

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG & TIN HỌC



BÙI XUÂN DIỆU

## **Bài Giảng**

---

# OLYMPIC SINH VIÊN MÔN ĐẠI SỐ

ĐỊNH THỨC, HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH, MA TRẬN VÀ ÁNH XẠ  
TUYẾN TÍNH, ĐA THỨC

---

Tóm tắt lý thuyết, các ví dụ, bài tập và lời giải

**Dresden (Germany) - 2012**

---

# MỤC LỤC

---

<b>Mục lục</b>	<b>1</b>
<b>Chương 1 . Ma trận - Định thức</b>	<b>5</b>
1    Định thức	5
1.1    Các tính chất cơ bản của định thức	5
1.2    Các định thức đặc biệt	6
1.3    Bài tập	11
2    Định thức con và phần phụ đại số	13
2.1    Các định nghĩa và tính chất	13
2.2    Bài tập	14
3    Phần bù Schur	16
3.1    Các định nghĩa và tính chất	16
3.2    Bài tập	17
<b>Chương 2 . Không gian véctơ - Ánh xạ tuyến tính</b>	<b>19</b>
1    Không gian đối ngẫu - Phần bù trực giao	19
1.1    Không gian đối ngẫu	19
1.2    Phần bù trực giao	21
1.3    Bài tập	21
2    Hạt nhân và ảnh - Không gian thương	22
2.1    Hạt nhân và ảnh	22
2.2    Không gian thương	23
2.3    Bài tập	24
3    Cơ sở của không gian véctơ - Độc lập tuyến tính	25
3.1    Bài toán đổi cơ sở	25
3.2    Bài tập	25
4    Hạng của ma trận	27
4.1    Các tính chất của hạng của ma trận	27
4.2    Bài tập	28

<b>Chương 3 . Dạng chính tắc của ma trận và toán tử tuyến tính . . . . .</b>	<b>31</b>
1 Vết của ma trận . . . . .	31
2 Cấu trúc của tự đồng cấu . . . . .	32
2.1 Trị riêng và vectơ riêng . . . . .	32
2.2 Tự đồng cấu chéo hoá được . . . . .	33
2.3 Đa thức tối thiểu . . . . .	34
2.4 Bài tập . . . . .	35
3 Dạng chuẩn của ma trận . . . . .	40
3.1 Dạng chuẩn Jordan của ma trận . . . . .	40
3.2 Dạng chuẩn Frobenius . . . . .	41
3.3 Bài tập . . . . .	42
4 Biểu diễn ma trận . . . . .	43
4.1 Rút gọn một ma trận về ma trận dạng đường chéo đơn giản . . . . .	43
4.2 Biểu ma trận dưới dạng tọa độ cực . . . . .	43
4.3 Biểu diễn Schur . . . . .	44
4.4 Biểu diễn Lanczos . . . . .	44
4.5 Bài tập . . . . .	44
<b>Chương 4 . Các ma trận có dạng đặc biệt . . . . .</b>	<b>45</b>
1 Ma trận đối xứng - Ma trận Hermitian . . . . .	45
1.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	45
1.2 Bài tập . . . . .	46
2 Ma trận phản xứng . . . . .	47
2.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	47
2.2 Bài tập . . . . .	47
3 Ma trận trực giao - Phép biến đổi Cayley . . . . .	48
3.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	48
3.2 Bài tập . . . . .	48
4 Ma trận chuẩn tắc . . . . .	50
4.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	50
4.2 Bài tập . . . . .	50
5 Ma trận lũy linh . . . . .	52
5.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	52
5.2 Bài tập . . . . .	52
6 Toán tử chiếu - Ma trận lũy đẳng . . . . .	54
6.1 Các định nghĩa và tính chất . . . . .	54
6.2 Bài tập . . . . .	54
7 Ma trận đối hợp . . . . .	57

---

8	Ma trận hoán vị (hay còn gọi là ma trận giao hoán) . . . . .	58
8.1	Định nghĩa . . . . .	58
8.2	Bài tập . . . . .	58
<b>Chương 5 . Các bất đẳng thức ma trận. . . . .</b>		<b>59</b>
1	Các bất đẳng thức cho ma trận đối xứng và Hermitian . . . . .	59
1.1	Các định lý cơ bản . . . . .	59
1.2	Bài tập . . . . .	60
2	Các bất đẳng thức cho trị riêng . . . . .	61
2.1	Các bất đẳng thức cơ bản . . . . .	61
2.2	Bài tập . . . . .	62
<b>Chương 6 . Đa thức . . . . .</b>		<b>63</b>



# CHƯƠNG 1

## MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

### §1. ĐỊNH THỨC

#### 1.1 Các tính chất cơ bản của định thức

Định thức của một ma trận vuông  $A = (a_{ij})_1^n$  cấp  $n$  là tổng luân phiên

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)},$$

ở đó tổng trên được lấy qua tất cả các phép hoán vị  $\sigma \in S_n$ . Định thức của ma trận  $A$  được kí hiệu là  $\det A$  hoặc  $|A|$ , nếu  $\det A \neq 0$  ta nói  $A$  là ma trận khả nghịch (không suy biến). Các tính chất sau đây thường được sử dụng để tính định thức của một ma trận. Các bạn có thể kiểm chứng hoặc chứng minh chúng một cách dễ dàng.

1. Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của ma trận  $A$  thì định thức của nó đổi dấu. Nói riêng, nếu ma trận  $A$  có hai hàng (cột) giống nhau thì  $\det A = 0$ .

2. Nếu  $A, B$  và  $C$  là các ma trận vuông cùng cấp thì  $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$ .

3.  $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} M_{i,j}$ , ở đó  $M_{i,j}$  là định thức của ma trận thu được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$  của nó. Công thức này còn được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng. Các bạn có thể tự viết công thức khai triển định thức theo cột một cách tương tự.

$$4. \begin{vmatrix} \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \beta_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_n \alpha_n + \mu_n \beta_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$5. \det(AB) = \det A \det B.$$

$$6. \det(A^T) = \det A.$$

## 1.2 Các định thức đặc biệt

### Định thức Vandermonde

Ma trận Vandermonde cấp  $n$  là ma trận vuông cấp  $n$  có dạng

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

**Định lý 1.1.** Chứng minh rằng  $\det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ . Từ đó suy ra hệ  $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n).X = 0$  chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  đôi một phân biệt.

Một ứng dụng thú vị của định thức Vandermonde là bài toán sau:

**Bài tập 1.1.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Khi đó

$$A^n = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

*Chứng minh.*  $\Rightarrow$  Nếu  $A^n = 0$  thì  $A$  là một ma trận lũy linh, do đó  $A$  chỉ có các trị riêng bằng 0, nên  $A^k$  cũng chỉ có các trị riêng bằng 0 với mọi  $k$ . Suy ra điều phải chứng minh.

$\Leftarrow$  Giả sử các giá trị riêng của  $A$  là  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Khi đó từ  $\operatorname{tr}(A^k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n$  ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_n^n = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

hay

$$V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T = 0.$$

Ta sẽ chứng minh tất cả các giá trị riêng của  $A$  bằng nhau. Thật vậy:

Nếu  $\lambda_i$  đôi một phân biệt thì định thức Vandermonde khác không, hệ phương trình trên chỉ có nghiệm duy nhất  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n = 0$ . Mâu thuẫn.

Ngược lại, không mất tính tổng quát, giả sử  $\lambda_1 = \lambda_2$  và không một giá trị  $\lambda_i$  còn lại nào bằng nhau. Khi đó hệ phương trình được viết lại dưới dạng

$$V_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)(2\lambda_2, \dots, \lambda_n)^T = 0$$

Lập luận tương tự ta có  $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ , mâu thuẫn.

Vậy tất cả các trị riêng của  $A$  bằng nhau và do đó bằng 0. ■

**Bài tập 1.2.** Chứng minh rằng với các số nguyên  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$  bất kì thì  $\frac{\det V_n(k_1, k_2, \dots, k_n)}{\det V_n(1, 2, \dots, n)}$  là một số nguyên.

**Bài tập 1.3.** Cho  $W$  là ma trận có được từ ma trận  $V = V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bằng cách thay hàng  $(a_1^{n-1}, a_2^{n-1}, \dots, a_n^{n-1})$  bởi hàng  $(a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n)$ . Chứng minh rằng

$$\det W = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \det V.$$

**Bài tập 1.4.** Chứng minh rằng

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \vdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2 a_3 \dots a_n & a_1 a_3 \dots a_n & \dots & a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n & a_1 a_2 \dots a_{n-1} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot \det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

*Chứng minh.* • Nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$  thì nhân cột thứ nhất với  $a_1$ , cột thứ hai với  $a_2, \dots$ , cột thứ  $n$  với  $a_n$  rồi chia cho  $a_1 a_2 \dots a_n$  ta được

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \vdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2 a_3 \dots a_n & a_1 a_3 \dots a_n & \dots & a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n & a_1 a_2 \dots a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \vdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} \cdot \det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

- Trường hợp có ít nhất một trong các số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bằng 0 (xét riêng).



**Bài tập 1.5.** Cho  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  là các đa thức bậc không quá  $n - 2$ . Chứng minh rằng với mọi số  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

*Chứng minh.* Giả sử  $f_i(x) = b_{i0} + b_{i1}x + \dots + b_{i,n-2}x^{n-2}$  thì

$$\begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{n,n-2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 1.6.** Cho  $A = [a_{ij}]$  và  $f_i(x) = a_{1i} + a_{2i}x + \dots + a_{ni}x^{n-1}$  với  $i = \overline{1, n}$ . Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = \det A \cdot V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

*Chứng minh.* Tương tự như bài ?? ta có

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \dots & f_2(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots & f_n(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Suy ra điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 1.7.** Chứng minh rằng với  $k_1, k_2, \dots, k_n$  là các số tự nhiên khác nhau và  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số dương khác nhau thì

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^{k_1} & a_2^{k_1} & a_3^{k_1} & \dots & a_n^{k_1} \\ a_1^{k_2} & a_2^{k_2} & a_3^{k_2} & \dots & a_n^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{k_n} & a_2^{k_n} & a_3^{k_n} & \dots & a_n^{k_n} \end{bmatrix} \neq 0$$

### Định thức Cauchy

Ma trận Cauchy là ma trận vuông cấp  $n$ ,  $A = (a_{ij})$ , ở đó  $a_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j}$ . Bằng phương pháp quy nạp, ta sẽ chứng minh

$$\det A = \frac{\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(x_i + x_j)}$$

Trước hết lấy mỗi cột từ 1 đến  $n - 1$  trừ đi cột cuối cùng, ta được

$$a'_{ij} = (x_i + y_j)^{-1} - (x_i + y_n)^{-1} = (y_n - y_j)(x_i + y_n)^{-1}(x_i + y_j)^{-1} \text{ với } j \neq n.$$

Đưa nhân tử  $(x_i + y_n)^{-1}$  ở mỗi hàng, và  $y_n - y_j$  ở mỗi cột trừ cột cuối cùng ra khỏi định thức ta sẽ thu được định thức  $|b_{ij}|_{i,j=1}^n$ , ở đó  $b_{ij} = a_{ij}$  với  $j \neq n$  và  $b_{in} = 1$ .

Tiếp theo, lấy mỗi hàng từ 1 đến  $n - 1$  trừ đi hàng cuối cùng. Đưa nhân tử  $x_n - x_i$  ở mỗi hàng trừ hàng cuối cùng, và nhân tử  $(x_n + y_j)^{-1}$  ở mỗi cột trừ cột cuối cùng, ta sẽ thu được công thức truy hồi định thức Cauchy cấp  $n$  qua cấp  $n - 1$ .

### Định thức Frobenius

Ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

được gọi là ma trận Frobenius, hay ma trận bạn của đa thức

$$p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_0.$$

Khai triển định thức Frobenius theo hàng thứ nhất, các bạn có thể dễ dàng thu được công thức sau:

$$\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$$

### Định thức của ma trận ba đường chéo

Ma trận ba đường chéo là ma trận vuông  $J = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ , ở đó  $a_{ij} = 0$  với  $|i - j| > 1$ . Đặt  $a_i = a_{ii}, b_i = a_{i,i+1}, c_i = a_{i+1,i}$ , ma trận ba đường chéo khi đó có dạng:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Khai triển định thức của ma trận trên theo hàng thứ  $k$ , ta được

$$\Delta_k = a_k \Delta_{k-1} - b_{k-1} c_k \Delta_{k-2} \text{ với } k \geq 2, \text{ ở đó } \Delta_k = \det(a_{ij})_{i,j=1}^k.$$

Công thức truy hồi trên đã khẳng định rằng định thức  $\Delta_n$  không những chỉ phụ thuộc vào các số  $b_i, c_j$  mà còn phụ thuộc vào  $b_i c_i$ . Trong trường hợp đặc biệt, kí hiệu

$$(a_1 \dots a_n) \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

ta có công thức truy hồi thông qua liên phân số sau:

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

### Định thức của ma trận khối

Giả sử  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ , ở đó  $A_{11}$  và  $A_{22}$  là các ma trận vuông cấp  $m$  và cấp  $n$  tương ứng. Đặt  $D$  là một ma trận vuông cấp  $m$  và  $B$  là ma trận cỡ  $n \times m$ .

#### Định lý 1.2.

$$\begin{vmatrix} DA_{11} & DA_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |D| \cdot |A| \text{ và } \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + BA_{11} & A_{22} + BA_{12} \end{vmatrix} = |A|.$$

### 1.3 Bài tập

**Bài tập 1.8.** Cho  $A$  là một ma trận phản xứng cấp  $n$  lẻ. Chứng minh rằng  $\det A = 0$ .

**Bài tập 1.9.** Chứng minh rằng định thức của một ma trận phản xứng cấp  $n$  chẵn không thay đổi nếu ta cộng thêm vào mỗi phần tử của nó với một số cố định.

**Bài tập 1.10.** Tính định thức của một ma trận phản xứng cấp  $2n$  chẵn thỏa mãn tính chất các phần tử ở trên đường chéo chính bằng 1.

**Bài tập 1.11.** Cho  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ , với  $a_{ij} = a^{|i-j|}$ . Tính  $\det A$ .

**Bài tập 1.12.** Cho  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & h & -1 & 0 \\ x^2 & hx & h & -1 \\ x^3 & hx^2 & hx & h \end{vmatrix}$  và  $\Delta_n$  được định nghĩa tương tự cho  $n > 3$ .

Chứng minh rằng  $\Delta_n = (x+h)^n$ .

**Bài tập 1.13.** Cho  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$ , với  $c_{ij} = \begin{cases} a_i b_j & \text{nếu } i \neq j \\ x_i & \text{nếu } i = j \end{cases}$ . Tính  $\det C$ .

**Bài tập 1.14.** Cho  $a_{i,i+1} = c_i$  với  $i = 1, \dots, n$ , các phần tử khác của ma trận  $A$  bằng 0. Chứng minh rằng định thức của ma trận  $I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$  bằng  $(1-c)^{n-1}$ , với  $c = c_1 \dots c_n$ .

