MỞ ĐẦU

- Cơ học là một môn khoa học nghiên cứu chuyển động và cân bằng của các vật thể. Các vật thể mà nó nghiên cứu phải đủ lớn so với kích thước nghiên tử và có vận tốc đủ nhỏ so với vận tốc ánh sáng. Người ta phân loại cơ học thành: Cơ học vật lý và cơ học kỹ thuật.
    + Cơ học vật lý chủ yếu nghiên cứu chuyển động và cân bằng của chất điển và một vài mô hình vật rắn đơn giản. Phương pháp nghiên cứu của cơ học vật lý chủ yếu là phương pháp thực nghiệm, bao gồm các khâu: Quan sát, thí nghiệm, từ đó rút ra các định luật vật lý, các giả thiết và cuối cùng là áp dụng vào giải thích hiện tượng vật lý.
    + Cơ học kỹ thuật nghiên cứu chuyển động và cân bằng của các hệ kỹ thuật như: Các máy, các công trình xây dựng, các phương tiện giao thông vận tải,… Phương pháp ngiên cứu của cơ học kỹ thuật chủ yếu dựa trên việc xây dựng mô hình và các hệ tiên đề.

- Hai bài toán cơ bản của cơ học kỹ thuật là: Xây dựng mô hình và tính toán trên mô hình.
    + Bài toán xây dựng mô hình là bài toán khó, nó vượt ra ngoài chương trình môn học, do vậy ở đây ta chỉ đưa ra các mô hình đã được dựng sẵn.
    + Bài toán tính toán trên mô hình, đây là nội dung cơ bản của giáo trình này.

- Mục đích của môn học cơ lý thuyết
    + Cung cấp những kiến thức cơ bản và tổng quát về chuyển động và cân bằng của vật rắn và hệ vật rắn.
    + Rèn luyện một số phương pháp tư duy khoa học cho người kỹ sư tương lai. Đó là phương pháp tiên đề và phương pháp mô hình.
    + Tạo những tiềm năng ban đầu cho sinh viên, để họ có thể nghiên cứu giải quyết các bài toán kỹ thuật.
    + Cung cấp các kiến thức cơ sở để sinh viên học tiếp các môn học tiếp theo như Sức bền vật liệu, Nguyên lý máy, Chi tiết máy, Cơ kết cấu, Thuỷ khí kỹ thuật, Dao động kỹ thuật, Động lực học máy, Động lực học công trình, Rôbốt công nghiệp, Công nghệ chế tạo máy, Nguyên lý gia công vật liệu,….

PHẦN THỨ NHẤT: TĨNH HỌC

Tĩnh học là phần thứ nhất của giáo trình cơ lý thuyết, trong đó nghiên cứu trạng thái cân bằng của vật rắn (vật rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của lực. Trong phần này chúng ta giải quyết hai vấn đề chính là:

- Thu gọn hệ lực phức tạp về một hệ lực khác tương đương với nó nhưng đơn giản hơn.
- Thiết lập điều kiện đối với hệ lực mà dưới tác dụng của nó vật rắn cân bằng.

Chương I: Tĩnh học vật rắn

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

1.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong tĩnh học có ba khái niệm cơ bản là: Vật rắn tuyệt đối, cân bằng và lực

1.1.1 Vật rắn tuyệt đối

Vật rắn tuyệt đối là một tập hợp vô hạn các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ luôn luôn không đổi.

Vật rắn tuyệt đối chỉ là mô hình của các vật thể khi các biến dạng của nó có thể bỏ qua được do quá bé hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát. Để đơn giản vật rắn tuyệt đối thường được gọi tắt là vật rắn.

1.1.2 Cân bằng

- Hệ quy chiếu: Một vật thể được chọn làm mốc để theo dõi chuyển động của vật rắn được gọi là hệ quy chiếu. Trong cơ học, người ta thường gắn vào hệ quy chiếu một hệ trục toạ độ để tiện cho việc tính toán và được gọi là hệ trục toạ độ quy chiếu.
- Vật rắn cân bằng: Một vật rắn được gọi là cân bằng nếu vị trí của nó không thay đổi so với hệ quy chiếu đã chọn.
- Trong tĩnh học hệ quy chiếu được chọn là hệ quy chiếu trong đó tiên đề quán tính của Newton được thoả mãn, nó được gọi là hệ quy chiếu quán tính. Cân bằng đối với hệ quy chiếu quán tính được gọi là cân bằng tuyệt đối.
- Trong thực tế thì không có hệ quy chiếu quán tính. Do vậy, chỉ có thể chọn các hệ quy chiếu gần đúng hệ quy chiếu quán tính. Trong kỹ thuật, hệ quy chiếu quán tính gần đúng được chọn là quả đất.

1.1.3 Lực

Từ những quan sát trong đời sống, cùng với những kinh nghiệm và thực nghiệm người ta đi đến nhận xét rằng: Nguyên nhân gây ra sự biến đổi của trạng thái chuyển động cơ học, tức sự dời chỗ của các vật thể (bao gồm cả biến dạng) trong đó cân bằng chỉ là trường hợp riêng, chính là tác dụng tương hỗ giữa các vật thể. Tác dụng tương hỗ giữa các vật mà kết quả của nó gây ra các biến dạng hoặc sự thay đổi vận tốc của chúng được gọi là những tác dụng tương hỗ cơ học (phân biệt với các tác dụng tương hỗ khác như hoá, nhiệt, điện, …)

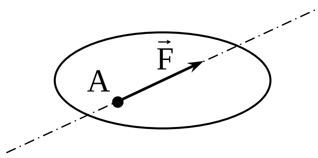
Tác dụng tương hỗ cơ học được gọi là lực.

Thực nghiệm đã chứng minh được rằng lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau:

- Điểm đặt của lực là điểm mà vật được truyền tác dụng tương hỗ cơ học từ vật khác.
- Phương chiều của lực là phương chiều chuyển động từ trạng thái yên nghỉ của chất điểm chịu tác dụng của lực.
- Cường độ của lực là số đo tác dụng mạnh yếu của lực so với lực được chọn làm chuẩn gọi là đơn vị lực. Đơn vị lực là newton, được ký hiệu N.

Do đó có thể dùng một véctơ để biểu diễn các đặc trưng của lực, gọi là véctơ lực, ký hiệu: $\vec{F}, \vec{Q}, ...$ trong đó

- Điểm đặt của véctơ biểu diễn điểm đặt của lực
- Phương chiều của véctơ biểu diễn phương chiều của lực,
- Môđun của véctơ biểu diễn cường độ của lực



Hình 1.1.1

- Giá mang véctơ được gọi là đường tác dụng của lực.

1.1.4 Các khái niệm khác

a, Hệ lực

Hệ lực là tập hợp nhiều lực cùng tác dụng lên một vật rắn. Hệ lực gồm các lực $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, …, $\vec{F}_n$ được ký hiệu: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$.

** Dựa vào tác dụng cơ học cơ học của hệ lực ta có các định nghĩa sau:*

- Hệ lực tương đương: Hai hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ và $(\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, ..., \vec{\Phi}_m)$ tác dụng lên cùng một vật rắn là tương đương nếu chúng có cùng tác dụng cơ học như nhau đối với vật rắn đó, ký hiệu:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, ..., \vec{\Phi}_m) \qquad (1.1.1)$$

- Hợp lực của hệ lực: Là một lực duy nhất tương đướng với hệ lực ấy. Gọi $\vec{R}$ là hợp lực của hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, ta có

$$\vec{R} \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \qquad (1.1.2)$$

- Hệ lực cân bằng: Hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ được gọi là cân bằng nếu khi tác dụng lên một vật rắn nó không làm thay đổi trạng thái chuyển động (hay cân bằng) của vật rắn đó. Hệ lực cân bằng còn được gọi là hệ lực tương đương với không và được ký hiệu:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0 \qquad (1.1.3)$$

** Phân loại hệ lực*

Dựa vào sự phận bố của đường tác dụng của các lực thuộc hệ, người ta phân thành các loại hệ lực sau:

- Hệ lực không gian bất kỳ: Khi đường tác dụng của các lực thuộc hệ nằm tuỳ ý trong không gian.
- Hệ lực phẳng bất kỳ: Khi đường tác dụng của các lực thuộc hệ nằm tuỳ ý trong cùng một mặt phẳng.
- Hệ lực song song: Khi đường tác dụng của các lực thuộc hệ song song với nhau.
- Hệ lực đồng quy: Khi đường tác dụng của các lực thuộc hệ đi qua cùng một điểm.

b, Vật rắn tự do và không tự do

- Vật rắn có thể thực hiện mọi di chuyển vô cùng bé từ vị trí đang xét sang các vị trí lân cận của nó mà không bị cản trở, được gọi là vật vật rắn tự do. Trái lại, nếu một số di chuyển của vật bị cản trở bởi những vật khác, thì vật đó được gọi là vật không tự do.
- Những điều kiện cản trở di chuyển của vật khảo sát được gọi là những liên kết đặt lên vật ấy.
- Vật không tự do còn được gọi là vật chịu liên kết, còn các vật cản trở di chuyển của vật khảo sát được gọi là vật gây liên kết.

c, Lực liên kết và lực hoạt động. Phản lực liên kết

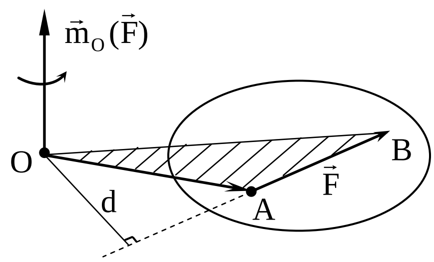
- Những lực đặc trưng cho tác dụng tương hỗ giữa các vật có liên kết với nhau qua chỗ tiếp xúc hình học được gọi là những lực liên kết. Các lực không phải là lực liên kết được gọi là lực hoạt động (ví dụ: Trong lực, lực đẩy của gió,... là các lực hoạt động)
- Lực liên kết do các vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát (hay vật chịu liên kết) được gọi là phản lực liên kết, còn lực liên kết do vật khảo sát tác dụng lên vật gây liên kết được gọi là áp lực. Lực liên kết có tính chất của nội lực.

1.2 MÔMEN CỦA LỰC VÀ NGẪU LỰC

1.2.1 Mômen của lực

a, Mômen của lực đối với một điểm

Cho lực $\vec{F}$ đặt tại A và một điểm O bất kỳ, khi đó ta có định nghĩa



Hình 1.1.2

* *Định nghĩa*: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O là một véctơ, ký hiệu $\vec{m}_O(\vec{F})$: Có phương vuông góc với mặt phẳng chứa điểm O và lực $\vec{F}$, có chiều sao cho khi nhìn từ đầu mút của nó xuống thấy lực $\vec{F}$ vòng quanh O theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và có môđun được cho bởi công thức

$$\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = F.d \qquad (1.1.4)$$

Trong đó d là khoảng cách vuông góc từ tâm lấy mômen O đến đường tác dụng của lực $\vec{F}$, được gọi là cánh tay đòn của lực $\vec{F}$ đối với tâm O.

* *Nhận xét*

+ Ta thấy $\vec{m}_O(\vec{F}) = 0$ khi $\vec{F} = 0$ hoặc đường tác dụng của lực $\vec{F}$ đi qua tâm mômen O

+ Từ hình vẽ ta thấy $\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = 2S_{\Delta OAB}$ (hai lần diện tích tam giác OAB)

+ Nếu gọi $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ là véc tơ định vị của điểm A đối với điểm O, khi đó ta có

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (1.1.5)$$

* *Chú ý*:

Khi các lực cùng nằm trong một mặt phẳng thì mômen của các lực đối điểm O nằm trên mặt phẳng đó sẽ song song với nhau, trong trường hợp đó người ta đưa ra khái niệm mômen đại số của lực $\vec{F}$ đối với điểm O như sau: Mômen đại số của lưc $\vec{F}$ đối với điểm O, là lượng đại số ký hiệu $\overline{m}_O(\vec{F})$ đọc xác định bởi công thức

$$\overline{m}_O(\vec{F}) = \pm F.d \qquad (1.1.6)$$

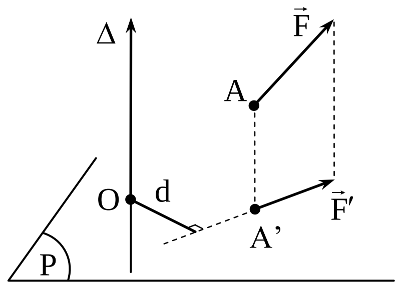
Có dấu dương khi lực $\vec{F}$ vòng quanh O theo chiều ngược chiều kim đồng hồ và có dấu âm khi lực $\vec{F}$ vòng quanh O cùng chiều kim đồng hồ.

b, Mômen của lực đối với một trục

* *Định nghĩa*: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ là một lượng đại số, ký hiệu: $\overline{m}_\Delta(\vec{F})$ là mômen đại số của lực $\vec{F}'$ đối với điểm O. Ở đó $\vec{F}'$ là hình chiếu của lực $\vec{F}$ trên mặt phẳng P vuông góc với trục Δ, còn O là giao điểm của trục Δ với mặt phẳng P đó.

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \overline{m}_O(\vec{F}') = \pm F'.d \qquad (1.1.7)$$

Lấy dấu (+) khi nhìn từ đầu mút của trục Δ xuống thấy lực $\vec{F}'$ vòng quanh O ngược chiều kim đồng hồ, lấy dấu (-) trong trường hợp ngược lại.



Hình 1.1.3

* *Nhận xét*: Ta thấy $\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = 0$ khi $\vec{F} = 0$ hoặc khi $\vec{F} // \Delta$ hoặc khi $\vec{F}$ cắt trục Δ

c, Định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục

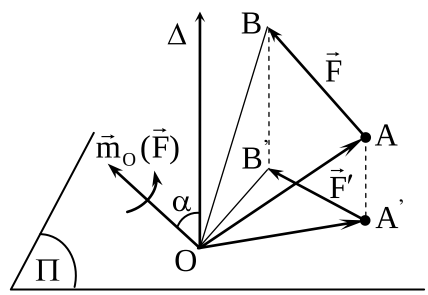
* *Định lý*: Mômen của lực $\vec{F}$ đối với trục Δ bằng hình chiếu lên trục ấy của véctơ mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O nằm trên trục ấy.

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = hch_\Delta\left[\vec{m}_O(\vec{F})\right] \qquad (1.1.8)$$

***** *Chứng minh*: Cho lực $\vec{F}$ và trục Δ như hình vẽ, ta xác định mặt phẳng Π vuông góc với trục Δ. Gọi O là giao của trục Δ với mặt phẳng Π, khi đó ta có:

Véctơ $\vec{m}_O(\vec{F})$ vuông góc với mặt phẳng OAB và tạo với trục Δ một góc α, trị số của nó được tính bằng

$$\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right| = 2S_{\Delta OAB} \qquad (a)$$



Hình 1.1.4

Mặt khác ta thấy góc α cũng chính là góc giữa mặt phẳng OAB và mặt phẳng OA'B', do đó hình chiếu của vectơ $\vec{m}_O(\vec{F})$ trên trục Δ được tính bằng

$$\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right|\cos\alpha = 2S_{\Delta OAB}.\cos\alpha = 2S_{\Delta A'B'} \qquad \text{(b)}$$

mà như trên ta đã biết

$$\overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \overline{m}_O(\vec{F}') = 2S_{\Delta A'B'} \qquad \text{(c)}$$

Từ (b) và (c) ta suy ra

$$\left|\vec{m}_O(\vec{F})\right|\cos\alpha = \overline{m}_\Delta(\vec{F}) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{m}_\Delta(\vec{F}) = \text{hch}_\Delta\left[\vec{m}_O(\vec{F})\right]$$ (Điều phải chứng minh)

1.2.2 Ngẫu lực

a, Định nghĩa

Ngẫu lực là một hệ gồm hai lực song song ngược chiều và cùng cường độ

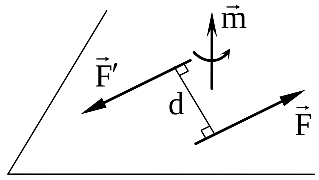
b, Các đặc trưng của ngẫu lực

Ngẫu lực được đặc trưng bởi các yếu tố sau

- Mặt phẳng tác dụng của ngẫu (hay gọi là mặt phẳng ngẫu lực): Là mặt phẳng chứa hai lực thành phần.
- Chiều quay của ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng của nó
- Cường độ tác dụng của ngẫu được đặc trưng bởi mômen ngẫu lực, ký hiệu: m, được cho bởi công thức

$$m = F.d \qquad (1.1.9)$$

(trong đó d là khoảng cách vuông góc giữa hai lực thành phần)



Hình 1.1.5

Để biểu diễn các đặc trưng của ngẫu lực người ta dùng một véctơ, ký hiệu $\vec{m}$ được gọi là véctơ mômen ngẫu lực.

- Có gốc tại mặt phẳng ngẫu lực
- Có phương vuông góc với mặt phẳng ngẫu lực
- Có chiều sao cho khi nhìn từ đầu mút của nó xuống thấy chiều quay của ngẫu trong mặt phẳng ngẫu lực ngược chiều kim đồng hồ.
- Có môđun được bằng mômen ngẫu lực

$$|\vec{m}| = m = F.d \qquad (1.1.10)$$

c, Các định lý liên hệ giữa véctơ mômen ngẫu lực và mômen của lực đối với một điểm.

* *Định lý 1*: Mômen đối với một điểm bất kỳ của ngẫu lực bằng véctơ mômen ngẫu lực

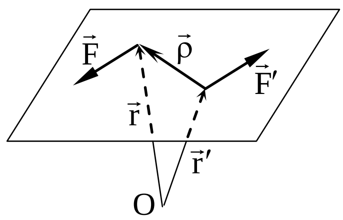
$$\vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{m} \qquad (1.1.11)$$

Chứng minh: Theo định nghĩa mômen của lực đối với một điểm ta có

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r}\wedge\vec{F};\ \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}'\wedge\vec{F}'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{r}\wedge\vec{F} + \vec{r}'\wedge\vec{F}' = \vec{r}\wedge\vec{F} - \vec{r}'\wedge\vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}') = \left(\vec{r} - \vec{r}'\right)\wedge\vec{F} = \vec{\rho}\wedge\vec{F} = \vec{m}$$



Hình 1.1.6

* *Định lý 2*: Véctơ mômen ngẫu lực bằng mômen của một lực thành phần đối với điểm nằm trên đường tác dụng của lực thành phần kia.

$$\vec{m}_{O'}(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') = \vec{m} \qquad (1.1.12)$$

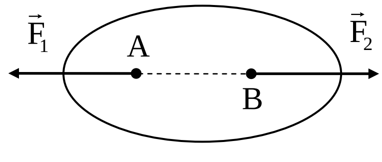
Với O' nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}'$, O nằm trên đường tác dụng của $\vec{F}$

1.3 HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

Hệ tiên đề là một tập hợp các mệnh đề, được công nhận không chứng minh. Chúng phải độc lập với nhau, tối thiểu về số lượng nhưng đủ để nghiên cứu đối tượng.

1.3.1 Tiên đề 1: Tiên đề về hai lực cân bằng

Điều kiện cần và đủ để cho hệ hai lực tác dụng vào cùng một vật rắn tự do cân bằng là chúng có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và cùng cường độ.



Hình 1.1.7

* *Ý nghĩa của tiên đề 1*: Đưa ra một tiêu chuẩn về cân bằng. Nói khác đi muốn biết một hệ lực tác dụng vào một vật rắn có cân bằng không, ta cần phải chứng minh hệ lực đó tương đương với hai lực cân bằng.

1.3.2 Tiên đề 2: Tiên đề về thêm bớt hai lực cân bằng.

Tác dụng của một hệ lực lên vật rắn tự do không thay đổi, nếu ta thêm vào hoặc bớt đi một cặp lực cân bằng.

