó A được gọi là ma trận của hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ trong cơ sở S. Để đơn giản ta thường chọn S là cơ sở chính tắc của V.
Hiển nhiên ma trận của một hệ cơ sở S trên chính nó là một ma trận đơn vị cấp n. Ta có kết quả sau:

△ **Định lý 7.** *Hạng của hệ véc tơ bằng hạng ma trận của hệ đối với một cơ sở hữu hạn bất kỳ.*

Chứng minh Giả sử hạng của hệ $S = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ là r và $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ là hệ con độc lập tuyến tính cực đại (vì bao giờ ta cũng có thể đánh số lại các véc tơ của S để có r véc tơ đầu là độc lập tuyến tính). Khi đó các véc tơ $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m$ đều là tổ hợp tuyến tính của $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$, tức là các hàng $r+1, \dots, m$ của A đều là tổ hợp tuyến tính của r hàng đầu, do đó mọi định thức con cấp lớn hơn r của A đều bằng 0.

Mặt khác ma trận lập từ r hàng đầu của A phải có hạng bằng r vì nếu không sẽ có một hàng là tổ hợp tuyến tính của $r-1$ hàng còn lại. Điều này trái với giả thiết $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Ngược lại nếu $r(A) = r$, không mất tính tổng quát ta có thể xem định thức con cấp r ở góc trên bên trái khác 0 và mọi định thức con cấp $r+1$ bằng 0. Khi đó các hàng $r+1, \dots, m$ đều là tổ hợp tuyến tính của r hàng đầu. Vì hàng thứ j (j=r+1,…m) là tọa độ của véc tơ β_j nên β_j là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$.

Mặt khác $\{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ phải độc lập tuyến tính, vì nếu không sẽ có một véc tơ trong nó là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại. Như vậy sẽ có một trong r hàng đầu của A là tổ hợp tuyến tính của $r-1$ hàng còn lại, trái với giả thiết A có định thức con cấp r khác 0. Vậy hạng của S bằng r.

⊕ **Nhận xét**

- Nếu $r(A) = m$ thì hệ S độc lập tuyến tính.
- Nếu $r(A) < m$ thì hệ S phụ thuộc tuyến tính.

• **Ví dụ 18.** *Tìm hạng của hệ véc tơ:* $\alpha_1 = (-1, 3, 4); \alpha_2 = (0, 2, 5); \alpha_3 = (-2, 4, 3); \alpha_4 = (1, -1, 1)$ *trong không gian* $\mathbb{R}^3$.

Giải

⊙ **Cách 1.** Nhận thấy hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, từ $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \theta$ ta có

$$\begin{cases} -c_1 & & = 0 \\ 3c_1 & + \ 2c_2 & = 0 \\ 4c_1 & + \ 5c_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Mặt khác $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ và $\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2$ nên α_1, α_2 là hệ con độc lập tuyến tính cực đại, do đó hạng của hệ bằng 2.

⊙ **Cách 2.** Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ. Sau đó tính hạng của ma trận A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận bậc thang có 2 hàng khác không, do đó $r(A) = 2$. Vậy $r(S) = 2$.

• **Ví dụ 19.** *Tìm hạng của hệ véc tơ*

$$S = \{(1,1,1,1);(1,-1,1,-1);(1,3,1,3);(1,2,0,2);(1,2,1,2)\}$$

Giải

Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ. Sau đó tính hạng của ma trận A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận bậc thang có 3 hàng khác không, do đó $r(A) = 3$. Vậy $r(S) = 3$.

• **Ví dụ 20.** *Trong không gian V cho hệ $S = \{\alpha, \beta\}$ độc lập tuyến tính. Tính hạng của các hệ sau đây:*

(a) $S_1 = \{2\alpha, 3\beta\}$.

(b) $S_2 = \{\alpha, \beta, 2\alpha + 3\beta\}$.

(c) $S_3 = \{\alpha, \beta, 2\alpha + 3\beta, \theta\}$.

Giải

Sinh viên tự làm

3.4.4 Không gian con sinh bởi hệ véc tơ

□ **Định nghĩa 12.** *Cho không gian véc tơ V và $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset V, S \neq \emptyset$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu là span(S).*

$$span(S) = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_m | c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m\}.$$

◇ **Mệnh đề 2.** *(i) $W = span(S)$ là một không gian con của V.*

(ii) W là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.

Chứng minh (i) Vì $\theta = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_m \in W$ nên $W \neq \emptyset$. Mặt khác lấy hai véc tơ tùy ý $\alpha, \beta \in W$, khi đó

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m, \quad \beta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_m\alpha_m, \quad c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m.$$

Suy ra $\alpha + \beta = (c_1 + d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_m + d_m)\alpha_m \in W$ và $k\alpha = kc_1\alpha_1 + \cdots + kc_m\alpha_m \in W$. Vậy W là không gian con của V.

(ii) Vì $\alpha = 1.\alpha, \forall \alpha \in S$ nên $\alpha \in W$, do đó $S \subset W$.

Giả sử W_1 là một không gian con bất kì của V chứa S. Khi đó $\forall \alpha \in W$ ta đều có thể viết

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m.$$

Do $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W_1$ nên $\alpha \in W_1$, tức là $W \subset W_1$. Vậy W chính là không gian con nhỏ nhất chứa S.

$W = span(S)$ được gọi là **không gian con của V sinh bởi hệ hệ véc tơ** S. Hệ véc tơ S được gọi là **hệ sinh** của W.

△ **Định lý 8.** *Số chiều của không gian span(S) là $r(S)$ và mọi hệ gồm $r(S)$ véc tơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của span(S).*

Chứng minh Nếu hệ con S' độc lập tuyến tính cực đại trong S thì mọi phần tử của S biểu diễn tuyến tính qua S', do đó mọi phần tử của $span(S)$ cũng vậy. Nói cách khác S' cũng độc lập tuyến tính cực đại trong $span(S)$. Vậy số véc tơ của S' là số chiều của không gian $span(S)$, tức là $\dim span(S) = r(S)$. Hơn nữa theo định lý (3) mọi hệ gồm $r(S)$ véc tơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của $span(S)$.

• **Ví dụ 21.** *Biện luận theo m số chiều của không gian con sinh bởi hệ véctơ sau trong $\mathbb{R}^4$:*

$$\{(1,-2,3,7),(4,2,-5,m),(2,6,-11,-14+2m,-3,-4,8,7-m)\}$$

Giải

Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -5 & m \\ 2 & 6 & -11 & -14+2m \\ -3 & -4 & 8 & 7-m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 & -28+m \\ 0 & 10 & -17 & -28+2m \\ 0 & -10 & 17 & 28-m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 & -28+m \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy:

- nếu $m = 0$ thì $\dim(span(S)) = r(S) = 2$ và một cơ sở của nó là

$$\{(1,-2,3,7),(0,10,-17,-28)\}$$

- nếu $m \neq 0$ thì $\dim(span(S)) = r(S) = 3$ và một cơ sở của nó là

$$\{(1,-2,3,7),(0,10,-17,-28+m),(0,0,0,m)\}$$

• **Ví dụ 22.** *Tìm m sao cho véc tơ $x = (2,0,1,m)$ thuộc vào không gian con sinh hệ véctơ $S = \{u = (1,-1,0,1), v = (2,0,1,0), w = (-1,-1,-1,m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$. Biểu diễn x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w trong trường hợp đó.*

Giải

Ta có $x \in span(S) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3$ sao cho $x = c_1u + c_2v + c_3w$. Phương trình véc tơ trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 &= 2 \\ -c_1 \qquad - c_3 &= 0 \\ \qquad c_2 - c_3 &= 1 \\ c_1 \qquad + mc_3 &= m \end{cases}$$

Khi $m \neq 1$ hệ trên có nghiệm duy nhất: $\left\{c_1 = -\dfrac{m}{m-1}, c_2 = \dfrac{2m-1}{m-1}, c_3 = \dfrac{m}{m-1}\right\}$

• **Ví dụ 23.** *Tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ:*

$$\begin{cases} x - y + z + 2t &= 0 \\ 2x + y - 2z + t &= 0 \\ -x - 2y + 3z + t &= 0 \\ 2x - 5y + 6z + 7t &= 0 \end{cases}$$

Giải

Lập ma trận bổ sung $\overline{A}$ rồi sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2h_1+h_4\to h_4 \\ h_1+h_3\to h_3}]{-2h_1+h_2\to h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_2+h_4\to h_4]{h_2+h_3\to h_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ ban đầu tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x - y + z + 2t &= 0 \\ \quad 3y - 4z - 3t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{3}z - t \\ y &= \frac{4}{3}z + t \\ z, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Khi đó không gian nghiệm

$$W = \left\{(x,y,z,t) = \left(\frac{1}{3}z - t, \frac{4}{3}z + t, z, t\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}z, \frac{4}{3}z, z, 0 + (-t, t, 0, t)\right)\right\}$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right) z + (-1, 1, 0, 1)t | z, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Như vậy $W = span\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right), (-1, 1, 0, 1)\right\}$. Dễ thấy 2 véc tơ này độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của W và $\dim W = 2$.

3.5 Không gian véc tơ Euclid

3.5.1 Không gian véc tơ Euclid

Nhắc lại rằng, trong hình học sơ cấp, tích vô hướng của hai véc tơ được định nghĩa bằng tích của độ dài hai véc tơ đó và côsin của góc xen giữa chúng. Dễ thấy rằng, ngược lại, độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ có thể biểu thị qua tích vô hướng. Người ta nhận thấy rằng, để đưa những khái niệm này vào các không gian véc tơ trừu tượng, việc trực tiếp trừu tượng hóa các khái niệm độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ khó hơn nhiều so với việc trừu tượng hóa khái niệm tích vô hướng. Vì thế trước hết chúng ta nghiên cứu khái niệm tích vô hướng, rồi sử dụng nó để định nghĩa độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ.

□ **Định nghĩa 13.** *V là một không gian véc tơ thực, α, β là hai véc tơ của V. Tích vô hướng của α và β là một số thực, kí hiệu là $\langle\alpha, \beta\rangle$, thỏa mãn các tính chất sau đây được gọi là các tiên đề của tích vô hướng:*

(i) Tính song tuyến tính:
$$\begin{aligned}\langle\alpha_1 + \alpha_2, \beta\rangle &= \langle\alpha_1, \beta\rangle + \langle\alpha_2, \beta\rangle,\\ \langle k\alpha, \beta\rangle &= k\langle\alpha, \beta\rangle,\\ \langle\alpha, \beta_1 + \beta_2\rangle &= \langle\alpha, \beta_1\rangle + \langle\alpha, \beta_2\rangle,\\ \langle\alpha, k\beta\rangle &= k\langle\alpha, \beta\rangle,\end{aligned}$$

(ii) Tính đối xứng: $\langle\alpha, \beta\rangle = \langle\beta, \alpha\rangle$,

(iii) Tính xác định dương: $\langle\alpha, \alpha\rangle \geq 0, \langle\alpha, \alpha\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$.

□ **Định nghĩa 14.** *Không gian véc tơ thực V có trang bị một tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng. Không gian n chiều có tích vô hướng gọi là không gian Euclid.*

• **Ví dụ 24.** *(a) Không gian các véc tơ tự do đã học trong hình học sơ cấp là một không gian véc tơ Euclid với tích vô hướng thông thường*

$$\langle\alpha, \beta\rangle = |\alpha||\beta| \cos\angle(\alpha, \beta).$$

(b) Giả sử V là không gian véc tơ thực n chiều và $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ là một cơ sở của nó. Có thể định nghĩa một tích vô hướng trên V như sau. Nếu $\alpha = \sum x_i e_i, \beta = \sum y_i e_i$, thì ta đặt

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nói riêng, nếu $V = \mathbb{R}^n$ và $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, thì tích vô hướng của hai véc tơ $\alpha = (x_1, \ldots, x_n), \beta = (y_1, \ldots, y_n)$ được định nghĩa là

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nó được gọi là tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét rằng theo cách này mỗi cơ sở của V cho phép xác định trên V một tích vô hướng. Hai tích vô hướng xác định bởi hai cơ sở khác nhau thì nói chung khác nhau.