**Bài tập 1.15.** Tính  $\det(a_{ij})_{i,j=1}^n$ , với  $a_{ij} = (1 - x_i y_j)^{-1}$ .

**Bài tập 1.16.** Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & (x_2 + x_3 + \dots + x_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$$

**Bài tập 1.17.** Tính

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 x_3 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1 x_2 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}$$

**Bài tập 1.18.** Tính  $|a_{ik}|_0^n$ , với  $a_{ik} = \lambda_i^{n-k}(1 + \lambda_i^2)^k$ .

**Bài tập 1.19.** Cho  $a_{ij} = C_j^{in}$ . Chứng minh rằng  $|a_{ij}|_1^r = n^{r(r+1)/2}$  với  $r \leq n$ .

**Bài tập 1.20.** Cho  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ , tính  $|a_{ij}|_1^n$ , ở đó  $a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{(k_i+j-i)!} & \text{với } k_i + j - i \geq 0 \\ 0 & \text{với } k_i + j - i < 0 \end{cases}$

**Bài tập 1.21.** Cho  $s_k = p_1 x_1^k + \dots + p_n x_n^k$ , và  $a_{i,j} = s_{i+j}$ . Chứng minh rằng

$$|a_{ij}|_0^{n-1} = p_1 \dots p_n \prod_{i>j} (x_i - x_j)^2.$$

**Bài tập 1.22.** Cho  $s = x_1^k + \dots + x_n^k$ . Tính

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & y \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} & y^n \end{vmatrix}$$

**Bài tập 1.23.** Cho  $a_{ij} = (x_i + y_j)^n$ . Chứng minh rằng

$$|a_{ij}|_0^n = C_1^n C_2^n \dots C_n^n \prod_{i>k} (x_i - x_k)(y_k - y_i).$$

**Bài tập 1.24.** Cho  $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ . Chứng minh rằng  $|a_{ij}|_1^n = |b_{ij}|_1^n$ .

**Bài tập 1.25.** Cho  $\Delta_n(k) = |a_{ij}|_0^n$ , ở đó  $a_{ij} = C_{2j}^{k+i}$ . Chứng minh rằng

$$\Delta_n(k) = \frac{k(k+1) \dots (k+n-1)}{1.3 \dots (2n-1)} \Delta_{n-1}(k-1).$$

**Bài tập 1.26.** Cho  $D_n = |a_{ij}|_0^n$ , ở đó  $a_{ij} = C_{2j-1}^n$ . Chứng minh rằng  $D_n = 2^{n(n+1)/2}$ .

**Bài tập 1.27.** Cho  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$  và  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$ , ở đó  $A_{11}, B_{11}, A_{22}, B_{22}$  là các ma trận vuông cùng cấp và  $\text{rank } A_{11} = \text{rank } A, \text{rank } B_{11} = \text{rank } B$ . Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} \\ A_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A_{11}| \cdot |B_{22}|$$

## §2. ĐỊNH THỨC CON VÀ PHẦN PHỤ ĐẠI SỐ

### 2.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 1.3.** Ma trận mà các phần tử của nó là giao của  $p$  hàng và  $p$  cột của ma trận vuông  $A$  được gọi là ma trận con cấp  $p$  của  $A$ . Định thức tương ứng được gọi là định thức con cấp  $p$ . Kí hiệu

$$A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}$$

Nếu  $i_1 = k_1, \dots, i_p = k_p$  thì định thức con được gọi là định thức con chính cấp  $p$ .

**Định nghĩa 1.4.** Định thức con khác 0 có bậc cao nhất được gọi là định thức con cơ sở và cấp của nó được gọi là hạng của ma trận  $A$ .

**Định lý 1.5.** Nếu  $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix}$  là một định thức con cơ sở của  $A$ , thì các hàng của ma trận  $A$  là tổ hợp tuyến tính của các hàng  $i_1, \dots, i_p$  của nó, và các hàng  $i_1, \dots, i_p$  này độc lập tuyến tính.

**Hệ quả 1.6.** Hạng của một ma trận bằng số các hàng (cột) độc lập tuyến tính lớn nhất của nó.

**Định lý 1.7 (Công thức Binet - Cauchy).** Giả sử  $A$  và  $B$  là các ma trận cỡ  $n \times m$  và  $m \times n$  tương ứng và  $n \leq m$ . Khi đó

$$\det AB = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq m} A_{k_1 \dots k_n} B^{k_1 \dots k_n},$$

ở đó  $A_{k_1 \dots k_n}$  là định thức con thu được từ các cột  $k_1, \dots, k_n$  của  $A$  và  $B^{k_1 \dots k_n}$  là định thức con thu được từ các hàng  $k_1, \dots, k_n$  của  $B$ .

Kí hiệu  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , ở đó  $M_{ij}$  là định thức của ma trận thu được từ ma trận  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$ , nó được gọi là phần bù đại số của phần tử  $a_{ij}$ . Khi đó ma trận  $\text{adj } A = (A_{ij})^T$  được gọi là ma trận liên hợp của ma trận  $A$ . Ta có công thức sau:

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I$$

**Định lý 1.8.** Toán tử  $\text{adj}$  có các tính chất sau:

1.  $\text{adj } AB = \text{adj } B \cdot \text{adj } A$
2.  $\text{adj } XAX^{-1} = X(\text{adj } A)X^{-1}$
3. Nếu  $AB = BA$  thì  $(\text{adj } A)B = B(\text{adj } A)$ .

**Định lý 1.9.**

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{vmatrix} = |A|^{p-1} \cdot \begin{vmatrix} A_{p+1,p+1} & \dots & A_{p+1,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n,p+1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

**Hệ quả 1.10.** Nếu  $A$  là ma trận suy biến thì  $\text{rank}(\text{adj } A) \leq 1$ .

**Định lý 1.11 (Jacobi).** Giả sử  $1 \leq p < n$  và  $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & k_n \end{pmatrix}$  là một phép hoán vị bất kì. Khi đó

$$\begin{vmatrix} A_{i_1 j_1} & \dots & A_{i_1 j_p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i_p j_1} & \dots & A_{i_p j_p} \end{vmatrix} = (-1)^\sigma |A|^{p-1} \cdot \begin{vmatrix} A_{i_{p+1} j_{p+1}} & \dots & A_{i_{p+1} j_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i_n j_{p+1}} & \dots & A_{i_n j_n} \end{vmatrix}$$

**Định lý 1.12 (Chebotarev).** Cho  $p$  là một số nguyên tố và  $\epsilon = \exp(2\pi i/p)$ . Khi đó tất cả các định thức con của định thức Vandermonde  $(a_{ij})_{i,j=0}^{p-1}$  là khác không, ở đó  $a_{ij} = \epsilon^{ij}$ .

**Định lý 1.13 (Công thức khai triển Laplace).** Cố định  $p$  hàng  $i_1, i_2, \dots, i_p$  của  $A$  với  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ . Khi đó

$$\det A = \sum_{j_1 < \dots < j_p, j_{p+1} < \dots < j_n, i_{p+1} < \dots < i_n} (-1)^{i+j} \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_{p+1} & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

ở đó  $i = i_1 + \dots + i_p, j = j_1 + \dots + j_p$ .

Đại lượng  $(-1)^{i+j} A \begin{pmatrix} i_{p+1} & \dots & i_n \\ j_{p+1} & \dots & j_n \end{pmatrix}$  được gọi là phần bù đại số của định thức con  $A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix}$ .

## 2.2 Bài tập

**Bài tập 1.28.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng

$$|A + \lambda I| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n S_k \lambda^{n-k},$$

ở đó  $S_k$  là tổng của tất cả  $C_k^n$  các định thức con chính cấp  $k$  của  $A$ .

**Bài tập 1.29.** Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \dots & y_n & 0 \end{vmatrix} = - \sum_{i,j} x_i y_j A_{ij},$$

ở đó  $A_{ij}$  là phần bù đại số của phần tử  $a_{ij}$ .

**Bài tập 1.30.** Chứng minh rằng tổng của các định thức con chính cấp  $k$  của  $A^T A$  bằng tổng bình phương các định thức con chính cấp  $k$  của  $A$ .

**Bài tập 1.31.** Cho  $A, B$  là các ma trận vuông cấp  $n$ . Tính

$$\begin{pmatrix} I & A & C \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}^{-1}$$

**Bài tập 1.32.** Tìm một ví dụ một ma trận vuông cấp  $n$  mà các phần bù đại số của nó đều bằng 0, ngoại trừ phần tử nằm ở hàng  $i$  và cột  $j$ .

**Bài tập 1.33.** Cho  $x$  và  $y$  là các cột có độ dài  $n$ . Chứng minh rằng

$$\text{adj}(I - xy)^T = xy^T + (1 - y^T x)I.$$

**Bài tập 1.34.** Cho  $A$  là một ma trận phản xứng. Chứng minh rằng  $\text{adj}(A)$  là một ma trận phản xứng nếu  $n$  lẻ và đối xứng nếu  $n$  chẵn.

**Bài tập 1.35.** Cho  $A$  là một ma trận phản xứng cấp  $n$  với các phần tử trên đường chéo chính bằng 1. Tính  $\text{adj} A$ .

**Bài tập 1.36.** Tìm tất cả các ma trận  $A$  có các phần tử không âm sao cho tất cả các phần tử của ma trận  $A^{-1}$  cũng không âm.

**Bài tập 1.37.** Cho  $\epsilon = \exp(2\pi i/n)$  và  $A = (a_{ij})_1^n$  với  $a_{ij} = \epsilon^{ij}$ . Tính  $A^{-1}$ .

**Bài tập 1.38.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận Vandermonde  $V$ .



### §3. PHẦN BÙ SCHUR

#### 3.1 Các định nghĩa và tính chất

Cho  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  là một ma trận khối, ở đó  $A, D$  là các ma trận vuông. Để tính định thức của ma trận  $P$ , ta có thể phân tích  $P$  dưới dạng sau:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AY \\ C & CY + X \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Nếu  $A$  là một ma trận khả nghịch thì các phương trình  $B = AY$  và  $D = CY + X$  có nghiệm lần lượt là  $Y = A^{-1}B$  và  $X = D - CA^{-1}B$ .

**Định nghĩa 1.14.** Ma trận  $D - CA^{-1}B$  được gọi là phần bù Schur của ma trận khả nghịch  $A$  trong  $P$ , và được kí hiệu là  $(P|A)$ .

Dễ dàng nhận thấy rằng

$$\det P = \det A \det(P|A).$$

Mặt khác,

$$\begin{pmatrix} A & AY \\ C & CY + X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

nên phương trình (??) có thể được viết dưới dạng sau:

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & P|A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & P|A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Tương tự, nếu  $D$  là ma trận khả nghịch, thì

$$P = \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

**Định lý 1.15.**

1. Nếu  $|A| \neq 0$  thì  $|P| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$ ;
2. Nếu  $|D| \neq 0$  thì  $|P| = |A - BD^{-1}C| \cdot |D|$ .
3.  $P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BX^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BX^{-1} \\ -X^{-1}CA^{-1} & X^{-1} \end{pmatrix}$ , ở đó  $X = (P|A)$ .

**Định lý 1.16.** Nếu  $A$  và  $D$  là các ma trận vuông cấp  $n$ ,  $\det A \neq 0$ , và  $AC = CA$ , thì  $|P| = |AD - CB|$ .

**Chú ý 1.17.** Định lý ?? vẫn đúng nếu  $|A| = 0$ , thật vậy, xét ma trận  $A_\epsilon = A + \epsilon I$ . Dễ dàng thấy rằng ma trận  $A_\epsilon$  sẽ khả nghịch với mọi  $\epsilon$  đủ nhỏ! Hơn nữa nếu  $AC = CA$  thì  $A_\epsilon C = CA_\epsilon$ .

**Định lý 1.18.** Giả sử  $u$  là một hàng,  $v$  là một cột, và  $a$  là một số bất kì. Khi đó

$$\begin{vmatrix} A & v \\ u & a \end{vmatrix} = a|A| - u(\text{adj } A)v.$$

**Định lý 1.19 (Emily Haynsworth).** Cho  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ ,  $C = (A_{11})$  là các ma trận vuông, và  $B, C$  là các ma trận khả nghịch. Khi đó:

$$(A|B) = ((A|C)|(B|C)).$$

## 3.2 Bài tập

**Bài tập 1.39.** Cho  $u$  và  $v$  là các hàng có độ dài  $n$  và  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng

$$|A + u^T v| = |A| + v(\text{adj } A)u^T$$

**Bài tập 1.40.** Cho  $A$  là một ma trận vuông. Chứng minh rằng

$$\begin{vmatrix} I & A \\ A^T & I \end{vmatrix} = 1 - \sum M_1^2 + \sum M_2^2 - \sum M_3^2 + \dots$$

ở đó  $\sum M_k^2$  là tổng bình phương của tất cả các định thức con cấp  $k$  của  $A$ .



# CHƯƠNG 2

## KHÔNG GIAN VÉCTƠ - ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

### §1. KHÔNG GIAN ĐỐI NGÃU - PHẦN BÙ TRỰC GIAO

#### 1.1 Không gian đối ngẫu

**Định nghĩa 2.1.** Với mỗi không gian vectơ  $V$  trên trường  $\mathbb{K}$ , không gian tuyến tính  $V^*$  mà các phần tử của nó là các ánh xạ tuyến tính trên  $V$ , nghĩa là, ánh xạ  $f : V \rightarrow \mathbb{K}$  sao cho

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \text{ với mọi } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \text{ và } v_1, v_2 \in V,$$

được gọi là không gian đối ngẫu với không gian  $V$ .

**Định lý 2.2.** Cho  $V$  là không gian Oclit  $n$  chiều, chứng minh điều kiện cần và đủ để ánh xạ  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  tuyến tính là tồn tại vectơ  $a$  cố định của  $V$  để  $f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V$

**Chú ý 2.3.** Khi đó không gian  $V^*$  có thể được coi như đồng nhất với không gian  $V$ .

*Chứng minh.*  $\boxed{\Leftarrow}$  Điều kiện đủ: Dễ dàng chứng minh ánh xạ  $f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V$  là ánh xạ tuyến tính với mỗi vectơ  $a$  cố định đã được chọn trước.

$\boxed{\Rightarrow}$  Điều kiện cần: Giả sử  $f : V \rightarrow V$  là một ánh xạ tuyến tính bất kỳ.

(a) Nếu  $f \equiv 0$  thì ta chọn vectơ  $a = 0$  thoả mãn yêu cầu bài toán.

(b) Nếu  $f \neq 0$ . Ta sẽ chứng minh  $\dim \text{Ker} f = n - 1$ . Thật vậy, vì  $f \neq 0$  nên tồn tại ít nhất một vectơ  $y \in V, y \notin \text{Ker} f$ . Cố định một vectơ  $y$  như vậy, khi đó với mỗi  $x \in V$ , đặt  $\lambda = \frac{f(x)}{f(y)}, z = x - \lambda y = x - \frac{f(x)}{f(y)} y$  thì  $f(z) = 0 \Rightarrow z \in \text{Ker} f$ . Ta có  $x = z + \lambda y$ , tức là mỗi vectơ  $x \in V$  thừa nhận phân tích thành tổng của 2 vectơ, một vectơ thuộc  $\text{Ker} f$  và một vectơ thuộc  $\text{span} y$ . Điều đó có nghĩa là

$V = \text{Ker}f + \text{span}y$  và suy ra  $\dim \text{Ker}f = n - 1$ .