Như vậy, nếu $(\vec{F}, \vec{F}')$ là hai lực cân bằng, ta có $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n, \vec{F}, \vec{F}')$

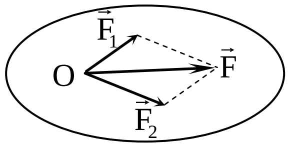
Nếu hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$ có hai lực cân bằng là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ thì ta có $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{F}_3, ..., \vec{F}_n)$

* *Ý nghĩa của tiên đề 2*: Quy định một phép biến đổi tương đương cơ bản về hệ lực

1.3.3 Tiên đề 3: Tiên đề về hình bình hành lực

Hai lực cùng đặt tại một điểm, tương đương với một lực đặt tại điểm đặt chung và có véctơ lực bằng véctơ chéo của hình bình hành mà hai cạnh là hai véctơ biểu diễn hai lực thành phần.

* *Ý nghĩa của tiên đề 3*: Quy định một phép biến đổi tương đương cơ bản về lực

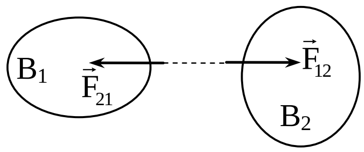


Hình 1.1.8

1.3.4 Tiên đề 4: Tiên đề về tác dụng và phản tác dụng

Lực tác dụng và lực phản tác dụng giữa hai vật có cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và cùng cường độ.

* *Ý nghĩa của tiên đề 4*: Là cơ sở để khảo sát bài toán hệ nhiều vật rắn



Hình 1.1.9

1.3.5 Tiên đề 5: Tiên đề về hoá rắn

Một vật biến dạng tự do đã cân bằng dưới tác dụng của một hệ lực nào đó, thì khi hoá rắn lại nó vẫn cân bằng dưới tác dụng của hệ lực đó.

* *Ý nghĩa của tiên đề 5*: Quy định điều kiện cần để vật thể biến dạng cân bằng là hệ lực tác dụng lên nó phải thoả mãn các điều kiện cân bằng của vật rắn tuyệt đối.

* *Chú ý*: Tiên đề 5 không có mệnh đề đảo

1.3.6 Tiên đề 6: Tiên đề về giải phóng liên kết

Một vật rắn chịu liên kết cân bằng có thể xem là một vật rắn tự do cân bằng nếu ta giải phóng các liên kết và thay thế tác dụng của các liên kết được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

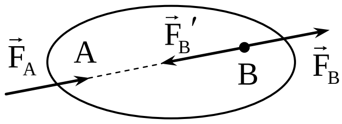
* *Ý nghĩa của tiên đề 6*: Nhờ tiên đề giải phóng liên kết, các tiên đề phát biểu cho vật rắn tự do vẫn đúng đối với vật rắn chịu liên kết, khi xem nó là vật rắn tự do chịu tác dụng của hệ lực gồm các lực hoạt động và các phản lực liên kết tương ứng với các liên kết được giải phóng.

1. 4 CÁC HỆ QUẢ CỦA HỆ TIÊN ĐỀ TĨNH HỌC

1.4.1 Định lý trượt lực

* *Định lý*: Tác dụng của lực lên một vật rắn không thay đổi khi ta trượt lực trên đường tác dụng của nó

* *Chứng minh*: Giả sử ta có lực $\vec{F}_A$ đặt tại A, theo tiên đề 2 của Newton ta có thể thêm vào tại B thuộc đường tác dụng của lực $\vec{F}_A$ một cặp lực cân bằng $(\vec{F}_B, \vec{F}_B')$ sao cho $\vec{F}_A = \vec{F}_B$, khi đó ta có



Hình 1.1.10

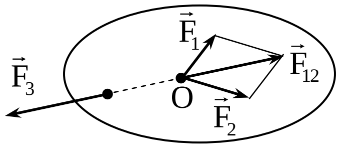
$$\vec{F}_A \equiv \left(\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_B'\right) \equiv \left((\vec{F}_A, \vec{F}_B'), \vec{F}_B\right) \equiv \vec{F}_B$$

1.4.2 Định lý ba lực cân bằng

* *Định lý*: Một hệ ba lực cân bằng, nếu trong đó có hai lực đồng quy thì lực thứ ba cũng đi qua điểm đồng quy đó và cả ba lực phải nằm trên cùng một mặt phẳng.

* *Chứng minh*: Giả sử ta có hệ 3 lực cân bằng là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv 0$ và hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cắt nhau tại O. Theo tiên đề về hình bình hành lực ta có

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3) \equiv (\vec{F}_{12}, \vec{F}_3) \equiv 0$$



Hình 1.1.11

Theo tiên đề về hai lực cân bằng thì hai lực $\vec{F}_{12}$ và $\vec{F}_3$ phải cùng đường tác dụng, hướng ngược chiều nhau và cùng cường độ. Do đó, đượng tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ phải gặp nhau tại O và cả ba lực đó phải nằm trên cùng một mặt phẳng.

1.4.3 Thu gọn hệ lực đồng quy

Giả sử ta có hệ lực đồng quy tại O là $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Áp dụng tiên đề hình bình hành lực, ta tìm được hợp lực $\vec{R}$ của nó đi qua điểm đồng quy và được cho bởi công thức

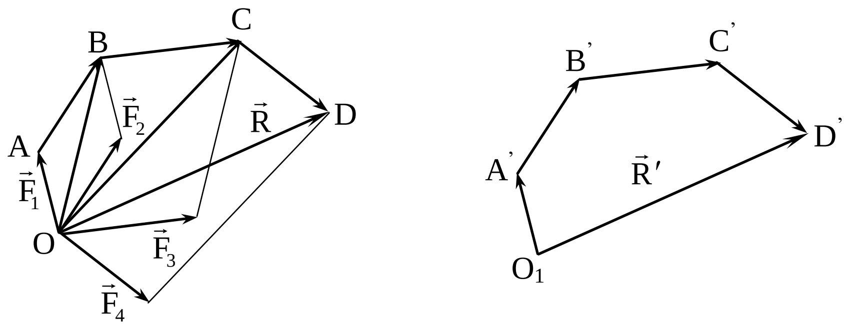
$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (1.1.13)$$

Để xác định phương chiều và trị số của hợp lực $\vec{R}$ của hệ lực đồng quy ta có thể dùng phương pháp vẽ hoặc phương pháp chiếu

a, Phương pháp vẽ

Từ hình vẽ ta thấy véctơ hợp lực $\vec{R}$ chính là véctơ khép kín của đa giác OABCD mà các cạnh của nó là những véctơ song song cùng chiều và cùng trị số với các véctơ biểu diễn các lực thành phần. Đa giác OABCD được gọi là đa giác lực. Chú ý rằng đa giác lực được vẽ xuất phát không bắt buộc từ điểm đồng quy O của hệ lực mà có thể xuất phát từ điểm O_1 tuỳ ý.

Vậy hợp lực của hệ lực đồng quy được biểu diễn bằng véctơ khép kín của đa giác lực đặt tại điểm đồng quy.



Hình 1.1.12

b, Phương pháp chiếu

Ta chiếu biểu thức (1.1.13) lên hệ trục toạ độ vuông góc Oxyz ta được

$$\begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \Rightarrow \quad R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2} \qquad (1.1.14)$$

Phương chiều của $\vec{R}$ được xác định qua các cosin chỉ phương sau:

$$\cos\alpha = \cos(\vec{R}, Ox) = \frac{R_x}{R}; \cos\beta = \cos(\vec{R}, Oy) = \frac{R_y}{R}; \cos\gamma = \cos(\vec{R}, Oz) = \frac{R_z}{R}$$

1.4.4 Các định lý về biến đổi tương đương của ngẫu lực

a, Định lý 1: Hai ngẫu lực có véctơ mômen bằng nhau thì tương đương với nhau.

* *Định lý này được rút ra từ hai tính chất sau đây*

- Tính chất 1: Hai ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng, có cùng chiều quay và cùng trị số mômen thì tương đương với nhau.
- Tính chất 2: Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi dời ngẫu lực đến những mặt phẳng song song.

* *Nhận xét*: Qua hai tính chất trên ta có một số nhận xét như sau

- Véctơ mômen ngẫu lực $\vec{m}$ là một véctơ tự do
- Tác dụng của ngẫu lực không thay đổi khi tác động lên nó các phép biến đổi không làm thay đổi véctơ mômen của nó: Dời tuỳ ý ngẫu lực trong mặt phẳng tác dụng, dời đến các mặt phẳng song song, thay đổi cánh tay đòn và lực thành phần.

- Tác dụng của ngẫu lực được đặc trưng hoàn toàn bởi véctơ mômen của nó.

b, Định lý 2: Hợp hai ngẫu lực được một ngẫu lực có véctơ mômen bằng tổng các véctơ mômen của hai ngẫu lực đã cho.

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 \qquad (1.1.15)$$

* Tổng quát: Hợp n ngẫu lực ta được một ngẫu lực có véctơ mômen bằng tổng các véctơ mômen biểu diễn các ngẫu lực đã cho.

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_k \qquad (1.1.16)$$

Chú ý: Khi các ngẫu lực cùng nằm trong một mặt phẳng, các véctơ mômen của các ngẫu lực đã cho có phương song song với nhau, khi đó công thức (1.) có thể được viết lại như sau

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + ... + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_k \qquad (1.1.17)$$

1.5 PHẢN LỰC LIÊN KẾT CỦA CÁC LIÊN KẾT THƯỜNG GẶP

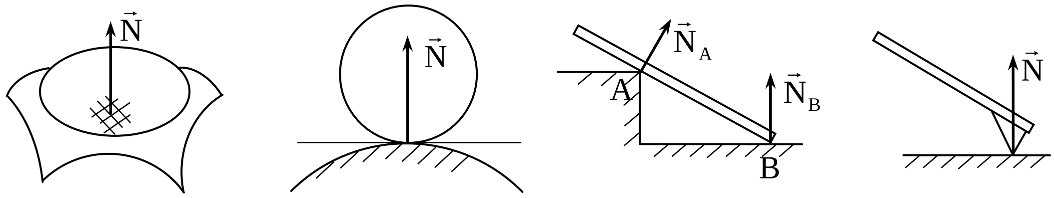
1.5.1 Lực liên kết và phản lực liên kết

- Những lực đặc trưng cho tác dụng tương hỗ giữa các vật có liên kết với nhau qua chỗ tiếp xúc hình học được gọi là những lực liên kết. Các lực không phải là lực liên kết được gọi là lực hoạt động (ví dụ: Trong lực, lực đẩy của gió,... là các lực hoạt động)
- Lực liên kết do các vật gây liên kết tác dụng lên vật khảo sát (hay vật chịu liên kết) được gọi là phản lực liên kết, còn lực liên kết do vật khảo sát tác dụng lên vật gây liên kết được gọi là áp lực. Lực liên kết có tính chất của nội lực.

1.5.2 Phản lực liên kết của các liên kết thường gặp

a, Liên kết tựa

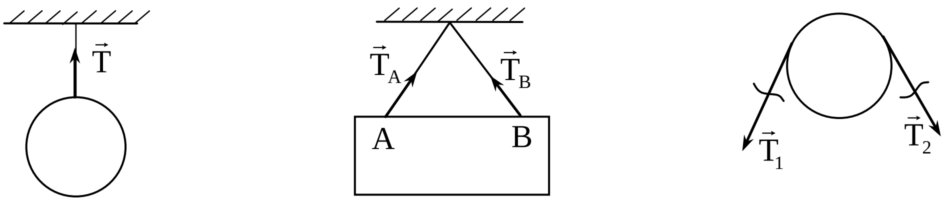
Hai vật có liên kết tựa khi chúng trực tiếp tựa lên nhau. Chỗ tiếp xúc có thể theo một điểm, theo một đường hoặc một mặt hoàn toàn nhẵn. Khi đó phản lực liên kết tựa có phương vuông góc với mặt tựa hoặc đường tựa và có chiều hướng vào vật khảo sát.



Hình 1.1.13

b, Liên kết dây mềm, không giãn không trọng lượng

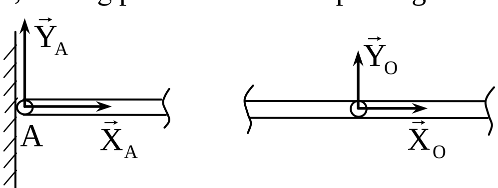
Phản lực liên kết dây còn được gọi là sức căng dây, có phương nằm dọc theo dây và có chiều hướng ra khỏi vật khảo sát.



Hình 1.1.14

c, Liên kết bản lề trụ (thường được gọi là liên kết bản lề)

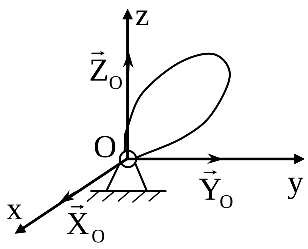
Cho phép vật rắn quay quanh một trục. Do không xác định được điểm tiếp xúc nên không xác định được phương chiều của phản lực liên kết. Vì vậy phản lực liên kết của nó thường được phân tích thành hai thành phần vuông góc với nhau, thường phân tích theo hai phương của hai trục toạ độ.



Hình 1.1.15

d, Liên kết bản lề cầu (thường được gọi là liên kết cầu)

Cho phép vật rắn có thể quay quanh một điểm trong không gian. Tương tự như trên, do không xác định được điểm tiếp xúc nên không xác định được phương chiều của phản lực liên kết nên phản lực liên kết của nó được phân tích thành ba thành phần theo ba phương vuông góc, thường phân tích theo ba phương của ba trục toạ độ.

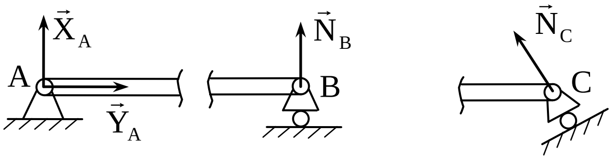


Hình 1.1.16

e, Liên kết gối

Để đỡ các dầm và khung…, người ta dùng các liên kết gối. Có hai dạng liên kết gối là dạng cố định và dạng di động.

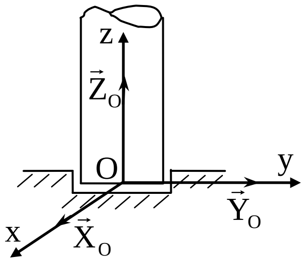
- Phản lực liên kết của gối di động được xác định như liên kết tựa.
- Phản lực liên kết của gối cố định được xác định như liên kết bản lề.



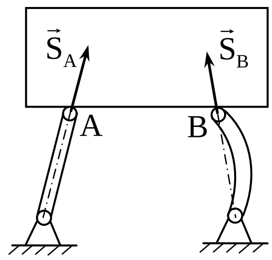
Hình 1.1.17

f, Liên kết cối

Cho phép vật rắn có thể quay quanh một trục. Phản lực liên kết cũng được phân tích thành ba thành phần như liên kết cầu, nhưng khác ở chỗ thành phần theo phương z luôn > 0 ($Z_O > 0$)



Hình 1.1.18



Hình 1.1.19

g, Liên kết thanh

Được thực hiện nhờ các thanh thoả mãn các điều kiện sau:

- Chỉ có lực tác dụng ở hai đầu thanh
- Trọng lượng thanh không đáng kể
- Những liên kết tại hai đầu thanh được thực hiện nhờ các liên kết bản lề trụ, bản lề cầu, liên kết gối,…

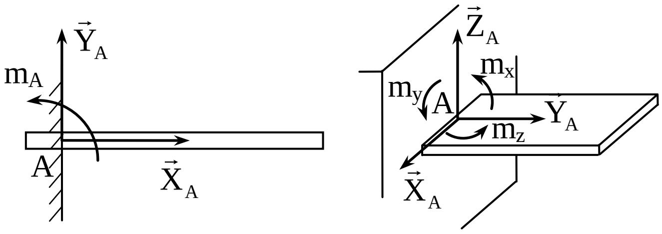
Khi đó phản lực liên kết thanh có phương nằm dọc theo đường nối hai đầu thanh còn chiều chưa xác định (hình 1.1.19).

h, Liên kết ngàm

Hai vật có liên kết ngàm khi chúng được nối cứng với nhau. Có hai dạng liên kết ngàm là ngàm phẳng và ngàm không gian.

+ Phản lực liên kết của ngàm phẳng gồm hai lực thẳng góc với nhau và một ngẫu lực nằm trong mặt phẳng chứa hai lực thành phần nói trên.

+ Phản lực liên kết của ngàm không gian gồm ba thành phần lực thẳng góc với nhau và ba thành phần ngẫu lực



Hình 1.1.20

2. HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Hệ lực không gian là hệ lực có đường tác dụng của các lực thành phần nằm tuỳ ý trong không gian.

Hệ lực không gian là hệ lực tổng quát nhất, vì vậy các kết quả nhận được khi khảo sát hệ lực không gian dễ dàng áp dụng được cho các hệ lực đồng quy, hệ ngẫu lực , hệ lực song song, hệ lực phẳng, chúng được xem như là các trường hợp riêng.

Trong chương này chúng ta khảo sát hai vấn đề sau

- Thu gọn hệ lực không gian về dạng tối giản
- Tìm điều kiện để hệ lực không gian cân bằng.

Phương pháp khảo sát hệ lực không gian trong tĩnh học là phương pháp tĩnh học, dựa trên hai đặc trưng hình học của nó là véctơ chính và mômen chính.

2.1 VÉCTƠ CHÍNH VÀ MÔMEN CHÍNH CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.1.1 Véctơ chính của hệ lực không gian

a, Định nghĩa

Véctơ chính của hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$, ký hiệu: $\vec{R}'$, là tổng hình học của các véctơ biểu diễn các lực thành phần của hệ lực.

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (1.2.1)$$

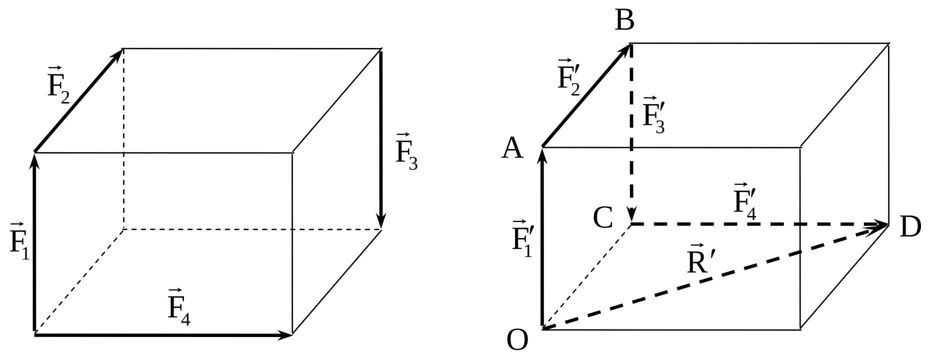
b, Phương pháp xác định véctơ chính

Để xác định véctơ chính, ta có hai phương pháp là phương pháp vẽ và phương pháp chiếu.

* *Phương pháp vẽ*

Để xác định véctơ chính bằng phương pháp vẽ, ta đi xây dựng đa giác lực. Muốn vậy, từ một điểm bất kỳ ta lần lượt vẽ nối tiếp các véctơ song song cùng chiều, cùng trị số với các véctơ biểu diễn các lực thành phần của hệ lực. Đường gấp khúc nhận được là đa giác lực, khi đó véctơ khép kín của da giác lực chính là véctơ chính của hệ lực.

Chú ý: Trong trường hợp hệ lực phẳng, đa giác lực là đa giác phẳng, còn trong trường hợp hệ lực không gian, đa giác lực nói chung là đa giác gềnh.



Hình 1.2.1

* *Phương pháp chiếu*

Ta chiếu hai vế của (1.2.1) lên hệ trục toạ độ Oxyz, ta được

$$\begin{cases} R'_x = F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R'_y = F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R'_z = F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{cases} \Rightarrow \quad R' = \left|\vec{R}'\right| = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} \qquad (1.2.2)$$

Phương chiều của $\vec{R}'$ được xác định bởi các cosin chỉ phương

$$\cos\alpha = \cos(\vec{R}', Ox) = \frac{R'_x}{R}; \cos\beta = \cos(\vec{R}', Oy) = \frac{R'_y}{R}; \cos\gamma = \cos(\vec{R}', Oz) = \frac{R'_z}{R}$$

2.1.2 Mômen chính của hệ lực không gian đối với một tâm

a, Định nghĩa

Mômen chính của hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ đối với tâm O, là một véctơ, ký hiệu: $\vec{M}_O$, là tổng hình học của các vectơ mômen của các lực thuộc hệ lực đối với tâm O.