(c) Giả sử $V = C[a, b]$ là không gian các hàm thực liên tục trên $[a, b]$. Công thức

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f, g \in C[a, b].$$

xác định một tích vô hướng trên không gian vô hạn chiều $C[a, b]$.

Bây giờ ta định nghĩa độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ trong một không gian véc tơ Euclid.

□ **Định nghĩa 15.** *Giả sử V là một không gian véc tơ Euclid với tích vô hướng. Khi đó, độ dài (hay chuẩn) của véc tơ $\alpha \in V$ là số thực không âm $|\alpha| = \sqrt{\langle\alpha, \alpha\rangle}$.*

Nhận xét rằng, ngược lại, tích vô hướng cũng được hoàn toàn xác định bởi độ dài véc tơ. Thật vậy

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{1}{2}\{|\alpha + \beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2\}.$$

Để định nghĩa được góc giữa hai véc tơ, ta cần mệnh đề sau đây.

⊙ **Mệnh đề** (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

$$|\langle\alpha, \beta\rangle| \le |\alpha||\beta|, \qquad \forall\alpha, \beta \in V.$$

Chứng minh Nếu $\alpha = \theta$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng bởi vì hai vế của nó đều bằng 0.

Xét trường hợp $\alpha \neq \theta$. Ta có $\langle t\alpha + \beta, t\alpha + \beta\rangle \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó

$$t^2\langle\alpha, \alpha\rangle + 2t\langle\alpha, \beta\rangle + \langle\beta, \beta\rangle \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\langle\alpha, \alpha\rangle > 0$, nên vế trái là một tam thức bậc hai đối với t. Nó không âm với mọi giá trị của t nên

$$\Delta' = \langle\alpha, \beta\rangle^2 - \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle \le 0 \Leftrightarrow \langle\alpha, \beta\rangle^2 \le \langle\alpha, \alpha\rangle\langle\beta, \beta\rangle \Rightarrow |\langle\alpha, \beta\rangle| \le |\alpha||\beta|.$$

Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, bất đẳng thức trên có dạng

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}, \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}.$$

□ **Định nghĩa 16.** *Góc giữa hai véc tơ khác không α và β được ký hiệu bởi $\angle(\alpha, \beta)$ và được xác định duy nhất bởi điều kiện sau*

$$\begin{cases} \cos\angle(\alpha, \beta) = \dfrac{\langle\alpha, \beta\rangle}{|\alpha||\beta|}, \\ 0 \le \angle(\alpha, \beta) \le \pi. \end{cases}$$

Ta coi góc giữa véc tơ θ và một véc tơ khác là không xác định.

□ **Định nghĩa 17.** *Hai véc tơ $\alpha, \beta \in V$ được gọi là vuông góc (hay trực giao) với nhau, và được ký hiệu là $\alpha\perp\beta$, nếu*

$$\langle\alpha, \beta\rangle = 0.$$

Như vậy, $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$ nếu và chỉ nếu hoặc là ít nhất một trong hai véc tơ α, β bằng θ, hoặc là $\angle(\alpha, \beta) = \dfrac{\pi}{2}$.

◊ **Mệnh đề 3.** *(i)* $|\alpha| \ge 0, \forall\alpha \in V, |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$.

(ii) $|k\alpha| = |k||\alpha|, \forall k \in \mathbb{R}, \forall\alpha \in V$.

(iii) (Bất đẳng thức tam giác)

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|, \forall\alpha, \beta \in V.$$

Khoảng cách từ véc tơ α đến véc tơ β được định nghĩa như sau:

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|.$$

Từ mệnh đề (3) ta suy ra hàm khoảng cách có những tính chất cơ bản sau đây:

(i) $d(\alpha, \beta) \geq 0, \forall \alpha, \beta \in V, \quad d(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

(ii) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha), \forall \alpha, \beta \in V$.

(iii) $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma), \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$.

3.5.2 Cơ sở trong không gian Euclid

□ **Định nghĩa 18.** *(a) Hệ véc tơ $\{e_1, \dots, e_k\}$ của không gian véc tơ Euclid V được gọi là hệ trực giao nếu các véc tơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ nếu $i \neq j$.*

(b) Hệ véc tơ $\{e_1, \dots, e_k\}$ được gọi là một hệ trực chuẩn nếu nó là một hệ trực giao và mỗi véc tơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

♢ **Mệnh đề 4.** *(i) Mỗi hệ trực giao không chứa véc tơ θ đều độc lập tuyến tính.*

(ii) Nếu hệ véc tơ $\{e_1, \dots, e_k\}$ là trực giao và không chứa véc tơ θ thì hệ $\{\frac{e_1}{|e_1|}, \dots, \frac{e_k}{|e_k|}\}$ là trực chuẩn.

Chứng minh (i) Giả sử $\{e_1, \dots, e_k\}$ là một hệ trực giao và không chứa véc tơ θ. Xét hệ thức

$$c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k = \theta.$$

Nhân vô hướng hai vế với e_k và sử dụng giả thiết $e_i \perp e_j$ với $i \neq j$, ta có:

$$\theta = \langle c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k, e_k \rangle = c_1 \langle e_1, e_k \rangle + \cdots + c_k \langle e_k, e_k \rangle = c_k \langle e_k, e_k \rangle.$$

Vì $e_k \neq \theta$, nên $\langle e_k, e_k \rangle > 0$, do đó $c_k = 0$. Từ đó ta thu được:

$$c_1 e_1 + \cdots + c_{k-1} e_{k-1} = \theta.$$

Lặp lại lập luận trên với k được thay bởi $k - 1, \dots, 1$ ta thu được

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Vậy hệ $\{e_1, \dots, e_k\}$ độc lập tuyến tính.

(ii) Ta có

$$\langle \frac{e_i}{|e_i|}, \frac{e_j}{|e_j|} \rangle = \frac{1}{|e_i||e_j|} \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

▽ **Hệ quả 3.** *Trong là không gian Euclid n chiều V, mỗi hệ trực giao gồm n véc tơ khác θ đều là một cơ sở của V.*

Một cơ sở của V đồng thời là một hệ trực chuẩn được gọi là một *cơ sở trực chuẩn*. Định lý sau đây nói lên tính phổ biến của cơ sở trực chuẩn.

△ **Định lý 9.** *Mọi không gian véc tơ Euclid hữu hạn chiều đều có cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh Định lý được chứng minh bằng *phép trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.*

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở bất kỳ của không gian véc tơ Euclid V. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt là phép dựng một cơ sở trực chuẩn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ của V với tính chất sau:

$$span\{e_1, \ldots, e_k\} = span\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

- $k = 1$: Vì S độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 \neq \theta$. Đặt $e_1 = \dfrac{\alpha_1}{||\alpha_1||}$. Hiển nhiên $||e_1|| = 1$ và $span\{e_1\} = span\{\alpha_1\}$.

- $k = 2$: Xét $\overline{e}_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, e_1 \rangle e_1$. Ta có $\overline{e}_2 \neq \theta$ (vì nếu $\overline{e}_2 = \theta$ thì $\alpha_2 = k\alpha_1$, điều này trái với giả thiết S độc lập tuyến tính.)

  Đặt $e_2 = \dfrac{\overline{e}_2}{||\overline{e}_2||}$. Khi đó hệ $\{e_1, e_2\}$ trực chuẩn và $span\{e_1, e_2\} = span\{e_1, \overline{e_2}\} = span\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

- Giả sử đã xây dựng được hệ trực chuẩn $\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ sao cho

  $$span\{e_1, \ldots, e_i\} = span\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

  Tiếp theo ta tìm $\overline{e_k}$ dưới dạng

  $$\overline{e_k} = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i.$$

  Ta cũng có $\overline{e_k} \neq \theta$ (vì nếu $\overline{e_k} = \theta$ thì α_k là tổ hợp tuyến tính của $e_1, \ldots, e_{k-1}$, do đó là tổ hợp tuyến tính của $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết S độc lập). Hơn nữa $\overline{e_k} \perp e_i, \forall i = 1, \ldots, k-1$.

  Đặt $e_k = \dfrac{\overline{e_k}}{||\overline{e_k}||} = \dfrac{\alpha_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i}{||\alpha_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i||}$.

  Khi đó hệ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ trực chuẩn và $span\{e_1, \ldots, e_k\} = span\{e_1, \ldots, \overline{e_k}\} = span\{\alpha_1, , \ldots, \alpha_k\}$.

• **Ví dụ 25.** *Trong không gian Euclid* $\mathbb{R}^3$ *cho hệ*

$$\{\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (-1, 1, 1), \alpha_3 = (1, 2, 1).$$

Hãy trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ trên.

Giải

- Bước 1: Đặt $e_1 = \dfrac{\alpha_1}{||\alpha_1||} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

- Bước 2: $\overline{e_2} = \alpha_2 - \langle \alpha_2, e_1\rangle e_1 = (-1,1,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \Big(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\Big)$

  Vậy $e_2 = \frac{\overline{e_2}}{||\overline{e_2}||} = \Big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$.

- Bước 3: $\overline{e_3} = \alpha_3 - \langle \alpha_3, e_1\rangle e_1 - \langle \alpha_3, e_2\rangle e_2 = (1,2,1) - \frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\Big) = \Big(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\Big)$.

  Vậy $e_3 = \frac{\overline{e_3}}{||\overline{e_3}||} = \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$.

Khi đó $\{e_1, e_2, e_3\}$ là hệ trực chuẩn hóa của hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

△ **Định lý 10.** *Cho V là không gian Euclid n chiều. Nếu $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn thì với mọi $\beta \in V$ ta có*

$$\beta = \langle \beta, \alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle \beta, \alpha_2\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle \beta, \alpha_n\rangle\alpha_n.$$

• **Ví dụ 26.** *Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ*

$$S = \Big\{\alpha_1 = (0,1,0), \alpha_2 = \big(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\big), \alpha_3 = \big(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\big)\Big\}.$$

Hãy biểu thị tuyến tính véc tơ $\beta = (1,1,1)$ qua S.

Giải

Dễ thấy rằng S là một hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$ nên nó là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. Vậy theo định lý trên thì

$$\beta = \langle \beta, \alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle \beta, \alpha_2\rangle\alpha_2 + \langle \beta, \alpha_3\rangle\alpha_3 = \alpha_1 - \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{7}{5}\alpha_3.$$

3.5.3 Hình chiếu của một véc tơ lên một không gian con

Trước hết ta chứng minh định lý sau

△ **Định lý 11.** *Giả sử V là một không gian véc tơ có tích vô hướng, $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ là một hệ trực chuẩn trong V, W là không gian con sinh bởi S và $\alpha \in V$. Đặt*

$$\beta_1 = \langle \alpha, \alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle \alpha, \alpha_2\rangle\alpha_2 + \cdots + \langle \alpha, \alpha_m\rangle\alpha_m; \quad \beta_2 = \alpha - \beta_1.$$

Khi đó

(i) $\beta_1 \in W = span(S)$.

(ii) β_2 trực giao với W, tức là $\beta_2 \perp \alpha_i,\ \forall i = 1, \ldots, m$.

Chứng minh (i) hiển nhiên do biểu thức của β_1. Ta chỉ cần chứng minh (ii).

Dễ thấy $\langle \beta_2, \alpha_i\rangle = \langle \alpha - \beta_1, \alpha_i\rangle = \langle \alpha, \alpha_i\rangle - \langle \beta_1, \alpha_i\rangle = \langle \alpha, \alpha_i\rangle - \langle \alpha, \alpha_i\rangle = \theta$, do đó $\beta_2 \perp \alpha_i,\ \forall i = 1, \ldots, m$

□ **Định nghĩa 19.** *Ta gọi β_1 là hình chiếu trực giao của α lên W, ký hiệu là $hch_w\alpha$, còn β_2 là thành phần của α trực giao với W.*

• **Ví dụ 27.** *Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho W là không gian con sinh bởi hệ*

$$S = \left\{\alpha_1 = (0,1,0), \alpha_2 = \big(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\big)\right\}.$$

Tìm hình chiếu trực giao của $\alpha = (1,1,1)$ lên W.