Bây giờ giả sử  $V$  có phân tích thành tổng trực giao  $V = \text{Ker}f + (\text{Ker}f)^\perp$  thì  $\dim (\text{Ker}f)^\perp = 1$ , tức  $(\text{Ker}f)^\perp = \text{span}(y_0)$ , trong đó  $\|y_0\| = 1$ . Đặt  $a = f(y_0)$ ,  $y_0 \in (\text{Ker}f)^\perp$ , ta sẽ chứng minh vectơ  $a$  thỏa mãn yêu cầu bài ra, tức là  $f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V$ . Thật vậy: Với mỗi  $x \in V$ , do  $V = \text{Ker}f + (\text{Ker}f)^\perp = \text{Ker}f + \text{span}(y_0)$  nên  $x = \lambda y_0 + y, y \in \text{Ker}f$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda f(y_0) + f(y) \\ &= \lambda f(y_0) \\ &= \lambda \langle f(y_0), y_0, y_0 \rangle \\ &= \lambda \langle a, y_0 \rangle \\ &= \langle a, \lambda y_0 \rangle \\ &= \langle a, \lambda y_0 + y \rangle \left( \langle a, y \rangle = 0 \text{ do } a \in (\text{Ker}f)^\perp, y \in (\text{Ker}f) \right) \\ &= \langle a, x \rangle \end{aligned}$$

Với mỗi cơ sở  $e_1, e_2, \dots, e_n$  của không gian  $V$ , đặt  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ , khi đó  $e_1^*, \dots, e_n^*$  sẽ là cơ sở của  $V^*$ . Mỗi phần tử  $f \in V^*$  khi đó có thể được biểu diễn dưới dạng

$$f = \sum f(e_i)e_i^*.$$

Do đó, nếu cố định cơ sở  $e_1, e_2, \dots, e_n$  của không gian  $V$ , chúng ta có thể xây dựng được một đẳng cấu  $g: V \rightarrow V^*$  bằng cách đặt  $g(e_i) = e_i^*$ .

Với mỗi ánh xạ tuyến tính  $A: V_1 \rightarrow V_2$  toán tử đối ngẫu  $A^*: V_2^* \rightarrow V_1^*$  xác định bởi  $(A^*f_2)(v_1) = f_2(Av_1)$  với mỗi  $f_2 \in V_2^*$  và  $v_1 \in V_1$ . Để thuận tiện hơn, ta kí hiệu  $f(v)$  bởi  $\langle f, v \rangle$ , khi đó định nghĩa của toán tử  $A^*$  có thể được viết lại như sau:

$$\langle A^*f_2, v_1 \rangle = \langle f_2, Av_1 \rangle$$

Gọi  $(a_{ij})_1^n$  là ma trận của ánh xạ tuyến tính  $A$  trong cặp cơ sở  $\{e_\alpha\}$  của  $V_1$  và  $\{\epsilon_\beta\}$  của  $V_2$ , ở đó  $Ae_j = \sum_i a_{ij}\epsilon_i$ . Tương tự, gọi  $(a_{ij}^*)_1^n$  là ma trận của ánh xạ tuyến tính  $A^*$  trong cặp cơ sở  $\{\epsilon_\beta^*\}$  của  $V_2^*$  và  $\{e_\alpha^*\}$  của  $V_1^*$ .

#### **Bổ đề 2.4.**

$$(a_{ij}^*) = (a_{ij})^T$$

Giả sử  $\{e_\alpha\}$  và  $\{\epsilon_\beta\}$  là hai cơ sở khác nhau của không gian vectơ  $V$ ,  $A$  là ma trận chuyển từ cơ sở  $\{e_\alpha\}$  sang  $\{\epsilon_\beta\}$ ,  $B$  là ma trận chuyển cơ sở từ  $\{e_\alpha^*\}$  sang cơ sở  $\{\epsilon_\beta^*\}$ .

#### **Bổ đề 2.5.**

$$AB^T = I.$$

**Hệ quả 2.6.** Các cơ sở  $\{e_\alpha\}$  và  $\{\epsilon_\beta\}$  cảm sinh cùng một đẳng cấu  $V \rightarrow V^*$  khi và chỉ khi  $A$  là một ma trận trực giao, nghĩa là  $AA^T = I$ .

## 1.2 Phân bù trực giao

**Định nghĩa 2.7.** Với mỗi không gian con  $W \subset V$ , không gian

$$W^\perp = \{f \in V^* \mid \langle f, w \rangle = 0 \text{ với mọi } w \in W\},$$

được gọi là phân bù trực giao của không gian con  $W$ .

$W^\perp$  là một không gian véc tơ con của  $V^*$  và  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ , bởi vì nếu  $e_1, \dots, e_n$  là một cơ sở của  $V$  sao cho  $e_1, \dots, e_k$  là một cơ sở của  $W$  thì khi đó  $e_{k+1}^*, \dots, e_n^*$  là một cơ sở của  $W^\perp$ .

**Bổ đề 2.8.** 1. Nếu  $W_1 \subset W_2$  thì  $W_2^\perp \subset W_1^\perp$ ,

2.  $(W^\perp)^\perp = W$ ,

3.  $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$  và  $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ ,

4. Nếu  $V = W_1 \oplus W_2$  thì  $V^* = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$ .

**Định lý 2.9.** Nếu  $A : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính và  $AW \subset W$  thì  $A^*W^\perp \subset W^\perp$ .

Trong không gian các ma trận cỡ  $m \times n$ , tích trong (tích vô hướng) giữa hai ma trận  $X, Y$  được xác định như sau:

$$\text{tr}(XY^T) = \sum_{i,j} x_{ij}y_{ij}.$$

**Định lý 2.10.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Nếu với mỗi ma trận  $X$  cỡ  $n \times m$  ta có  $\text{tr}(AX) = 0$  thì  $A = 0$ .

## 1.3 Bài tập

**Bài tập 2.1.** Cho ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  thỏa mãn tính chất  $\text{tr}(AX) = 0$  với mọi ma trận  $X$  có vết bằng 0. Chứng minh rằng  $A = \lambda I$ .

**Bài tập 2.2.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận cỡ  $m \times n$  và  $k \times n$  tương ứng, sao cho nếu  $AX = 0$  thì  $BX = 0$  với  $X$  là một véc tơ cột nào đó. Chứng minh rằng  $B = CA$ , ở đó  $C$  là một ma trận cỡ  $k \times m$ .

## §2. HẠT NHÂN VÀ ẢNH - KHÔNG GIAN THƯỜNG

### 2.1 Hạt nhân và ảnh

**Định nghĩa 2.11.** Cho  $A : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính từ không gian véctơ  $V$  tới không gian véctơ  $W$ . Khi đó

$$\text{Ker}(A) := \{x | x \in V, A(x) = 0\}$$

được gọi là hạt nhân của  $A$ .

$$\text{Im}(A) := \{y | y \in W, \exists x \in V, A(x) = y\} = \{A(x) | x \in V\}$$

được gọi là ảnh của  $A$ .

**Định lý 2.12.** Cho  $A : V \rightarrow W$  là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó

1.  $\text{Ker}(A)$  là một không gian véctơ con của  $V$ .
2.  $\text{Im}(A)$  là một không gian véctơ con của  $W$ .
3.  $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = \dim V$ .
4. Nếu  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  là một cơ sở của  $V$  thì

$$\text{Im}(A) = \text{span}\{A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)\}.$$

Cho  $U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$  là các ánh xạ tuyến tính. Khi đó

**Định lý 2.13.**

$$\dim(\text{Im} A \cap \text{Ker} B) = \dim \text{Im} A - \dim \text{Im} BA = \dim \text{Ker} BA - \dim \text{Ker} A.$$

**Định lý 2.14.**

$$\text{Ker} A^* = (\text{Im} A)^\perp \text{ và } \text{Im} A^* = (\text{Ker} A)^\perp.$$

**Hệ quả 2.15.**  $\text{rank} A = \text{rank} A^*$ .

**Chú ý 2.16.** . Nếu  $V$  là một không gian Euclide thì  $V^*$  có thể đồng nhất với  $V$ , và

$$V = \text{Im} A \oplus (\text{Im} A)^\perp = \text{Im} A \oplus \text{Ker} A^* = \Im A^* \oplus \text{Ker} A.$$

**Định lý 2.17 (Fredholm).** Cho  $A : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính. Xét bốn phương trình sau:

$$\begin{aligned} (1) \quad Ax = y \text{ với } x, y \in V, & & (3) \quad Ax = 0, \\ (2) \quad A^*f = g \text{ với } f, g \in V^*, & & (4) \quad A^*f = 0. \end{aligned}$$

Khi đó

1. hoặc là các phương trình (1) và (2) có nghiệm với mọi vế phải, và trong trường hợp này nghiệm là duy nhất
2. hoặc là các phương trình (3) và (4) có cùng số các nghiệm độc lập tuyến tính  $x_1, \dots, x_k$  và  $f_1, \dots, f_k$  và trong trường hợp này các phương trình (1) (và (2) tương ứng) có nghiệm nếu và chỉ nếu  $f_1(y) = \dots = f_k(y) = 0$  (tương ứng  $g(x_1) = \dots = g(x_k) = 0$ ).

**Định lý 2.18.** Phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi một trong các điều kiện tương đương sau được thỏa mãn

a) Tồn tại các ma trận  $Y$  và  $Z$  sao cho  $C = AY$  và  $C = ZB$ ;

b)  $\text{rank } A = \text{rank}(A, C)$  và  $\text{rank } B = \text{rank} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$

**Định lý 2.19.** Cho  $\text{rank } A = a$ . Khi đó tồn tại các ma trận khả nghịch  $L$  và  $R$  sao cho  $LAR = I_a$ , ở đó  $I_a$  là ma trận cấp  $n$  có  $a$  phần tử trên đường chéo bằng 1, và các phần tử còn lại bằng 0.

## 2.2 Không gian thương

Nếu  $W$  là một không gian véc tơ con của không gian  $V$  thì  $V$  có thể được phân thành lớp các tập con như sau:

$$M_v = \{x \in V \mid x - v \in W\}.$$

Nhận xét rằng  $M_v = M_{v'}$  nếu và chỉ nếu  $v - v' \in W$ . Khi đó trên tập thương

$$V/W = \{M_v \mid v \in V\},$$

ta có thể xây dựng một cấu trúc tuyến tính bằng cách đặt  $\lambda M_v = M_{\lambda v}$  và  $M_v + M_{v'} = M_{v+v'}$ . Chú ý rằng  $M_{\lambda v}$  và  $M_{v+v'}$  không phụ thuộc vào cách chọn  $v$  và  $v'$ .

**Định nghĩa 2.20.** Không gian  $V/W$  được gọi là không gian thương của  $V$  modulo  $W$



Để thuận tiện người ta thường kí hiệu lớp  $M_v$  bởi  $v + W$ . Ánh xạ

$$p : V \rightarrow V/W, p(v) = M_v,$$

được gọi là phép chiếu chính tắc từ  $V$  lên  $V/W$ . Hiển nhiên,  $\text{Ker } p = W$  và  $\text{Im } p = V/W$ .

**Bổ đề 2.21.**  $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$

*Chứng minh.* Nếu  $e_1, \dots, e_k$  là một cơ sở của  $W$  và  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$  là một cơ sở của  $V$  thì  $p(e_1) = \dots = p(e_k) = 0$  và  $p(e_{k+1}), \dots, p(e_n)$  là một cơ sở của  $V/W$ . ■

**Định lý 2.22.**

1.  $(U/W)/(V/W) \cong U/V$  nếu  $W \subset V \subset U$ ;
2.  $V/V \cap W \cong (V+W)/W$  nếu  $V, W \subset U$ .

## 2.3 Bài tập

**Bài tập 2.3.** Cho  $A$  là một toán tử tuyến tính. Chứng minh rằng

$$\dim \text{Ker } A^{n+1} = \dim \text{Ker } A + \sum_{k=1}^n \dim(\text{Im } A^k \cap \text{Ker } A)$$

và

$$\dim \text{Im } A = \dim \text{Im } A^{n+1} + \sum_{k=1}^n \dim(\text{Im } A^k \cap \text{Ker } A).$$

## §3. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VÉCTƠ - ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH

### 3.1 Bài toán đổi cơ sở

Cho  $A$  là ma trận của ánh xạ tuyến tính  $f : V \rightarrow W$  trong cặp cơ sở  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  của  $V$  và  $\epsilon = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  của  $W$ . Giả sử  $e' = eP$  và  $\epsilon' = \epsilon Q$  là các cơ sở khác của  $V$  và  $W$ . Khi đó

$$A' = Q^{-1}AP$$

là ma trận của  $f$  trong cặp cơ sở  $e'$  và  $\epsilon'$ . Đặc biệt, nếu  $V = W$  và  $P = Q$  thì  $A' = P^{-1}AP$ .

**Định lý 2.23.** Với mỗi toán tử tuyến tính  $A$ , đa thức đặc trưng

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda_{n-1} + \dots + a_0$$

không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian  $V$ .

**Định lý 2.24 (Green, 1973).** Cho  $x_1, \dots, x_n$  và  $y_1, \dots, y_n$  là hai cơ sở của không gian  $V$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Khi đó  $k$  vectơ của  $y_1, \dots, y_n$  có thể hoán đổi được với các vectơ  $x_1, \dots, x_k$  sao cho chúng ta vẫn thu được 2 cơ sở khác của không gian  $V$ .

**Định lý 2.25 (Aupetit, 1988).** Cho  $T$  là một toán tử tuyến tính trên không gian  $V$  sao cho với mọi  $\xi \in V$  các vectơ  $\xi, T\xi, \dots, T^n\xi$  là độc lập tuyến tính. Khi đó các toán tử tuyến tính  $I, T, \dots, T^n$  là độc lập tuyến tính.

### 3.2 Bài tập

**Bài tập 2.4.** Trong  $V^n$  cho các vectơ  $e_1, \dots, e_m$ . Chứng minh rằng nếu  $m \geq n + 2$  thì tồn tại các số  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  không đồng thời bằng 0 sao cho  $\sum \alpha_i e_i = 0$  và  $\sum \alpha_i = 0$ .

**Bài tập 2.5.** Một tổ hợp tuyến tính lồi của các vectơ  $v_1, \dots, v_m$  là một vectơ bất kì

$$x = t_1 v_1 + \dots + t_m v_m,$$

ở đó  $t_i \geq 0$  và  $\sum t_i = 1$ . Chứng minh rằng trong một không gian vectơ thực  $n$  chiều, bất kì tổ hợp tuyến tính lồi của  $m$  vectơ cũng là một tổ hợp tuyến tính lồi của không nhiều hơn  $n + 1$  vectơ cho trước.

**Bài tập 2.6.** Chứng minh rằng nếu  $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$  với mọi  $i = 1, \dots, n$  thì  $A = (a_{ij})_1^n$  là một ma trận khả nghịch.

**Bài tập 2.7.** a) Cho các véctơ  $e_1, \dots, e_{n+1}$  trong một không gian Euclide  $n$  chiều, sao cho  $(e_i, e_j) < 0$  nếu  $i \neq j$ , chứng minh rằng mọi  $n$  véctơ rút ra từ hệ  $n + 1$  véctơ trên đều là một cơ sở của  $V$ .

b) Chứng minh rằng nếu  $e_1, \dots, e_m$  là các véctơ trong  $\mathbb{R}^n$  sao cho  $(e_i, e_j) < 0$  với  $i \neq j$  thì  $m \leq n + 1$ .

## §4. HẠNG CỦA MA TRẬN

**Định nghĩa 2.26.** Cho  $A$  là một ma trận cỡ  $m \times n$ . Hạng của ma trận  $A$  là cấp cao nhất của các định thức con khác không của nó.