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k \qquad (1.2.3)$$

Trong đó $\vec{r}_k$ là véctơ định vị của điểm đặt của lực $\vec{F}_k$ đối với tâm O

b, Phương pháp xác định

Cũng tương tự như véctơ chính, ta cũng có hai phương pháp xác định mômen chính là phương pháp vẽ và phương pháp chiếu.

* *Phương pháp vẽ*

Cũng tương tự như véctơ chính, ta cũng đi xây dựng một đa giác mà các cạnh lần lượt là các véctơ song song cùng chiều, cùng trị số với các véctơ mômen của các lực thành phần của hệ lực đối với tâm O. Đa giác véctơ đó được gọi là đa giác véc tơ mômen, khi đó véctơ khép kín của đa giác véctơ mômen chính là mômen chính của hệ lực đối với tâm O.

* *Phương pháp chiếu*

Ta gắn vào tâm O một hệ trục toạ độ vuông góc Oxyz, gọi $\bar{M}_{Ox}, \bar{M}_{Oy}, \bar{M}_{Oz}$ là các hình chiếu của mômen chính của hệ lực đối với tâm O trên các trục của hệ trục toạ độ Oxyz, khi đó áp dụng định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một trục và mômen của lực đối với một điểm, ta có

$$\begin{cases} \bar{M}_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{Ox}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_x(\vec{F}_k) \\ \bar{M}_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{Oy}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_y(\vec{F}_k) \\ \bar{M}_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_{Oz}(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_z(\vec{F}_k) \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

c, Định lý biến thiên mômen chính

* *Định lý*: Biến thiên mômen chính của hệ lực khi tâm lấy mômen thay đổi từ O đến I bằng mômen của véctơ chính của hệ lực đặt tại tâm O lấy đối với I.

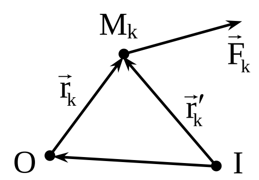
$$\vec{M}_I - \vec{M}_O = \vec{m}_I(\vec{R}'_O) \qquad (1.2.5)$$

* *Chứng minh*: Từ định nghĩa mômen chính của hệ lực đối với một tâm ta có

$$\vec{M}_I = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_I(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}'_k \wedge \vec{F}_k \ ; \ \ \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_I - \vec{M}_O = \sum \vec{r}'_k \wedge \vec{F}_k - \sum \vec{r}_k \wedge \vec{F}_k = \sum \left(\vec{r}'_k - \vec{r}_k \right) \wedge \vec{F}_k$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_I - \vec{M}_O = \sum \overrightarrow{IO} \wedge \vec{F}_k = \overrightarrow{IO} \wedge \sum \vec{F}_k = \overrightarrow{IO} \wedge \vec{R}'_O = \vec{m}_I(\vec{R}'_O)$$



Hình 1.2.2

d, Chú ý

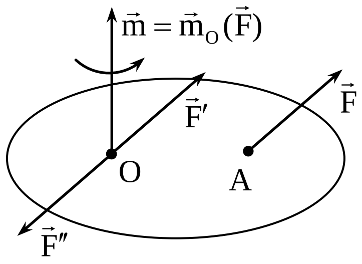
Mômen chính của hệ lực phẳng đối với tâm O là lượng đại số bằng tổng đại số mômen của các lực thuộc hệ đối với tâm O.

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_O(\vec{F}_k) \qquad (1.2.6)$$

2.2 THU GỌN HỆ LỰC KHÔNG GIAN

2.2.1 Định lý dời lực song song

* *Định lý*: Lực $\vec{F}$ đặt tại A tương đương với lực $\vec{F}'$ song song cùng chiều cùng cường độ với lực $\vec{F}$ nhưng đặt tại O và một ngẫu lực có véctơ mômen bằng mômen của lực $\vec{F}$ đối với điểm O.



Hình1.2.3

* *Chứng minh*: Cho lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn tại A. Tại điểm O bất kỳ thuộc vật rắn ta đặt vào đó một cặp lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ sao cho $\vec{F}' = \vec{F}$, khi đó theo tiên đề 2 của Newton ta có

$$\vec{F} \equiv (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \equiv \left(\vec{F}', (\vec{F}, \vec{F}'')\right)$$

Ta thấy lực $\vec{F}'$ chính là lực $\vec{F}$ đã dời đến O, còn cặp lực $(\vec{F}, \vec{F}'')$ tạo thành một ngẫu lực có véctơ mômen được xác định như sau

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} \equiv \left(\vec{F}', \vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F})\right)$$

* *Định lý đảo*: Lực $\vec{F}'$ đặt tại O và một ngẫu lực có véctơ mômen là $\vec{m}$ với $\vec{m} \perp \vec{F}'$ sẽ tương đương với lực $\vec{F}$ song song cùng chiều và cùng cường độ với lực $\vec{F}'$ nhưng đặt tại A có khoảng cách từ O đến đường tác dụng của $\vec{F}$ một đoạn $d = |\vec{m}| / |\vec{F}'|$

2.2.2 Thu gọn hệ lực không gian về một tâm, các bất biến của hệ lực không gian

a, Thu gọn hệ lực không gian về một tâm

Cho hệ lực không gian bất kỳ $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Để thu gọn hệ lực này về tâm O, ta lần lượt thu từng lực về tâm O nhờ áp dụng định lý dời lực song song, khi đó ta có

$\vec{F}_1 \equiv (\vec{F}_1' = \vec{F}_1$ đặt tại O và ngẫu lực $\vec{m}_1 = \vec{m}_O(\vec{F}_1)$)

$\vec{F}_2 \equiv (\vec{F}_2' = \vec{F}_2$ đặt tại O và ngẫu lực $\vec{m}_2 = \vec{m}_O(\vec{F}_2)$)

……………………………………………………..

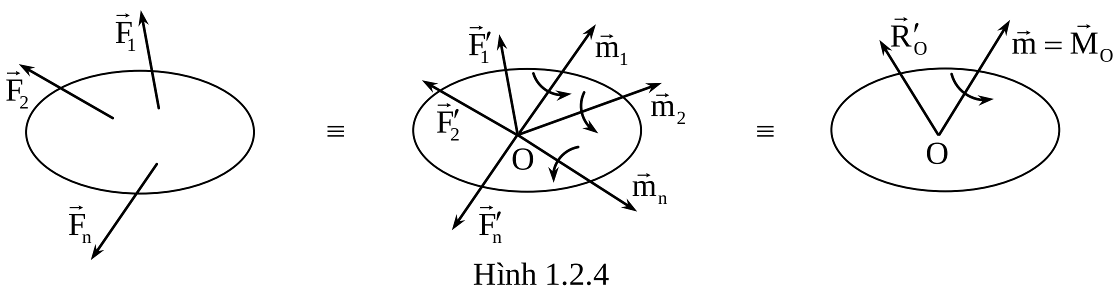
$\vec{F}_n \equiv (\vec{F}_n' = \vec{F}_n$ đặt tại O và ngẫu lực $\vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_n)$)

Vậy hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ đã cho tương đương với hệ lực đồng quy tại O là $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ và hệ ngẫu lực $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ...\vec{m}_n)$. Như đã biết hệ lực đồng quy tại O $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', ..., \vec{F}_n')$ có hợp lực đi qua O và được xác định bởi công thức

$$\vec{R}_O' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \vec{R}'$$

Còn hệ ngẫu lực $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, ...\vec{m}_n)$ như đã chứng minh, nó tương đương một ngẫu lực có véctơ mômen được xác định như sau

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + ... + \vec{m}_n = \vec{m}_O(\vec{F}_1) + \vec{m}_O(\vec{F}_2) + ... + \vec{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = \vec{M}_O$$



Hình 1.2.4

* *Định lý*: Hệ lực không gian bất kỳ tương đương với một lực và một ngẫu lực đặt tại điểm tuỳ ý, chúng được gọi là lực thu gọn và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn, còn ngẫu lực thu gọn có véctơ mômen bằng mômen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn.

b, Các bất biến của hệ lực không gian

- Véctơ chính của hệ lực không gian không thay đổi khi tâm thu gọn thay đổi, vậy véctơ chính là một đại lượng bất biến của hệ lực không gian

- Ta thấy mômen chính của hệ lực không gian phụ thuộc vào tâm thu gọn, theo định lý biến thiên mômen chính ta có

$$\vec{M}_I - \vec{M}_O = \vec{m}_I(\vec{R}'_O)$$

Nhân hai vế của đẳng thức này với $\vec{R}'_O$, ta được

$$\vec{M}_I.\vec{R}'_O - \vec{M}_O.\vec{R}'_O = \vec{m}_I(\vec{R}'_O).\vec{R}'_O = 0 \text{ (vì } \vec{m}_I(\vec{R}'_O) \perp \vec{R}'_O)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_I.\vec{R}'_O = \vec{M}_O.\vec{R}'_O$$

Vì véctơ chính là một đại lượng bất biến, nên ta có

$$\vec{R}'_I = \vec{R}'_O \Rightarrow \vec{M}_I.\vec{R}'_I = \vec{M}_O.\vec{R}'_O = \text{const}$$

Vậy: Tích vô hướng của véctơ chính và mômen chính của hệ lực không gian là một đại lượng bất biến.

Chú ý: Nếu $\vec{R}'_O = 0$ thì $\vec{M}_O$ là một đại lượng bất biến

2.2.3 Các dạng chuẩn của hệ lực không gian, Định lý Varinhong

a, Các dạng chuẩn của hệ lực không gian

* *Định nghĩa*: Dạng chuẩn của một hệ lực là dạng đơn giản nhất mà hệ lực có thể biến đổi tương đương về được.

* Dựa vào kết quả thu gọn hệ lực không gian về một tâm và các bất biến của hệ lực không gian, ta nhận được các tiêu chuẩn về các dạng chuẩn của hệ lực không gian như sau

(1) Nếu $\vec{R}' = 0; \vec{M}_O = 0 \Rightarrow$ Hệ lực không gian tương đương với một cặp lực cân bằng $\Rightarrow$ Hệ lực không gian cân bằng

(2) Nếu $\vec{R}' = 0; \vec{M}_O \neq 0 \Rightarrow$ Hệ lực không gian tương đương với một ngẫu lực

(3) Nếu $\vec{R}' \neq 0; \vec{M}_O.\vec{R}' = 0 \Rightarrow$ Hệ lực không gian tương đương với một lực (tức hệ lực không gian có hợp lực)

- Nếu $\vec{M}_O = 0$ Hợp lực của hệ lực không gian được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn O.
- Nếu $\vec{M}_O \neq 0$ Hợp lực của hệ lực không gian được biểu diễn bằng véctơ chính của hệ lực và nằm cách tâm thu gọn O một khoảng $d = |\vec{M}_O| / |\vec{R}'|$.

(4) Nếu $\vec{R}' \neq 0; \vec{M}_O.\vec{R}' \neq 0 \Rightarrow$ Hệ lực không gian tương đương với một hệ xoắn

b, Định lý Varinhong

* *Định lý*: Trong trường hợp hệ lực không gian có hợp lực thì mômen của hợp lực đối với một tâm bất kỳ bằng tổng mômen của các lực thành phần đối với tâm ấy.

$$\vec{m}_I(\vec{R}) = \sum \vec{m}_I(\vec{F}_k) \qquad (1.2.7)$$

* *Chứng minh*: Giả sử hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ có hợp lực $\vec{R}$ đặt tại O. Theo định lý biến thiên mômen chính ta có

$$\vec{M}_I - \vec{M}_O = \vec{m}_I(\vec{R}'_O)$$

với I là tâm thu gọn bất kỳ. Theo định nghĩa của hợp lực ta có

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv \vec{R}$$

Mặt khác theo định lý thu gọn hệ lực không gian ta có

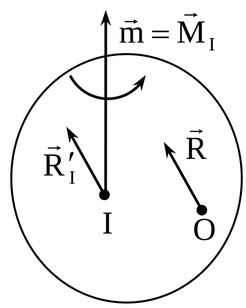
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv (\vec{R}'_O, \vec{M}_O)$$

Mà theo dạng chuẩn thứ 3 của hệ lực không gian ta có

$$\vec{R} = \vec{R}'_O \Rightarrow \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{M}_I = \vec{m}_I(\vec{R}'_O) = \vec{m}_I(\vec{R})$$

Theo định nghĩa mômen chính ta có

$$\vec{M}_I = \sum \vec{m}_I(\vec{F}_k) \quad \Rightarrow \quad \vec{m}_I(\vec{R}) = \sum \vec{m}_I(\vec{F}_k)$$



Hình 1.2.5

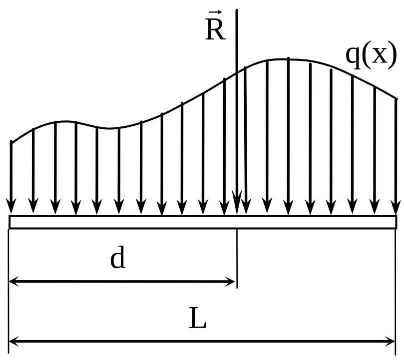
2.2.4 Hệ lực phân bố

Xét một dầm thẳng chịu tác dụng của hệ lực phân bố song song theo quy luật q(x) như hình vẽ, ta thu gọn hệ lực này về tâm O bất kỳ thuộc mặt phẳng lực ta được $\vec{R}'_O \neq 0$, $\vec{R}'_O.\vec{M}_O = 0 \Rightarrow$ đây là hệ lực có hợp lực, véctơ hợp lực $\vec{R}$ song song cùng chiều với các lực thành phần và có độ lớn được xác định bởi

$$R = \int_0^L q(x)dx \qquad (1.2.8)$$

Và được đặt cách đầu mút của dầm một đoạn là d

$$d = \int_0^L q(x)xdx \Big/ \int_0^L q(x)dx \qquad (1.2.9)$$



Hình 1.2.6

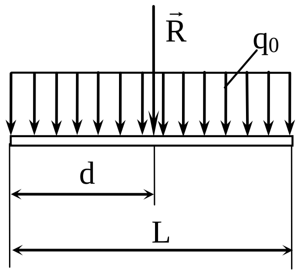
Dưới đây ta xét hai trường hợp đặc biệt

a, Hệ lực phân bố đều (theo quy luật hình chữ nhật như hình 1.2.7)

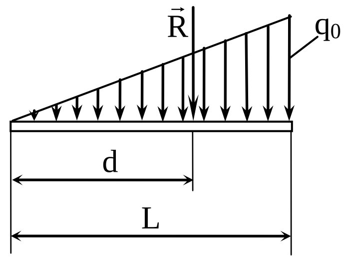
Ta có q(x) = q_0 = const, khi đó ta có $R_1 = q_0.L$; $d_1 = L/2$

b, Hệ lực phân bố tuyến tính (theo quy luật hình tam giác như hình 1.2.8)

Ta có $q(x) = \dfrac{q_0}{L}x$, với q_0 = const $\Rightarrow$ $R_2 = \dfrac{1}{2}q_0L, d_2 = \dfrac{2}{3}L$



Hình 1.2.7



Hình 1.2.8

2.3 ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG

2.3.1 Điều kiện cân bằng của hệ lực không gian

* *Định lý*: Điều kiện cần và đủ để hệ lực không gian $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ tác dụng lên vật rắn tự do, cân bằng là véctơ chính và mômen chính của hệ lực đối với một điểm bất kỳ phải đồng thời triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}' = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.10)$$

* *Chú ý*: Điều kiện cần và đủ để cho một vật rắn tự do cân bằng tương đương với điều kiện cần và đủ để cho hệ lực tác dụng lên vật rắn đó cân bằng.

2.3.2 Các phương trình cân bằng của hệ lực không gian

Từ điều kiện $\vec{R}' = \sum \vec{F}_k = 0$ và $\vec{M}_O = \sum \vec{m}_O(\vec{F}_k) = 0$ ta suy ra sáu phương trình cân bằng của hệ lực không gian như sau

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0 \\ \sum \vec{m}_x(\vec{F}_k) = 0; \sum \vec{m}_y(\vec{F}_k) = 0; \sum \vec{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.11)$$

2.3.3 Phương trình cân bằng của các hệ lực đặc biệt

a, Hệ lực đồng quy

Nếu chọn gốc toạ độ trùng với điểm đồng quy, thì ba phương trình mômen trong hệ (2.) sẽ tự động thoả mãn, vì vậy ta còn ba phương trình cân bằng

$$\sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0; \sum F_{kz} = 0 \qquad (1.2.12)$$

* Chú ý: Đối với hệ lực đồng quy phẳng, số phương trình cân bằng còn lại là hai

b, Hệ lực song song

Nếu ta chọn hệ trục toạ độ sao cho trục z song song với các lực thuộc hệ thì các phương trình hình chiếu lên trục các trục x, y và phương trình mômen đối với trục z sẽ tự động thoả mãn, vì vậy đối với hệ lực song song không gian ta có ba phương trình cân bằng như sau.

$$\begin{cases} \sum F_{kz} = 0 \\ \sum \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.13)$$

* *Chú ý*: Đối với hệ lực song song phẳng, số phương trình cân bằng còn lại là hai

c, Hệ ngẫu lực

Đối với hệ ngẫu lực ta thấy véctơ chính luôn luôn triệt tiêu do đó ba phương trình hình chiếu trong (2.) sẽ tự động thoả mãn, suy ra hệ ngẫu lực có ba phương trình cân bằng như sau

$$\sum \overline{m}_x(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_y(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k) = 0 \qquad (1.2.14)$$

* *Chú ý*: Đối với hệ ngẫu lực phẳng, số phương trình cân bằng còn lại một.

d, Hệ lực phẳng

Đối với hệ lực phẳng bất kỳ ta có ba dạng phương trình cân bằng như sau

* *Dạng 1*: Nếu ta chọn hệ trục toạ độ sao cho mặt phẳng xOy trùng với mặt phẳng chứa các lực thì phương trình hình chiếu lên trục z và các phương trình mômen đối với trục x, y sẽ tự động thoả mãn, khi đó ta có các phương trình.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; \sum F_{ky} = 0 \\ \sum \overline{m}_z(\vec{F}_k) = \sum \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.15)$$

* *Dạng 2*: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của của các lực thuộc hệ đối với hai điểm A, B bất kỳ bằng không và tổng hình chiếu của các lực lên trục x không vuông góc với đoạn AB bằng không.

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0 \\ \sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \end{cases} \qquad (1.2.16)$$

* *Dạng 3*: Điều kiện cần và đủ để hệ lực phẳng cân bằng là tổng mômen của các lực thuộc hệ đối với ba điểm A, B và C không thẳng hàng triệt tiêu.

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_C(\vec{F}_k) = 0 \qquad (1.2.17)$$

* *Chú ý*: Đối với hệ lực song song phẳng, nếu ta chọn hệ trục sao cho trục y song song với các lực, khi đó phương trình hình chiếu lên trục x tự động thoả mãn, khi đó ta có

- Từ dạng 1 ta suy ra

$$\sum F_{ky} = 0; \sum \overline{m}_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (1.2.18)$$

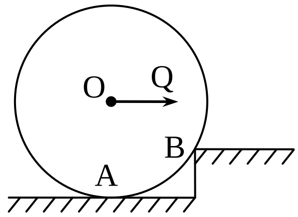
- Từ dạng 2 ta suy ra

$$\sum \overline{m}_A(\vec{F}_k) = 0; \sum \overline{m}_B(\vec{F}_k) = 0 \qquad (1.2.19)$$

Với đoạn AB không vuông góc với trục x hay không song song với các lực.

2.4 BÀI TẬP

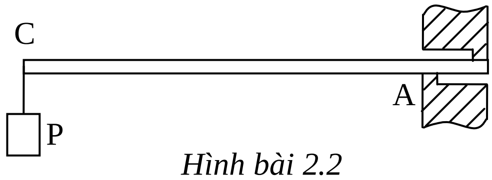
Bài 2.1: Dùng lực kéo Q nằm ngang để kéo bánh xe đồng chất bán kính R trọng lượng P từ mặt đường A vượt lên mặt đường B, bậc AB = h = R/2. Xác định phản lực liên kết tại A và B. Với giá trị nào của Q bánh xe có thể vượt qua bậc.