Giải

Dễ thấy S là hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$, do đó hình chiếu trực giao của α lên W là

$$hch_w\alpha = \langle\alpha, \alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle\alpha, \alpha_2\rangle\alpha_2 = \big(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\big).$$

Thành phần của α trực giao với W là

$$\alpha - hch_w\alpha = (1,1,1) - \big(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\big) = \big(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\big).$$

Bài tập chương 3

1. Hỏi mỗi tập dưới đây là không gian con của $\mathbb{R}^3$ hay không:

   (a) Các véc tơ dạng $(a, 0, 0)$.

   (b) Các véc tơ có dạng $(a, 1, 1)$.

   (c) Các véc tơ có dạng (a, b, c) với $b = a + c$.

   (d) Các véc tơ có dạng (a, b, c) với $b = a + c + 1$.

2. Gọi $\mathcal{M}_2$ là tập các ma trận vuông cấp hai với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường. Chứng minh rằng $\mathcal{M}_2$ là một không gian véc tơ. Hỏi mỗi tập dưới đây có là không gian con của $\mathcal{M}_2$ không:

   (a) Các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong đó a, b, c là nguyên.

   (b) Các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong đó $a + d = 0$.

   (c) Các ma trận cấp hai sao cho $A^t = A$.

   (d) Các ma trận cấp hai sao cho $\det(A) = 0$.

3. Hỏi mỗi tập dưới đây có là không gian con của $C[0, 1]$ không:

   (a) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$.

   (b) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(0) = 0$.

   (c) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(0) = 2$.

   (d) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(x) = const$.

   (e) Các $f \in C[0, 1]$ có dạng $k_1 + k_2 \sin x$, trong đó k_1, k_2 là các số thực.

4. Hỏi mỗi tập dưới đây có phải là không gian con của $P_3[x]$ không:

   (a) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 = 0$.

   (b) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

   (c) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó a_0, a_1, a_3 là các số nguyên.

5. Hãy biểu diễn véc tơ x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w: (a) $x = (7, -2, 15)$; $u = (2, 3, 5)$; $v = (3, 7, 8)$;$w = (1, -6, 1)$.

   (b) $x = (1, 4, -7, 7)$; $u = (4, 1, 3, -2)$;$v = (1, 2, -3, 2)$;$w = (16, 9, 1, -3)$.

   (ĐS: (a) $x = (11 - 5t)u - (5 - 3t)v + tw, t \in \mathbb{R}$; (b) $x = 3u + 5v - w$).

6. Hãy xác định λ sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w:

   (a) $u = (2, 3, 5)$;$v = (3, 7, 8)$;$w = (1, -6, 1)$;$x = (7, -2, \lambda)$.

   (b) $u = (4, 4, 3)$;$v = (7, 2, 1)$;$w = (4, 1, 6)$;$x = (5, 9, \lambda)$.

   (c) $u = (3, 4, 2)$;$v = (6, 8, 7)$;$x = (9, 12, \lambda)$.

   (d) $u = (3, 2, 5)$;$v = (2, 4, 7)$;$w = (5, 6, \lambda)$; $x = (1, 3, 5)$.

   (ĐS: (a) $\lambda = 15$; (b) λ bất kì; (c) λ bất kì; (d) $\lambda \neq 12$).

7. Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x - 3x^2$, $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$:

   (a) $5 + 9x + 5x^2$, (b) $2 + 6x^2$, (c) 0 , (d) $2 + 2x + 3x^3$.

   (ĐS: (a) $-12p_1 - p_2 + 1 - p_3$, (b) $4p_1 - 2p_3$, (c) $0p_1 + 0p_2 + 0p_3$, (d) $-\dfrac{11}{8}p_1 - \dfrac{1}{8}p_2 + \dfrac{13}{8}p_3$).

8. Mỗi họ véc tơ dưới đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không:

   (a) $v_1 = (1, 1, 1)$; $v_2 = (2, 2, 0)$; $v_3 = (3, 0, 0)$.

   (b) $v_1 = (2, -1, 3)$; $v_2 = (4, 1, 2)$; $v_3 = (8, -1, 8)$.

   (c) $v_1 = (3, 1, 4)$; $v_2 = (2, -3, 5)$; $v_3 = (5, -2, 9)$; $v_4 = (1, 4, -1)$.

   (d) $v_1 = (1, 3, 3)$; $v_2 = (1, 3, 4)$; $v_3 = (1, 4, 3)$; $v_4 = (6, 2, 1)$.

   (ĐS: (a) có; (b) không; (c) không; (d) có)

9. Hỏi các đa thức dưới đây có sinh ra $P_3[x]$ không:

   $$p_1(x) = 1 + 2x - x^2, \quad p_2(x) = 3 + x^2, \quad p_3(x) = 5 + 4x - x^2, \quad p_4(x) = -2 + 2x - 2x^2.$$

   (ĐS: không).

10. Hỏi các tập sau đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

    (a) $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (-3, -6)$ trong $\mathbb{R}^2$.

    (b) $u_1 = (2, 3)$, $u_2 = (-5, 8)$, $u_3 = (6, 1)$ trong $\mathbb{R}^2$.

    (c) $p_1(x) = 2 + 3x - x^2$, $p_2(x) = 6 + 9x - 3x^2$ trong $P_2[x]$.

    (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ trong $\mathcal{M}_\in$.

    (ĐS: (a) $u_2 = -3u_1$; (b) phụ thuộc; (c) $p_2 = -3p_1$; (d) $B = -A$).

11. Các tập dưới đây là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

    (a) $(1, 2, 3)$; $(3, 6, 7)$ trong $\mathbb{R}^3$.

    (b) $(4, -2, 6)$; $(6, -3, 9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

    (c) $(2, -3, 1)$; $(3, -1, 5)$; $(1, -4, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

    (d) $(5, 4, 3)$; $(3, 3, 2)$; $(8, 1, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

    (e) $(4, -5, 2, 6)$; $(2, -2, 1, 3)$; $(6, -3, 3, 9)$; $(4, -1, 5, 6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

    (g) $(1, 0, 0, 2, 5)$; $(0, 1, 0, 3, 4)$; $(0, 0, 1, 4, 7)$; $(2, -3, 4, 11, 12)$ trong $\mathbb{R}^5$.

    (ĐS: (a) độc lập; (b) phụ thuộc; (c) độc lập; (d) phụ thuộc; (e) phụ thuộc; (g) độc lập).

12. Hệ nào trong $P_2[x]$ dưới đây là phụ thuộc tuyến tính:

    (a) $2 - x + 4x^2$; $3 + 6x + 2x^2$; $1 + 10x - 4x^2$.

    (b) $3 + x + x^2$; $2 - x + 5x^2$; $4 - 3x^2$.

    (c) $6 - x^2$; $1 + x + 4x^2$.

    (d) $1 + 3x + 3x^2$; $x + 4x^2$; $5 + 6x + 3x^2$; $7 + 2x - x^2$.

    (ĐS: (a) độc lập; (b) độc lập; (c) độc lập; (d) phụ thuộc).

13. Tìm $\lambda \in \mathbb{R}$ làm cho các véc tơ sau đây phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}); v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda).$$

(ĐS: $\lambda = -\frac{1}{2}; \lambda = 1$).

14. Hãy giải thích tại sao các hệ sau không phải là cơ sở của không gian tương ứng:

(a) $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (0, 3)$; $u_3 = (2, 7)$ trong $\mathbb{R}^2$.

(b) $u_1 = (-1, 3, 2)$; $u_2 = (6, 1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

(c) $p_1(x) = 1 + x + x^2$; $p_2(x) = x - 1$ trong $P_2[x]$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$;$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;$E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ trong $\mathcal{M}_2$.

15. Hệ nào dưới đây là cơ sở trong $\mathbb{R}^3$:

(a) $(1, 0, 0)$; $(2, 2, 0)$; $(3, 3, 3)$. (b) $(3, 1, -4)$; $(2, 5, 6)$; $(1, 4, 8)$.

(c) $(2, -3, 1)$; $(4, 1, 1)$; $(0, -7, 1)$. (d) $(1, 6, 4)$; $(2, 4, -1)$; $(-1, 2, 5)$.

(ĐS: (a) và (b)).

16. Hệ nào dưới đây là cơ sở trong $P_2[x]$:

(a) $1 - 3x + 2x^2$; $1 + x + 4x^2$; $1 - 7x$. (b) $4 + 6x + x^2$; $-1 + 4x + 2x^2$; $5 + 2x - x^2$.

(c) $1 + x + x^2$; $x + x^2$; x^2. (d) $-4 + x + 3x^2$; $6 + 5x + 2x^2$; $8 + 4x + x^2$.

(ĐS: (c) và (d)).

17. Xác định số chiều và cơ sở của không gian nghiệm của các hệ sau:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 4x + 8y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

ĐS: (a) $W = \{0\}$; (b) $W = t(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0) + s(0, -1, 0, 1)$; (c) $W = \{0\}$; (d) $W = t(3, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$; (e) $W = \{0\}$; (g) $W = \{0\}$)

18. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các véc tơ sau:

(a) $(1, 1, -4, -3)$; $(2, 0, 2, -2)$; $(2, -1, 3, 2)$.

(b) $(-1, 1, -2, 0)$; $(3, 3, 6, 0)$; $(9, 0, 0, 3)$.

(c) $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(-2, 0, 2, 2)$; $(0, -3, 0, 3)$.

(d) $(1, 0, 1, -2)$; $(1, 1, 3, -2)$; $(2, 1, 5, -1)$; $(1, -1, 1, 4)$.

ĐS: (a) Số chiều bằng 3 và $(1, 1, -4, -3)$; $(0, 1, -5, -2)$; $(0, 0, 1, -\frac{1}{2})$ là một cơ sở.

(b) Số chiều bằng 3 và $(1, -1, 2, 0)$; $(0, 1, 0, 0)$; $(0, 0, 1, -\frac{1}{6})$ là một cơ sở.

(c) Số chiều bằng 4 và $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 1, 1, 1)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(0, 0, 0, 1)$ là một cơ sở.

(d) Số chiều bằng 3 và $(1, 0, 1, -2)$; $(0, 1, 2, 0)$; $(0, 0, 1, 3)$ là một cơ sở.

19. Cho $p(x), q(x) \in P_2[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

(a) Chứng minh rằng biểu thức $\langle p, q\rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ là một tích vô hướng trong $P_2[x]$.

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của $p(x) = -1 + 2x + x^2, q(x) = 2 - 4x^2$.

(c) Kiểm tra lại bất đẳng thức C-S.

20. Cho $f = f(x), g = g(x) \in P_2[x]$: (a) Chứng minh rằng biểu thức là một tích vô hướng trong $P_2[x]$.

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của $f = 1-x+x^2+5x^3, g = x-3x^2$ và $f = x-5x^3, g = 2 + 8x^2$.

(ĐS: (b) $-28/15$; $-68/3$)

21. Cho hai ma trận trong $\mathcal{M}_2$:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Chứng minh rằng biểu thức $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ là một tích vô hướng.

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Kiểm tra lại bất đẳng thức C-S.

22. Xét $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Hỏi biểu thức nào dưới đây có thể là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$, nếu không được thì nêu lí do:

(a) $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_3v_3$,

(b) $\langle u, v\rangle := u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$,

(c) $\langle u, v\rangle := 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$,

(d) $\langle u, v\rangle := u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$,

(ĐS: (a) Không vì tiên đề 5 không thỏa mãn; (b) Không vì tiên đề 3 không thỏa mãn; (c) Có; (d) Không vì tiên đề 5 không thỏa mãn).

23. Với tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^3$, hãy xác định k để u, v trực giao

(a) $u = (2, 1, 3)$; $v = (1, 7, k)$, (b) $u = (k, k, 1)$; v=(k,5,6).

(ĐS: (a) $k = -3$; (b) $k = -2, k = -3$).

24. Với tích vô hướng trong $P_2[x]$ ở bài tập (19) chứng minh rằng $p = 1-x+2x^2$ và $q = 2x+x^2$ trực giao.

25. Với tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^4$, hãy tìm hai véc tơ có chuẩn bằng 1 và trực giao với các véc tơ sau

$$u = (2, 1, -4, 0); \quad v = (-1, -1, 2, 2); \quad w = (3, 2, 5, 4).$$

(ĐS: $\pm\frac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$).