### 4.1 Các tính chất của hạng của ma trận

**Bổ đề 2.27.**

1.  $\text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$ . Nếu  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$  thì  $A$  khả nghịch khi và chỉ khi  $\text{rank}(A) = n$ .
2.  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

**Định lý 2.28.** (Định lý Sylvester) Cho  $A, B$  là các ma trận cỡ  $m \times n$  và  $n \times p$  tương ứng. Khi đó

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) - \dim(\text{Im } B \cap \text{Ker } A)$$

Nói riêng,

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) - n \leq \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$$

*Chứng minh.* Chú ý rằng nếu  $\mathcal{A}$  là toán tử tuyến tính trên không gian vectơ  $n$  chiều thì

$$n = \dim \text{Im } \mathcal{A} + \dim \text{Ker } \mathcal{A}$$

và nếu  $A$  là ma trận của toán tử tuyến tính  $\mathcal{A}$  thì

$$\text{rank}(A) = \dim \text{Im } \mathcal{A}.$$

Bây giờ xem  $A$  như là ánh xạ tuyến tính trên không gian vectơ con  $\text{Im } B$ . Khi đó ảnh của nó là  $\text{Im } AB$  và hạt nhân của nó là  $\text{Im } B \cap \text{Ker } A$ . Do đó ta có

$$\dim \text{Im } AB + \dim(\text{Im } B \cap \text{Ker } A) = \dim \text{Im } B.$$

Cuối cùng, chú ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra trực tiếp từ đẳng thức trên và bất đẳng thức sau:

$$\dim \text{Im } A + \dim \text{Ker}(\text{Im } B \cap \text{Ker } A) \leq \dim \text{Im } A + \dim \text{Ker } A = n.$$

**Định lý 2.29 (Bất đẳng thức Frobenius).**

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(B) + \text{rank}(ABC)$$

**Bổ đề 2.30.** *Hạng của ma trận  $A$  bằng cỡ nhỏ nhất của các ma trận  $B, C$ , sao cho  $A = BC$ .*

*Chứng minh.* Nếu  $A = BC$  và cỡ nhỏ nhất của các ma trận  $B, C$  bằng  $k$ . Khi đó ta cần chứng minh

$$\text{rank}(A) \leq \min\{\text{rank } B, \text{rank } C\} \leq k.$$

**Định lý 2.31 (Flanders, 1962).** *Cho  $r \leq m \leq n$  và  $M_{n,m}$  là không gian các ma trận cỡ  $n \times m$ . Giả sử  $U$  là không gian véctơ con của  $M_{n,m}$  thỏa mãn hạng lớn nhất của các phần tử của  $U$  bằng  $r$ . Khi đó*

$$\dim U \leq nr.$$

**Bổ đề 2.32.** *Nếu  $B \in U$  thì  $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}$ , ở đó  $B_{21}B_{12} = 0$ .*

**Bổ đề 2.33.** *Nếu  $B, C \in U$  thì  $B_{21}C_{12} + C_{21}B_{12} = 0$ .*

## 4.2 Bài tập

**Bài tập 2.8.** *Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . CMR tồn tại  $k \leq n$  sao cho  $r(A^k) = r(A^m)$  với mọi  $m \geq k$ . Nói riêng  $r(A^n) = r(A^{n+1})$ .*

**Bài tập 2.9.** *Giả sử các giá trị riêng của ma trận  $A$  có phần thực âm. Chứng minh rằng tồn tại ma trận xác định dương  $C$  sao cho  $A^T C + CA = -I$ .*

**Bài tập 2.10.** *Cho  $a_{ij} = x_i + y_j$ . Chứng minh rằng  $\text{rank}(a_{ij})_1^n \leq 2$ .*

**Bài tập 2.11.** *Cho  $A$  là một ma trận vuông có hạng bằng 1. Chứng minh rằng*

$$|A + I| = 1 + \text{tr } A.$$

**Bài tập 2.12.** *Chứng minh rằng  $\text{rank}(A^* A) = \text{rank } A$ .*

**Bài tập 2.13.** *Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng nếu  $\text{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{rank } A$  thì  $D = CA^{-1}B$ .*

**Bài tập 2.14.** *Cho  $A_1, A_2$  là các ma trận có cùng cỡ, và  $V_1, V_2$  là không gian véctơ sinh bởi các hàng của  $A_1, A_2$  tương ứng,  $W_1, W_2$  là không gian véctơ sinh bởi các cột của  $A_1, A_2$  tương ứng. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương.*

1.  $\text{rank}(A_1 + A_2) = \text{rank } A_1 + \text{rank } A_2$ ,

2.  $V_1 \cap V_2 = 0,$

3.  $W_1 \cap W_2 = 0.$

**Bài tập 2.15.** Chứng minh rằng nếu  $A$  và  $B$  là các ma trận có cùng cỡ và  $B^T A = 0$  thì  $\text{rank}(A + B) = \text{rank } A + \text{rank } B.$

**Bài tập 2.16.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cấp lẻ. Chứng minh rằng nếu  $AB = 0$  thì ít nhất một trong hai ma trận  $A + A^T$  và  $B + B^T$  là suy biến.



# CHƯƠNG 3

---

## DẠNG CHÍNH TẮC CỦA MA TRẬN VÀ TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH

---

### §1. VẾT CỦA MA TRẬN

**Định nghĩa 3.1.** *Vết của ma trận  $A$  là tổng của các phần tử trên đường chéo của nó, được kí hiệu là  $\text{tr } A$ .*

Dễ thấy

$$\text{tr } AB = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ji} = \text{tr } BA.$$

Do đó,

$$\text{tr } PAP^{-1} = \text{tr } P^{-1}AP = \text{tr } A,$$

nghĩa là, hạng của ma trận của toán tử tuyến tính không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian.

Nếu  $A$  là toán tử tuyến tính trên không gian Euclidean thì:

**Định lý 3.2.** *Cho  $e_1, \dots, e_n$  là một cơ sở chuẩn tắc. Khi đó*

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n (Ae_i, e_i).$$



## §2. CẤU TRÚC CỦA TỰ ĐỒNG CẤU

### 2.1 Trị riêng và vectơ riêng

Giả sử  $V$  là một không gian vectơ,  $f : V \rightarrow V$  là một tự đồng cấu của  $V$ . Việc nghiên cứu  $f$  trên toàn không gian  $V$  đôi khi gặp khó khăn, vì  $V$  quá lớn. Người ta muốn tránh điều đó bằng cách hạn chế  $f$  lên một số lớp không gian con nào đó  $U$  của  $V$ .

**Định nghĩa 3.3.** Không gian vectơ con  $U$  của  $V$  được gọi là một không gian con ổn định đối với  $f$  (hay một không gian con  $f$  ổn định nếu  $f(U) \subset U$ ).

Đôi khi người ta nói  $U$  là một không gian con ổn định (nếu  $f$  đã rõ).

Đối với tự đồng cấu  $f : V \rightarrow V$ , các không gian con sau đây là ổn định:  $\{0\}, V, \text{Ker} f, \text{Im} f$ .

Nếu có các không gian con ổn định  $U_1, U_2$  sao cho  $V = U_1 \oplus U_2$  thì  $f|_{U_1}$  và  $f|_{U_2}$  đều là các tự đồng cấu. Khi đó việc nghiên cứu  $f$  trên  $V$  có thể quy về việc nghiên cứu  $f_i$  trên  $U_i$ . Nói rõ hơn, nếu  $f_1$  có ma trận là  $A$  trong cơ sở  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  của  $U_1$  và  $f_2$  có ma trận là  $B$  trong cơ sở  $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  của  $U_2$  thì  $f$  có ma trận

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

trong cơ sở  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  của  $V$ .

Sau đây ta xét một trường hợp riêng đặc biệt thú vị, có nhiều ứng dụng trong Cơ học, Vật lý. Đó là trường hợp các không gian con ổn định một chiều.

**Định nghĩa 3.4.** Giả sử  $f$  là một tự đồng cấu của không gian vectơ  $V$ . Nếu có vectơ  $\alpha \neq 0$  và vô hướng  $\lambda \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(\alpha) = \lambda\alpha$ , thì  $\lambda$  được gọi là một giá trị riêng của  $f$  còn  $\alpha$  được gọi là một vectơ riêng ứng với trị riêng  $\lambda$ .

**Định nghĩa 3.5.** Giả sử  $\lambda$  là một trị riêng của tự đồng cấu  $f : V \rightarrow V$ . Không gian vectơ  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_V)$  gồm tất cả các vectơ riêng ứng với trị riêng  $\lambda$  và vectơ không được gọi là không gian con riêng của  $f$  ứng với trị riêng  $\lambda$ .

**Định nghĩa 3.6.** Đa thức bậc  $n$  một ẩn  $X$  với hệ số thực

$$P_f(X) = \det(f - X \text{id}_V)$$

được gọi là đa thức đặc trưng của tự đồng cấu  $f$ .

Đa thức bậc  $n$  một ẩn  $X$  với hệ số thực

$$P_A(X) = \det(A - X \text{id}_V)$$

được gọi là đa thức đặc trưng của ma trận  $A$ . Nghiệm của đa thức này được gọi là giá trị riêng của  $A$ .

**Mệnh đề 3.7.** Giả sử  $U$  là một không gian con ổn định với tự đồng cấu  $f : V \rightarrow V$ . Gọi  $\bar{f} : V/U \rightarrow V/U, \bar{f}[\alpha] = [f(\alpha)]$  là đồng cấu cảm sinh bởi  $f$ . Khi đó, đa thức đặc trưng của  $f$  bằng tích các đa thức đặc trưng của  $f|_U$  và  $\bar{f}$ .

**Định lý 3.8.** Cho  $A, B$  là các ma trận vuông cấp  $n$ . Khi đó đa thức đặc trưng của  $AB$  và  $BA$  là trùng nhau.

**Hệ quả 3.9.** Cho  $A, B$  là các ma trận cỡ  $m \times n$ . Khi đó các đa thức đặc trưng của  $AB^T$  và  $B^T A$  khác nhau bởi nhân tử  $\lambda^{n-m}$ .

**Định lý 3.10.** Cho ma trận vuông  $A$  có tổng của các phần tử trên mỗi cột của nó bằng 1, và giả sử  $(x_1, \dots, x_n)^T$  là vectơ riêng của  $A$  thỏa mãn  $x_1 + \dots + x_n \neq 0$ . Khi đó giá trị riêng tương ứng với vectơ riêng này bằng 1.

**Định lý 3.11.** Nếu tổng của các giá trị tuyệt đối của các phần tử trên mỗi cột của ma trận  $A$  không vượt quá 1, thì tất cả các giá trị riêng của nó cũng không vượt quá 1.

## 2.2 Tự đồng cấu chéo hoá được

**Định nghĩa 3.12.** Tự đồng cấu  $f$  của không gian vectơ  $V$  được gọi là chéo hoá được nếu có một cơ sở của  $V$  gồm toàn các vectơ riêng của  $f$ . Nói cách khác  $f$  chéo hoá được nếu ma trận của nó trong một cơ sở nào đó của  $V$  là một ma trận chéo.

Gọi  $A$  là ma trận của  $f$  trong một cơ sở nào đó của  $V$ . Từ định nghĩa ta suy ra  $f$  chéo hoá được khi và chỉ khi tồn tại ma trận  $C$  khả nghịch sao cho  $C^{-1}AC$  là một ma trận chéo.

**Định nghĩa 3.13.** Ma trận  $A$  đồng dạng với một ma trận chéo được gọi là ma trận chéo hoá được.

**Định lý 3.14.** Giả sử tự đồng cấu  $f : V \rightarrow V$  có tính chất  $f^2 = f$ . Khi đó  $f$  chéo hoá được.

**Định lý 3.15 (Điều kiện cần và đủ cho sự chéo hoá).** Tự đồng cấu  $f$  của không gian vectơ  $n$  chiều  $V$  chéo hoá được nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau đây được thoả mãn:

(i) Đa thức đặc trưng của  $f$  có đủ nghiệm trong  $\mathbb{R}$ :

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{s_1} (X - \lambda_2)^{s_2} \dots (X - \lambda_m)^{s_m}$$

(ii)  $\text{rank}(f - \lambda_i \text{id}_V) = n - s_i$  (với  $i = 1, 2, \dots, m$ ), ở đây  $s_i$  là bội của  $\lambda_i$  xem như nghiệm của đa thức đặc trưng.

**Chú ý 3.16.** Trên trường số phức  $\mathbb{C}$  hầu hết các toán tử tuyến tính đều chéo hóa được, chỉ có các toán tử có trị riêng bội là có thể không chéo hóa được, và các toán tử như vậy sẽ tạo thành một tập hợp có độ đo 0. Nói riêng, tất cả các toán tử unita và Hermitian đều chéo hóa được, và tồn tại một cơ sở trực giao bao gồm các vectơ riêng của nó. Điều này là do nếu  $AW \subset W$  thì  $AW^\perp \subset W^\perp$ .

Chú ý thêm rằng các vectơ riêng của toán tử unita có độ dài bằng 1, vì  $|Ax| = |x|$ . Các trị riêng của toán tử Hermitian là thực vì  $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$ .

**Định lý 3.17.** Cho  $A$  là một ma trận trực giao, khi đó tồn tại một cơ sở trực giao sao cho ma trận của  $A$  trong cơ sở đó có dạng đường chéo khối với các khối  $\pm 1$ , hoặc  $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ .

## 2.3 Đa thức tối thiểu

**Định nghĩa 3.18.** Đa thức có bậc nhỏ nhất triệt tiêu ma trận  $A$  và có hệ số cao nhất bằng 1 được gọi là đa thức tối thiểu của  $A$ .

**Chú ý 3.19.** Đa thức tối thiểu của toán tử tuyến tính được định nghĩa bằng đa thức tối thiểu của ma trận của nó trong một cơ sở nào đó, và không phụ thuộc vào cách chọn cơ sở của không gian.

**Định lý 3.20.** Mọi đa thức triệt tiêu  $A$  đều chia hết cho đa thức tối thiểu của nó.

**Định nghĩa 3.21.** Đa thức  $p$  được gọi là triệt tiêu vectơ  $v \in V$  ứng với toán tử tuyến tính  $A : V \rightarrow V$  nếu  $p(A)v = 0$ . Đa thức triệt tiêu vectơ  $v$  có bậc nhỏ nhất và có hệ số cao nhất bằng 1 được gọi là đa thức tối thiểu của  $v$ .

**Định lý 3.22.** Với mọi toán tử tuyến tính  $A : V \rightarrow V$ , tồn tại một vectơ  $v \in V$  sao cho đa thức tối thiểu của nó ứng với  $A$  trùng với đa thức tối thiểu của toán tử  $A$ .

**Định lý 3.23 (Cayley - Hamilton).** Mỗi ma trận đều là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó.

**Định lý 3.24 (Farahat, Lederman, 1958).** Đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  cấp  $n$  trùng với đa thức tối thiểu của nó khi và chỉ khi với mọi vectơ  $(x_1, \dots, x_n)$  tồn tại các cột  $P$  và  $Q$  có độ dài  $n$  sao cho  $x_k = Q^T A^k P$ .

**Định lý 3.25 (Greenberg, 1984).** Cho  $p_A(t)$  là đa thức đặc trưng của ma trận  $A$ , và  $X$  là ma trận giao hoán với  $A$ . Khi đó  $p_A(X) = M(A - X)$ , ở đó  $M$  là một ma trận giao hoán với  $A$  và  $X$ .