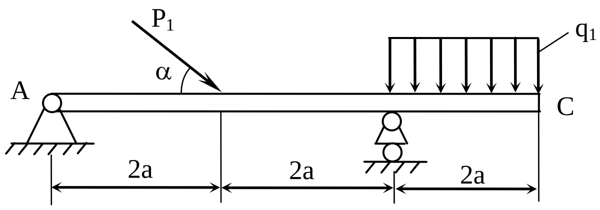
Hình bài 2.1

Bài 2.2: Dầm đồng chất dài 4m trọng lượng 5kN, được chôn thẳng góc vào bức tường dày 0,5m. Dầm làm việc ở chế độ tựa lên hai cạnh tường A và B. Đầu C của dầm treo vật nặng trọng lượng P = 40kN. Xác định các phản lực liên kết tại A và B.

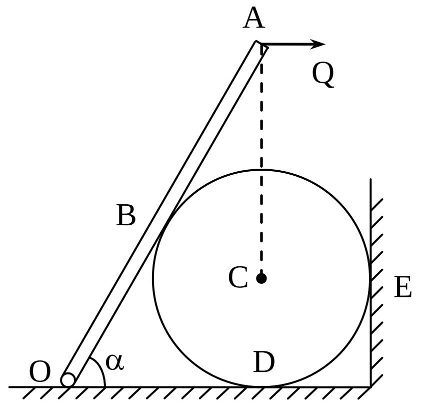
Bài 2.3: Cho dầm AC chịu tác dụng của lực như hình vẽ và được giữ nằm ngang nhờ gối cố định A và gối di động B. Hãy xác định phản lực liên kết tại A và B.



Hình bài 2.2



Hình bài 2.3



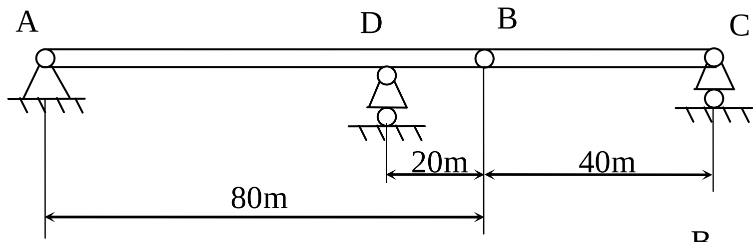
Hình bài 2.4

Bài 2.4: Cho lực nằm ngang Q tác dụng vào đầu A của cần OA, cần này quay được quanh bản lề O và ép vào khối trụ C tại B. Khối trụ có trọng lượng là P và nằm trong góc vuông giữa nền ngang và tường thẳng đứng. Bỏ qua trọng lượng của cần OA, biết OB = BA, $\alpha = 60^0$.

Hãy xác định các phản lực liên kết tại bản lề O, các điểm tựa D, E và lực tác dụng tương hỗ tại điểm tựa B.

Bài 2.5: Cầu có hai nhịp AB và BC (xem như hai dầm đồng chất), trong đó AB = 80m, BC = 40m, với các trọng lượng tương ứng là P = 1200kN và Q = 600kN nối với nhau bằng bản lề B và được đỡ nằm ngang nhờ gối cố định A và các gối di động C, D. Cho DB = 20m.

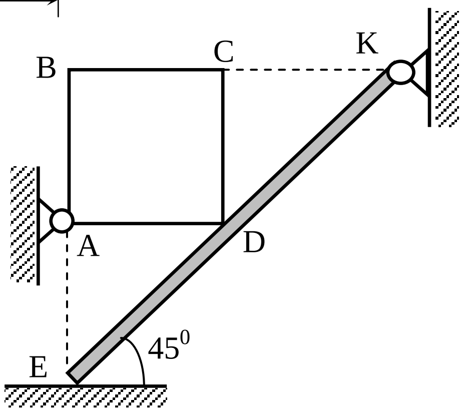
Xác định phản lực liên kết tại các gối đỡ và lực tác dụng tương hỗ tại B.



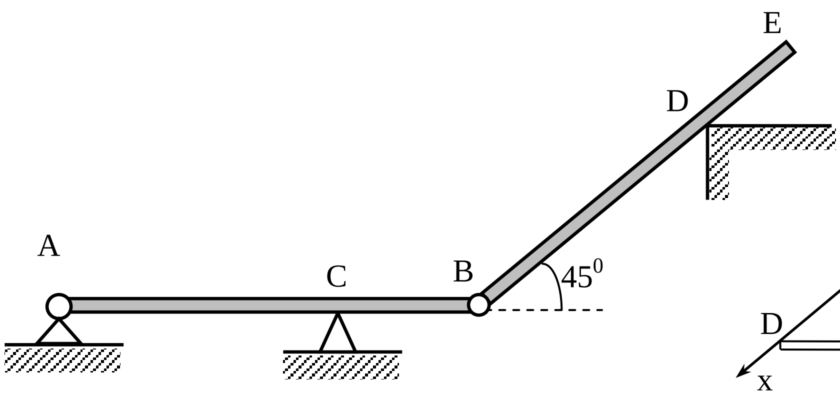
Hình bài 2.5

Bài 2.6: Tấm vuông đồng chất ABCD trọng lượng P, được giữ ở vị trí như hình vẽ nhờ gối cố định A và tựa lên thanh KE tại D. Thanh KE có trọng lượng không đáng kể và được giữ nghiêng một góc $\alpha = 45^0$ so với phương ngang nhờ bản lề A và tựa lên sàn nhẵn tại E.

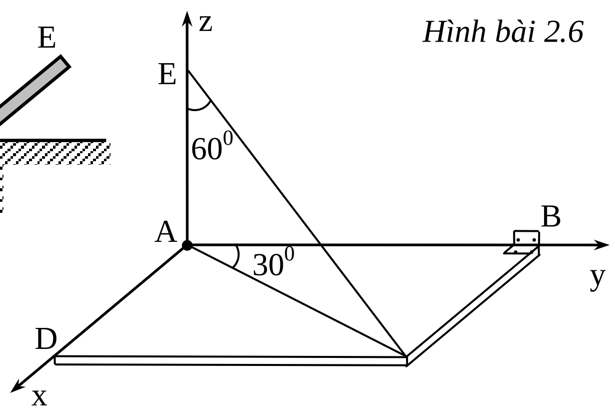
Hãy xác định các phản lực liên kết tại A, K, E và lực tác dụng tương hỗ tại D.



Hình bài 2.6



Hình bài 2.7

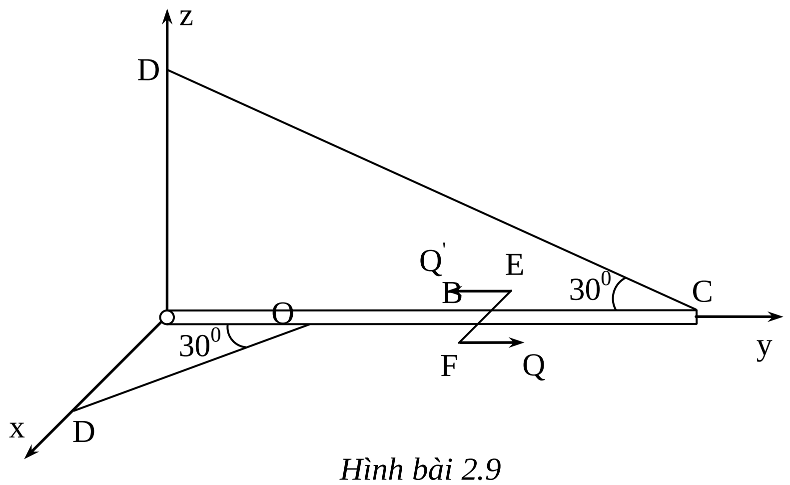


Hình bài 2.8

Bài 2.7: Dầm AB trọng lượng Q = 20kN, nối với dầm BE trọng lương P = 40kN nhờ bản lề B. Các dầm được giữ ở vị trí như hình vẽ nhờ gối cố định A và các điểm tựa C, D. Cho biết CB = AB/3, DE = BE/3. Hãy xác định các phản lực liên kết tại A, C, D và lực tác dụng tương hỗ tại B.

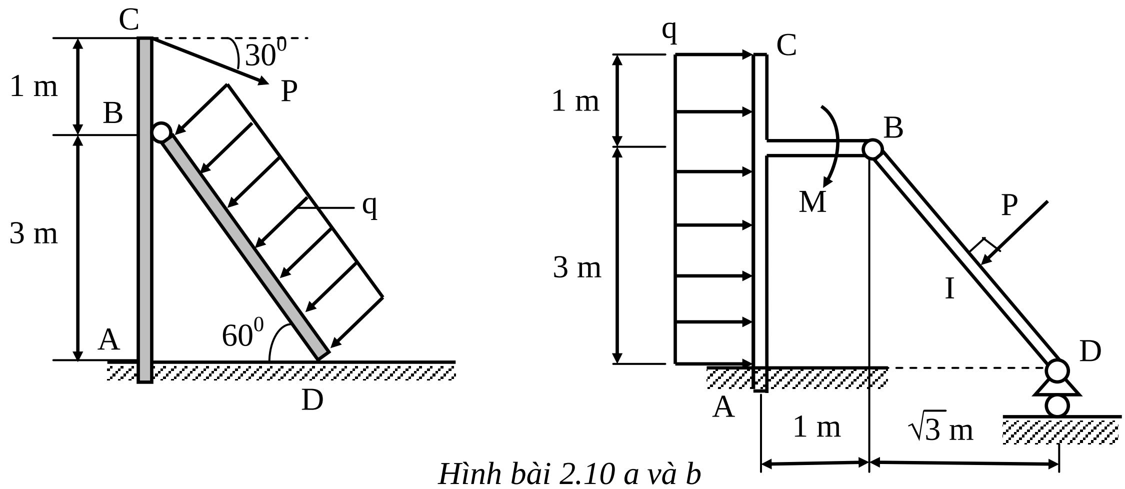
Bài 2.8: Tấm đồng chất hình chữ nhật trong lượng 200N, mắc vào tường nhờ gối cầu A, bản lề B và được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ dây CE. Biết dây CE nghiêng 60^0 với đường thẳng đứng AE, đường chéo AC nghiêng 30^0 với cạnh AB. Hãy tìm phản lực liên kết tại A, B và sức căng dây CE.

Bài 2.9: Dầm đồng chất OC dài 2m, trọng lượng P = 1000N, được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ liên kết cầu tại O và các dây CD và AB. Cho dầm chịu tác dụng của ngẫu lực $(\vec{Q},\vec{Q}')$ trong mặt phẳng nằm ngang, trị số Q = 100N, tay đòn EF = 20cm. Biết OB = 0,5m, hãy xác định phản lực liên kết tại O và sức căng các dây AB và CD.



Hình bài 2.9

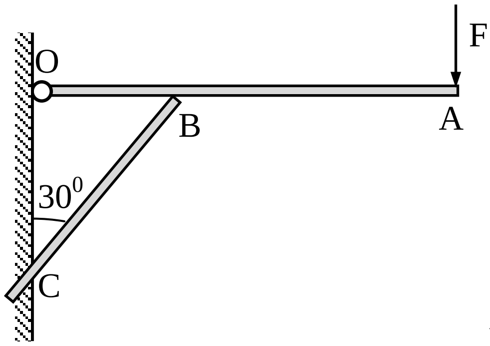
Bài 2.10: Cho hệ vật nằm cân bằng và chịu tác dụng của các lực như hình a và b. Với P, q và M là các đại lượng đã biết. Hãy xác định phản lực liên kết tại ngàm A, điểm tựa D và lực tác dụng tương hỗ tại bản lề B



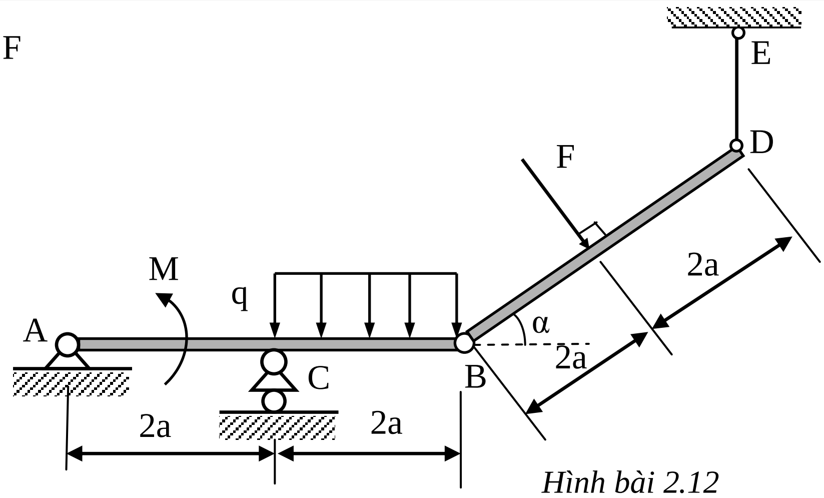
Hình bài 2.10 a và b

Bài 2.11: Thanh đồng chất OA = 6a, trọng lượng P gắn vào tường nhờ bản lề O và được đỡ nằm ngang nhờ thanh đồng chất BC = 4a, trọng lượng Q ngàm ở C và nghiêng 30^0 với tường. Đầu A chịu lực F thẳng đứng như hình vẽ. Xác định phản lực liên kết tại O, B và ngàm C.

Bài 2.12: Cho q, F, M, a và α= 30^0. Tìm lực liên kết tại bản lề A, bản lề B, gối di động C và sức căng dây.



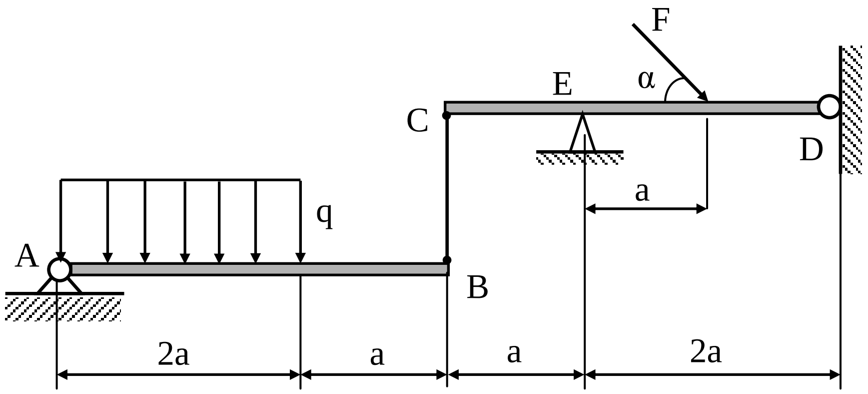
Hình bài 2.11



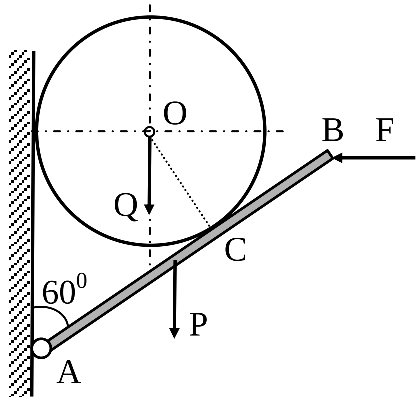
Hình bài 2.12

Bài 2.13: Hai thanh AB và CD với các trọng lượng tương ứng là P_1 và P_2. Các thanh được giữ nằm ngang nhờ gối cố định A, bản lề D, điểm tựa E và thanh BC không trọng lượng. Cho hệ thanh chịu các lực và có kích thước như hình vẽ. Xác định phản lực liên kết tại A, D, E và ứng lực thanh BC.

Bài 2.14: Đĩa có bán kính R, trọng lượng Q = 5 KN, thanh AB = 3R, trọng lượng P = 2 KN. Bỏ qua ma sát, tìm F để cân bằng và lực liên kết tại bản lề A, các điểm tựa C, D.

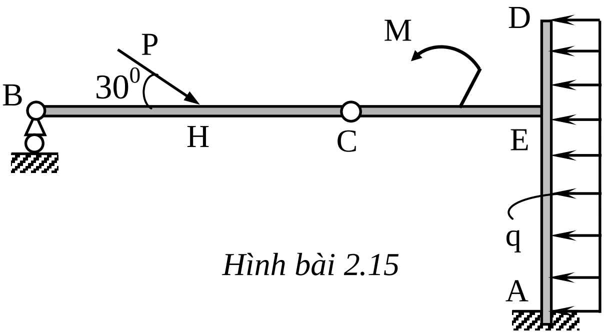


Hình bài 2.13



Hình bài 2.14

Bài 2.15: Cho hệ dầm ACB chịu liên kết như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các dầm. Chịu tác dụng các lực như hình vẽ. Biết P, q, M, và kích thước AD = 4a, AE = 3a, BE = 5a, CH = HB = 1,5a. Xác định phản lực liên kết tại B, C và tại A.



Hình bài 2.15

3. MA SÁT

3.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ PHÂN LOẠI

3.1.1 Định nghĩa

Ma sát là hiện tượng xuất hiện những lực và ngẫu lực, tại chỗ tiếp xúc của hai vật thể, chúng có tác dụng cản trở chuyển động hoặc xu hướng chuyển động tương đối của hai vật thể trên bề mặt của nhau.

3.1.2 Nguyên nhân của ma sát

- Do bề mặt tiếp xúc không nhẵn
- Do tính đàn hồi của vật liệu
- Do lực hút của các nguyên tử trên bề mặt vật liệu

3.1.3 Phân loại ma sát

Thông thường người ta phân loại ma sát như sau

a, Ma sát tĩnh và ma sát động

Ma sát được gọi là tĩnh khi giữa hai vật thể mới chỉ xuất hiện xu hướng chuyển động tương đối nhưng chúng vẫn ở trạng thái cân bằng tương đối. Ma sát được gọi là ma sát động khi hai vật thể chuyển động tương đối với nhau.

b, Ma sát trượt và ma sát lăn

- Nếu chuyển động hoặc xu hướng chuyển động giữa hai vật là trượt thì ma sát xuất hiện là ma sát trượt.
- Nếu chuyển động hoặc xu hướng chuyển động là lăn thì ma sát xuất hiện là ma sát lăn.

c, Ma sát khô và ma sát nhớt

Ma sát được gọi là khô khi hai vật tiếp xúc trực tiếp với nhau, và được gọi là ma sát nhớt khi hai vật tiếp xúc với nhau có một lớp chất lỏng ở giữa.

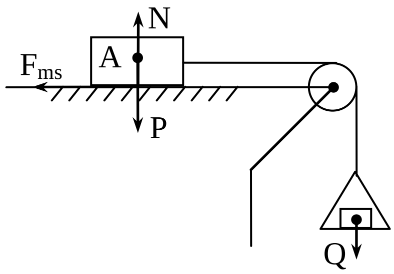
Đến nay bài toán ma sát mới chỉ giải quyết một cách gần đúng trên cơ sở các kết quả thực nghiệm. Dưới đây, trình bầy một số kết quả về ma sát trượt và lăn, tĩnh và động.

3.2 MA SÁT TRƯỢT

3.2.1 Thí nghiệm và các định luật ma sát trượt

a, Thí nghiệm

Cho mô hình thí nghiệm như hình vẽ. Khi đặt vào đĩa quả cân có trọng lượng là Q, vật A có xu hướng trượt sang phải. Nếu ở ổ trục của ròng rọc là trơn, nhẵn thì sức căng T của dây bằng cường độ của lực Q. Qua thí nghiệm ta thấy rằng, nếu lực Q nhỏ thì vật A vẫn đứng yên. Khi ta tăng Q đến giá trị Q^* đủ lớn thì A bắt đầu chuyển động. Như vậy khi $Q < Q^*$ thì vật A vẫn cân bằng, điều đó cho ta kết luận rằng phải có một lực nào đó tác dụng vào vật A ngược với xu hướng chuyển động của vật để cản trở chuyển động của nó. Lực đó được gọi là lực ma sát trượt, ký hiệu: $\vec{F}_{ms}$



Hình 1.3.1

b, Các định luật ma sát trượt

- Lực ma sát trượt xuất hiện khi có xu hướng trượt tương đối giữa hai vật, nó nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến chung của các mặt tiếp xúc, ngược hướng trượt (hoặc xu hướng trượt) và có giá trị biến thiên trong giới hạn

$$0 \le F_{ms} \le F_{max} \qquad (1.3.1)$$

- Lực ma sát trượt cực đại F_{max} tỷ lệ với phản lực pháp tuyến N

$$F_{max} = f.N \qquad (1.3.2)$$

Trong đó f là hệ số ma sát trượt

* *Chú ý*

- Hệ số ma sát trượt f được xác định bằng thực nghiệm, không có thứ nguyên. Nó phụ thuộc vào vật liệu và tính chất của bề mặt tiếp xúc chứ không phụ thuộc vào kích thước của bề mặt tiếp xúc.