26. Cho $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ và $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$.

Chứng minh rằng x và y trực chuẩn trong $\mathbb{R}^2$ theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, nhưng không trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2$.

27. Chứng minh rằng:

$$u_1 = (1, 0, 0, 1); u_2 = (-1, 0, 2, 1); u_3 = (2, 3, 2, -2); u_3 = (-1, 2, -1, 1).$$

là một họ trực giao trong $\mathbb{R}^4$ đối với tích vô hướng Euclid.

28. Trong $\mathbb{R}^2$ có tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2\}$ dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

(a) $u_1 = (1, -3)$; $v = (2, 2)$ (b) $u_1 = (1, 0)$; $u_2 = (3, -5)$.

ĐS: (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; (b) $(1, 0)$;$(0, 1)$.

29. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

(a) $u_1 = (1, 1, 1)$; $u_2 = (-1, 1, 0)$; $u_3 = (1, 2, 1)$.

(b) $u = (1, 0, 0)$; $u_2 = (3, 7, -2)$; $u_3 = (0, 4, 1)$.

ĐS:(a) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$;$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$;

(b) $(1, 0, 0)$; $\left(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right)$; $\left(0, 30\sqrt{11925}, \frac{105}{\sqrt{11925}}\right)$

30. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn trong không gian con sinh bởi hệ véc tơ $\{(0, 1, 2); (-1, 0, 1)\}$.

ĐS: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right)$.

31. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến hệ véc tơ:

$$u_1 = (1,1,1); \quad u_2 = (1,1,0); \quad u_3 = (1,0,0)$$

thành một hệ trực chuẩn.

ĐS: $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$; $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$; $(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$.

32. Trong $P_2[x]$ xét tích vô hướng

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Hãy áp dụng quá trình Gram-Schmidt để biến cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ thành một cơ sở trực chuẩn.

ĐS: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}} - 3\sqrt{\frac{5}{8}}x^2\right\}$

33. Hãy tìm ma trận tọa độ và véc tơ tọa độ của w đối với cơ sở $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ trong đó

(a) $w = (2,-1,3)$, $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (2,2,0)$, $u_3 = (3,3,3)$.

(b) $w = (5,-12,3)$, $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-4,5,6)$, $u_3 = (7,-8,9)$.

ĐS: (a) $(w)_S = (3,-2,1)$; (b) $(w)_S = (-2,0,1)$.

34. Trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid và một cơ sở trực chuẩn. Hãy tìm véc tơ tọa độ và ma trận tọa độ của w.

(a) $w = (3,7)$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) $w = (-1,0,2)$, $u_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $u_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $u_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

ĐS: (a) $(w)_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$; (b) $(w)_S = (0,-2,1)$.

35. Trong $\mathbb{R}^2$ xét tích vô hướng Euclid và hệ $S = \{w_1, w_2\}$ với $w_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $w_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

(a) Chứng minh S là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$.

(b) Cho u và v là các véc tơ của $\mathbb{R}^2$ với $(u)_s = (1,1)$, $(v)_s = (-1,4)$. Tính $||u||$, $d(u,v)$ và $\langle u, v\rangle$.

(c) Tìm u, v rồi tính $||u||$, $d(u,v)$ và $\langle u, v\rangle$ một cách trực tiếp.

ĐS: $||u|| = \sqrt{2}$, $d(u,v) = \sqrt{13}$, $\langle u, v\rangle = 3$.

36. Trong $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở $B = \{u_1, u_2\}$ và $B' = \{v_1, v_2\}$ trong đó $u_1 = (2,2)$, $u_2 = (4,-1)$, $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (-1,-1)$.

(a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

(b) Tính ma trận tọa độ $[w]_{B'}$ trong đó $w = (3,-5)$ rồi tính $[w]_B$.

(c) Tính trực tiếp $[w]_B$ và kiểm tra lại kết quả trên.

ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $[w]_B = (-17/5, 8/5)^t$, $[w]_{B'} = (-4, -7)^t$.

37. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ và $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó $u_1 = (-3, 0, -3)$, $u_2 = (-3, 2, 1)$,$u_3 = (1, 6, -1)$, $v_1 = (-6, -6, 0)$, $v_2 = (-2, -6, 4)$, $v_3 = (-2, -3, 7)$.

    (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

    (b) Tính ma trận tọa độ $[w]_B$ trong đó $w = (-5, 8, -5)$ rồi tính $[w]_{B'}$.

    (c) Tính trực tiếp $[w]_{B'}$ và kiểm tra lại kết quả trên.

    ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 3/4 & 2/3 & 1/12 \\ -3/4 & -3/2 & -17/12 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$; (b) $[w]_B = (32/21, 4/7, 8/7)^t$, $[w]_{B'} = (19/12, -43/12, 4/3)^t$.

38. Trong $P_1[x]$ cho hai cơ sở $B = \{p_1, p_2\}$ và $B' = \{q_1, q_2\}$ với $p_1 = 6 + 3x, p_2 = 10 + 2x$, $q_1 = 2, q_2 = 3 + 2x$.

    (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

    (b) Tính ma trận tọa độ $[p]_B$ với $p = -4 + x$ rồi suy ra $[p]_{B'}$.

    (c) Tính trực tiếp $[p]_{B'}$ và kiểm tra lại kết quả trên.

    (d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

Chương 4

Ánh xạ tuyến tính

4.1 Các khái niệm cơ bản

4.1.1 Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

□ **Định nghĩa 1.** *Cho V, W là các không gian véc tơ. Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu*

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha+\beta) & = & f(\alpha)+f(\beta), \\ f(k\alpha) & = & kf(\alpha) \end{array}, \qquad \forall \alpha, \beta \in V, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là đồng cấu tuyến tính. Trường hợp $V = W$, ánh xạ f được gọi là toán tử tuyến tính.

Nhận xét rằng hai điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính tương đương với điều kiện sau:

$$f(k\alpha + h\beta) = kf(\alpha) + hf(\beta), \forall \alpha, \beta \in V, \forall k, h \in \mathbb{R}.$$

• **Ví dụ 1.** *Giả sử V và W là hai không gian véc tơ. Ánh xạ $T : V \to W$ xác định bởi*

$$T(\alpha) = \theta, \quad \forall \alpha \in V,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

• **Ví dụ 2.** *V là một không gian véc tơ, W là không gian con của V. Ánh xạ $f : W \to V$ xác định bởi*

$$T(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in W,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

• **Ví dụ 3.** *Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 3x_1, 2x_2 - x_3).$$

Khi đó f là ánh xạ tuyến tính.

□ **Định nghĩa 2.** *Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Nếu f là đơn ánh, toàn ánh, song ánh thì f tương ứng được gọi là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.*

Tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ không gian V vào không gian W được ký hiệu là $L(V, W)$.

4.1.2 Tính chất

Các tính chất sau đây của ánh xạ tuyến tính được suy ngay từ định nghĩa.
Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó, ta có

(1) $f(\theta) = \theta$. Thật vậy, $f(\theta) = f(\theta + \theta) = f(\theta) + f(\theta)$. Theo luật giản ước, $f(\theta) = \theta$.

(2) $f(-\alpha) = -f(\alpha), \forall \alpha \in V$. Thật vậy, $f(\alpha) + f(-\alpha) = f(\alpha + (-\alpha)) = f(\theta) = \theta$. Do đó, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

(3) $f(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + \cdots + a_n f(\alpha_n), \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$. (đẳng thức này có thể được chứng minh bằng quy nạp)

△ **Định lý 1** (Cách xác định ánh xạ tuyến tính). *Giả sử $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở của V, còn $\beta_1, \ldots, \beta_n$ là các véc tơ bất kỳ của W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho $f(\alpha_i) = \beta_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.*

Chứng minh

⊙ **Sự tồn tại:** Nếu $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$, thì ta đặt

$$f(\alpha) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n.$$

Dễ dàng chứng minh $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và rõ ràng $f(\alpha_i) = \beta_i, \forall i = 1, \ldots, n$.

⊙ **Sự duy nhất:** Nếu f và g là các ánh xạ tuyến tính từ V vào W với $f(\alpha_i) = g(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, thì với mọi $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$, ta có

$$f(\alpha) = f(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i g(\alpha_i) = g(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = g(\alpha).$$

Như vậy ánh xạ tuyến tính từ V vào W được xác định hoàn toàn nếu biết được **ảnh của một cơ sở** của V.

• **Ví dụ 4.** *Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1, 1, 0) = (2, -1)$, $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$.*

(a) Tìm $f(3, 5, 1)$.

(b) Tìm $f(x)$.

Giải

(a) Giả sử $(3, 5, 1) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ c_1 + c_2 = 5 \\ c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -2 \end{cases}$$

Suy ra

$$f(3, 5, 1) = c_1 f(1, 1, 0) + c_2 f(1, 1, 1) + c_3 f(1, 0, 1) = 2(2, -1) + 3(1, 2) - 2(-1, 1) = (9, 2).$$

(b) Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = x_1 \\ c_1 + c_2 = x_2 \\ c_2 + c_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_1 - x_3 \\ c_2 = -x_1 + x_2 + x_3 \\ c_3 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Suy ra

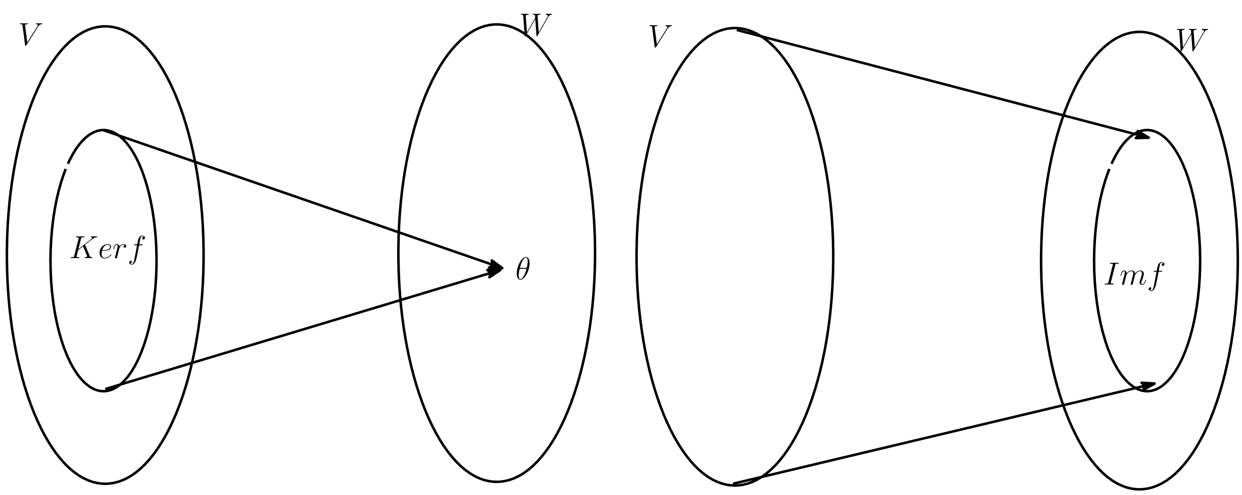
$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = c_1 f(1,1,0) + c_2 f(1,1,1) + c_3 f(1,0,1) = (2x_2 - x_3, -2x_1 + x_2 + 3x_3).$$

4.2 Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f: V \to W$.