## 2.4 Bài tập

**Bài tập 3.1.** Chứng minh rằng các hệ số của đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  có thể được mô tả như sau:

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + c_1(-\lambda)^{n-1} + \dots + c_n$$

trong đó  $c_k$  là tổng của tất cả các định thức con chính cấp  $k$  của ma trận  $A$ . (Một định thức con được gọi là chính nếu các chỉ số hàng và chỉ số cột của nó trùng nhau).

**Bài tập 3.2.** Giả sử  $\lambda$  là nghiệm bội  $p$  của đa thức đặc trưng của ma trận  $A$  vuông cấp  $n$ .

- Chứng minh rằng số chiều của không gian riêng ứng với giá trị riêng  $\lambda$  không lớn hơn  $p$ .
- Đặt  $r = \text{rank}(A - \lambda I)$ . Chứng minh rằng  $1 \leq n - r \leq p$ .

**Bài tập 3.3.** Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận  $A^{-1}$  bằng nghịch đảo của các giá trị riêng của  $A$  (kể cả bội).

Chứng minh.

$$\det(A^{-1} - \lambda I) = (-\lambda)^n \cdot \det(A^{-1}) \cdot \det\left(A - \frac{1}{\lambda}I\right).$$

**Bài tập 3.4.** Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận  $A^2$  bằng bình phương của các giá trị riêng của  $A$  (kể cả bội).

Chứng minh. Giả sử  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các giá trị riêng của ma trận  $A$  (kể cả bội). Khi đó

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

$$\det(A + \lambda I) = (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda) \dots (\lambda_n + \lambda)$$

Nhân hai vế của các đẳng thức trên với nhau ta có

$$\det(A^2 - \lambda^2 I) = (\lambda_1^2 - \lambda^2)(\lambda_2^2 - \lambda^2) \dots (\lambda_n^2 - \lambda^2)$$

thay  $\lambda^2$  bởi  $\lambda$  trong đẳng thức trên ta có

$$\det(A^2 - \lambda I) = (\lambda_1^2 - \lambda)(\lambda_2^2 - \lambda) \dots (\lambda_n^2 - \lambda)$$

suy ra điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 3.5.** Chứng minh rằng các giá trị riêng của ma trận  $A^p$  bằng lũy thừa  $p$  của các giá trị riêng của  $A$  (kể cả bội).

*Chứng minh.* Tương tự như bài tập trên, gọi  $1, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}$  là các căn bậc  $p$  khác nhau của 1 ( $\epsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p}$ ). Ta có

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda) \\ \det(A - \lambda\epsilon_1 I) &= (\lambda_1 - \lambda\epsilon_1)(\lambda_2 - \lambda\epsilon_1) \dots (\lambda_n - \lambda\epsilon_1) \\ &\vdots \\ \det(A - \lambda\epsilon_{p-1} I) &= (\lambda_1 - \lambda\epsilon_{p-1})(\lambda_2 - \lambda\epsilon_{p-1}) \dots (\lambda_n - \lambda\epsilon_{p-1}) \end{aligned}$$

Nhân các vế của  $p$  phương trình trên với nhau ta được

$$\det(A^n - \lambda^p I) = (\lambda_1^p - \lambda^p)(\lambda_2^p - \lambda^p) \dots (\lambda_n^p - \lambda^p)$$

Thay  $\lambda^p$  bởi  $\lambda$  trong đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 3.6.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$  với các phần tử trong một trường đóng đại số  $\mathbb{K}$ . Gọi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các giá trị riêng (kể cả bội) của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng nếu  $f(X)$  là một đa thức với các hệ số trong  $\mathbb{K}$  thì

$$\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n).$$

*Chứng minh.* Theo bài ra,

$$\det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda).$$

Giả sử  $f(\lambda) = a_0 \prod_{j=1}^s (\lambda - \mu_j)$ , khi đó  $f(A) = a_0 \prod_{j=1}^s (A - \mu_j I)$ . Vậy

$$\begin{aligned} \det f(A) &= a_0^n \prod_{j=1}^s \det(A - \mu_j I) \\ &= a_0^n \prod_{j=1}^s \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_j) \\ &= \prod_{i=1}^n \left[ a_0 \prod_{j=1}^s (\lambda_i - \mu_j) \right] \\ &= \prod_{i=1}^n f(\lambda_i) \end{aligned}$$

**Bài tập 3.7.** Chứng minh rằng nếu  $P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{s_i}$  là đa thức đặc trưng của  $A$  thì

đa thức đặc trưng của  $f(A)$  với  $f$  là một đa thức là  $P_{f(A)}(\lambda) = \prod_{i=1}^k (f(\lambda_i - \lambda))^{s_i}$ .

*Chứng minh.* Áp dụng bài tập ?? với hàm số  $g(x) = f(x) - \lambda$ , giả sử  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$ . (kể cả bội), ta có

$$\det g(A) = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i)$$

hay

$$P_{f(A)}(\lambda) = \det(f(A) - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (f(\lambda_i) - \lambda)$$

**Bài tập 3.8.** Chứng minh rằng nếu  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các giá trị riêng của ma trận  $A$  và  $f(x)$  là một đa thức thì  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$  là các trị riêng của ma trận  $f(A)$ .

*Chứng minh.* Là một hệ quả trực tiếp của bài tập ??.

**Bài tập 3.9.** Chứng minh rằng nếu  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  là các giá trị riêng của ma trận  $A$  và  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  là một phân thức hữu tỷ xác định khi  $x = A$  (nghĩa là  $\det h(A) \neq 0$ ), khi đó  $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2) \dots f(\lambda_n)$  và  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$  là các giá trị riêng của ma trận  $f(A)$ .

*Chứng minh.* Áp dụng đẳng thức  $\det f(A) = \frac{\det(g(A))}{\det(h(A))}$  và sử dụng các kết quả của bài tập ??, ??, ??.

**Bài tập 3.10.** Chứng minh rằng nếu  $A, B$  là các ma trận vuông cùng cấp thì các đa thức đặc trưng của  $AB$  và  $BA$  trùng nhau.

*Chứng minh.* i) Nếu  $A$  là ma trận không suy biến thì  $AB$  và  $BA$  là các ma trận đồng dạng nên có cùng đa thức đặc trưng.

ii) Nếu  $A$  suy biến thì  $0$  là một giá trị riêng của  $A$ . Chọn  $m$  đủ lớn sao cho  $A_k = A - \frac{1}{k}I$  không suy biến với mọi  $k \geq m$ . (kể từ  $m$  đủ lớn nào đó,  $\frac{1}{k}, k \geq m$  không phải là giá trị riêng của  $A$ ). Khi đó  $A_k B$  và  $BA_k$  có cùng đa thức đặc trưng. Cho  $k \rightarrow \infty$  ta có điều phải chứng minh.

**Bài tập 3.11.** Cho  $P$  là một ma trận hoán vị. Chứng minh rằng  $P^n = I; P^T = P^{-1}$ . Tìm các giá trị riêng của  $P$ .

**Bài tập 3.12.**

a) Có tồn tại hay không các ma trận vuông cùng cấp  $A$  và  $B$  sao cho  $AB - BA = I$ ?

b) Chứng minh rằng nếu  $AB - BA = A$  thì  $|A| = 0$ .

**Bài tập 3.13.** Tìm trị riêng và vectơ riêng của ma trận  $A = (a_{ij})$  với  $a_{ij} = \lambda_i / \lambda_j$ .

**Bài tập 3.14.** Chứng minh rằng mọi ma trận vuông  $A$  đều là tổng của hai ma trận khả nghịch.

**Bài tập 3.15.** Chứng minh rằng các trị riêng của ma trận phụ thuộc liên tục vào các phần tử của nó. Nói rõ hơn, cho trước ma trận  $A = (a_{ij})$ . Khi đó với mọi  $\epsilon > 0$ , tồn tại  $\delta > 0$  sao cho nếu  $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$  và  $\lambda$  là một trị riêng của  $A$ , thì tồn tại một trị riêng  $\mu$  của  $B = (b_{ij})$  sao cho  $|\lambda - \mu| < \epsilon$ .

**Bài tập 3.16.** Tổng của các phần tử trên mỗi hàng của ma trận khả nghịch  $A$  bằng  $s$ . Chứng minh rằng tổng của các phần tử trên mỗi hàng của  $A^{-1}$  bằng  $1/s$ .

**Bài tập 3.17.** Chứng minh rằng nếu hàng đầu tiên của ma trận  $S^{-1}AS$  có dạng  $(\lambda, 0, 0, \dots, 0)$ , thì cột đầu tiên của ma trận  $S$  là một vectơ riêng của ma trận  $A$  ứng với vectơ riêng  $\lambda$ .

**Bài tập 3.18.** Cho  $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ , ở đó  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng  $f'(\lambda) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i - A_i|$ , ở đó  $A_i$  là ma trận thu được từ  $A$  bằng cách bỏ đi hàng thứ  $i$  và cột thứ  $j$ .

**Bài tập 3.19.** Cho  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng các trị riêng của ma trận  $\text{adj } A$  là  $\prod_{i \neq 1}, \dots, \prod_{i \neq n}$ .

**Bài tập 3.20.** Vectơ  $x$  được gọi là đối xứng (phản đối xứng, tương ứng) nếu các tọa độ của nó thỏa mãn  $(x_i = x_{n-i})$  (tương ứng  $(x_i = -x_{n-i})$ ). Cho  $A = (a_{ij})$  là một ma trận đối xứng tâm ( $a_{ij} = a_{n-j, n-i}$ ). Chứng minh rằng trong các vectơ riêng của  $A$  ứng với các trị riêng, tồn tại hoặc là một vectơ riêng đối xứng, hoặc là một vectơ riêng phản đối xứng.

**Bài tập 3.21.** Cho ma trận  $A$  vuông, phức cấp  $n$  có các phần tử  $a_{i, n-i+1} = x_i$  có thể khác 0, còn các phần tử còn lại bằng 0. Tìm điều kiện của  $\{x_1, \dots, x_n\}$  sao cho ma trận  $A$  chéo hóa được.

**Bài tập 3.22 (Drazin, Haynsworth, 1962).** a) Chứng minh rằng ma trận  $A$  có  $m$  vectơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với các trị riêng thực khi và chỉ khi tồn tại ma trận vuông  $S$  xác định không âm có hạng bằng  $m$  sao cho  $AS = SA^*$ .

b) Chứng minh rằng ma trận  $A$  có  $m$  vectơ riêng độc lập tuyến tính tương ứng với các trị riêng  $\lambda$  thỏa mãn  $|\lambda| = 1$  khi và chỉ khi tồn tại ma trận vuông  $S$  xác định không âm có hạng bằng  $m$  sao cho  $ASA^* = S$ .

**Bài tập 3.23.** Cho  $A$  là một ma trận cấp  $n$  và

$$f_1(A) = A - (\operatorname{tr} A)I, f_{k+1}(A) = f_k(A)A - \frac{1}{k+1} \operatorname{tr}(f_k(A)A)I.$$

Chứng minh rằng  $f_n(A) = 0$ .

**Bài tập 3.24.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận cấp  $n$ . Chứng minh rằng nếu  $\operatorname{tr} A^m = \operatorname{tr} B^m$  với mọi  $m = 1, \dots, n$  thì các trị riêng của  $A$  và  $B$  là trùng nhau.

**Bài tập 3.25.** Cho  $A$  là một ma trận khả nghịch và đa thức đặc trưng của nó trùng với đa thức tối thiểu. Chứng minh rằng đa thức tối thiểu của  $A^{-1}$  bằng  $p(0)^{-1} \lambda^n p(\lambda^{-1})$ .

**Bài tập 3.26.** Cho  $\Pi(x - \lambda_i)^{n_i}$  là đa thức tối thiểu của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng đa thức tối thiểu của ma trận  $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$  là  $\Pi(x - \lambda_i)^{n_i+1}$ .



### §3. DẠNG CHUẨN CỦA MA TRẬN

#### 3.1 Dạng chuẩn Jordan của ma trận

**Định lý 3.26.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông thực và  $A = P^{-1}BP$ , ở đó  $P$  là một ma trận phức. Khi đó tồn tại ma trận thực  $Q$  sao cho  $A = Q^{-1}BQ$ .

Điều đó có nghĩa là tập hợp tất cả các ma trận có dạng  $A = P^{-1}BP$  với  $P$  là một ma trận phức thì "không lớn hơn" tập hợp tất cả các ma trận có dạng  $A = Q^{-1}BQ$  với  $Q$  là một ma trận thực.

Một khối Jordan cỡ  $r \times r$  là một ma trận có dạng

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Định nghĩa 3.27.** Một ma trận Jordan là một ma trận khối có các khối Jordan trên đường chéo.

Một cơ sở Jordan của toán tử tuyến tính  $A : V \rightarrow V$  là một cơ sở của không gian  $V$  sao cho ma trận của nó trong cơ sở đó là một ma trận Jordan.

**Định lý 3.28 (Jordan).** Với mọi toán tử tuyến tính  $A : V \rightarrow V$  trên  $\mathbb{C}$ , tồn tại một cơ sở Jordan, và ma trận Jordan của nó được xác định duy nhất, sai khác hoán vị các khối Jordan của nó.

**Chú ý 3.29.** Dạng chuẩn Jordan của một ma trận được sử dụng một cách rất thuận tiện trong việc thực hiện phép tính lũy thừa một ma trận. Cụ thể hơn, nếu  $A = P^{-1}JP$  thì  $A^n = P^{-1}J^n P$ . Để tính lũy thừa của khối Jordan  $J_r(\lambda) = \lambda I + N$ , ta có công thức khai triển Newton:

$$J^n = \sum_{k=0}^n C_k^n \lambda^k N^{n-k},$$

**Chú ý 3.30.** Cơ sở Jordan luôn luôn tồn tại trên các trường đóng đại số. Trên  $\mathbb{R}$  không phải lúc nào cũng tồn tại cơ sở Jordan. Tuy nhiên trên trường số thực cũng tồn tại một dạng Jordan, là thực hóa dạng chuẩn Jordan trên trường số phức.

**Định lý 3.31.** Với mỗi toán tử tuyến tính  $A$  trên trường số thực, luôn tồn tại một cơ sở mà ma trận của nó trong cơ sở đã cho có dạng đường chéo khối với các khối  $J_{m_1}(t_1), \dots, J_{m_k}(t_k)$  tương ứng với trị riêng thực  $t_i$  và các khối  $J_{n_1}^*(\lambda_1), \dots, J_{n_s}^*(\lambda_s)$  tương ứng với trị riêng phức  $\lambda_i$  và  $\bar{\lambda}_i$ , ở đó  $J_n^*(\lambda)$  là ma trận cỡ  $2n \times 2n$  thu được từ khối Jordan  $J_n(\lambda)$  bằng cách thay thế mỗi phần tử có dạng  $a + ib$  của nó bởi ma trận  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

**Chú ý 3.32.** Từ dạng chuẩn Jordan, mỗi toán tử tuyến tính  $A$  trên  $\mathbb{C}$  đều có thể được phân tích dưới dạng  $A = A_s + A_n$ , ở đó  $A_s$  là chéo hóa được, và  $A_n$  là lũy linh, hơn nữa  $A_s A_n = A_n A_s$ .

**Định lý 3.33.** Các toán tử  $A_s$  và  $A_n$  là xác định duy nhất, hơn nữa  $A_s = S(A)$  và  $A_n = N(A)$ , ở đó  $S$  và  $N$  là các đa thức nào đó.