- Khi vật còn cân bằng thì $F_{ms} < F_{max} = fN$, khi $F_{ms} = F_{max} = fN$ thì vật bắt đầu chuyển động. Hệ số ma sát f được xác định khi vật bắt đầu chuyển động là hệ số ma sát trượt tĩnh, còn trạng thái lúc bắt đầu chuyển động được gọi là trạng thái giới hạn.
- Khi vật chuyển động với vận tốc càng tăng, hệ số ma sát nói chung càng giảm đến một giá trị ổn định, lúc đó ta có hệ số ma sát trượt động

3.2.2 Góc ma sát

Xét vật A, giả sử vật có xu hướng trượt sang phải, khi đó phản lực liên kết toàn phần $\vec{R}$ được xác định như sau

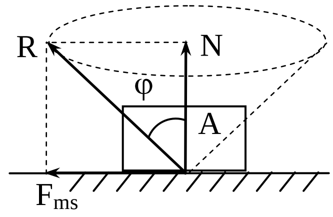
$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{ms}$$

Gọi φ là góc giữa $\vec{R}$ và $\vec{N}$, khi đó ta có

$$tg\varphi = \frac{F_{ms}}{N}$$

Khi vật ở trạng thái giới hạn $F_{ms} = F_{max} = fN$

$$\Rightarrow \quad tg\varphi = tg\varphi^* = \frac{f.N}{N} = f$$



Hình 1.3.2

Góc φ^* được xác định như trên được gọi là góc ma sát. Nếu cho vật A chuyển động theo mọi phương khác nhau trên mặt phẳng, ta sẽ thu được một tập hợp các góc ma sát, khi đó cho ta một hình nón được gọi là nón ma sát. Nếu theo mọi phương mà hệ số ma sát f = const thì ta sẽ được một nón ma sát tròn xoay.

3.2.3 Điều kiện cân bằng khi có ma sát trượt

Vật rắn muốn cân bằng thì hệ lực tác dụng lên nó, kể cả lực ma sát trượt phải thoả mãn điều kiện cân bằng của hệ lực. Ngoài ra lực ma sát trượt còn phải thoả mãn điều kiện:

$$0 \le F_{ms} \le F_{max} = f.N$$

Hoặc nếu xét phản lực toàn phần $\vec{R}$ thì nó phải nằm trong góc ma sát.

* *Chú ý*:

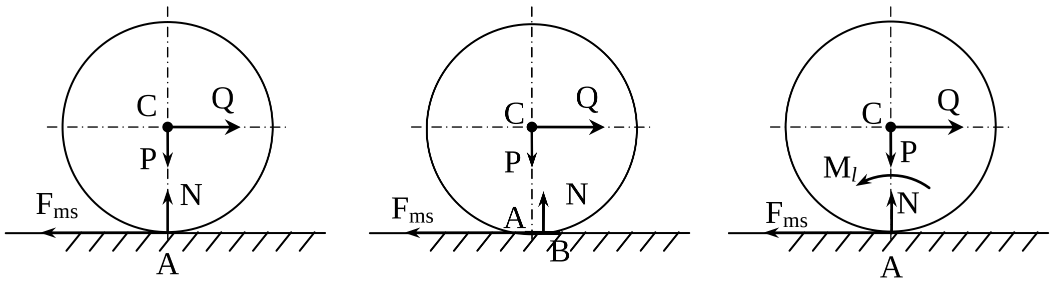
- Khi giải bài toán ta thường giải ở vị trí cân bằng giới hạn, khi đó ta có

  $$F_{ms} = F_{max} = f.N$$

  Sau đó từ kết quả có được ta suy ra trường hợp khi $F_{ms} < F_{max}$ và ta sẽ thu được một miền cân bằng.
- Nếu vật có nhiều xu hướng chuyển động khác nhau thì ta phải giải bài toán với từng xu hướng một.
- Lực ma sát có tính chất của nội lực

3.3 MA SÁT LĂN

3.3.1 Thí nghiệm



Hình 1.3.3

Cho mô hình thí nghiệm như hình 1.3.3.Từ hình vẽ ta thấy, khi đặt lực Q vào tâm C của con lăn thì để cản lại sự chuyển động trượt của nó tại A sẽ xuất hiện lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$. Chính lực ma sát này cùng với lực Q tạo thành một ngẫu lực làm cho con lăn lăn trên nền. Nhưng ta thấy nếu Q chưa đủ lớn thì con lăn vẫn chưa lăn, chứng tỏ có một ngẫu lực ngăn cản sự lăn của vật. Ngẫu lực đó được gọi là ngẫu lực ma sát lăn, ký hiệu: M_l.

** Chú ý*

Trong thực tế sự cản lăn của vật là do vật không rắn tuyệt đối nên sẽ bị biến dạng và tiếp xúc với nhau không phải tại một điểm mà cả một miền AB. Với sự tăng dần của Q, áp lực của con lăn lên nền ngang sẽ giảm dần ở A và tăng lên ở B, kết quả là phản lực $\vec{N}$ sẽ chuyển dời về phía tác dụng của lực Q, làm cho các lực $\vec{P}$ và $\vec{N}$ có đường tác dụng không trùng nhau nữa, tức là chúng mất cân bằng và tạo ra một ngẫu lực ngăn cản sự lăn của vật, đó chính là ngẫu lực ma sát lăn.

3.3.2 Các định luật ma sát lăn

- Ngẫu lực ma sát lăn xuất hiện khi có xu hướng lăn tương đối, có chiều ngược với chiều của xu hướng lăn và có giá trị biến thiên trong giới hạn

$$0 \le M_l \le M_{max} \qquad (1.3.3)$$

- Ngẫu lực ma sát lăn cực đại tỷ lệ với áp lực N

$$M_{max} = k.N \qquad (1.3.4)$$

với k là hệ số ma sát lăn

3.3.3 Điều kiện cân bằng khi có ma sát lăn

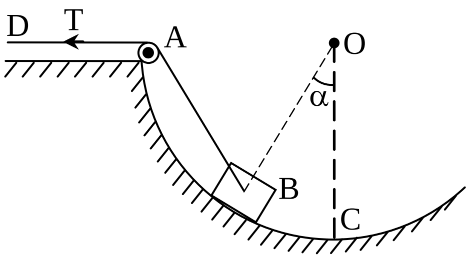
Khi tác dụng một lực lên con lăn thì xuất hiện xu hướng lăn nhưng đồng thời cũng xuất hiện xu hướng trượt, do đó tại chỗ tiếp xúc có phản lực pháp tuyến $\vec{N}$, lực ma sát trượt $\vec{F}_{ms}$ và ngẫu lực ma sát lăn có mômen M_l, khi đó điều kiện để cho vật cân bằng là hệ lực tác dụng lên nó (kể cả lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn) phải thoả mãn điều kiện cân bằng, đồng thời lực ma sát trượt và ngẫu lực ma sát lăn phải thoả mãn điều kiện:

$$0 \le F_{ms} \le F_{max} = f.N$$

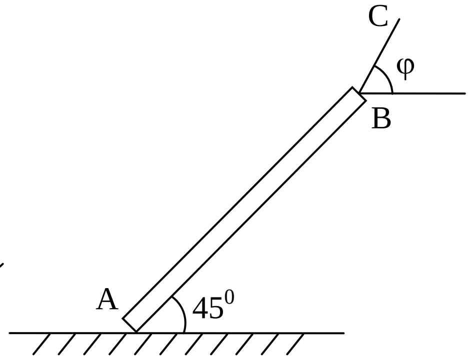
$$0 \le M_l \le M_{max} = k.N$$

3.4 BÀI TẬP

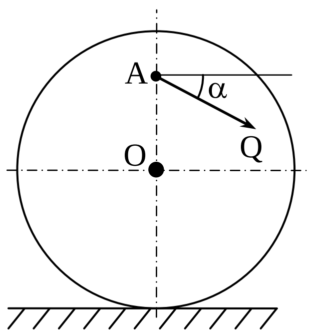
Bài 3.1: Vật B có trọng lượng P nằm trên một mặt không nhẵn có dạng một phần tư cung tròn và được giữ cân bằng nhờ lực kéo T đặt vào dây BAD. Cho hệ số ma sát trượt là f = tgφ. Tìm lực kéo T.



Hình bài 3.1



Hình bài 3.2

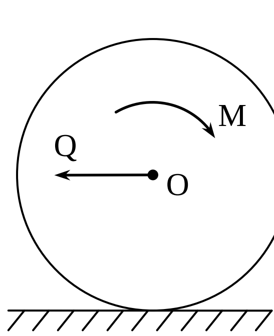


Hình bài 3.3

Bài 3.2: Thanh đồng chất AB có trọng lượng P, tựa lên nền không nhẵn nằm ngang ở đầu A và được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng 45^0 nhờ dây BC. Tìm góc nghiêng φ của dây khi thanh ở trạng thái sắp trượt. Hệ số ma sát giữa thanh và nền là f.

Bài 3.3: Trên mặt phẳng nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O, bán kính R trọng lượng P, chịu lực kéo Q nghiêng góc α với mặt phẳng nằm ngang và hướng xuống dưới, đặt tại điểm A trên đường thẳng đứng qua O. Biết OA = a, hệ số ma sát trượt f, hệ số ma sát lăn k, tìm góc nghiêng α để nó cân bằng.

Bài 3.4: Trên mặt nằm ngang có bánh xe đồng chất tâm O, bán kính R, trọng lượng P, chịu tác dụng của ngẫu lực M và lực Q như hình vẽ. Biết hệ số ma sát trượt là f, hệ số ma sát lăn là k. Xác định trị số mômen M và trị số Q để bánh xe cân bằng.



Hình bài 3.4

4. TRỌNG TÂM

4.1 TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN

4.1.1 Tâm của hệ lực song song

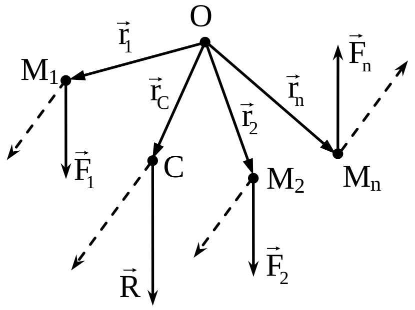
Cho hệ lực song song bất kỳ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ với $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \neq 0$ đặt tại các điểm M_1, M_2, …, M_n. Gọi gọi $\vec{r}_k = \overrightarrow{OM_k}$ là véctơ định vị của điểm M_k đối với gốc O, khi đó ta có định nghĩa

* *Định nghĩa*: Điểm hình học C gọi là tâm của hệ lực song song khi vị trí của nó được xác định bởi công thức:

$$\vec{r}_C = \overrightarrow{OC} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \vec{r}_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (1.4.1)$$

Trong đó $\overline{F}_k$ là hình chiếu của lực $\vec{F}_k$ trên trục Δ song song với các lực.

* *Tính chất*: Hợp lực của hệ lực song song đi qua điểm C và nếu ta quay các lực thành phần quanh các điểm đặt của chúng một góc α trong điều kiện giữ nguyên điểm đặt và giá trị của các lực thành phần thì hợp lực của chúng cũng quay quanh tâm C một góc α.



Hình 1.4.1

4.1.2 Trọng tâm của vật rắn

a, Định nghĩa

Khi vật rắn nằm gần trái đất, trọng tâm của vật rắn là tâm của hệ trọng lực của các phần tử tạo thành vật rắn.

b, Công thức xác định trọng tâm của vật rắn

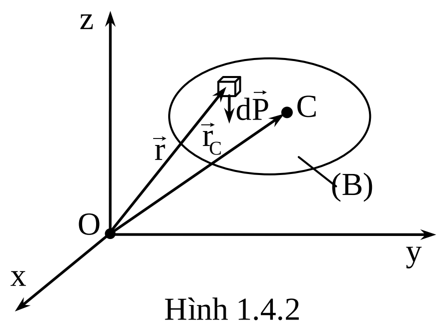
Chia vật rắn thành các phần tử nhỏ, giả sử phần tử thứ k có trọng lượng là ΔP_k và có véctơ định vị là $\vec{r}_k$, khi đó theo công thức (4.1) ta có.

$$\vec{r}_C = \sum \Delta P_k \vec{r}_k \Big/ \sum \Delta P_k$$

Khi số phần tử được chia tăng lên vô cùng thì ta có

$$\vec{r}_C = \frac{\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta P_k \to 0}} \sum \Delta P_k \vec{r}_k}{\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta P_k \to 0}} \sum \Delta P_k} = \frac{\int\limits_{(B)} \vec{r} dP}{\int\limits_{(B)} dP} = \frac{\int\limits_{(B)} \vec{r} dP}{P}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(B)} \vec{r} dP \qquad (1.4.2)$$



Hình 1.4.2

Công thức (4.2) là công thức xác định trọng tâm của vật rắn B, trong đó P là trọng lượng của vật rắn.

* Chú ý: Nếu ta gắn vào hệ quy chiếu O một hệ trục toạ độ Đề các vuông góc, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(B)} x dP; y_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(B)} y dP; z_C = \frac{1}{P} \int\limits_{(B)} z dP \end{cases} \qquad (1.4.3)$$

4.2 CÁC PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TRỌNG TÂM CỦA VẬT RẮN ĐỒNG CHẤT

4.2.1 Trọng tâm của vật rắn đồng chất đối xứng

* *Định lý 1*: Nếu vật rắn đồng chất có mặt phẳng (trục, tâm) đối xứng thì trọng tâm của nó nằm trên mặt phẳng (trục, tâm) đối xứng đó.

* *Hệ quả*

- Nếu vật rắn đồng chất có nhiều mặt phẳng đối xứng thì trọng tâm của vật rắn nằm trên đường giao của các mặt phẳng đối xứng đó.
- Nếu vật rắn đồng chất có nhiều trục đối xứng thì trọng tâm của vật rắn nằm tại giao điểm của các trục đối xứng đó.

4.2.2 Xác định trọng tâm của các vật ghép

* *Định lý 2*: Nếu vật rắn được ghép từ nhiều phần tử mà trọng tâm của các phần tử đó nằm nằm trên cùng một đường thẳng (hay mặt phẳng) thì trọng tâm của vật rắn cũng nằm trên đường thẳng (hay mặt phẳng) đó.

* *Chú ý*: Áp dụng định lý này ta suy ra được một số kết quả như sau

- Trọng tâm của một thanh đồng chất là điểm giữa của thanh
- Trọng tâm của tam giác đồng chất là giao điểm của các đường trung tuyến
- Trọng tâm của các hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, khối hộp chữ nhật, khối hộp lập phương đồng chất là tâm của chúng.

* *Định lý 3*: Nếu vật rắn được ghép từ nhiều phần, mỗi phần có trọng lượng P_i, trọng tâm $C_i(x_i, y_i, z_i)$ thì trọng tâm của vật được xác định theo công thức

$$x_C = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}; y_C = \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i}; z_C = \frac{\sum P_i z_i}{\sum P_i} \qquad (1.4.4)$$

* *Chú ý*: Nếu vật bị khuyết thì phần khuyết được coi là phần có trọng lượng âm.

PHẦN THỨ HAI: ĐỘNG HỌC

- Động học là phần thứ hai của giáo trình cơ học lý thuyết. Trong đó, chúng ta nghiên cứu chuyển động cơ học của các vật thể về mặt hình học, không quan tâm đến nguyên nhân gây ra chuyển động cũng như nguyên nhân gây ra sự biến đổi chuyển động của chúng.
- Trong phần này chúng ta nghiên cứu hai mô hình cơ bản của vật thể là động điểm và vật rắn.
    + Động điểm: Là một điểm hình học chuyển động
    + Vật rắn: Là tập hợp của vô số điểm mà khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ luôn luôn không đổi.
- Chuyển động xảy ra trong không gian, nhưng hoàn toàn có tính chất tương đối, phụ thuộc vào vật lấy làm mốc để theo dõi chuyển động. Thí dụ một chiếc ôtô đang chuyển động với một gốc cây nào đó đứng bên đường nhưng đứng yên đối với người ngồi trên ôtô đó. Như vậy muốn mô tả chuyển động của vật thể, ta phải chỉ rõ vật lấy làm mốc đã chọn. Vật lấy làm mốc để theo dõi vị trí của vật thể chuyển động được gọ là hệ quy chiếu. Việc chọn hệ quy chiếu là hoàn toàn tuỳ ý, nhằm tạo điều kiện thuận lợi cho việc khảo sát chuyển động của đối tượng. Để thuận tiện cho việc tính toán người ta thường gắn vào hệ quy chiếu một hệ trục toạ độ gọi là hệ toạ độ quy chiếu.
- Để tính thời gian trong quá trình chuyển động, người ta chọn một thời điểm tuỳ ý làm thời điểm gốc. Thông thường, ta lấy lúc bắt đầu khảo sát chuyển động của vật thể làm thời điểm gốc và ký hiệu là $t_0 = 0$.
- Các đặc trưng động học
    + Thông số định vị: Là những đại lượng dùng để xác định vị trí của động điểm hay vật rắn trong không gian
    + Phương trình chuyển động: Là những biểu thức toán học cho ta mối liên hệ giữa các thông số định vị và thời gian.
    + Quỹ đạo: Là đường cong mà ta tưởng tượng động điểm sẽ vạch ra trong không gian khi nó chuyển động.
    + Phương trình quỹ đạo: Là biểu thức toán học cho ta mối liên hệ giữa các thông số định vị với nhau. Tìm được bằng cách khử yếu tố thời gian trong phương trình chuyển động.
    + Vận tốc, ký hiệu: $\vec{v}$, là đại lượng nói lên hướng và tốc độ chuyển động của động điểm. Khi vật rắn chuyển động quay ta có khái niệm vận tốc góc, ký hiệu: $\vec{\omega}$
    + Gia tốc, ký hiệu: $\vec{a}$, là đại lượng đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc. Khi vật rắn chuyển động quay ta có khái niệm gia tốc góc, ký hiệu: $\vec{\varepsilon}$

Chương II: Động học điểm

Trong chương này chúng ta nghiên cứu chuyển động của điểm trong hệ quy chiếu đã xác định. Có nhiều phương pháp khác nhau để khảo sát chuyển động của điểm, song có ba phương pháp hay được sử dụng là: Phương pháp véc tơ, phương pháp toạ độ đề các, phương pháp toạ độ tự nhiên.

5.1 KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP VÉC TƠ

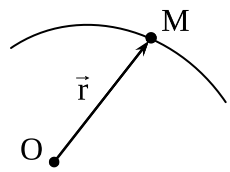
Phương pháp véc tơ là phương pháp tổng quát nhất để khảo sát chuyển động. Vì vậy phương pháp này thường xuyên được sử dụng để nghiên cứu về mặt lý thuyết cho cả chương này cũng như các chương sau.

5.1.1 Phương trình chuyển động của điểm

Khảo sát chuyển động của điểm M trong hệ quy chiếu O. Tại mỗi thời điểmvị trí của M sẽ được xác định hoàn toàn bởi véc tơ $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ($\vec{r}$ được gọi là véc tơ định vị của điểm M trong hệ quy chiếu O). Khi M chuyển động, vé tơ $\vec{r}$ sẽ biến thiên liên tục theo thời gian. Khi đó ta có phườn trình

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (2.5.1)$$

được gọi là phương trình chuyển động của điểm M viết dưới dạng véc tơ

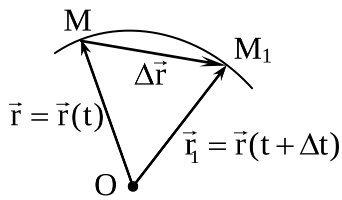


Hình 2.5.1

5.1.2 Vận tốc chuyển động của điểm

Véc tơ vận tốc của điểm là đại lượng đặc trưng cho sự biến đổi của véc tơ định vị $\vec{r}$ theo thời gian. Do vậy để xác định véc tơ vận tốc, chúng ta cần khảo sát sự biến đổi của $\vec{r}$ ở lân cận thời điểm t nào đó.