- **Nhân của ánh xạ** f là tập hợp tất cả các véc tơ $x \in V$ sao cho $f(x) = \theta$ và được ký hiệu bởi $Kerf$.
$$Kerf = \{x \in V | f(x) = \theta\}$$
- **Ảnh của ánh xạ** f là tập hợp tất cả các véc tơ $y \in W$ sao cho tồn tại véc tơ $x \in V$ để $y = f(x)$ và được ký hiệu bởi Imf.

$$Imf = \{y \in W | \exists x \in V : y = f(x)\}$$



Hình 4.1: Ảnh và Nhân của ánh xạ tuyến tính

△ **Định lý 2.** *Cho ánh xạ tuyến tính* $f: V \to W$

(a) $Kerf$ *là không gian con của* V*.*

(b) Imf *là không gian con của* W*.*

(c) $\dim Kerf + \dim Imf = dimV$*.*

Chứng minh Ta chỉ cần chứng minh (c)
Giả sử $\dim Kerf = m$. Khi đó tồn tại cơ sở $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ của $Kerf$. Bổ sung vào E để được một cơ sở của V là $E_1 = \{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_n\}$. Ta sẽ chứng tỏ cơ sở của Imf là $E_2 = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.
Trước hết E_2 là tập sinh của Imf. Thật vậy $y \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in V : y = f(x) \Leftrightarrow y = f(c_1e_1 + \cdots + c_me_m + d_1v_1 + \cdots + d_nv_n) = c_1f(e_1) + \cdots + c_mf(e_m) + d_1f(v_1) + \cdots + d_nf(v_n) = d_1f(v_1) + \cdots + d_nf(v_n)$.
Xét hệ thức $c_1f(v_1) + c_2f(v_2) + \cdots + c_nf(v_n) = \theta \Leftrightarrow f(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = \theta \Leftrightarrow c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in$

$Kerf$.
Do E là cơ sở của $Kerf$ nên $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = d_1e_1 + \cdots + d_me_m \Leftrightarrow c_1v_1 + \cdots + c_nv_n - d_1e_1 - \cdots - d_me_m = \theta \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ (do E_1 là cơ sở). Suy ra E_2 độc lập tuyến tính.
Vậy E_2 là cơ sở của Imf.
Dễ thấy $\dim Imf = n, \dim Kerf = m \Rightarrow \dim Imf + \dim Kerf = m + n = \dim V$.

□ **Định nghĩa 3.** *Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$. Số chiều của Imf được gọi là hạng của f, ký hiệu bởi $r(f)$.*

Mệnh đề dưới đây giúp ta dễ dàng tìm được số chiều và cơ sở của không gian Imf.

♢ **Mệnh đề 5.** *Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một tập sinh của V.*

Chứng minh Giả sử tập sinh của V là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Khi đó

$$y \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in V : y = f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n).$$

Vậy $Imf = span\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

Từ mệnh đề trên ta có thuật toán tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính f.

(1) Chọn một cơ sở của V là $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

(2) Tìm $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

(3) $Imf = span\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

⊙ **Chú ý:**

- Còn có nhiều cách giải khác.
- Tùy theo đề bài mà ta chọn cơ sở phù hợp để việc tìm ảnh của cơ sở đó được nhanh.

• **Ví dụ 5.** *Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3).$$

(1) Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$.

(2) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Giải

(1) $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = \theta \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3) = (0, 0, 0)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 2t \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t \end{array}\right. \Leftrightarrow x = t(2, -1, 1).$$

Vậy $E = \{(2, -1, 1)\}$ là tập sinh và cũng là cơ sở của $Kerf$, $\dim Kerf = 1$.

(2) Chọn cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh bởi ảnh của một cơ sở (tập sinh) của $\mathbb{R}^3$, tức là:

$$Imf = span\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\} = span\{(1, 2, 3), (1, 3, 5), (-1, -1, -1)\}.$$

Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang, kết luận: $\dim Imf = 2$, cơ sở $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$.

• **Ví dụ 6.** *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, biết*

$$f(1,1,1) = (1,2,1), f(1,1,2) = (2,1,-1), f(1,2,1) = (5,4,-1).$$

(1) Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$.

(2) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Giải

(1) **Cách 1:** $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x = c_1(1,1,1) + c_2(1,1,2) + c_3(1,2,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = x_1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = x_2 \\ c_1 + 2x_2 + c_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 = x_3 - x_1 \\ x_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = (-4x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 5x_1 - 2x_2 - 2x_3)$.

$\forall x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = \theta \Leftrightarrow x = (2t, t, 4t) = t(2,1,4)$. Cơ sở của $Kerf$ là $\{(2,1,4)\}$, $\dim Kerf = 1$.

Cách 2: Chọn cơ sở $E = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)\}$. Giả sử $(x)_E = (x_1, x_2, x_3)$.

Khi đó $x = x_1(1,1,1) + x_2(1,1,2) + x_3(1,2,1) \Rightarrow f(x) = x_1 f(1,1,1) + x_2 f(1,1,2) + x_3 f(1,2,1) = (x_1 + 2x_2 + 5x_3, 2x_1 + x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 - x_3)$.

Giải hệ thuần nhất $f(x) = \theta$ ta được $x_1 = -t, x_2 = -2t, x_3 = t$. Suy ra $x = -t(1,1,1) - 2t(1,1,2) + t(1,2,1) = -t(2,1,4)$. Vậy cơ sở của $Kerf$ là $\{(2,1,4)\}$, $\dim Kerf = 1$.

(2) Chọn cơ sở của $\mathbb{R}^3$ là $E = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)\}$. Khi đó

$$Imf = span\{f(1,1,1), f(1,1,2), f(1,2,1)\} = span\{(1,2,1),(2,1,-1),(5,4,-1)\}.$$

Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang, kết luận: $\dim Imf = 2$, cơ sở $\{(1,2,1),(0,1,1)\}$.

4.3 Ma trận của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính f từ không gian V vào không gian W. Theo định lý (4) f hoàn toàn xác định bởi ảnh của một cơ sở của V. Giả sử $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V thì f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Mặt khác nếu $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ lại biểu diễn được duy nhất qua tổ hợp tuyến tính của B':

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i, \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.1}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Như vậy, ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ được xác định duy nhất bởi hệ thống các số thực $\{a_{ij} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, chúng được xếp thành ma trận sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Dễ thấy A có n cột là các ma trận tọa độ của $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ trong cơ sở B'.

□ **Định nghĩa 4.** *Ma trận A xác định bởi (4.1) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở B của V và cơ sở B' của W.*

- Nếu $V = W$ và $e_i = e'_i,\ i = 1, \ldots, n$ thì A được gọi là ma trận của f đối với cơ sở E.
- Nếu B và B' lần lượt là hai cơ sở chính tắc của V và W thì A được gọi là ma trận chính tắc của f.

Giả sử $x \in V$ và $[x]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $[f(x)]_{B'} = (y_1, \ldots, y_m)^t$. Ta có

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \Rightarrow f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n).$$

Thay $f(e_j)$ bởi (4.1) ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1(a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m) + \cdots + x_n(a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ \Leftrightarrow f(x) &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)e'_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)e'_m \\ \Leftrightarrow [f(x)]_{B'} &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \Leftrightarrow [f(x)]_{B'} = A[x]_B \tag{4.2}$$

(4.2) trên gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B, B'.

Giả sử V, W là hai không gian véc tơ với hai cơ sở lần lượt là $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ và $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ thì có ma trận tương ứng $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ xác định bởi (4.1).

Ngược lại, cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, biểu thức tọa độ (4.2) xác định ánh xạ $f : V \to W$ có ma trận là A. Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $L(V, W)$ và $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Hơn nữa ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu A, B là ma trận của f, g thì $A + B$ là ma trận của $f + g$, kA là ma trận của $kf, \forall k \in \mathbb{R}$.

△ **Định lý 3.** *Ánh xạ đặt tương ứng ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ với ma trận A của nó trong một cặp cơ sở cố định của V và W xác định bởi (4.1) là một đẳng cấu tuyến tính từ $L(V, W)$ lên $\mathcal{M}_{m\times n}$. Hơn nữa $r(A) = r(f)$.*

Chứng minh Hạng của ma trận A là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$, do đó $r(A) = r\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = \dim Imf = r(f)$.

• **Ví dụ 7.** *Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở $B = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ và $B' = \{(1, 1,), (1, 2)\}$.

Giải

Ta có

$$\begin{array}{rclclcl} f(1,1,1) & = & (1+2-3, 2+1) & = & (0,3) & = & -3(1,1)+3(1,2) \\ f(1,0,1) & = & (1+0-3, 2+1) & = & (-2,3) & = & -7(1,1)+5(1,2) \\ f(1,1,0) & = & (1+2-0, 2+0) & = & (3,2) & = & 4(1,1)-(1,2) \end{array}$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ và B' của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 8.** *Trong không gian $V = P_2$ gồm các đa thức bậc không quá 2 với hệ số thực cho ánh xạ $f : V \longrightarrow V$ xác định bởi*

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x.$$

Ta có thể kiểm tra được f là một ánh xạ tuyến tính. Ngoài ra tại cơ sở chính tắc $B = \{1, x, x^2\}$ ta có:

$$f(1) = 0,\ f(x) = 1,\ f(x^2) = 2x.$$

Như vậy ma trận của f đối với cơ sở B là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 9.** *Cho f là toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào chính nó, biết:*

$$f(1,2,3) = (9,0,9); f(2,3,0) = (9,9,0); f(3,0,0) = (0,9,-9)$$

(a) Tìm ma trận chính tắc của f.

(b) Tìm một cơ sở của Imf và $\dim Kerf$.

Giải

(a) Ta đi tìm $f(1,0,0); f(0,1,0); f(0,0,1)$ bằng cách giải hệ:

$$\begin{cases} f(1,0,0) + 2f(0,1,0) + 3f(0,0,1) & = (9,0,9) \\ 2f(1,0,0) + 3f(0,1,0) & = (9,9,0) \\ 3f(1,0,0) & = (0,9,-9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1,0,0) & = (0,3,-3) \\ f(0,1,0) & = (3,1,2) \\ f(0,0,1) & = (1,-5/3,8/3) \end{cases}$$

Vậy ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5/3 \\ -3 & 2 & 8/3 \end{bmatrix}$.

(b) Dễ thấy $Imf = span\{(0,3,-3),(3,1,2),(1,-5/3,8/3)\}$. Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang, kết luận: $\dim Imf = 1$, một cơ sở là $\{(0,3,-3),(3,1,2)\}$. Khi đó $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

4.3.1 Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Cho $f: V \longrightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính và $B_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B_1' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$ là hai cơ sở của V, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $B_2' = \{w_1', \ldots, w_m'\}$ là hai cơ sở của W.

△ **Định lý 4.** *Giả sử A là ma trận của f trong cặp cơ sở B_1, B_2, A' là ma trận của f trong cặp cơ sở B_1', B_2', và T là ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B_1', P là ma trận chuyển cơ sở từ B_2 sang B_2'. Khi đó*

$$A' = P^{-1}AT \tag{4.3}$$

Chứng minh Giả sử $A = [a_{ki}]_{m\times n}$, $A' = [a'_{ki}]_{m\times n}$, $P = [p_{ki}]_{m\times m}$, $T = [t_{ij}]_{n\times n}$, tức là ta có:

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k,\ f(e_j') = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}w_i',\ w_i' = \sum_{k=1}^{m} p_{ki}w_k,\ e_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$$

Khi đó $f(e_j') = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}w_i' = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}\big(\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki}w_k\big) = \sum\limits_{k=1}^{m}\big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij}\big)w_k$. Mặt khác

$$f(e_j') = f\big(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\big(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k\big) = \sum_{k=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}\big)w_k.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}t_{ij}, \quad \forall j = 1, \ldots, n\,; k = 1, \ldots, m \Leftrightarrow PA' = AT.$$

Vậy $A' = P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V và A, A' lần lượt là ma trận của f trong cơ sở B, B', T là ma trận chuyển cơ sở B sang B' thì:

$$A' = T^{-1}AT.$$

□ **Định nghĩa 5.** *Giả sử A và B là hai ma trận vuông cấp n. Ta nói B đồng dạng với A nếu tồn tại ma trận không suy biến T cấp n sao cho $B = T^{-1}AT$. Kí hiệu $B \sim A$.*

⊕ **Nhận xét** Đẳng thức $B = T^{-1}AT$ có thể viết

$$A = TBT^{-1} = \big(T^{-1}\big)^{-1}BT^{-1}$$

Đặt $T^{-1} = S$ ta có $\det S \neq 0$ và $A = S^{-1}BS$. Vậy nếu B đồng dạng với A thì A đồng dạng với B.

• **Ví dụ 10.** *Giả sử ánh xạ tuyến tính $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:*

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2).$$

Hãy tìm ma trận chính tắc của T rồi sử dụng định lý (4) để biến ma trận đó thành ma trận của T đối với cơ sở $B' = \{u_1, u_2\}$: $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (1,2)$.