**Định lý 3.34.** Cho  $A$  là một toán tử tuyến tính khả nghịch trên trường số phức  $\mathbb{C}$ . Khi đó  $A$  có thể biểu diễn dưới dạng  $A = A_s A_u = A_u A_s$ , ở đó  $A_s$  là toán tử chéo hóa được và  $A_u$  là một toán tử lũy đơn (toán tử lũy đơn là tổng của toán tử đồng nhất và toán tử lũy linh). Biểu diễn này là duy nhất.

*Chứng minh.* Nếu  $A$  khả nghịch thì  $A_s$  cũng khả nghịch. Khi đó  $A = A_s + A_n = A_s A_u$ , ở đó  $A_u = A_s^{-1}(A_s + A_n) = I + A_s^{-1} A_n$ . ■

## 3.2 Dạng chuẩn Frobenius

Dạng chuẩn Jordan chỉ là một trong số nhiều dạng chuẩn khác nhau của ma trận của ánh xạ tuyến tính. Một trong những dạng chuẩn khác được giới thiệu trong mục này là dạng tuần hoàn, hay còn gọi là dạng chuẩn Frobenius.

Một khối Frobenius hay khối tuần hoàn là một ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Nếu  $A : V^n \rightarrow V^n$  và  $Ae_1 = e_2, \dots, Ae_{n-1} = e_n$  thì ma trận của  $A$  đối với cơ sở  $e_1, \dots, e_n$  là một khối Frobenius.

**Định lý 3.35.** Với mọi toán tử tuyến tính  $A : V \rightarrow V$  trên trường số thực hoặc phức, tồn tại một cơ sở của  $V$  mà ở đó ma trận của  $A$  trong cơ sở đó là ma trận có dạng đường chéo khối với các khối Frobenius.

**Bổ đề 3.36.** Đa thức đặc trưng của khối Frobenius (??) trùng với đa thức tối thiểu của nó, và bằng  $\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$ .

### 3.3 Bài tập

**Bài tập 3.27.** Chứng minh rằng  $A$  và  $A^T$  là các ma trận đồng dạng.

**Bài tập 3.28.** Cho  $\sigma(i), i = 1, \dots, n$  là một phép hoán vị bất kì và  $P = (p_{ij})$ , ở đó  $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ . Chứng minh rằng ma trận  $P^{-1}AP$  thu được từ ma trận  $A$  bằng cách phép hoán vị  $\sigma$  các cột và các hàng của nó. Ma trận  $P$  được gọi là ma trận hoán vị tương ứng với  $\sigma$ .

**Bài tập 3.29.** Cho ma trận  $A$  có  $m$  trị riêng phân biệt,  $m > 1$ . Đặt  $b_{ij} = \text{tr}(A^{i+j})$ . Chứng minh rằng  $|b_{ij}|_0^{m-1} \neq 0$  và  $|b_{ij}|_0^m = 0$

**Bài tập 3.30.** Chứng minh rằng  $\text{rank } A = \text{rank } A^2$  nếu và chỉ nếu tồn tại  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (A + \lambda I)^{-1} A$ .

**Bài tập 3.31.** Cho  $A$  là một khối Jordan. Chứng minh rằng tồn tại một vectơ  $v$  sao cho các vectơ  $v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$  tạo nên một cơ sở của không gian  $V$ . Khi đó ma trận của  $A$  trong cơ sở đó là ma trận có dạng khối Frobenius.

**Bài tập 3.32.** Với mỗi khối Frobenius  $A$  tồn tại một ma trận đối xứng  $S$  sao cho  $A = SA^T S^{-1}$ .

## §4. BIỂU DIỄN MA TRẬN

### 4.1 Rút gọn một ma trận về ma trận dạng đường chéo đơn giản

Nhận xét rằng phép biến đổi  $A \mapsto XAX^{-1}$  bảo toàn vết của ma trận  $A$ . Chính vì vậy mà các phần tử trên đường chéo của ma trận  $XAX^{-1}$  không thể tùy ý. Định lý sau đây cho phép chúng ta rút gọn đường chéo của ma trận  $A \neq \lambda I$  về dạng đơn giản  $(0, 0, \dots, 0, \text{tr } A)$ .

**Định lý 3.37 (Gibson, 1975).** Cho  $A \neq \lambda I$ . Khi đó ma trận  $A$  đồng dạng với ma trận đường chéo  $\text{diag}(0, 0, \dots, 0, \text{tr } A)$ .

**Định lý 3.38.** Cho  $A$  là một ma trận phức bất kì. Khi đó tồn tại ma trận unita  $U$  sao cho các phần tử trên đường chéo của ma trận  $UAU^{-1}$  là bằng nhau.

**Định lý 3.39 (Marcus, Purves, 1959).** Mọi ma trận vuông  $A$  khác 0 đều đồng dạng với một ma trận mà tất cả các phần tử trên đường chéo của nó đều khác 0.

### 4.2 Biểu ma trận dưới dạng tọa độ cực

Cũng giống như mỗi một số phức  $z = a + bi$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng  $z = |z|.e^{i\varphi}$ , mỗi ma trận  $S$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng  $A = SU$ , trong đó  $S$  là một ma trận Hermitian và  $U$  là một ma trận unita.

**Định lý 3.40.** Mọi ma trận vuông  $A$  trên  $\mathbb{R}$  (hoặc  $\mathbb{C}$ ) đều có thể biểu diễn được dưới dạng  $A = SU$ , ở đó  $S$  là một ma trận symmetric (Hermitian) xác định không âm, và  $U$  là một ma trận trực giao (unita). Nếu  $A$  khả nghịch thì phân tích trên là duy nhất.

**Chú ý 3.41.** Tương tự, chúng ta cũng có thể xây dựng được một phân tích  $A = U_1 S_1$  ở đó  $S_1$  là ma trận symmetric (Hermitian) và  $U_1$  là ma trận trực giao (unita). Khi đó  $S = S_1$  khi và chỉ khi  $AA^* = A^*A$ , nghĩa là  $A$  là một ma trận chuẩn tắc.

**Định lý 3.42.** Mọi ma trận vuông  $A$  đều có thể biểu diễn được dưới dạng  $A = UDW$ , ở đó  $U$  và  $W$  là các ma trận unita và  $D$  là một ma trận đường chéo.

**Định lý 3.43.** Cho  $A = S_1 U_1 = U_2 S_2$  là các biểu diễn của ma trận khả nghịch  $A$  dưới dạng tọa độ cực. Khi đó  $U_1 = U_2$ .

### 4.3 Biểu diễn Schur

**Định lý 3.44 (Schur).** Mọi ma trận vuông  $A$  trên trường số phức  $\mathbb{C}$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng  $A = UTU^*$ , ở đó  $U$  là ma trận unita và  $T$  là ma trận tam giác, hơn nữa,  $A$  là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu  $T$  là ma trận đường chéo.

### 4.4 Biểu diễn Lanczos

**Định lý 3.45 (Lanczos, 1958).** Mọi ma trận thực cỡ  $m \times n$  có hạng  $p > 0$  đều có thể được biểu diễn dưới dạng  $A = X\Lambda Y^T$  ở đó  $X$  và  $Y$  là các ma trận cỡ  $m \times p$  và  $n \times p$  với các cột trực giao và  $\Lambda$  là ma trận đường chéo cỡ  $p \times p$ .

### 4.5 Bài tập

**Bài tập 3.33.** Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông  $A$  khác 0 đều tồn tại ma trận  $X$  sao cho các ma trận  $X$  và  $A + X$  có các trị riêng khác 0 đều khác nhau.

**Bài tập 3.34.** Chứng minh rằng mọi phép biến đổi tuyến tính trên  $\mathbb{R}^n$  là tổ hợp của một phép biến đổi trực giao và một phép co giãn dọc theo hướng vuông góc (với các hệ số phân biệt).

**Bài tập 3.35.** Cho  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  là một toán tử co, nghĩa là  $|Ax| \leq |x|$ . Coi  $\mathbb{R}^n$  là không gian con của  $\mathbb{R}^{2n}$ . Chứng minh rằng  $A$  là hạn chế lên  $\mathbb{R}^n$  của tổ hợp của phép một phép biến đổi trực giao trên  $\mathbb{R}^{2n}$  và một phép chiếu lên  $\mathbb{R}^n$ .

**Bài tập 3.36 (Phân tích Gauss).** Giả sử mọi định thức con  $|a_{ij}|_1^p, p = 1, \dots, n$  của ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  bằng 0. Chứng minh rằng  $A$  có thể biểu diễn dưới dạng  $A = T_1 T_2$ , ở đó  $T_1$  là ma trận tam giác dưới và  $T_2$  là một ma trận tam giác trên.

**Bài tập 3.37 (Phân tích Gram).** Chứng minh rằng mọi ma trận khả nghịch  $X$  có thể biểu diễn được dưới dạng  $X = UT$ , ở đó  $U$  là một ma trận trực giao và  $T$  là một ma trận tam giác trên.

**Bài tập 3.38 (Ramakrishnan, 1972).** Cho  $B = \text{diag}(1, \epsilon, \dots, \epsilon^{n-1})$ , ở đó  $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ , và  $C = (c_{ij})_1^n$ , ở đó  $c_{ij} = \delta_{i, j-1}$  (ở đây  $j-1$  được xem như là modulo  $n$ ). Chứng minh rằng mọi ma trận  $M$  vuông cấp  $n$  trên  $\mathbb{C}$  được biểu diễn duy nhất dưới dạng  $M = \sum_{k,l=0}^{n-1} a_{kl} B^k C^l$ .

**Bài tập 3.39.** Chứng minh rằng mọi ma trận phản xứng  $A$  có thể được biểu diễn dưới dạng

$$A = S_1 S_2 - S_2 S_1,$$

ở đó  $S_1$  và  $S_2$  là các ma trận đối xứng.

# CHƯƠNG 4

## CÁC MA TRẬN CÓ DẠNG ĐẶC BIỆT

### §1. MA TRẬN ĐỐI XỨNG - MA TRẬN HERMITIAN

#### 1.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 4.1.** Ma trận thực  $A$  được gọi là đối xứng nếu  $A = A^T$ .

Ma trận phức  $A$  được gọi là Hermitian nếu  $A^* = A$ , ở đó  $A^* = \bar{A}^T$ .

Các tính chất đơn giản:

1. Các giá trị riêng của ma trận Hermitian đều thực.
2. Mọi ma trận Hermitian  $A$  đều có thể được phân tích dưới dạng  $U^*DU$ , ở đó  $U$  là ma trận unita và  $D$  là ma trận đường chéo.
3. Ma trận  $A$  là ma trận Hermitian khi và chỉ khi  $(Ax, x) \in \mathbb{R}$  với mọi vectơ  $x$ .

Mỗi ma trận đối xứng  $A$  có một dạng toàn phương  $q(x) = x^T Ax$  và dạng song tuyến tính  $B(x, y) = x^T Ay$  tương ứng.

**Định nghĩa 4.2.** Trong trường hợp thực, nếu  $A$  là một ma trận đối xứng, thì dạng toàn phương  $x^T Ax$  được gọi là xác định dương nếu  $x^T Ax > 0$  với mọi  $x \neq 0$ . Ma trận  $A$  khi đó được gọi là ma trận xác định dương, và viết  $A > 0$ .

Trong trường hợp phức, nếu  $A$  là một ma trận Hermitian, thì dạng Hermitian (hay còn gọi là dạng nửa song tuyến tính)  $x^* Ax$  được gọi là xác định dương nếu  $x^* Ax > 0$  với mọi  $x \neq 0$ . Ma trận  $A$  khi đó được gọi là ma trận xác định dương, và viết  $A > 0$ .

**Chú ý 4.3.** Nếu  $A$  là một ma trận Hermitian, giả sử  $U$  là ma trận thỏa mãn  $A = U^*DU$ , ở đó  $D$  là một ma trận đường chéo. Khi đó  $x^*Ax = (Ux)^*D(Ux)$ . Khi đó bằng phép đổi biến  $y = Ux$ , dạng Hermitian có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$\sum \lambda_i y_i \bar{y}_i = \sum \lambda_i |y_i|^2.$$

Khi đó nếu  $A$  xác định dương thì vết của nó,  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$  và định thức của nó  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  đều dương.

**Định lý 4.4 (Tiêu chuẩn Sylvester).** Cho  $A = (a_{ij})$  là một ma trận Hermitian. Khi đó  $A$  xác định dương khi và chỉ khi tất cả các định thức con chính của nó đều dương.

**Định lý 4.5.** Nếu  $A$  là một ma trận xác định không âm, và  $x$  là một vectơ sao cho  $x^*Ax = 0$ . Khi đó  $Ax = 0$ .

**Định lý 4.6.** Cho  $A$  là một ma trận xác định dương,  $B$  là một ma trận Hermitian. Khi đó  $AB$  là một ma trận chéo hóa được, và số các trị riêng dương, âm và bằng 0 của nó bằng với số các giá trị tương ứng của  $B$ .

**Định lý 4.7.** Mọi ma trận chéo hóa được với các trị riêng thực đều có thể biểu diễn được dưới dạng tích của một ma trận xác định dương và một ma trận Hermitian.

## 1.2 Bài tập

**Bài tập 4.1.** Chứng minh rằng mọi ma trận Hermitian có hạng bằng  $r$  đều có thể biểu diễn được dưới dạng tổng của  $r$  ma trận Hermitian có hạng bằng 1.

**Bài tập 4.2.** Chứng minh rằng nếu  $A$  là một ma trận xác định dương, thì  $\text{adj } A$  cũng là một ma trận xác định dương.

**Bài tập 4.3.** Chứng minh rằng nếu  $A$  là một ma trận Hermitian khác 0 thì  $\text{rank } A \geq \frac{(\text{tr } A)^2}{\text{tr}(A^2)}$ .

**Bài tập 4.4.** Cho  $A$  là một ma trận xác định dương cấp  $n$ . Chứng minh rằng

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^T Ax} dx = (\sqrt{\pi})^n |A|^{-1/2},$$

**Bài tập 4.5.** Chứng minh rằng nếu hạng của một ma trận đối xứng (Hermitian) bằng  $r$  thì nó có  $r$  định thức con chính khác 0.

**Bài tập 4.6.** Cho  $S$  là một ma trận đối xứng khả nghịch cấp  $n$  có tất cả các phần tử đều dương. Hỏi phần tử lớn nhất khác 0 có thể của ma trận  $S^{-1}$  bằng bao nhiêu?

## §2. MA TRẬN PHẢN XỨNG

### 2.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 4.8.** Ma trận thực  $A$  được gọi là phản xứng nếu  $A^T = -A$ .

Chú ý rằng ma trận phản xứng cấp  $n$  lẻ có định thức bằng 0.

**Định lý 4.9.** Nếu  $A$  là một ma trận phản xứng thì  $A^2$  là một ma trận đối xứng, xác định không dương.

**Hệ quả 4.10.** Các trị riêng khác 0 của ma trận phản xứng là thuần ảo.

**Định lý 4.11.** Điều kiện  $x^T Ax = 0$  thỏa mãn với mọi  $x$  khi và chỉ khi  $A$  là một ma trận phản xứng.

**Bổ đề 4.12.** Hạng của một ma trận phản xứng là một số chẵn.

**Định nghĩa 4.13.** Toán tử tuyến tính  $A$  trên không gian Euclidean được gọi là phản xứng nếu ma trận của nó trong một cơ sở trực chuẩn nào đó là phản xứng.