Khảo sát chuyển động của điểm trong hệ quy chiếu O. Giả sử ở thời điểm t, động điểm ở vị trí M được xác định bởi véc tơ $\vec{r} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$. Sang thời điểm $t_1 = t + \Delta t$, động điểm ở vị trí M_1 được xác định bởi véc tơ $\vec{r}_1 = \vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OM_1}$. Như thế sau khoảng thời gian Δt động điểm dịch chuyển được một đoạn là:



Hình 2.5.2

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$$

Khi đó đại lượng $\vec{v}_{tb} = \Delta\vec{r}/\Delta t$ được gọi là vận tốc trung bình của điểm trong khoảng thời gian Δt, kể từ thời điểm t. Véc tơ $\vec{v}_{tb}$ hướng dọc theo cát tuyến MM_1.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{tb} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (2.5.2)$$

Thì đại lượng $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ là vận tốc của điểm ở thời điểm t.

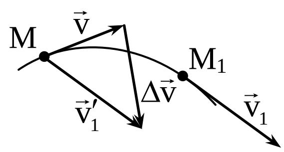
- Đơn vị: m/s
- Phương, chiều: Hướng theo tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M về phía chuyển động (vì khi $\Delta t \to 0 \Rightarrow M_1 \to M \Rightarrow \vec{v}_{tb} \to \vec{v} \Rightarrow$ cát tuyến $MM_1 \to$ tiếp tuyến tại M)

5.1.3 Gia tốc chuyển động của điểm

Véc tơ gia tốc của điểm đặc trưng cho sự biến đổi của véc tơ vận tốc $\vec{v}$ của nó. Do vậy, tương tự như đối với vận tốc, để xác định gia tốc, chúng ta khảo sát sự biến thiên của vận tốc tại lân cận thời điểm t.

Khảo sát chuyển động của điểm trong hệ quy chiếu O, giả sử ở thời điểm t động điểm ở vị trí M, có vận tốc là $\vec{v}$, sang thời điểm $t_1 = t + \Delta t$, động điểm ở vị trí M_1, có vận tốc là $\vec{v}_1$. Như thế sau khoảng thời gian Δt, vận tốc của điểm biến thiên một lượng là:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$$



Hình 2.5.3

Khi đó đại lượng $\vec{a}_{tb} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ được gọi là gia tốc trung bình của điểm trong khoảng thời gian Δt, kể từ thời điểm t. Véc tơ $\vec{a}_{tb}$ hướng dọc theo vec tơ $\Delta\vec{v}$.

Nếu tồn tại giới hạn

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_{tb} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \qquad (2.5.3)$$

Thì đại lượng: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ được gọi là gia tốc của điểm tại thời điểm t.

- Đơn vị: m/s^2
- Phương, chiều: Luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo

5.1.4 Nhận xét về một vài tính chất của chuyển động

- Khi động điểm chuyển động trên đường thẳng, vécto vận tốc $\vec{v}$ và vécto gia tốc $\vec{a}$ của nó luôn cùng phương dọc theo đường thẳng. Khi động điểm chuyển động trên đường cong, vécto vận tốc $\vec{v}$ nói chung thay đổi cả về hướng và trị số. Do đó các các vécto $\vec{v}$ và $\vec{a}$ nói chung không cùng phương. Từ đó ta có tiêu chuẩn nhận xét:

+ Nếu $\vec{v}\wedge\vec{a} \equiv 0$: Quỹ đạo chuyển động của điểm là một đường thẳng

+ Nếu $\vec{v}\wedge\vec{a} \neq 0$: Quỹ đạo chuyển động của điểm là một đường cong

- Mặt khác ta thấy $v^2 = \vec{v}^2$ đặc trưng cho sự thay đổi giá trị của vécto vận tốc $\vec{v}$, khi đó ta có

$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}.\vec{a}$$

+ Nếu $\vec{v}.\vec{a} = 0$: Điểm chuyển động đều.

+ Nếu $\vec{v}.\vec{a} > 0$: Điểm chuyển động nhanh dần

+ Nếu $\vec{v}.\vec{a} < 0$: Điểm chuyển động chậm dần.

5.2 KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ ĐỀ CÁC

5.2.1 Phương trình chuyển động của điểm

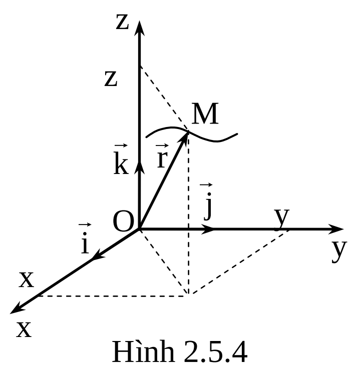
Khảo sát chuyển động của điểm M trong hệ quy chiếu O, ta gắn vào hệ quy chiếu đó một hệ trục toạ độ Đề các vuông góc Oxyz, khi đó vị trí của điểm M được xác định bởi

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Trong đó $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vécto đơn vị của hệ trục toạ độ Oxyz; x, y, z là các toạ độ của điểm M trong hệ toạ độ Oxyz. Khi M chuyển động, các toạ độ x, y, z sẽ biến thiên liên tục theo thời gian, khi đó ta có các phương trình

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (2.5.4)$$

được gọi là các phương trình chuyển động của điểm M dạng toạ độ Đề các.



Hình 2.5.4

**** Chú ý:***

- Nếu M chuyển động trong mặt phẳng thì số phương trình còn lại là 2.
- Nếu M chuyển động trên đường thẳng thì số phương trình còn lại là 1.

5.2.2 Vận tốc chuyển động của điểm

Theo công thức (1.2) ta có

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Gọi v_x, v_y, v_z là hình chiếu của $\vec{v}$ trên các trục toạ độ, khi đó ta có

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\Rightarrow \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (2.5.5)$$

Các cosin chỉ phương

$$\cos\alpha = \cos(Ox,\vec{v}) = \frac{v_x}{v};\ \cos\beta = \cos(Oy,\vec{v}) = \frac{v_y}{v};\ \cos\gamma = \cos(Oz,\vec{v}) = \frac{v_z}{v}$$

5.2.3 Gia tốc chuyển động của điểm

Từ công thức (1.3) ta có

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Gọi a_x, a_y, a_z là hình chiếu của $\vec{a}$ trên các trục toạ độ, khi đó ta có

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$\Rightarrow \quad a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (2.5.6)$$

Các côsin chỉ phương

$$\cos\alpha = \cos(Ox,\vec{a}) = \frac{a_x}{v}; \cos\beta = \cos(Oy,\vec{a}) = \frac{a_y}{v}; \cos\gamma = \cos(Oz,\vec{a}) = \frac{a_z}{v}$$

5.3 KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM BẰNG PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TỰ NHIÊN

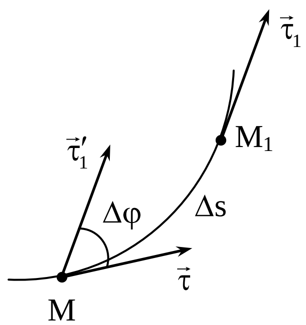
Phương pháp toạ độ tự nhiên được áp dụng khi biết trước quỹ đạo chuyển động của điểm.

5.3.1 Một vài tính chất của hình học quỹ đạo

a, Mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo

Để xác định mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo tại một điểm, ta phân làm hai trường hợp.

- Nếu quỹ đạo chuyển động của điểm là một đường cong phẳng, thì mặt phẳng chứa quỹ đạo đó là mặt phẳng mật tiếp tại mọi điểm của quỹ đạo.
- Nếu quỹ đạo chuyển động của điểm là một đường cong không gian, để xác định mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo tại một điểm M nào đó ta làm như sau: Trên quỹ đạo ngoài điểm M ta lấy thêm điểm M_1 như trên hình vẽ, qua M ta dựng tiếp tuyến $M\tau$, qua M_1 ta dựng tiếp tuyến $M_1\tau_1$. Qua M ta kẻ đường $M\tau_1' \,//\, M_1\tau_1$, khi đó qua hai đường thẳng $M\tau$ và $M\tau_1'$ ta luôn xác định được một mặt phẳng. Cho $M_1 \to M$ thì mặt phẳng vừa xác định ở trên sẽ dần đến một mặt phẳng giới hạn được gọi là mặt phẳng mật tiếp của quỹ đạo tại điểm M.



Hình 2.5.5

b, Độ cong của quỹ đạo

Ta gọi $\Delta\varphi = \left(M\tau, M\tau_1'\right), \Delta S = MM_1$ khi đó ta có các định nghĩa sau:

- Đại lượng $k = \lim\limits_{\Delta S \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dS}\right|$ được gọi là độ cong của quỹ đạo tại điểm M.
- Đại lượng $\rho = \frac{1}{k}$ được gọi là bán kính cong của quỹ đạo tại điểm M

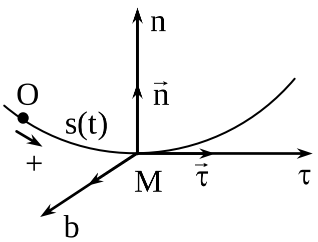
* Chú ý:

+ Với quỹ đạo là đường tròn, ta có: $k = 1/R \Rightarrow \rho = R$
+ Với quỹ đạo là đường thẳng, ta có: $k = 0 \Rightarrow \rho = \infty$

c, Hệ trục toạ độ tự nhiên

Là hệ trục toạ độ có gốc trùng với điểm M và có ba trục được xác định như sau

- Trục tiếp tuyến thuận, ký hiệu $M\tau$: có phương tiếp tuyến với quỹ đạo tại điểm M, có chiều theo chiều dương quy ước của quỹ đạo và có véctơ đơn vị là $\vec{\tau}$.



Hình 2.5.6

- Trục pháp tuyến chính, ký hiệu Mn: Nằm trong mặt phẳng mặt tiếp của quỹ đạo tại điểm M, có phương vuông góc với trục Mτ, có chiều luôn hướng vào tâm cong của quỹ đạo và có véctơ đơn vị là $\vec{n}$.
- Trục trùng pháp tuyến, ký hiệu Mb: Có phương vuông góc với hai trục Mτ và Mn, có chiều sao cho hệ trục toạ độ Mτnb tạo thành một tam diện thuận và có véctơ đơn vị là $\vec{b}$.

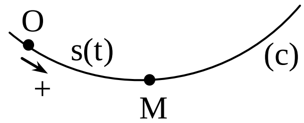
Như thế tại mỗi điểm của quỹ đạo ta luôn xác định được một hệ trục toạ độ tự nhiên.

5.3.2 Phương trình chuyển động của điểm

Khảo sát chuyển động của điểm M với quỹ đạo là đường cong (c), trong một hệ quy chiếu không gian. Trên quỹ đạo, ta chọn một điểm O tuỳ ý là gốc và định một chiều trên quỹ đạo làm chiều dương, khi đó vị trí của điểm M được xác định bởi cung $s = \overset{\frown}{OM}$. Khi M chuyển động thì s sẽ thay đổi liên tục theo thời gian, khi đó ta có phương trình

$$s = s(t)) \qquad (2.5.7)$$

biểu diễn quy luật chuyển động của điểm M theo quỹ đạo (c) được gọi là phương trình chuyển động của điểm dạng toạ độ tự nhiên.



Hình 2.5.7

5.3.3 Vận tốc chuyển động của điểm

Xét chuyển động của điểm M trên quỹ đạo (c) trong một hệ quy chiếu không gian nào đó. Gọi $\vec{r}$ là véctơ định vị của điểm M trong hệ quy chiếu không gian đó, theo công thức (2.5.2) khi đó ta có

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\vec{r}}{ds}$$

Trong hình học vi phân người ta đã chứng minh $d\vec{r}/ds = \vec{\tau}$, thay vào trên ta được.

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} \qquad (2.5.8)$$

Vậy véctơ vận tốc có:

+ Phương: theo phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M
+ Chiều: cùng chiều với $\vec{\tau}$ nếu $\dot{s} > 0$, ngược chiều với $\vec{\tau}$ nếu $\dot{s} < 0$ (Hay nó luôn hướng theo chiều chuyển động của điểm)
+ Trị số: $v = |\vec{v}| = |\dot{s}|$

Nếu ta đặt $\bar{v} = \dot{s} \Rightarrow \vec{v} = \bar{v}.\vec{\tau}$

5.3.4 Gia tốc chuyển động của điểm

Từ công thức (2.5.8) ta có

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{\tau}\right) = \frac{d\dot{s}}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\dot{s} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

Trong hình học vi phân người ta đã chứng minh được $d\vec{\tau}/ds = \vec{n}/\rho$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{\vec{n}}{\rho} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} \qquad (2.5.9)$$

Vậy gia tốc chuyển động của điểm được phân làm hai thành phần. Một thành phần theo phương tiếp tuyến, một thành phần theo phương pháp tuyến.

a, Thành phần theo phương tiếp tuyến

Ký hiệu: $\vec{a}_\tau$ gọi là gia tốc tiếp, được xác định bởi công thức $\vec{a}_\tau = \dot{\bar{v}}\vec{\tau} = \ddot{s}\vec{\tau}$

+ Có phương, theo phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm khảo sát.
+ Có chiều, cùng chiều với $\vec{\tau}$ nếu $\ddot{s} > 0$ và ngược chiều với $\vec{\tau}$ nếu $\ddot{s} < 0$ (Hay nó theo chiều chuyển động của điểm nếu điểm chuyển động nhanh dần và ngược chiều chuyển động nếu điểm chuyển động chậm dần).
+ Trị số: $a_\tau = |\vec{a}_\tau| = |\ddot{s}|$
+ Nó đặc trưng cho sự biến đổi vận tốc về mặt trị số (Thật vậy ta thấy khi v = const $\Rightarrow a_\tau = 0$, khi $v \neq$ const $\Rightarrow a_\tau \neq 0$)

b, Thành phần theo phương pháp tuyến

Ký hiệu: $\vec{a}_n$ gọi là gia tốc pháp, được cho bởi công thức $\vec{a}_n = \dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$

+ Có phương, theo phương pháp tuyến của quỹ đạo

+ Có chiều theo chiều dương của trục pháp tuyến chính (Luôn hướng về tâm cong của quỹ đạo)

+ Trị số: $a_n = |\vec{a}_n| = v^2/\rho$

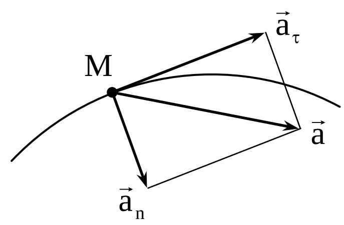
+ Nó đặc trưng cho sự biến đổi của vận tốc về phương (Thật vậy, khi quỹ đạo là đường thẳng thì vận tốc $\vec{v}$ không đổi phương và ρ = ∞ ⇒ $a_n = v^2/\rho = 0$, khi quỹ đạo là đường cong thì vận tốc $\vec{v}$ thay đổi phương khi điểm chuyển động và ρ ≠ ∞ ⇒ $a_n = v^2/\rho = 0$)

c, Gia tốc toàn phần

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (2.5.10)$$

+ Có phương, chiều luôn hướng về phía lõm của quỹ đạo.

+ Có trị số: $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \dfrac{v^4}{\rho^2}}$



Hình 2.5.8

5.3.5 Các chuyển động đặc biệt

a, Chuyển động đều (v = const)

Vì v = const nên chuyển động của điểm không đổi chiều, ta chọn chiều dương quy ước của quỹ đạo theo chiều chuyển động của điểm, khi đó ta có

$$s = s_0 + vt \qquad (2.5.11)$$

b, Chuyển động biến đổi đều (a_τ = const)

Chuyển động của điểm cũng không đổi chiều, ta cũng chọn chiều dương của quỹ đạo theo chiều chuyển động của điểm, khi đó ta có

$$\begin{cases} v = \dot{s} = v_0 \pm a_\tau t \\ s = s_0 + v_0 t \pm \dfrac{1}{2} a_\tau t^2 \end{cases} \qquad (2.5.12)$$

Lấy dấu (+) khi điểm chuyển động nhanh dần, lấy dấu (-) khi điểm chuyển động chậm dần.

Chương III: Chuyển động cơ bản của vật rắn

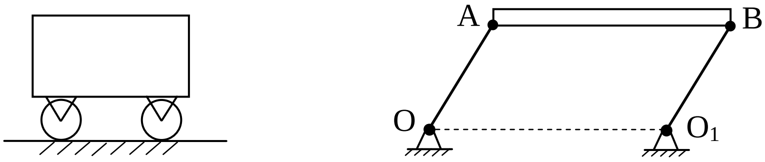
6.1 CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN CỦA VẬT RẮN

6.1.1 Định nghĩa và ví dụ

* *Định nghĩa*: Chuyển động tịnh tiến của vật rắn là chuyển động mà mỗi đoạn thẳng thuộc vật luôn luôn song song với vị trí ban đầu của nó.

* *Ví dụ*

- Chuyển động của thùng xe trên đoạn đường thẳng
- Chuyển động của thanh truyền AB trong cơ cấu bốn khâu, có các tay quay $O_1A = O_2B$.



Hình 2.6.1

* Chú ý:

- Không có khái niệm điểm chuyển động tịnh tiến
- Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, các điểm thuộc vật có thể chuyển động không thẳng, không đều

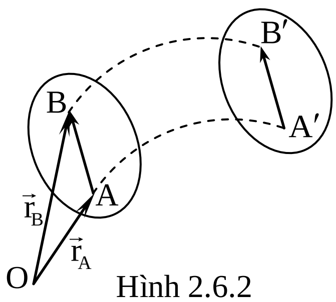
6.1.2 Tính chất của chuyển động

* *Định lý*: Khi vật rắn chuyển động tịnh tiến, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc các điểm thuộc vật là như nhau.

* *Chứng minh*

Giả sử có vật rắn chuyển động tịnh tiến trong hệ quy chiếu O, ta lấy hai điểm A, B bất kỳ thuộc vật, khi đó từ hình vẽ ta có

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB}$$



Hình 2.6.2

Vì hai điểm A, B thuộc vật rắn nên độ dài đoạn AB không đổi. Mặt khác, vì vật rắn chuyển động tịnh tiến nên suy ra $\overrightarrow{AB}$ luôn song song với vị trí ban đầu của nó $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{const}$. Lần lượt đạo hàm lần thứ nhất và lần thứ hai đẳng thức trên theo thời gian ta được

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}_B}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A \\ \dfrac{d\vec{v}_B}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \dfrac{d\vec{v}_A}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

* *Kết luận*

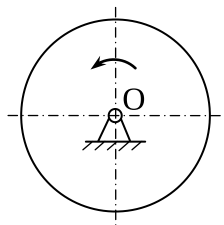
Từ định lý trên ta thấy, việc khảo sát chuyển động tịnh tiến của vật rắn có thể đưa về khảo sát chuyển động của một điểm bất kỳ thuộc vật.

6.2 CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH CỦA VẬT RẮN

6.2.1 Định nghĩa và ví dụ

* *Định nghĩa*: Chuyển động của vật rắn có hai điểm cố định, do đó có một trục đi qua hai điểm đó cố định, được gọi là chuyển động quay quanh một trục cố định của vật rắn. Trục cố định đó được gọi là trục quay của vật.