Giải

Gọi $B = \{e_1, e_2\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Từ định nghĩa ánh xạ ta có $T(e_1) = T(1,0) = (1,-2)$, $T(e_2) = T(0,1) = (1,4)$, do đó ma trận chính tắc của T là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ ta lập ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B'. Dễ dàng kiểm tra được: $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 + 2e_2$. Vậy

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta suy ra: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,do đó theo định lý (4), ma trận của T đối với cơ sở B' là

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài tập chương 4

1. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dưới đây có phải là tuyến tính không:

   (a) $f(x, y, z) = (x, x + y + z)$ (b) $f(x, y, z) = (0, 0)$

   (c) $f(x, y, z) = (1, 1)$ (d) $f(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z)$

   ĐS: (a) có (b) có (c) không (d) có

2. Ánh xạ $f : P_2 \to P_2$ dưới đây có phải là tuyến tính không:

   (a) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$

   (b) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$

   (c) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$

   (d) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + a_1x + a_2x^2$

   ĐS: (a) có (b) có (c) có (d) không

3. Ánh xạ $f : \mathcal{M}_2 \to \mathbb{R}$ dưới đây có phải là tuyến tính không:

   (a) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$ (b) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   (c) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2a + 3b + c - d$ (d) $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$

   ĐS: (a) có (b) không (c) có (d) không

4. Gọi $\mathcal{M}_{m\times n}$ là tập các ma trận cỡ $m \times n$. Cho B là một ma trận cỡ 2×3 hoàn toàn xác định. Chứng minh rằng ánh xạ $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ định nghĩa bởi $T(A) = AB$ là ánh xạ tuyến tính.

5. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ nhân với ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc ImT: (i) $(1, -4)$ (ii) $(5, 0)$ (iii) $(-3, 12)$

   (b) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc $KerT$: (i) $(5, 10)$ (ii) $(3, 2)$ (iii) $(1, 1)$

   ĐS: (a) (i), (iii); (b) (i)

6. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_3$ xác định bởi $T(p(x)) = xp(x)$.

   (a) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc $KerT$: (i) x^2 (ii) 0 (iii) $1 + x$

   (b) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc ImT: (i) $x + x^2$ (ii) $1 + x$ (iii) $3 - x^2$

   ĐS: (a) (ii); (b) (i)

7. Xét cơ sở $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ trong đó $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 5, 3)$, $v_3 = (1, 0, 10)$. Tìm biểu diễn ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T(v_1) = (1, 0)$, $T(v_2) = (1, 0)$, $T(v_3) = (0, 1)$. Tính $T(1, 1, 1)$ trong các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

   ĐS: $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$; $T(1, 1, 1) = (17, -5)$.

8. Tìm ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_2$ xác định bởi $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - x^2$, $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Tính $T(2 - 2x + 3x^2)$.

   ĐS: $T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$.

9. Cho T là một ánh xạ nhân ma trận xác định như dưới đây. Hãy tìm

   (a) số chiều và một cơ sở của ImT.

   (b) số chiều và một cơ sở của $KerT$.

$$(i)\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\5 & 6 & -4\\7 & 4 & 2\end{bmatrix}\quad (ii)\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\4 & 0 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad (iii)\begin{bmatrix}4 & 1 & 5 & 2\\1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad (iv)\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 0 & 9\\3 & -2 & 1 & 0 & -1\\-1 & 0 & -1 & 0 & -1\\2 & 3 & 5 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

   ĐS: (i) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,5,7),(0,1,1)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-14/11, 19/11, 1)\}$.

   (ii) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,2,0)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(1/2,0,1),(0,1,0)\}$.

   (iii) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,1/4),(1,2)\}$,

   (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-1,-1,1,0),(-4/7,2/7,0,1)\}$.

   (iv) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,3,-1,2),(0,1,-2/7,5/14),(0,0,0,1)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-1,-1,1,0,0),(-1,-2,0,0,1)\}$.

10. Tìm ma trận chính tắc của mỗi ánh xạ tuyến tính sau:

    (a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$.

    (b) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$.

    ĐS: (a) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\1 & 0 & 3 & -1\end{bmatrix}^t$ (b) $\begin{bmatrix}7 & 2 & -1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

11. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_1$ xác định bởi

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$$

    đối với các cơ sở chính tắc trong P_2 và P_1.

    ĐS: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -2 & -3\end{bmatrix}$

12. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1, 0)$$

    (a) Tìm ma trận của T đối với các cơ sở $B = \{u_1, u_2\}$ trong $\mathbb{R}^2$ và $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (-2,4)$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,2,0)$, $v_3 = (3,0,0)$.

    (b) Dùng ma trận thu được ở (a) tính $T(8,3)$.

    ĐS: (a) $\begin{bmatrix}0 & -1/2 & 8/3\\0 & 1 & 4/3\end{bmatrix}^t$; (b) $(14,-8,0)$

13. Cho $T : P_2 \to P_4$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $T(p(x)) = x^2p(x)$.

(a) Tìm ma trận của T đối với các cơ sở $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ trong P_2 và cơ sở chính tắc B' trong P_4:

$$p_1 = 1 + x^2; \qquad p_2 = 1 + 2x + 3x^2; \qquad p_3 = 4 + 5x + x^2$$

(b) Dùng ma trận thu được ở (a) hãy tính $T(-3 + 5x - 2x^2)$.

ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}^t$; (b) $-3x^2 + 5x^3 - 2x^4$

14. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ đối với các cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4)\}$ trong $\mathbb{R}^4$ và $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (0, 1, 1, 1), v_2 = (2, 1, -1, -1), v_3 = (1, 4, -1, 2), v_4 = (6, 9, 4, 2),\ w_1 = (0, 8, 8), w_2 = (-7, 8, 1), w_3 = (-6, 9, 1)$.

(a) Tìm $[T(v_1)]_{B'}$, $[T(v_2)]_{B'}$, $[T(v_3)]_{B'}$, $[T(v_4)]_{B'}$.

(b) Tìm $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$, $T(v_4)$.

(c) Tìm $T(2, 2, 0, 0)$.

ĐS: (a) $[T(v_1)]_{B'} = (3, 1, -3)^t$, $[T(v_2)]_{B'} = (-2, 6, 0)^t$, $[T(v_3)]_{B'} = (1, 2, 7)^t$, $[T(v_4)]_{B'} = (0, 1, 1)^t$.

(b) $T(v_1) = (11, 5, 22)$, $T(v_2) = (-42, 32, -10)$, $T(v_3) = (-56, 87, 17)$, $T(v_4) = (-13, 17, 2)$.

(c) $T(2, 2, 0, 0) = (-31, 37, 12)$.

15. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ $T : P_2 \to P_2$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ với $v_1 = 3x + 3x^2$, $v_2 = -1 + 3x + 2x^2$, $v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

(a) Tìm Tìm $[T(v_1)]_B$, $[T(v_2)]_B$, $[T(v_3)]_B$.

(b) Tìm $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$.

(c) Tìm $T(1 + x^2)$.

ĐS: (a) $[T(v_1)]_B = (1, 2, 6)^t$, $[T(v_2)]_B = (3, 0, -2)^t$, $[T(v_3)]_B = (-1, 5, 4)^t$

(b) $T(v_1) = 16 + 51x + 19x^2$, $T(v_2) = -6 - 5x + 5x^2$, $T(v_3) = 7 + 40x + 15x^2$.

(c) $T(1 + x^2) = 22 + 56x + 14x^2$.

16. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính T đối với cơ sở B rồi suy ra ma trận của T đối với cơ sở B'

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $T(x_1, x_2) = (x_1 + 7x_2, 3x_1 - 4x_2)$, $B = \{u_1, u_2\}$, $B' = \{v_1, v_2\}$ trong đó $u_1 = (2, 3)$, $u_2 = (4. - 1)$, $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (-1, -1)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, -x_2, x_1 + 7x_3)$, B là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$, $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1.1.1)$.

(c) $T : P_1 \to P_1$ xác định bởi: $T(a_0 + a_1x) = a_0 + a_1(x+1)$, $B = \{p_1, p_2\}$, $B' = \{q_1, q_2\}$ trong đó $p_1 = 6 + 3x, p_2 = 10 + 2x$, $q_1 = 2, q_2 = 3 + 2x$.

ĐS: (a) $[T]_B = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & 61 \\ 81 & -41 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -31 & 9 \\ -75 & 25 \end{bmatrix}$.

(b) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

(c) $[T]_B = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Chương 5

Trị riêng - Véctơ riêng - Dạng toàn phương

5.1 Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

5.1.1 Các định nghĩa

□ **Định nghĩa 1.** *Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại véctơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \theta$ trong $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn:*

$$Ax = \lambda x \tag{5.1}$$

thì số λ được gọi là trị riêng của A, véctơ x được gọi là véctơ riêng ứng với trị riêng λ.

Trong phương trình (5.1), véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ được đồng nhất với ma trận cột tọa độ của x đối với cơ sở chính tắc.

□ **Định nghĩa 2.** *Cho A là ma trận vuông cấp n. Phương trình đặc trưng của ma trận A là:*

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là đa thức (ẩn λ):

$$f(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

□ **Định nghĩa 3.** *Cho A là ma trận vuông cấp n có trị riêng λ. Ta gọi không gian nghiệm của phương trình:*

$$(A - \lambda I)x = 0$$

là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ, ký hiệu J_λ.

• **Ví dụ 1.** *Cho* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Xét $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x$$

nghĩa là $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ là véctơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Phương trình đặc trưng của A là:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcr} \lambda & = & -1 \\ \lambda & = & 3 \end{array} \right.$$

Không gian riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = 3$ là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 3I)x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 0x_1 & + & 0x_2 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & 2x_1 \\ x_1 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Vậy $J_3 = \{x = (x_1, 2x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = span\{(1, 2)\}$.

5.1.2 Tính chất

◇ **Tính chất** 1. Nếu x là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì cx, trong đó c là hằng số khác 0 tùy ý, cũng là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ.

Thật vậy, ta có:

$$A(cx) = c(Ax) = c(\lambda x) = \lambda(cx).$$

Vì vậy sau khi đã có một véctơ riêng, ta có thể chọn c để được véctơ riêng có độ dài bằng 1. Véctơ riêng có độ dài bằng 1 được gọi là *véctơ riêng đã chuẩn hóa.*

◇ **Tính chất** 2. Trị riêng của ma trận A là các nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận đó.

Thật vậy, λ là trị riêng của ma trận A khi hệ phương trình $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ có nghiệm $x \neq 0$, tức là có nghiệm không tầm thường. Điều kiện này trở thành $det(A - \lambda I) = 0$.

◇ **Tính chất** 3. Véctơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ là các vectơ khác không của không gian riêng tương ứng.

Thật vậy, nếu λ là trị riêng của A thì các véctơ riêng của A ứng với λ là các nghiệm khác không của hệ $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ tức là $x \in J_\lambda \setminus \{0\}$.

◇ **Tính chất** 4. [1] Giả sử λ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng của ma trận A. Khi đó không gian riêng tương ứng là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều bằng $n - \rho(A - \lambda I)$, hơn nữa:

$$1 \leq dim(J_\lambda) \leq k$$

số k được gọi là *số bội đại số* của λ, số chiều của không gian riêng J_λ được gọi là *số bội hình học* của λ.

[1] Chứng minh cụ thể của tính chất này có thể được tìm đọc ở [4], trang 46

5.1.3 Tìm trị riêng và véctơ riêng của ma trận

• **Ví dụ 2.** *Hãy tìm các cơ sở của không gian riêng của:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Giải

Ta có:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là:

$$det(A - \lambda I) = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 4\right] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

Phương trình đặc trưng của A là:

$$(5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lll} \lambda & = & 5 \quad \text{(bội 2)} \\ \lambda & = & 1 \end{array}\right.$$

Vậy ma trận A có hai trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 5$.