**Định lý 4.14.** Đặt  $\Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_i \\ \lambda_i & 0 \end{pmatrix}$ . Với mọi toán tử tuyến tính phản xứng  $A$ , tồn tại một cơ sở trực chuẩn sao cho ma trận của nó trong cơ sở trực chuẩn đó có dạng

$$\text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k, 0, \dots, 0).$$

### 2.2 Bài tập

**Bài tập 4.7.** Chứng minh rằng nếu  $A$  là một ma trận phản xứng thì  $I + A$  là một ma trận khả nghịch.

**Bài tập 4.8.** Cho  $A$  là một ma trận phản xứng, khả nghịch. Chứng minh rằng  $A^{-1}$  cũng là một ma trận phản xứng.

**Bài tập 4.9.** Chứng minh rằng mọi nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận  $AB$ , ở đó  $A$  và  $B$  là các ma trận phản xứng cấp  $2n$ , đều có bội lớn hơn 1.



### §3. MA TRẬN TRỰC GIAO - PHÉP BIẾN ĐỔI CAYLEY

#### 3.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 4.15.** Ma trận thực  $A$  được gọi là trực giao, nếu  $AA^T = I$ .

Nhận xét rằng nếu  $A$  là một ma trận trực giao, thì các hàng (và các cột) của nó là một hệ trực chuẩn. Hơn nữa, ma trận  $A$  trực giao khi và chỉ khi  $(Ax, Ay) = (x, y)$  với mọi  $x, y$ .

Nếu  $A$  là một ma trận trực giao, thì nó cũng là một ma trận unita, do đó các trị riêng của nó có giá trị tuyệt đối bằng 1.

Các trị riêng của ma trận trực giao nằm trên vòng tròn đơn vị có tâm là gốc tọa độ, các trị riêng của ma trận phản xứng nằm trên trục ảo. Trong giải tích phức, phép biến đổi  $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$  biến vòng tròn đơn vị thành trục ảo và  $f(f(z)) = z$ , vì thế, chúng ta hy vọng rằng phép biến đổi

$$f(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$$

sẽ biến một ma trận trực giao thành ma trận phản xứng. Phép biến đổi này được gọi là *phép biến đổi Cayley*. Đặt  $A^\# = (I - A)(I + A)^{-1}$ , dễ dàng thấy rằng  $(A^\#)^\# = A$ .

**Định lý 4.16.** Phép biến đổi Cayley biến mọi ma trận phản xứng thành ma trận trực giao và biến mọi ma trận trực giao  $A$  với  $|A + I| \neq 0$  thành ma trận phản xứng.

**Định lý 4.17 (Hsu, 1953).** Với mọi ma trận vuông  $A$ , tồn tại ma trận  $J = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$  sao cho  $|A + J| \neq 0$ .

#### 3.2 Bài tập

**Bài tập 4.10.** Chứng minh rằng nếu  $p(\lambda)$  là đa thức đặc trưng của một ma trận trực giao vuông cấp  $n$  thì

$$\lambda^n p(\lambda^{-1}) = \pm p(\lambda).$$

**Bài tập 4.11.** Chứng minh rằng mọi ma trận unita cấp 2 với định thức bằng 1 đều có dạng  $\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ , ở đó  $|u|^2 + |v|^2 = 1$ .

**Bài tập 4.12.** Cho  $A$  là một ma trận trực giao vuông cấp 3 và có định thức bằng 1. Chứng minh rằng

a)  $(\text{tr } A)^2 - \text{tr}(A)^2 = 2 \text{tr } A$ .

b)  $(\sum_i a_{ii} - 1)^2 + \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$ .

**Bài tập 4.13.** Cho  $J$  là một ma trận khả nghịch. Ma trận  $A$  được gọi là  $J$ -trực giao nếu  $A^T J A = J$  và  $J$ -phản xứng nếu  $A^T J = -J A$ . Chứng minh rằng phép biến đổi Cayley biến một ma trận  $J$ -trực giao thành một ma trận  $J$ -phản xứng và ngược lại.

**Bài tập 4.14 (Djoković, 1971).** Giả sử tất cả các giá trị tuyệt đối của các trị riêng của ma trận  $A$  bằng 1 và  $|Ax| \leq |x|$  với mọi  $x$ . Chứng minh rằng  $A$  là một toán tử unita.

**Bài tập 4.15 (Zassenhaus, 1961).** Một toán tử unita  $U$  biến vectơ khác không  $x$  thành vectơ  $Ux$  trực giao với  $x$ . Chứng minh rằng mọi cung của vòng tròn đơn vị chứa tất cả các trị riêng của  $U$  có độ dài không nhỏ hơn  $\pi$ .

## §4. MA TRẬN CHUẨN TẮC

### 4.1 Các định nghĩa và tính chất

Toán tử tuyến tính  $A$  trên  $C$  được gọi là chuẩn tắc, nếu  $A^*A = AA^*$ . Ma trận của một toán tử chuẩn tắc trong một cơ sở trực chuẩn được gọi là ma trận chuẩn tắc. Hiển nhiên nếu  $A$  là ma trận chuẩn tắc thì  $A^*A = AA^*$ .

**Định lý 4.18.** Các điều kiện sau là tương đương:

1.  $A$  là ma trận chuẩn tắc,
2.  $A = B + iC$ , ở đó  $B, C$  là các ma trận Hermitian giao hoán,
3.  $A = U\Lambda U^*$ , ở đó  $U$  là ma trận unita và  $\Lambda$  là ma trận đường chéo.
4.  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^2|$ , ở đó  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của  $A$ .

**Định lý 4.19.** Nếu  $A$  là một ma trận chuẩn tắc, thì  $\text{Ker}A^* = \text{Ker}A$  và  $\text{Im}A^* = \text{Im}A$ .

**Hệ quả 4.20.** Nếu  $A$  là một ma trận chuẩn tắc, thì

$$V = \text{Ker}A + \oplus(\text{Ker}A)^\perp = \text{Ker}A \oplus \text{Im}A$$

**Định lý 4.21.** Ma trận  $A$  là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu mọi vectơ riêng của  $A$  cũng là vectơ riêng của  $A^*$ .

**Định lý 4.22.** Nếu ma trận  $A$  là chuẩn tắc, thì  $A^*$  có thể biểu diễn dưới dạng như là một đa thức của  $A$ .

**Hệ quả 4.23.** Nếu  $A$  và  $B$  là các ma trận chuẩn tắc và  $AB = BA$  thì  $A^*B = BA^*$  và  $AB^* = B^*A$ , nói riêng  $AB$  cũng là một ma trận chuẩn tắc.

### 4.2 Bài tập

**Bài tập 4.16.** Cho  $A$  là một ma trận chuẩn tắc. Chứng minh rằng tồn tại ma trận chuẩn tắc  $B$  sao cho  $A = B^2$ .

**Bài tập 4.17.** Cho  $A$  và  $B$  là các toán tử chuẩn tắc sao cho  $\text{Im}A \perp \text{Im}B$ . Chứng minh rằng  $A + B$  là một toán tử chuẩn tắc.

**Bài tập 4.18.** Chứng minh rằng ma trận  $A$  là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu  $A^* = AU$ , ở đó  $U$  là ma trận unita.

**Bài tập 4.19.** Chứng minh rằng nếu  $A$  là một toán tử chuẩn tắc và  $A = SU$  là biểu diễn trong tọa độ cực của nó thì  $SU = US$ .

**Bài tập 4.20.** Cho  $A, B$  và  $AB$  là các ma trận chuẩn tắc. Chứng minh rằng  $BA$  cũng là một ma trận chuẩn tắc.

## §5. MA TRẬN LŨY LINH

### 5.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 4.24.** Ma trận  $A$  vuông cấp  $n$  được gọi là lũy linh nếu tồn tại số nguyên  $k$  sao cho  $A^k = 0$ . Nếu có thêm  $A^{k-1} \neq 0$  thì  $k$  được gọi là bậc lũy linh của ma trận  $A$ .

**Định lý 4.25.** Bậc lũy linh của một ma trận lũy linh bằng cấp cao nhất của các khối Jordan của nó.

**Định lý 4.26.** Cho  $A$  là ma trận lũy linh, vuông cấp  $n$ . Khi đó  $A^n = 0$ .

**Định lý 4.27.** Đa thức đặc trưng của một ma trận vuông cấp  $n$  lũy linh bằng  $\lambda^n$ .

**Định lý 4.28.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng  $A$  lũy linh khi và chỉ khi  $\text{tr}(A^p) = 0$  với mọi  $p = 1, 2, \dots, n$ .

**Định lý 4.29.** Cho  $A : V \rightarrow V$  là một toán tử tuyến tính và  $W$  là một không gian con bất biến của  $V$ . Đặt  $A_1 : W \rightarrow W$  và  $A_2 : V/W \rightarrow V/W$  là các toán tử cảm sinh bởi toán tử  $A$ . Chứng minh rằng nếu  $A_1$  và  $A_2$  là lũy linh thì  $A$  cũng là lũy linh.

### 5.2 Bài tập

**Bài tập 4.21.**  $A$  là ma trận lũy linh nếu và chỉ nếu tất cả giá trị riêng của  $A$  đều bằng 0.

**Bài tập 4.22.** Chứng minh rằng nếu  $A$  là ma trận lũy linh thì  $I - A$  là ma trận khả nghịch.

*Chứng minh.* Ta có

$$I = I - A^k = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})$$

**Bài tập 4.23.** Chứng minh rằng với mọi ma trận vuông  $A$  luôn có thể phân tích  $A = B + C$  với  $C$  là một ma trận lũy linh và  $B$  là ma trận chéo hóa được và  $BC = CB$ .

**Bài tập 4.24.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn  $B$  là ma trận lũy linh và  $AB = BA$ . Chứng minh rằng  $\det(A + B) = \det A$

**Bài tập 4.25.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn  $A^{2008} = I; B^{2009} = 0$  và  $AB + 4A + 2009B = 0$ . Chứng minh rằng  $(A + B)$  là ma trận không suy biến.

**Bài tập 4.26.** (2000) Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn  $A^{1999} = 0$ ;  $B^{2000} = 0$  và  $AB = BA$ . Chứng minh rằng  $(A + B + I)$  khả nghịch.

*Chứng minh.* Nhận xét rằng  $(A + B)^{3999} = 0$  nên  $(A + B)$  là ma trận lũy linh, suy ra điều phải chứng minh. ■

**Bài tập 4.27.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn  $A^{1999} = I$ ;  $B^{2000} = I$  và  $AB = BA$ . Chứng minh rằng  $(A + B + I)$  khả nghịch.

*Chứng minh.* Giả sử  $(A + B + I)$  suy biến. Khi đó tồn tại vectơ  $X$  khác 0 sao cho  $(A + B + I)X = 0$ . Hay  $(A + I)X = -BX$  suy ra  $(A + I)^{1999}X = -B^{1999}X = -X$ , suy ra  $((A + I)^{1999} + I)X = 0$ . Theo giả thiết  $(A^{2000} - I)x = 0$ .

Ta sẽ chứng minh hai đa thức  $(x + 1)^{1999} + 1$  và  $x^{2000} - 1$  là nguyên tố cùng nhau. Thấy vậy, giả sử chúng có nghiệm chung là  $z$ . Khi đó  $(z + 1)^{1999} = -1$  và  $z^{2000} = 1$ . Từ đó suy ra môđun của  $z$  và  $(z + 1)$  đều là 1. Do đó,  $\arg z = \pm \frac{2\pi}{3}$  và

$$z^{2000} = \cos \frac{\pm 4000\pi}{3} + \sin \frac{\pm 4000\pi}{3} = \cos \frac{\pm 4\pi}{3} + \sin \frac{\pm 4\pi}{3} \neq 1$$

Vậy tồn tại các đa thức  $P(x)$  và  $Q(x)$  để  $P(x)[(x + 1)^{1999} + 1] + Q(x)(x^{2000} - 1) = 1$

Từ đó suy ra  $[P(A)[(A + I)^{1999} + I] + Q(A)(A^{2000} - I)X = X$  hay  $X = 0$ , mâu thuẫn với việc chọn  $X$ . Vậy ta có điều phải chứng minh ■

**Bài tập 4.28.** (IMC) Cho hai ma trận vuông cấp  $n$ ,  $A$  và  $B$ . Giả sử tồn tại  $(n + 1)$  số  $t_1, t_2, \dots, t_n$  phân biệt sao cho các ma trận  $C_i = A + t_i B$  là các ma trận lũy linh với mọi  $i = 1, \dots, n + 1$ . Chứng minh rằng  $A$  và  $B$  cũng là các ma trận lũy linh

**Bài tập 4.29.** Tìm các ma trận  $A, B$  sao cho  $\lambda A + \mu B$  là lũy linh với mọi  $\lambda, \mu$  nhưng không tồn tại ma trận  $P$  sao cho  $P^{-1}AP$  và  $P^{-1}BP$  là các ma trận tam giác.

## §6. TOÁN TỬ CHIẾU - MA TRẬN LŨY ĐẲNG

### 6.1 Các định nghĩa và tính chất

**Định nghĩa 4.30.** Toán tử  $P$  được gọi là toán tử chiếu (hay lũy đẳng) nếu  $P^2 = P$ .

**Định lý 4.31.** Tồn tại một cơ sở của không gian sao cho ma trận của toán tử chiếu có dạng  $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ .

**Hệ quả 4.32.** Có một tương ứng 1-1 giữa toán tử chiếu và phân tích  $V = W_1 \oplus W_2$  của không gian  $V$ . Nói rõ hơn, với mỗi phân tích  $V = W_1 \oplus W_2$ , tồn tại toán tử chiếu  $P$  thỏa mãn  $P(w_1 + w_2) = w_1$ ; và ngược lại, với mỗi toán tử chiếu  $P$  có một phân tích tương ứng  $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ .

Toán tử  $P$  khi đó có thể được gọi là toán tử chiếu lên  $W_1$  theo hướng  $W_2$ .

**Hệ quả 4.33.** Nếu  $P$  là toán tử chiếu thì  $\text{rank } P = \text{tr } P$ .

**Hệ quả 4.34.** Nếu  $P$  là toán tử chiếu thì  $I - P$  cũng là một toán tử chiếu, hơn nữa  $\text{Ker}(I - P) = \text{Im } P$  và  $\text{Im}(I - P) = \text{Ker } P$ .

**Định lý 4.35.** Toán tử chiếu  $P$  là Hermitian nếu và chỉ nếu  $\text{Im } P \perp \text{Ker } P$ .

**Định lý 4.36.** Toán tử chiếu  $P$  là Hermitian nếu và chỉ nếu  $|Px| \leq x$  với mọi  $x$ .

Các toán tử chiếu Hermitian  $P$  và  $Q$  được gọi là trực giao nếu  $\text{Im } P \perp \text{Im } Q$ , nghĩa là  $PQ = QP = 0$ .

**Định lý 4.37.** Cho  $P_1, \dots, P_n$  là các toán tử chiếu Hermitian. Khi đó toán tử  $P = P_1 + \dots + P_n$  là toán tử chiếu nếu và chỉ nếu  $P_i P_j = 0$  với mọi  $i \neq j$ .

**Định lý 4.38 (Djoković, 1971).** Cho  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ , ở đó  $V_i \neq 0$  với mọi  $i = 1, \dots, k$ . Đặt  $P_i : V \rightarrow V_i$  là các phép chiếu trực giao và  $A = P_1 + \dots + P_k$ . Khi đó  $0 \leq |A| \leq 1$ , và  $|A| = 1$  nếu và chỉ nếu  $V_i \perp V_j$  với mọi  $i \neq j$ .