* *Ví dụ*: Vô lăng quay quanh trục O được cho như hình 2.6.3



Hình 2.6.3

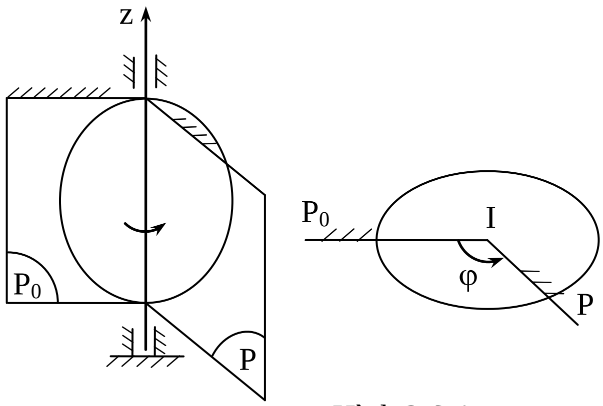
6.2.2 Khảo sát chuyển động của vật

a, Phương trình chuyển động

Khảo sát chuyển động của vật rắn quay quanh trục cố định z như hình vẽ, ta chọn quy ước một chiều quay dương (thường ngược chiều quay của kim đồng hồ).Qua trục quay z ta dựng mặt phẳng P_0 cố định và mặt phẳng P gắn chặt vào vật, gọi φ là góc giữa mặt phẳng P_0 và mặt phẳng P. khi vật quay thì góc quay φ sẽ thay đổi liên tục theo thời gian và vị trí của vật được xác định bởi vị trí của mặt phẳng P so với mặt phẳng P_0, tức là được xác định bởi góc quay φ, khi đó ta có phương trình

$$\varphi = \varphi(t) \qquad (2.6.2)$$

Là phương trình chuyển động của vật rắn quay quanh trục cố định.



Hình 2.6.4

Chú ý: Góc quay φ có thể dương hay âm tuỳ thuộc vào chiều quay dương đã chọn. Thông thường ta chon chiều quay dương là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ

+ Nếu $\varphi > 0$, vật quay theo chiều dương quy ước.

+ Nếu $\varphi < 0$, vật quay ngược chiều quay dương quy ước.

b, Vận tốc góc và gia tốc góc của vật

Để đặc trưng cho chuyển động quay của vật rắn quanh một trục cố định, người ta đưa vào các khái niệm vận tốc góc và gia tốc góc.

* *Vận tốc góc*

Đại lượng

$$\overline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \qquad (2.6.3)$$

gọi là vận tốc góc của vật.

- Dấu của $\overline{\omega}$ cho biết chiều quay của vật quanh trục: Nếu $\overline{\omega} = \dot{\varphi} > 0$ thì vật quay theo chiều dương, nếu $\overline{\omega} = \dot{\varphi} < 0$ vật quay theo chiều âm.
- Giá trị $\omega = |\overline{\omega}|$ cho biết độ nhanh chậm của chuyển động quay: ω càng lớn vật quay càng nhanh.
- Đơn vị: rad/s hoặc 1/s

* *Gia tốc góc*

Đại lượng

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\varphi} \qquad (2.6.4)$$

gọi là gia tốc góc của vật.

- Đơn vị: rad/s^2 hay $1/s^2$
- Nó đặc trưng cho sự biến thiên của vận tốc góc theo thời gian.

* ***Chú ý***:

- Trong kỹ thuật, người ta hay sử dụng đơn vị vòng/phút, giả sử vật quay với tốc độ là n (vòng/phút), khi đó ta có:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \qquad (2.6.5)$$

- Để tuận tiện cho việc sử dụng sau này, người ta biểu diễn vận tốc góc bằng một véctơ, ký hiệu: $\vec{\omega}$ gọi là véctơ vận tốc góc.

  + Có phương theo phương của trục quay

+ Có chiều, sao cho khi nhìn từ đầu mút của nó xuống, thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ
+ Có độ lớn: $|\vec{\omega}| = \omega$

- Cũng tương tự như vận tốc góc người ta cũng có thể biểu diễn gia tốc góc bằng một véctơ được gọi là véctơ gia tốc góc, ký hiệu: $\vec{\varepsilon}$
  + Có phương theo phương của trục quay
  + Có chiều phụ thuộc vào dấu của $\overline{\varepsilon}$: Nếu $\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} > 0$ thì $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ cùng chiều, ngược lại nếu $\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} < 0$ thì $\vec{\omega}$ và $\vec{\varepsilon}$ ngược chiều
  + Có độ lớn: $|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon$

c, Các chuyển động đặc biệt

- *Chuyển động quay đều*: $\overline{\omega} = \text{const}$, $\overline{\varepsilon} = 0$, ta chọn chiều quay dương quy ước theo chiều quay của vật khi đó ta có

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \qquad (2.6.6)$$

- *Chuyển động quay biến đổi đều*: $\overline{\varepsilon} = \text{const}$, ta chọn chiều quay dương quy ước theo chiều quay của vật, khi đó

+ Nếu $\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} > 0$ vật quay nhanh dần đều, ta có

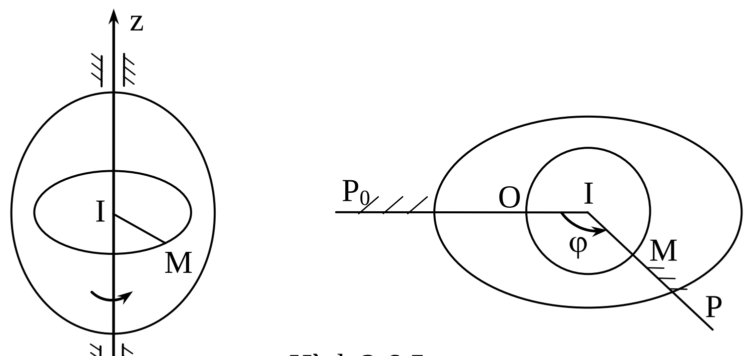
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \end{cases} \qquad (2.6.7)$$

+ Nếu $\overline{\omega}.\overline{\varepsilon} < 0$ vật quay chậm dần đều, ta có

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 - \varepsilon t \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2 \end{cases} \qquad (2.6.8)$$

6.2.3 Khảo sát chuyển động của các điểm thuộc vật

Khảo sát chuyển động của một điểm M bất kỳ thuộc vật rắn quay quanh trục cố định. Gọi R = IM là khoảng cách từ điểm khảo sát đến trục quay của vật. Khi vật rắn chuyển động quay thì quỹ đạo của điểm M sẽ là một đường tròn tâm I, bán kính R, nằm trong mặt phẳng đi qua M và vuông góc với trục quay. Do biết trước quỹ đạo chuyển động của điểm M nên ta sử dụng phương pháp toạ độ tự nhiên để khảo sát chuyển động của điểm M.



Hình 2.6.5

a, Phương trình chuyển động của điểm

Chọn điểm O trên quỹ đạo thuộc mặt phẳng P_0 làm gốc, chọn chiều dương của quỹ đạo theo chiều quay dương của vật, khi đó vị trí của điểm M được xác định bởi cung $s = \overset{\frown}{OM} = R\varphi$. Khi vật quay thì φ sẽ thay đổi theo thời gian, khi đó ta có phương trình

$$s = R.\varphi(t) \qquad (2.6.9)$$

là phương trình chuyển động của điểm thuộc vật rắn quay quanh trục cố định.

b, Vận tốc chuyển động của điểm

Ta có

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau} = R.\dot{\varphi}\vec{\tau} = R\overline{\omega}\vec{\tau} \tag{2.6.10}$$

Vậy vận tốc của điểm M có

+ Phương, theo phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm M (tức $\vec{v} \perp IM$)

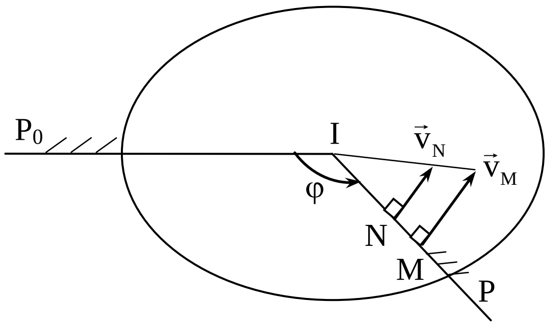
+ Chiều, thuận chiều $\overline{\omega}$ (Tức là thuận chiều quay của vật quanh trục)

+ Trị số: $v_M = \left|\vec{v}_M\right| = \left|R.\overline{\omega}\right| = R.\omega$

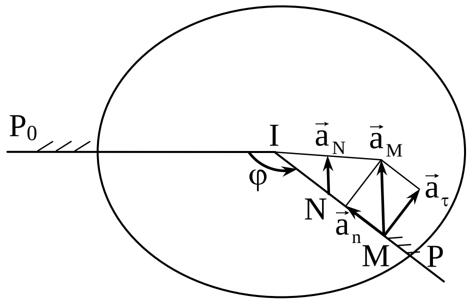
Mặt khác ta thấy

$$v_M = IM.\omega, v_N = IN.\omega \Rightarrow \frac{v_M}{IM} = \frac{v_N}{IN} = \omega$$

Như thế, vận tốc các điểm thuộc vật rắn quay quanh một trục cố định được phân bố quanh trục quay theo quy tắc tam giác vuông đồng dạng (Hình 2.6.6).



Hình 2.6.6



Hình 2.6.7

c, Gia tốc của điểm

Ta có $\quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

- Gia tốc tiếp tuyến: $\vec{a}_\tau$

$$\vec{a}_\tau = \ddot{s}\vec{\tau} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} = R\overline{\varepsilon}\vec{\tau} \tag{2.6.11}$$

+ Phương, theo phương tiếp tuyến của quỹ đạo tại điểm ($\vec{a}_\tau \perp IM$)

+ Chiều thuận chiều $\overline{\varepsilon}$

+ Trị số: $a_\tau = \left|R\overline{\varepsilon}\vec{\tau}\right| = \left|R\overline{\varepsilon}\right| = R\varepsilon$

- Gia tốc pháp tuyến: $\vec{a}_n$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = \frac{R^2\omega^2}{R}\vec{n} = R\omega^2\vec{n} \tag{2.6.12}$$

+ Phương, chiều: Hướng từ $M \to I$

+ Trị số: $a_n = \left|R\omega^2\vec{n}\right| = R\omega^2$

- Gia tốc toàn phần

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \tag{2.6.13}$$

Mặt khác ta thấy

$$a_M = IM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; a_N = IN\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \Rightarrow \frac{a_M}{IM} = \frac{a_N}{IN} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Vậy gia tốc các điểm thuộc vật rắn quay quanh trục cố định được phận bố quanh trục quay theo quy tắc tam giác thường đồng dạng với hệ số đồng dạng là $\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

d, Công thức Ơle

Khảo sát vật rắn quay quanh trục cố định z như hình vẽ, xét điểm M bất kỳ thuộc vật, khi đó ta có công thức sau được gọi là công thức Ơle.

$$\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad (2.6.14)$$

Trong đó $\vec{\omega}$ là véctơ vận tốc góc của vật, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ là véctơ định vị của điểm M đối với điểm O bất kỳ thuộc trục quay của vật.

* Chứng minh: Ta thấy tích $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ là một véctơ có

+ Phương $\perp$ với mặt phẳng chứa $\vec{\omega}$ và $\vec{r}$ tức là $\perp$ mặt phẳng (OIM) $\Rightarrow \perp$ IM

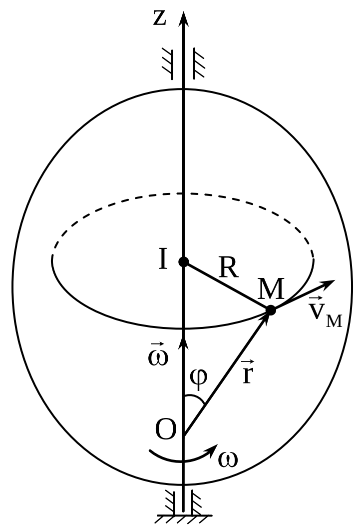
+ Chiều, sao cho các véctơ $\vec{\omega}$, $\vec{r}$ và $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ tạo thành một tam diện thuận (tức cùng chiều với $\vec{v}_M$)

+ Trị số: $|\vec{\omega} \wedge \vec{r}| = \omega.r.\sin\alpha = \omega.R = v_M$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

* Bằng cách chứng minh tương tự như trên ta cũng có được

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{r}; \vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge \vec{v} \qquad (2.6.15)$$

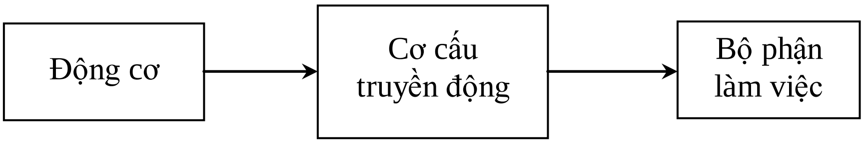


Hình 2.6.8

6.3 TRUYỀN ĐỘNG CƠ KHÍ ĐƠN GIẢN

6.3.1 Vị trí khâu truyền động trong máy

Trong một máy hoặc một tổ hợp máy thường gồm ba phần: Động cơ, cơ cấu truyền động, bộ phận làm việc. Vị trí của các phần được cho như hình 2.6.9

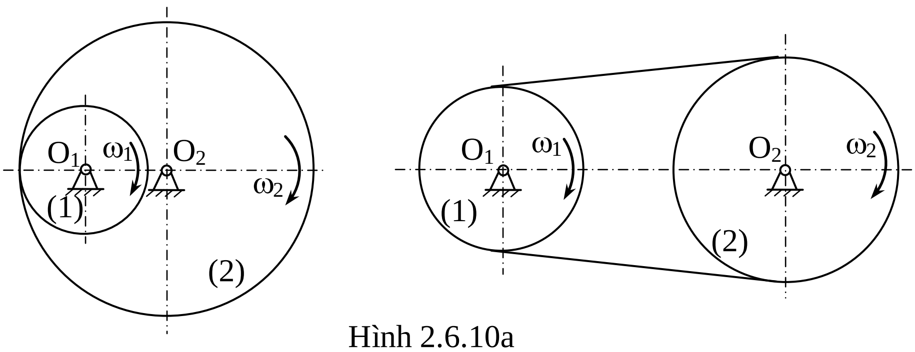


Hình 2.6.9

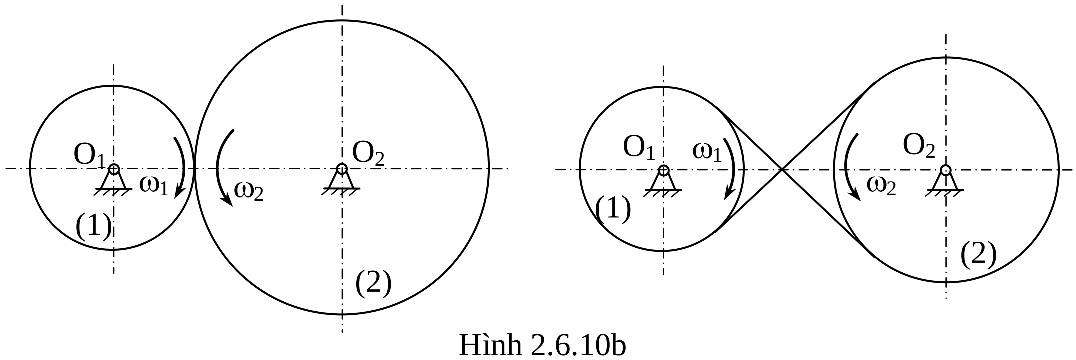
6.3.2 Vài loại truyền động đơn giản

a, Truyền động bằng cơ cấu bánh răng, đai truyền và xích

Để truyền các chuyển động quay giữa hai trục cố định song song với nhau người ta thường dùng các cơ cấu bánh răng, đai truyền và xích, như trong các hình 2.6.10a,b



Hình 2.6.10a



Hình 2.6.10b

\+ Đối với hình vẽ a cho ta các chuyển động cùng chiều, ta có:

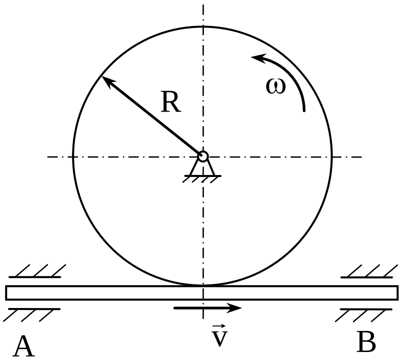
$$\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = \frac{r_2}{r_1}; \frac{\overline{\varepsilon}_1}{\overline{\varepsilon}_2} = \frac{r_2}{r_1} \tag{2.6.16}$$

\+ Đối với hình vẽ b cho ta các chuyển động ngược chiều, ta có

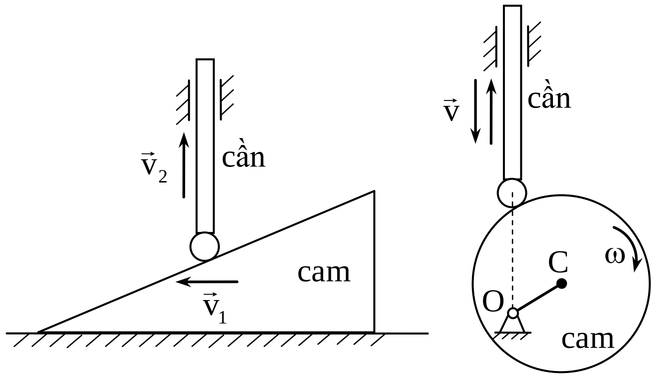
$$\frac{\overline{\omega}_1}{\overline{\omega}_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \frac{\overline{\varepsilon}_1}{\overline{\varepsilon}_2} = -\frac{r_2}{r_1} \tag{2.6.17}$$

b, Truyền động bằng cơ cấu bánh răng-thanh răng

Để truyền chuyển động giữa một vật quay và một vật chuyển động tịnh tiến, người ta sử dụng cơ cấu bánh răng-thanh răng hoặc cơ cấu bánh-thanh ma sát. Như trong hình 2.6.11, từ hình vẽ ta có: v = Rω



Hình 2.6.11



Hình 2.6.12

c, Truyền động bằng cơ cấu cam

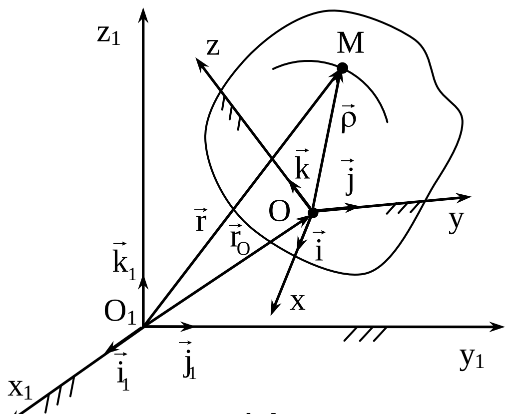
Để truyền chuyển động tịnh tiến thành chuyển động tịnh tiến hoặc truyền chuyển động quay thành chuyển động tịnh tiến người ta có thể sử dụng cơ cấu cam như trong hình 2.6.12

Chương IV: Hợp chuyển động của điểm

7.1 ĐẶT BÀI TOÁN VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA

7.1.1 Đặt bài toán

Trong chương động học điểm, ta đã khảo sát chuyển động của điểm M so với hệ trục toạ độ Oxyz cố định. Trong chương này, ta khảo sát chuyển động của điểm M so với hệ trục Oxyz và hệ trục này lại chuyển động so với hệ trục $O_1x_1y_1z_1$ cố định và ta phải đi xác định chuyển động chuyển động của điểm M so với hệ trục cố định $O_1x_1y_1z_1$.



Hình 2.7.1

7.1.2 Các định nghĩa

Như trên đã xác định, hệ trục Oxyz là hệ trục động còn hệ trục $O_1x_1y_1z_1$ là hệ trục cố định, khi đó ta có các định nghĩa

- Chuyển động tuyệt đối: Là chuyển động của điểm M so với hệ trục cố định $O_1x_1y_1z_1$. Vận tốc và gia tốc của điểm trong chuyển động này được gọi là vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối, ký hiệu: $\vec{v}_a, \vec{a}_a$.
- Chuyển động tương đối: là chuyển động của điểm M so với hệ trục động Oxyz. Vận tốc và gia tốc của điểm trong chuyển động này được gọi là vận tốc tương đối và gia tốc tương đối, ký hiệu: $\vec{v}_r, \vec{a}_r$.
- Chuyển động theo: Là chuyển động của hệ động Oxyz so với hệ cố định $O_1x_1y_1z_1$. Bản thân điểm M không thực hiện chuyển động này nhưng do nó tồn tại trên hệ động nên hệ động truyền chuyển động cho nó. Tại mỗi thời điểm, động điểm M sẽ trùng với một điểm M^* của hệ động được gọi là trùng điểm. Vận tốc và gia tốc của trùng điểm M^* chính là vận tốc và gia tốc mà hệ động truyền cho động điểm M tại thời điểm ấy, gọi là vận tốc theo và gia tốc theo, ký hiệu: $\vec{v}_e, \vec{a}_e$

* *Chú ý*

- Tại Các thời điểm khác nhau ta có các trùng điểm M^* khác nhau, với các vận tốc theo và gia tốc theo khác nhau. Tập hợp các điểm M^* trong hệ toạ độ động chính là quỹ đạo tương đối của động điểm M.