Với $\lambda = 1$, không gian riêng J_1 là không gian nghiệm của phương trình $(A - I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 & \in & \mathbb{R} \\ x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Do đó:

$$J_1 = \{x = (x_1, x_1, 0); x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x = x_1(1,1,0); x_1 \in \mathbb{R}\} = span\{(1,1,0)\}$$

Vậy J_1 là không gian véctơ một chiều, có cơ sở là $\{(1,1,0)\}$

Với $\lambda = 5$, không gian riêng J_5 là không gian nghiệm của phương trình $(A - 5I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

Do đó:

$$x \in J_5 \Leftrightarrow x = (-x_2, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0) + x_3(0,0,1); x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow J_5 = span\{(-1,1,0), (0,0,1)\}$$

Dễ thấy $\{(-1,1,0), (0,0,1)\}$ độc lập tuyến tính, vậy J_5 là không gian véctơ hai chiều, có cơ sở là $\{(-1,1,0), (0,0,1)\}$

5.2 Dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^n$

5.2.1 Khái niệm

□ **Định nghĩa 4.** *Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ là hàm bậc hai đẳng cấp đối với các tọa độ $(x_1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Ma trận đối xứng $A = [a_{ij}]_n$ được gọi là ma trận của dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc).

• **Ví dụ 3.** *Trong $\mathbb{R}^3$*

$$f = 2x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 8x_1x_3$$

là dạng toàn phương với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

⊕ **Nhận xét** Từ biểu thức của dạng toàn phương:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)$$

$$\Rightarrow f = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x^t A x$$

Do đó dạng toàn phương f trên $\mathbb{R}^n$ còn được viết *dạng ma trận*:

$$f = x^t A x; \quad A^t = A$$

Nếu đặt $x = Qy$, với Q là ma trận vuông cấp n, $y \in \mathbb{R}^n$ thì dạng toàn phương f trở thành:

$$f = (Qy)^t A (Qy) = y^t (Q^t A Q) y$$

với ma trận $B = Q^t A Q$ là ma trận đối xứng, do đó f trở thành dạng toàn phương đối với y.

□ **Định nghĩa 5.** *Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$:*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Đổi biến dạng toàn phương là thực hiện phép đổi biến tuyến tính $x = Qy$ để nhận được dạng toàn phương theo biến mới:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_i y_j; \quad b_{ij} = b_{ji}$$

Ma trận vuông Q được gọi là ma trận của phép đổi biến. Phép đổi biến được gọi là không suy biến nếu ma trận đổi biến Q không suy biến.

• **Ví dụ 4.** *Trong* $\mathbb{R}^2$ *xét dạng toàn phương:*

$$f = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_1x_2$$

Đổi biến:

$$\begin{cases} x_1 &= & y_1 + y_2 \\ x_2 &= & y_1 - y_2 \end{cases} \quad \text{ma trận đổi biến là: } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ta được:

$$f = 2(y_1 + y_2)^2 - 4(y_1 - y_2)^2 + 3(y_1^2 - y_2^2) = y_1^2 - 5y_2^2 + 12y_1y_2$$

Phép đổi biến trên là không suy biến vì $det(Q) = -2 \neq 0$

5.2.2 Dạng chính tắc của dạng toàn phương

□ **Định nghĩa 6.** *Dạng toàn phương trong* $\mathbb{R}^n$*:*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

có dạng chính tắc nếu $a_{ij} = a_{ji} = 0$ *với mọi* $i \neq j$.

Như vậy f có dạng chính tắc nếu

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

khi đó ma trận của dạng toàn phương f là ma trận chéo.

□ **Định nghĩa 7.** *Đưa dạng toàn phương* $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ *về chính tắc là dùng phép đổi biến không suy biến* $x = Qy$*,* $det(Q) \neq 0$ *để* f *có dạng chính tắc đối với các biến* $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

5.2.3 Thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về chính tắc

Xét dạng toàn phương của n biến:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \quad a_{ij} = a_{ji}; \quad f \not\equiv 0$$

Thuật toán sau đây chỉ ra rằng mọi dạng toàn phương đều có thể đưa về dạng chính tắc, hơn nữa có thể viết cụ thể dạng chính tắc đó cùng phép đổi biến tương ứng.

• **Trường hợp 1.** $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$

Do $f \not\equiv 0$ nên tồn tại hệ số $a_{ij} \neq 0$. Thực hiện phép đổi biến (không suy biến):

$$\begin{cases} x_i = z_i + z_j \\ x_j = z_i - z_j \\ x_k = z_k \ (\forall k \notin \{i, j\}) \end{cases}$$

ta đưa được f về dạng:

$$f = 2a_{ij}(z_i^2 - z_j^2) + \cdots$$

nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện các số hạng bình phương. Khi đó bài toán được đưa về trường hợp 2 dưới đây:

• **Trường hợp 2.** Trong f tồn tại hệ số $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$:

Ta nhóm các số hạng chứa x_1, thêm bớt để xuất hiện bình phương của một tổng như sau:

$$\begin{aligned}
f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\
&= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right) + \left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2\right] \\
&\qquad\qquad - \left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 + \cdots \\
&= a_{11}\left[x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right]^2 + f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

Đặt:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ z_k = x_k \ \forall k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

thì có:

$$f = a_{11}y_1^2 + f_2(z_2, z_3, \ldots, z_n) \tag{5.2}$$

Ở đó $f_2(z_2, z_3, \ldots, z_n)$ trong công thức (5.2) là dạng toàn phương của $n-1$ biến $(z_2, z_3, \ldots, z_n)$

Tiếp tục thực hiện đổi biến đối với f_2 theo trường hợp 1 hoặc trường hợp 2 cho đến khi nhận được dạng chính tắc của f:

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2$$

Để tìm ma trận đổi biến Q mà phép đổi biến $x = Qy$ đưa f về dạng chính tắc, ta phải giải ngược các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ theo các biến $y_1, y_2, \ldots, y_n$; hoặc từ biểu diễn của y theo x suy ra $y = Px$ và tính $Q = P^{-1}$.

$\oplus$ **Nhận xét** Thuật toán Lagrange có thể dẫn đến các dạng chính tắc khác nhau của cùng một dạng toàn phương.

Định luật quán tính. Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng các cách khác nhau thì số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm bằng nhau.

Trong dạng chính tắc của dạng toàn phương, số p các hệ số dương được gọi là *chỉ số dương quán tính*, số q các hệ số âm được gọi là *chỉ số âm quán tính*, cặp (p, q) được gọi là *cặp chỉ số quán tính.*

• **Ví dụ 5.** *Đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc:*

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Giải

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1(x_2+2x_3) + (4x_2^2+6x_3^2+2x_2x_3)\\
&= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2+2x_3) + (x_2+2x_3)^2\right] - (x_2+2x_3)^2 + (4x_2^2+6x_3^2+2x_2x_3)\\
&= \left[x_1 + (x_2+2x_3)\right]^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3\\
&= \left[x_1+x_2+2x_3\right]^2 + 3\left[x_2^2 - \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{x_3^2}{9}\right] - \frac{x_3^2}{3} + 2x_3^2\\
&= \left[x_1+x_2+2x_3\right]^2 + 3\left[x_2 - \frac{x_3}{3}\right]^2 + \frac{5}{3}x_3^2
\end{aligned}$$

Đặt:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3\\ y_2 = x_2 - \dfrac{x_3}{3}\\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - \dfrac{7}{3}y_3\\ x_2 = y_2 + \dfrac{1}{3}y_3\\ x_3 = y_3 \end{cases} \tag{5.3}$$

thì dạng toàn phương f có dạng chính tắc:

$$f = y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

Từ phép đổi biến (5.3) có ma trận đổi biến là:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\quad det(Q) = 1 \neq 0$$

• **Ví dụ 6.** *Đưa dạng toàn phương trong* $\mathbb{R}^3$ *sau về dạng chính tắc:*

$$f = 2x_1x_2 - 7x_2x_3 + 4x_1x_3$$

Giải

Đặt:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2\\ x_2 = z_1 - z_2\\ x_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}(x_1+x_2)\\ z_2 = \dfrac{1}{2}(x_1-x_2)\\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{5.4}$$

ta có:

$$\begin{aligned}
f &= 2(z_1^2 - z_2^2) - 7(z_1-z_2)z_3 + 4(z_1+z_2)z_3 = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 3z_1z_3 + 11z_2z_3\\
&= 2\left[z_1^2 - \frac{3}{2}z_1z_3 + \frac{9z_3^2}{16}\right] - \frac{9z_3^2}{8} - 2z_2^2 + 11z_2z_3\\
&= 2\left[z_1 - \frac{3}{4}z_3\right]^2 - 2\left[z_2^2 - \frac{11}{2}z_2z_3 + \frac{121z_3^2}{16}\right] + \frac{121z_3^2}{8} - \frac{9z_3^2}{8}\\
&= 2\left[z_1 - \frac{3}{4}z_3\right]^2 - 2\left[z_2 - \frac{11z_3}{4}\right]^2 + 14z_3^2
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \dfrac{3}{4}z_3 \\ y_2 = z_2 - \dfrac{11z_3}{4} \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 + \dfrac{3}{4}y_3 \\ z_2 = y_2 + \dfrac{11}{4}y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \tag{5.5}$$

thì dạng toàn phương f có dạng chính tắc:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 14y_3^2$$

Từ các phép đổi biến (5.4) và (5.5) suy ra:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + \dfrac{7}{2}y_3 \\ x_2 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{Ma trận đổi biến là: } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{7}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad det(Q) = -2 \neq 0$$

• **Ví dụ 7.** *Tìm cặp chỉ số quán tính của dạng toàn phương sau trong $\mathbb{R}^4$:*

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 - 3x_1x_4 + 4x_2x_4 + 3x_3x_4$$

Giải

Đưa dạng toàn phương về chính tắc:

$$\begin{aligned} f &= \left[x_2^2 + 2x_2(-x_1 + 2x_4) + (-x_1 + 2x_4)^2\right] - (2x_4 - x_1)^2 + x_1^2 + 4x_4^2 - x_1x_3 - 3x_1x_4 + 3x_3x_4 \\ &= (x_2 - x_1 + 2x_4)^2 + x_1x_4 - x_1x_3 + 3x_3x_4 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_4 \\ x_2 = z_1 - z_4 \\ x_3 = z_3; \qquad x_2 = z_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + z_1^2 - z_4^2 - (z_1z_3 + z_3z_4) + 3(z_1z_3 - z_3z_4) \\ &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + (z_1^2 + 2z_1z_3 + z_3^2) - (z_4^2 + 4z_4z_3 + 4z_3^2) + 3z_3^2 \\ &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + (z_1 + z_3)^2 - (z_4 + 2z_3)^2 + 3z_3^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_1 + z_2 - 3z_4 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 + 2z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = -y_1 + y_2 - 5y_3 + 3y_4 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = -2y_3 + y_4 \end{cases}$$

thì f có dạng chính tắc:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 - y_4^2$$

với phép đổi biến

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + 3y_3 + y_4 \\ x_2 = -y_1 + y_2 - 5y_3 + 3y_4 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = y_1 + y_3 - y_4 \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad det(Q) = -2 \neq 0$$

Do đó từ dạng chính tắc của f suy ra cặp chỉ số quán tính là $(p, q) = (3, 1)$

5.2.4 Dạng toàn phương xác định dương

□ **Định nghĩa 8.** *Cho f là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

- *f là dạng toàn phương xác định dương nếu $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*
- *f là dạng toàn phương xác định âm nếu $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

⊕ **Nhận xét** $f(x)$ xác định âm $\Leftrightarrow -f(x)$ xác định dương.

• **Ví dụ 8.** *Xét các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$:*

a) $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2$ là dạng toàn phương xác định dương;
b) $g = -x_1^2 - 4x_2^2 - 7x_3^2$ là dạng toàn phương xác định âm;
c) $h = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2$ không xác định dương cũng không xác định âm;
d) $l = 3x_1^2 + 5x_3^2$ không xác định dương cũng không xác định âm;
e) $\phi = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$ xác định dương, vì:

$$\begin{aligned}\phi &= \Big[x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2\Big] - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 - 8x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 + 3x_3 \\ &= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \ > \ 0\ \forall x \neq \theta\end{aligned}$$

⊕ **Nhận xét** Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ là xác định dương nếu cặp chỉ số quán tính của nó là $(n, 0)$, là xác định âm nếu cặp chỉ số quán tính của nó là $(0, n)$.