### 6.2 Bài tập

**Bài tập 4.30.** Cho  $P$  là một toán tử chiếu và  $V = \text{Im } P \oplus \text{Ker } P$ . Chứng minh rằng nếu  $\text{Im } P \perp \text{Ker } P$  thì  $Pv$  là hình chiếu trực giao của  $v$  lên  $\text{Im } P$ .

**Bài tập 4.31.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương

- a.  $A$  là ma trận lũy đẳng.
- b.  $\mathbb{C}^n = \text{Im } A + \text{Ker } A$  với  $Ax = x$  với mọi  $x \in \text{Im } A$ .
- c.  $\text{Ker } A = \text{Im}(I - A)$
- d.  $\text{rank}(A) + \text{rank}(I - A) = n$
- e.  $\text{Im}(A) \cap \text{Im}(I - A) = \{0\}$

**Bài tập 4.32.** Cho  $A$  là một ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng  $A$  là lũy đẳng khi và chỉ khi  $\text{rank}(A) = \text{tr}(A)$  và  $\text{rank}(I - A) = \text{tr}(I - A)$ .

**Bài tập 4.33.** Cho  $P_1$  và  $P_2$  là các toán tử chiếu. Chứng minh rằng

- $P_1 + P_2$  là toán tử chiếu khi và chỉ khi  $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ .
- $P_1 - P_2$  là toán tử chiếu khi và chỉ khi  $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$ .

**Bài tập 4.34 (Định lý ergodic).** Cho  $A$  là ma trận unita. Chứng minh rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} A^i x = Px,$$

ở đó  $P$  là một phép chiếu Hermitian lên  $\text{Ker}(A - I)$ .

**Bài tập 4.35.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cấp  $n$ . Chứng minh rằng nếu  $AB = A$  và  $BA = B$  thì  $A, B$  là các ma trận lũy đẳng.

**Bài tập 4.36.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cấp  $n$ , lũy đẳng. Tìm điều kiện cần và đủ để  $(A + B)$  là ma trận lũy đẳng.

**Bài tập 4.37.** Cho  $A$  là ma trận lũy đẳng. Chứng minh rằng  $(A + I)^k = I + (2^k - 1)A$  với mọi  $k \in \mathbb{N}$ .

**Bài tập 4.38.** (OL) Cho  $A, B$  là các ma trận cùng cấp, lũy đẳng và  $AB + BA = 0$ . Tính  $\det(A - B)$ .

**Bài tập 4.39.** Cho  $A, B$  là các ma trận cùng cấp, lũy đẳng và  $I - (A + B)$  khả nghịch. CMR  $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ .

**Bài tập 4.40.** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các toán tử tuyến tính trên không gian vectơ  $n$  chiều  $V$  sao cho  $A_1 + A_2 + \dots + A_k = I$ . Chứng minh rằng nếu các điều kiện sau là tương đương

- $A_1, \dots, A_k$  là các toán tử chiếu.



2.  $A_i A_j = 0$  với mọi  $i \neq j$ .

3.  $\text{rank } A_1 + \dots + \text{rank } A_k = n$ .

**Bài tập 4.41.** Cho  $A_1, A_2, \dots, A_k$  là các ma trận lũy đẳng. Chứng minh rằng nếu  $A_1 + A_2 + \dots + A_k = I$  thì  $A_i A_j = 0$  với mọi  $i \neq j$ .

## §7. MA TRẬN ĐỐI HỢP

**Định nghĩa 4.39.** *Toán tử tuyến tính (hoặc ma trận)  $A$  được gọi là đối hợp nếu  $A^2 = I$ .*

Dễ dàng kiểm chứng rằng  $P$  là ma trận lũy đẳng nếu và chỉ nếu  $2P - I$  là ma trận đối hợp.

**Định lý 4.40.** *Tồn tại một cơ sở của không gian sao cho ma trận của toán tử đối hợp có dạng  $\text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ .*

**Chú ý 4.41.** *Nếu  $A$  là toán tử đối hợp thì  $V = \text{Ker}(A + I) \oplus \text{Ker}(A - I)$ .*

**Định lý 4.42 (Djoković, 1967).** *Ma trận  $A$  có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu các ma trận  $A$  và  $A^{-1}$  là đồng dạng.*

**Hệ quả 4.43.** *Nếu  $B$  là một ma trận khả nghịch sao cho  $X^T B X = B$  thì  $X$  có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp. Nói riêng, mọi ma trận trực giao đều có thể biểu diễn được dưới dạng tích của 2 ma trận đối hợp.*

**Bài tập 4.42.** *Chứng minh rằng  $A$  là ma trận đối hợp nếu và chỉ nếu  $\frac{1}{2}(I + A)$  là ma trận lũy đẳng.*

## §8. MA TRẬN HOÁN VỊ (HAY CÒN GỌI LÀ MA TRẬN GIAO HOÁN)

### 8.1 Định nghĩa

**Định nghĩa 4.44.** Ma trận hoán vị là ma trận có dạng  $C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_0 \end{bmatrix}$

Ma trận  $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$  được gọi là ma trận hoán vị cơ sở.

### 8.2 Bài tập

**Bài tập 4.43.** Chứng minh rằng  $P^n = I; P^T = P^{-1}$ . Tìm các giá trị riêng của  $P$ .

**Bài tập 4.44.** Cho  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}$ . Chứng minh rằng

a.  $C = f(P)$

b. Các giá trị riêng của  $C$  là  $f(\omega^k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . với  $\omega$  là căn bậc  $n$  của 1.

c.  $\det C = \prod_{i=0}^{n-1} f(\omega^i)$

**Bài tập 4.45.** Cho  $A, B$  là các ma trận hoán vị. Chứng minh rằng  $A$  và  $B$  giao hoán và  $AB$  cũng là một ma trận hoán vị.

**Bài tập 4.46.** Cho  $A$  là một ma trận hoán vị. Chứng minh rằng  $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A)$  với mọi  $k$ .

# CHƯƠNG 5

## CÁC BẤT ĐẲNG THỨC MA TRẬN

### §1. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CHO MA TRẬN ĐỐI XỨNG VÀ HERMITIAN

#### 1.1 Các định lý cơ bản

**Định nghĩa 5.1.** Cho  $A, B$  là các ma trận Hermitian. Ta viết  $A > B$  (tương ứng  $A \geq B$ ) nếu  $A - B$  là ma trận xác định dương (tương ứng xác định không âm).

**Định lý 5.2.** Nếu  $A > B > 0$  thì  $A^{-1} < B^{-1}$ .

**Định lý 5.3.** Nếu  $A > 0$  thì  $A + A^{-1} \geq 2I$ .

**Định lý 5.4.** Nếu  $A$  là ma trận thực và  $A > 0$  thì

$$(A^{-1}x, x) = \max_y (2(x, y) - (Ay, y)).$$

**Định lý 5.5.** Cho  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^* & A_2 \end{pmatrix} > 0$ . Khi đó  $\det A \leq \det A_1 \det A_2$ .

**Hệ quả 5.6 (Bất đẳng thức Hadamard).** Nếu  $A = (a_{ij})$  là ma trận xác định dương, thì  $\det A \leq a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $A$  là ma trận đường chéo.

**Hệ quả 5.7.** Nếu  $X$  là một ma trận bất kì, thì

$$|\det X| \leq \sum_i |x_{1i}|^2 \dots |x_{ni}|^2.$$

**Định lý 5.8.** Cho  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^* & A_2 \end{pmatrix} > 0$  là ma trận xác định dương, ở đó  $B$  là một ma trận vuông. Khi đó  $|\det B|^2 \leq \det A_1 \det A_2$ .

**Định lý 5.9.** Cho  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum \alpha_i = 1$  và  $A_i > 0$ . Khi đó

$$|\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k| \geq |A_1|^{\alpha_1} \dots |A_k|^{\alpha_k}.$$

**Định lý 5.10.** Cho  $\lambda_i$  là các số phức bất kì và  $A_i \geq 0$ . Khi đó

$$|\det(\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k)| \leq \det(|\lambda_1| A_1 + \dots + |\lambda_k| A_k).$$

**Định lý 5.11.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận thực xác định dương, và  $A_1, B_1$  là các ma trận thu được từ ma trận  $A, B$  tương ứng bằng cách xóa đi các hàng đầu tiên và cột đầu tiên của nó. Khi đó

$$\frac{|A+B|}{|A_1+B_1|} \geq \frac{|A|}{|A_1|} + \frac{|B|}{|B_1|}$$

## 1.2 Bài tập

**Bài tập 5.1.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận vuông cấp  $n > 1$ , ở đó  $A > 0$  và  $B \geq 0$ . Chứng minh rằng  $|A+B| \geq |A| + |B|$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $B = 0$ .

**Bài tập 5.2.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận Hermitian và  $A > 0$ . Chứng minh rằng  $\det A \leq |\det(A+iB)|$  và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $B = 0$ .

**Bài tập 5.3.** Cho  $A_k$  và  $B_k$  là các ma trận con cấp  $k$  ở phía trên, góc trái của các ma trận xác định dương  $A$  và  $B$  sao cho  $A > B$ . Chứng minh rằng

$$|A_k| > |B_k|.$$

**Bài tập 5.4.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận thực đối xứng và  $A \geq 0$ . Chứng minh rằng nếu  $C = A + iB$  là ma trận không khả nghịch, thì  $Cx = 0$  với  $x$  là một vectơ thực khác 0 nào đó.

**Bài tập 5.5.** Cho  $A$  là ma trận vuông cấp  $n$  và  $A > 0$ . Chứng minh rằng

$$|A|^{1/n} = \min \frac{1}{n} \operatorname{tr}(AB),$$

ở đó giá trị nhỏ nhất được lấy trên tất cả các ma trận  $B$  xác định dương có định thức bằng 1.

**Bài tập 5.6.** Cho  $A$  là ma trận thực đối xứng xác định dương. Chứng minh rằng

$$\det \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{pmatrix} \leq 0$$

## §2. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CHO TRỊ RIÊNG

### 2.1 Các bất đẳng thức cơ bản

**Định lý 5.12 (Bất đẳng thức Schur).** Cho  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của ma trận  $A = (a_{ij})_1^n$ . Khi đó

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2,$$

và dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu  $A$  là một ma trận chuẩn tắc.

**Định lý 5.13.** Cho  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của ma trận  $A = B + iC$ , ở đó  $B$  và  $C$  là các ma trận Hermitian. Khi đó

$$\sum_{i=1}^n |\operatorname{Re} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \text{ và } \sum_{i=1}^n |\operatorname{Im} \lambda_i|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n |c_{ij}|^2.$$

**Định lý 5.14 (H. Weyl).** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận Hermitian,  $C = A + B$ . Cho các trị riêng của các ma trận trên được xếp theo thứ tự tăng dần lần lượt là  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ ,  $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$ ,  $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n$ . Khi đó

$$a) \quad \gamma_i \geq \alpha_j + \beta_{i-j+1} \text{ với } i \geq j,$$

$$b) \quad \gamma_i \leq \alpha_j + \beta_{i-j+n} \text{ với } i \leq j.$$

**Định lý 5.15.** Cho  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix}$  là một ma trận Hermitian. Giả sử các trị riêng của  $A$  và  $B$  được xếp theo thứ tự tăng dần sau:  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$ ,  $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_m$ . Khi đó

$$\alpha_i \leq \beta_j \leq \alpha_{i+n-m}.$$

**Định lý 5.16.** Cho  $A$  và  $B$  là các phép chiếu Hermitian, nghĩa là  $A^2 = A$  và  $B^2 = B$ . Khi đó các trị riêng của  $AB$  là thực và nằm trong khoảng  $[0, 1]$ .

**Định nghĩa 5.17.** Các giá trị  $\sigma_i = \sqrt{\mu_i}$ , ở đó  $\mu_i$  là các trị riêng của ma trận  $A^*A$ , được gọi là các giá trị kì dị của ma trận  $A$ .

**Chú ý 5.18.** Nếu  $A$  là một ma trận Hermitian xác định không âm thì các giá trị kì dị của  $A$  và các trị riêng của  $A$  là trùng nhau. Nếu  $A = SU$  là phân tích trong tọa độ cực của  $A$ , thì các giá trị kì dị của  $A$  trùng với các trị riêng của ma trận  $S$ . Với ma trận  $S$ , tồn tại một ma trận unita  $V$  sao cho  $S = V\Lambda V^*$ , ở đó  $\Lambda$  là ma trận đường chéo. Do đó, mọi ma trận  $A$  có thể được biểu diễn dưới dạng  $A = V\Lambda W$ , ở đó  $V$  và  $W$  là các ma trận unita và  $\Lambda = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ .

**Định lý 5.19.** Cho  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  là các giá trị kì dị của ma trận  $A$ , ở đó  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$ , và đặt  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  là các trị riêng của ma trận  $A$ , với  $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Khi đó

$$|\lambda_1 \dots \lambda_m| \leq \sigma_1 \dots \sigma_m \text{ với } m \leq n.$$

**Định lý 5.20.** Cho  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n$  là các giá trị kì dị của ma trận  $A$  và đặt  $\tau_1 \geq \dots \geq \tau_n$  là các giá trị kì dị của ma trận  $B$ . Khi đó

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i \tau_i.$$

## 2.2 Bài tập

**Bài tập 5.7 (Gershgorin discs).** Chứng minh rằng mọi trị riêng của ma trận  $(a_{ij})_1^n$  nằm trong một trong các đĩa sau  $|a_{kk} - z| \leq \rho_k$ , ở đó  $\rho_k = \sum_{i \neq j} |a_{kj}|$ .

**Bài tập 5.8.** Chứng minh rằng nếu  $U$  là một ma trận unita và  $S \geq 0$ , thì  $|\operatorname{tr}(US)| \leq \operatorname{tr} S$ .

**Bài tập 5.9.** Chứng minh rằng nếu  $A$  và  $B$  là các ma trận xác định không âm, thì

$$|\operatorname{tr}(AB)| \leq \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B.$$

**Bài tập 5.10.** Cho  $A$  và  $B$  là các ma trận Hermitian. Chứng minh rằng

$$\operatorname{tr}(AB)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2 B^2).$$

**Bài tập 5.11 (Cullen, 1965).** Chứng minh rằng  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$  nếu và chỉ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- giá trị tuyệt đối của các trị riêng của  $A$  nhỏ hơn 1;
- tồn tại một ma trận xác định dương  $H$  sao cho  $H - A^* H A > 0$ .

### Giá trị kì dị

**Bài tập 5.12.** Chứng minh rằng nếu tất cả các giá trị kì dị của ma trận  $A$  là bằng nhau, thì  $A = \lambda U$ , ở đó  $U$  là một ma trận unita.

**Bài tập 5.13.** Chứng minh rằng nếu các giá trị kì dị của ma trận  $A$  bằng  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ , thì các giá trị kì dị của ma trận  $\operatorname{adj} A$  bằng  $\prod_{i \neq 1} \sigma_i, \dots, \prod_{i \neq n} \sigma_i$ .

**Bài tập 5.14.** Cho  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  là các giá trị kì dị của ma trận  $A$ . Chứng minh rằng các trị riêng của ma trận  $\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}$  bằng  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, -\sigma_1, \dots, -\sigma_n$ .

# CHƯƠNG 6

---

## ĐA THỨC

---