• **Ví dụ 9.** *Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc, tìm m để dạng toàn phương là xác định âm:*

$$f = -12mx_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4mx_1x_3$$

Giải

Sử dụng thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về chính tắc:

$$\begin{aligned}f &= -\Big[x_2^2 + 2x_2(4x_1 - 2x_3) + (4x_1 - 2x_3)^2\Big] + (4x_1 - 2x_3)^2 - 12mx_1^2 - 6x_3^2 + 4mx_1x_3 \\ &= -(x_2 + 4x_1 - 2x_3)^2 + (16 - 12m)x_1^2 - 2x_3^2 + (4m - 16)x_1x_3 \\ &= -(x_2 + 4x_1 - 2x_3)^2 - 2\Big[x_3^2 - 2(m-4)x_3x_1 + (m-4)^2x_1^2\Big] + 2(m-4)^2x_1^2 + (16 - 12m)x_1^2 \\ &= -\big[x_2 + 4x_1 - 2x_3\big]^2 - 2\big[x_3 - (m-4)x_1\big]^2 + 2(m^2 - 14m + 24)x_1^2\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + 4x_1 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 - (m-4)x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = (2m-12)y_1 + y_2 + 2y_3 \\ x_3 = (m-4)y_1 + y_3 \end{cases}$$

Ma trận đổi biến là:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2m-12 & 1 & 2 \\ m-4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad det(Q) = 1 \neq 0$$

Khi đó f có dạng chính tắc:

$$f = -y_2^2 - 2y_3^2 + 2(m^2 - 14m + 24)y_1^2$$

Để f xác định âm thì trong dạng chính tắc của f phải có 3 hệ số âm, do đó:

$$m^2 - 14m + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 12$$

△ **Định lý 1** (Sylvester). *Cho dạng toàn phương f trên $\mathbb{R}^n$ với ma trận là A. Gọi D_i là các định thức con của A tạo bởi i hàng và i cột góc trên bên trái của A (D_i còn được gọi là định thức con chính cấp i của A). Khi đó:*

a. *f là xác định dương khi và chỉ khi $D_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$*

b. *f là xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^i D_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$*

• **Ví dụ 10.** *Xét dạng toàn phương sau trên $\mathbb{R}^3$:*

$$\phi = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Ta có ma trận của ϕ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính là:

$$D_1 = |1| = 1 > 0; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vậy dạng toàn phương ϕ là xác định dương trên $\mathbb{R}^3$.

• **Ví dụ 11.** *Tìm m để dạng toàn phương sau là xác định dương trên $\mathbb{R}^3$:*

$$g = mx_1^2 + (m+5)x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Giải

Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} m & 6 & 2 \\ 6 & m+5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính của A là:

$$D_1 = |m| = m; \quad D_2 = \begin{vmatrix} m & 6 \\ 6 & m+5 \end{vmatrix} = m^2 + 5m - 36$$

$$D_3 = det(A) = m\begin{vmatrix} m+5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & m+5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = m(m-4) + 2(8-2m) = (m-4)^2$$

$$g \text{ xác định dương } \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m & > 0 \\ m^2 + 5m - 36 & > 0 \\ (m-4)^2 & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -9; m > 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

Vậy với $m > 4$ thì dạng toàn phương g đã cho là xác định dương.

• **Ví dụ 12.** *Tìm m để dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau xác định âm:*

$$f = -12mx_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4mx_1x_3$$

Giải

Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} -12m & -4 & 2m \\ -4 & -1 & 2 \\ 2m & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính của A là:

$$D_1 = |-12m| = -12m; \quad D_2 = \begin{vmatrix} -12m & -4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 12m - 16$$

$$\begin{aligned} D_3 = det(A) &= -12m\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2m & -6 \end{vmatrix} + 2m\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2m & 2 \end{vmatrix} \\ &= -12m(2) + 4(24 - 4m) + 2m(2m - 8) = 4m^2 - 56m + 96 = 4(m^2 - 14m + 24) \end{aligned}$$

$$f \text{ xác định âm } \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m & < 0 \\ 12m - 16 & > 0 \\ m^2 - 14m + 24 & < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \dfrac{4}{3} \\ 2 < m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 12$$

Vậy với $2 < m < 12$ thì dạng toàn phương f đã cho là xác định âm.

Bài tập chương 5

1. *Tìm các trị riêng và cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:*

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 19 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 7) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$ 10) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ 11) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ 12) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 14) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 16) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ĐS: 1) $\lambda = 3, (1,2); \lambda = -1, (0,1)$ 2) $\lambda = 4, (3,2)$

3) $\lambda = \sqrt{12}, (3, \sqrt{12}); \lambda = -\sqrt{12}, (-3, \sqrt{12})$

4) Không có trị riêng thực, không có không gian riêng.

5) $\lambda = 0, (1,0)$ và $(0,1)$ 6) $\lambda = 1, (1,0)$ và $(0,1)$ 7) $\lambda = -1, (0,1,-1)$

8) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, (1,2,0), (0,0,1)$ 9) $\lambda_1 = 1, (1,1,1); \lambda_2 = \lambda_3 = 0, (1,2,3)$

10) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, (3,1,1)$ 11) $\lambda_1 = 3, (1,2,2); \lambda_2 = \lambda_3 = -1, (1,2,1)$

12) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (2,1,0), (-1,0,1); \lambda_3 = -1, (3,5,6)$ 13) $\lambda = 1, (1,2,1)$

14) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (0,0,0,1); \lambda_3 = \lambda_4 = 0, (0,1,0,0), (0,0,1,0)$

15) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (1,0,1,0), (0,0,0,1); \lambda_3 = \lambda_4 = 0, (0,1,0,0), (0,0,1,0)$

16) $\lambda = 2, (1,1,-1,0), (1,1,0,1)$

2. *Tìm phép biến đổi tuyến tính để đưa mỗi dạng toàn phương trên* $\mathbb{R}^3$ *sau đây về chính tắc và cho biết dạng chính tắc đó:*

$a) x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$ $b) 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3;$

$c) x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3;$ $d) 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 27x_2x_3 + 8x_1x_3;$

$e) 2x_1x_2 - 3x_2x_3 - 5x_1x_3;$ $f) -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 - 24x_1x_3;$

ĐS:

3. *Tìm m để mỗi dạng toàn phương sau đây là xác định dương trên không gian tương ứng:*

$a) 5x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$ $b) 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3;$

$c) x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2mx_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3;$ $d) x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 6x_2x_3 + 10x_1x_3.$

ĐS: a) $m > 2$; b) $-\frac{\sqrt{15}}{3} < m < \frac{\sqrt{15}}{3}$; c) $-\frac{4}{5} < m < 0$; d) Vô nghiệm

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đĩnh - Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp (tập một) - Đại số và hình học giải tích*, Nhà xuất bản giáo dục, 2001.

[2] Hoàng Xuân Sính, *Đại số đại cương*, Nhà xuất bản giáo dục, 2000.

[3] Lê Tuấn Hoa, *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, 2005

[4] Jean-Marie Monier, *Giáo trình Toán - Đại số 2*, Nhà xuất bản giáo dục, 2003.

[5] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, 2001.

Đề thi tham khảo

Thời gian làm bài: **75 phút.**

Đề số 1

Câu 1. Giải phương trình $f(x) = 0$, nếu:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

Câu 2. Tính hạng của họ véctơ sau trong $\mathbb{R}^5$:

$$\Big\{(2, 1, 4, -5, 1), (0, 3, -6, 5, 2), (2, -1, 14, -5, 0), (3, 4, -5, 1, 2)\Big\}$$

Câu 3. Ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ có ma trận chính tắc là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & -8 \\ 4 & 8 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Tìm $dim(Imf)$

Đề số 2

Câu 1. Tìm ma trận X thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Câu 2. Biện luận theo m số chiều của không gian véctơ con sinh bởi họ véctơ sau trong $\mathbb{R}^4$:

$$\big\{(1, -2, 3, 7), (4, 2, -5, m), (2, 6, -11, -14 + 2m), (-3, -4, 8, 7 - m)\big\}$$

Câu 3. Tìm một cơ sở của Imf và tính $dim(Kerf)$ nếu toán tử tuyến tính f từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^3$ có ma trận chính tắc là:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Đề số 3

Câu 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo m:

$$\begin{cases} 2x + 5y + (m+2)z + (3m-6)t = 4m - 15 \\ 2x + (m-2)y + (8-m)z + (4m-9)t = 4m - 5 \\ 2x + 5y + 3z + mt = m \\ 2x + (m-2)y + 3z + (4m-9)t = 3m \end{cases}$$

Câu 2. Trong không gian P_2 các đa thức có bậc ≤ 2 xét tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram-Smidt để biến cơ sở $\left\{1-2x+2x^2,\ 1-x,\ 2+x^2\right\}$ thành một cơ sở trực giao.

Câu 3. Cho biết chỉ số quán tính dương và chỉ số quán tính âm của dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^4$ sau:

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+4x_2^2-4x_3^2+x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_3x_4$$

Đề số 4

Câu 1. Cho $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ m & -2m\end{bmatrix}$. Tính $(A.A^t)^{2010}$

Câu 2. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid. Hãy tìm thành phần của véctơ $v=(0,-1,4)$ trực giao với không gian con sinh bởi họ véctơ: $\left\{(1,1,0),(-2,1,1),(-1,2,1),(3,0,-1)\right\}$

Câu 3. Tìm các cơ sở của không gian riêng của ma trận:

$$\begin{bmatrix}-8 & 0 & 5\\ 5 & -3 & -5\\ -10 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

Đề số 5

Câu 1. Tính $det(Y)$, biết:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{bmatrix} Y \begin{bmatrix}4 & 1 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & 9 & 3\\ 3 & a & 9\\ 9 & 3 & a\end{bmatrix}$$

Câu 2. Tìm một cơ sở của không gian nghiệm cuat hệ thuần nhất sau:

$$\begin{cases}3x+4y-4z+7t & = & 0\\ 4x+11y-13z+16t & = & 0\\ 2x-3y+3z-2t & = & 0\\ 7x-2y+z+3t & = & 0\end{cases}$$

Câu 3. Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc, chỉ ra phép đổi biến tương ứng:

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-4x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

Đề số 6

Câu 1. Tìm ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

Câu 2. Trong không gian P_2 các đa thức có bậc ≤ 2 cho các cơ sở:

$$B=\left\{1,3+x,2-2x+x^2\right\} \qquad B'=\left\{1,x,x^2\right\}$$

a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.
b) Cho $p(x) = 2 + 3x - x^2$. Tìm véctơ tọa độ và ma trận tọa độ của $p(x)$ trong cơ sở B.

Câu 3. Cho toán tử tuyến tính f từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn:

$$f(2,1,1) = (1,2,1), \quad f(3,1,0) = (1,3,0), \quad f(4,0,0) = (0,4,0)$$

Tìm $dim(Imf)$ và một cơ sở của $Kerf$.

Đề số 7

Câu 1. Tìm tất cả các số thực m sao cho tồn tại ma trận X thỏa mãn:

$$X.\begin{bmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị m để véctơ $x = (2, m, m+1)$ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ $a = (3,4,1), b = (-1,2,2), c = (1,8,5)$.

Câu 3. Tìm một cơ sở của Imf nếu f là toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^4$ vào $\mathbb{R}^4$ cho bởi:

$$f(x,y,z,t) = (x + y + 2z - t, 2x - y - z + 3t, 3x - 3y - 4z + 7t, x + y + z - 5t)$$

Đề số 8

Câu 1. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thỏa mãn:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Câu 2. Cho họ véctơ sau trong $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{(1,2,4),\ (1,-2,4),\ (1,a,a^2)\right\}$$

a) Tìm điều kiện đối với a để họ B độc lập tuyến tính;
b) Với $a = 1$, biểu diễn véctơ $u = (3,2,1)$ thành tổ hợp tuyến tính của các véctơ của B, biểu diễn đó có duy nhất không?

Câu 3. Với n bằng bao nhiêu thì véctơ $v = (1,2,n,n+1)$ thuộc Imf, nếu f là toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^4$ vào $\mathbb{R}^4$ có ma trận chính tắc là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$