- Chuyển động tuyệt đối là tổng hợp của hai chuyển động thành phần, tương đối và theo. Muốn nhận biết chuyển động tương đối, ta tưởng tượng hệ động đứng yên và chuyển động xảy ra tiếp theo thể hiện chuyển động tương đối. Ngược lại muốn nhận biết chuyển động theo, ta tưởng tượng điểm M dừng lại trên hệ động và chuyển động xảy ra tiếp theo thể hiện chuyển động theo.

- Từ hình vẽ ta thấy

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$$

Gọi X, Y, Z là các toạ độ của điểm M trong hệ toạ động Oxyz, khi đó ta có

$$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

+ Trong chuyển động tuyệt đối, cả 7 đại lượng $\vec{r}_0, x, y, z, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ đều biến đổi theo thời gian

+ Trong chuyển động tương đối, chỉ có các đại lượng x, y, z biến đổi theo thời gian.

+ Trong chuyển động theo, các đại lượng $\vec{r}_0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ biến đổi theo thời gian.

7.2 ĐỊNH LÝ HỢP VẬN TỐC VÀ ĐỊNH LÝ HỢP GIA TỐC

7.2.1 Định lý hợp vận tốc

* *Định lý*: Trong chuyển động phức hợp, ở mỗi thời điểm, vận tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học các vận tốc tương đối và vận tốc theo của nó.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \qquad (2.7.1)$$

* *Chứng minh*: Ta có

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Đạo hàm theo thời gian hai vế đẳng thức trên lần lượt trong từng chuyển động ta có

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} \qquad \text{(a)}$$

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\vec{r}_0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}=const} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad \text{(b)}$$

$$\vec{v}_e = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{x,y,z=const} = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} \qquad \text{(c)}$$

Từ (a), (b), (c) ta suy ra $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

7.2.2 Định lý hợp gia tốc

* *Định lý*: Trong chuyển động phức hợp, tại mỗi thời điểm, gia tốc tuyệt đối của điểm bằng tổng hình học các gia tốc tương đối gia tốc theo và gia tốc Côriôlit.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \qquad (2.7.2)$$

* *Chứng minh*: Ta đạo hàm theo thời gian các biểu thức (a), (b), (c) ở trên lần lượt trong từng chuyển động ta được

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} + 2\left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right) \qquad \text{(a')}$$

$$\vec{a}_r = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{\vec{r}_0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}=const} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad \text{(b')}$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right|_{X,Y,Z=const} = \ddot{\vec{r}}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} \qquad \text{(c')}$$

Từ (a’), (b’), (c’), ta có

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + 2\left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right)$$

Trong đó thành phần $2\left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right) = \vec{a}_c$ gọi là gia tốc Côriôlit

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

7.2.3 Gia tốc Côriôlit

Ta có

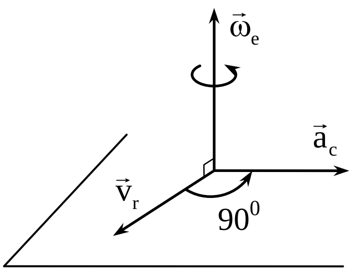
$$\vec{a}_c = 2\left(\dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}}\right)$$

Người ta chứng minh được

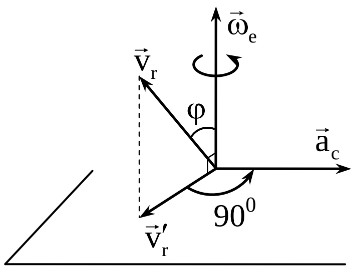
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r \qquad (2.7.3)$$

* *Nhận xét*: Ta thấy $\vec{a}_c = 0$ khi

+ Hệ động chuyển động tịnh tiến ($\omega_e = 0$)
+ $\vec{\omega}_e \,//\, \vec{v}_r$
+ $\vec{v}_r = 0$



Hình 2.7.2



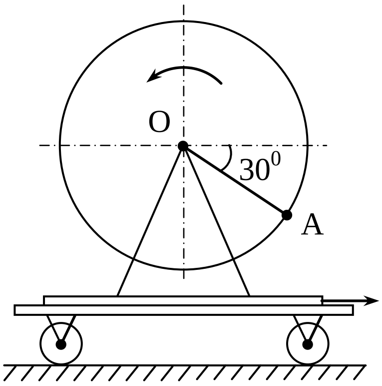
Hình 2.7.3

* *Quy tắc thực hành xác định phương chiều của* $\vec{a}_c$

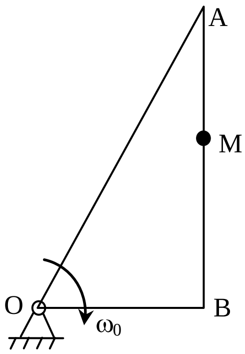
- Nếu $\vec{\omega}_e \perp \vec{v}_r$: Ta chỉ việc quay $\vec{v}_r$ quanh gốc của nó trong mặt phẳng $\perp \vec{\omega}_e$ một góc 90^0 theo chiều quay của ω_e, ta được phương chiều của $\vec{a}_c$, xem hình 2.7.2. Trị số của nó trong trường hợp này được tính bằng $a_c = 2\omega_e.v_r$
- Nếu $\varphi = \left(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r\right) \neq 90^0, 0^0, 180^0$: Ta phải chiếu $\vec{v}_r$ lên mặt phẳng $\perp \vec{\omega}_e$ ta được $\vec{v}_r'$ rồi quay $\vec{v}_r'$ quanh gốc trong mặt phẳng $\perp \vec{\omega}_e$ một góc 90^0 theo chiều quay của ω_e, ta được phương chiều của $\vec{a}_c$, xem hình 2.7.3. Trị số của $\vec{a}_c$ trong trường hợp này được tính bằng $a_c = 2\omega_e.v_r.\sin\varphi$

7.3 BÀI TẬP.

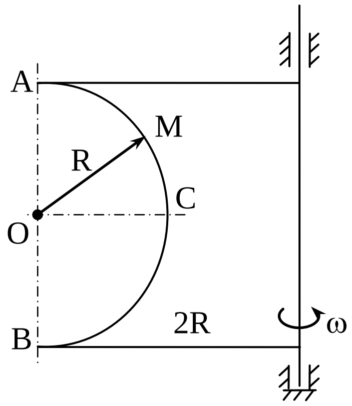
Bài 7.1: Xe chuyển động nhanh dần đều về bên phải với gia tốc a = 49,2cm/s^2. Trên xe có đặt một động cơ điện, rôto bán kính r = 20cm quay với phương trình $\varphi = 2t^2$ với chiều quay như hình vẽ. Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm A trên vành rôto tại thời điểm t = 1s, biết lúc đó A ở vị trí như hình vẽ.



Hình bài 7.1



Hình bài 7.2

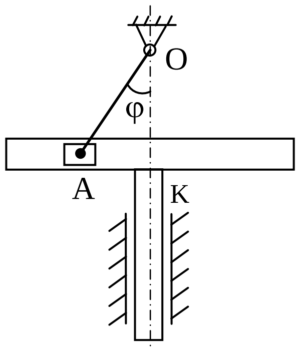


Hình bài 7.3

Bài 7.2: Tam giác vuông OAB quay quanh O với vận tốc góc không đổi ω_0 = 1(rad/s). Điểm M chuyển động từ A đến B với gia tốc không đổi bằng 2(cm/s^2) và ban đầu có vận tốc bằng không. Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M lúc t = 0,5(s), biết lúc này OB = BM = 4(cm).

Bài 7.3: Nửa đường tròn bán kính R quay với vận tốc góc ω không đổi quanh trục song song với đường kính AB và cách AB một khoảng 2R. Trên đường tròn có điểm M chuyển động từ A đến B với vận tốc không đổi u. Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm M ở thời điểm đầu và thời điểm nó đã đi được 1/4 vòng tròn.

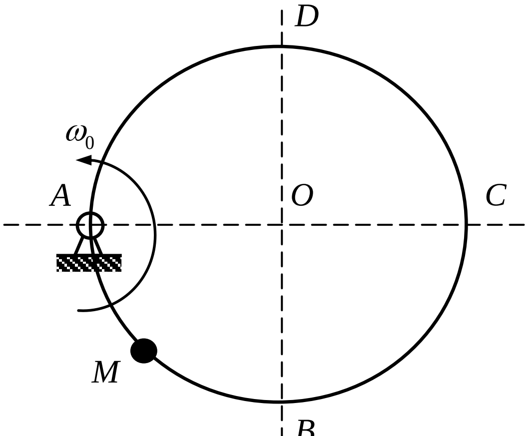
Bài 7.4: Tay quay OA có chiều dài l quay đều quanh trục O với vận tốc góc ω làm con trượt A chuyển động trong rãnh của culit K và culit K chuyển động lên xuống. Tìm vận tốc, gia tốc của culit K và vận tốc, gia tốc của con trượt A đối với cu lit K tại thời điểm ứng với vị trí $\varphi = 30^0$.



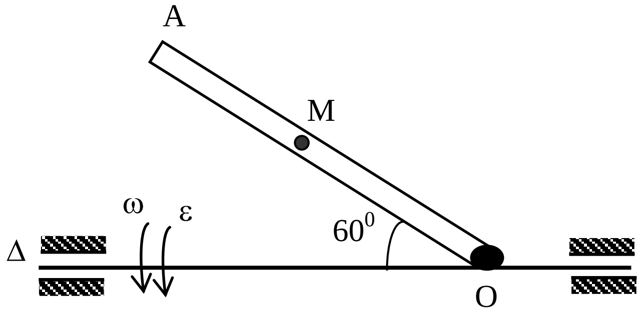
Hình bài 7.4

Bài 7.5: Đĩa tròn bán kính *R*, quay đều quanh *A* trong mặt phẳng chứa nó với vận tốc góc $\omega_0 = const$. Điểm *M* chuyển động trên vành đĩa từ *A* đến *B,* rồi đến *C,* với vận tốc tương đối không đổi *u.* Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm *M* khi *M* chạy đến điểm *B*?

Bài 7.6: Thanh OA(gắn cứng với trục quay Δ) chuyển động quay quanh trục. Trên OA có điểm M chuyển động từ O đến A với gia tốc không đổi bằng 2 cm/s^2, vận tốc ban đầu bằng không. Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của M tại thời điểm t = 3(s). Biết tại thời điểm đó thanh quay với ω = 1 rad/s, ε = 1 rad/s^2



Hình bài 7.5

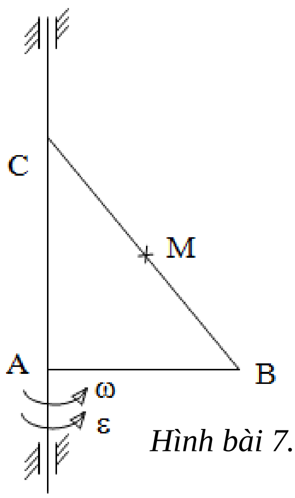


Hình bài 7.6

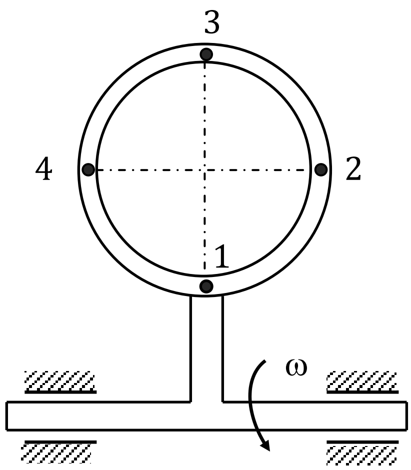
Bài 7.7:Tấm tam giác vuông ABC quay quanh trục thẳng với góc quay ω, gia tốc ε. Trên cạnh BC có điểm M đi từ B đến C theo qui luật: $s = BM = t^2/2$ (cm)

Tìm vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối của điểm M. Tại thời điểm t = 2 s; ω = 1 rad/s; BC = 18 cm; ε=1 rad/s^2.

Bài 7.8: Một ống hình khuyên tròn bán kính R quay đều với vận tốc góc ω quanh trục AB nằm trong cùng một mặt phẳng với ống. Trong ống có luồng chất lỏng chuyển động đều với vận tốc tương đối là u. Xác định gia tốc tuyệt đối các phần tử chất lỏng tại thời điểm 1, 2, 3, 4. Cho biết tâm khuyên cách trục quay một khoảng bằng 2R.

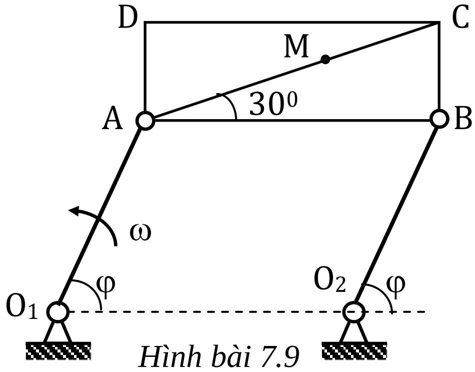


Hình bài 7.7



Hình bài 7.8

Bài 7.9: Tấm chữ nhật ABCD chuyển động được nhờ tay quay $O_1A = O_2B = 25$ cm quay quanh trục O_1 và O_2 theo luật $\varphi = 2\pi t^2$. Dọc đường chéo CA có điểm M chuyển động theo qui luật $CM = s = 16t^2 - t + 1$(s tính bằng cm, t tính bằng s). Xác định vận tốc và gia tốc tuyệt đối của điểm M tại thời điểm t = 0,5 s



Hình bài 7.9

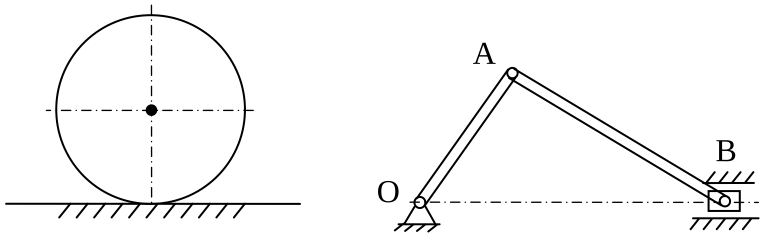
Chương V: Chuyển động song phẳng của vật rắn

8.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ MÔ HÌNH PHẲNG

8.1.1 Định nghĩa và ví dụ

* *Định nghĩa*: Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động trong đó mỗi điểm thuộc vật luôn dịch chuyển trong một mặt phẳng xác định song song với một mặt phẳng quy chiếu đã chọn trước.

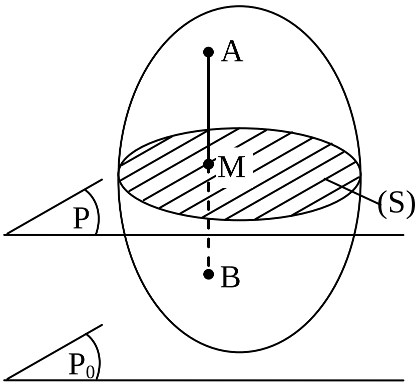
* *Các ví dụ*: Con lăn chuyển động trên đoạn đường thẳng, thanh truyền AB trong cơ cấu tay quay con trượt (xem hình 2.8.1) là các vật rắn chuyển động song phẳng



Hình 2.8.1

8.1.2 Mô hình phẳng

Cho vật rắn chuyển động song phẳng với mặt phẳng quy chiếu P_0 như hình vẽ. Xét một đoạn thẳng AB tuỳ ý thuộc vật, sao cho AB vuông góc với mặt phẳng P_0. Do hai điểm A, B thuộc vật rắn nên suy ra độ dài đoạn AB không đổi. Mặt khác do vật rắn chuyển động song phẳng nên các điểm A, B luôn dịch chuyển trong hai mặt phẳng song song với nhau và song song với mặt phẳng quy chiếu P_0. Từ đó ta thấy được đoạn AB phải luôn song song với vị trí ban đầu của nó, theo định nghĩa đoạn AB thực hiện chuyển động tịnh tiến. Do vậy chuyển động của đoạn AB có thể được đặc trưng bởi chuyển động của điểm M bất kỳ thuộc nó. Vật rắn là tập hợp của vô số đoạn AB như thế, nên ta có vô số điểm M. Tập hợp tất cả các điểm M cùng nằm trong mặt phẳng P song song với mặt phẳng P_0 ta được một hình phẳng (s) nằm trong mặt phẳng P, được gọi là mô hình phẳng của vật rắn chuyển động song phẳng. Khi đó chuyển động song phẳng của vật rắn có thể được đặc trưng bởi chuyển động của hình phẳng (s) trong mặt phẳng P.



Hình 2.8.2

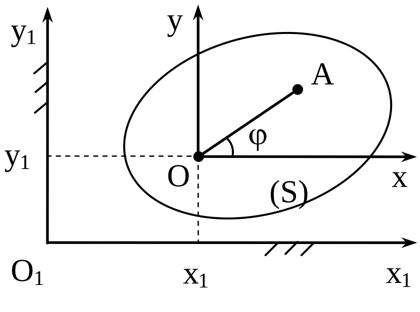
* Kết luận: Vậy muốn nghiên cứu chuyển động song phẳng của vật rắn, ta chỉ cần nghiên cứu chuyển động của hình phẳng (s) trong mặt phẳng P.

8.2 KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA TOÀN VẬT

8.2.1 Phân tích chuyển động

Khảo sát chuyển động của hình phẳng (s) trong mặt phẳng P. Trên P ta dựng hệ trục cố định $O_1x_1y_1$, trên hình phẳng (s) ta lấy một điểm O tuỳ ý làm điểm cực, qua O ta dựng hệ trục động Oxy sao cho Ox // O_1x_1, Oy // O_1y_1, khi đó ta có

- Chuyển động của hệ trục Oxy so với hệ trục $O_1x_1y_1$ là chuyển động theo, nó là chuyển động tịnh tiến (vì Ox // O_1x_1, Oy // O_1y_1).
- Chuyển động của hình phẳng (s) so với Oxy là chuyển động tương đối, nó là chuyển động quay quanh trục đi qua O và vuông góc với hình phẳng (s).



Hình

- Chuyển động của hình phẳng (s) so với hệ trục $O_1x_1y_1$ là chuyển động tuyệt đối, nó chính là chuyển động song phẳng.

Vậy chuyển động song phẳng của vật rắn có thể phân tích thành hai chuyển động thành phần là:

+ Chuyển động tịnh tiến theo của hệ động Oxy.

+ Chuyển động quay tương đối quanh cực O của hình phẳng (s).

8.2.2 Phương trình chuyển động

Qua cực O ta dựng đoạn thẳng OA thuộc (s) gọi là đoạn thẳng lấy dấu, gọi φ là góc giữa OA và trục Ox. Khi đó vị trí của hình phẳng (s) được xác định bởi vị trí của đoạn OA, tức là được xác định bởi điểm cực $O(X_1, Y_1)$ và góc φ. Khi hình phẳng (s) chuyển động thì các đại lượng X_1, Y_1, φ sẽ thay đổi liên tục theo thời gian, do đó ta có các phương trình

$$x_1 = x_1(t);\ y_1 = y_1(t);\ \varphi = \varphi(t)$$

được gọi là phương trình chuyển động của vật rắn chuyển động song phẳng.

8.2.3 Vận tốc và gia tốc của vật

- Các đại lượng $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1$ là vận tốc và gia tốc của điểm cực O, nó chính là vận tốc và gia tốc của thành phần chuyển động tịnh tiến theo.

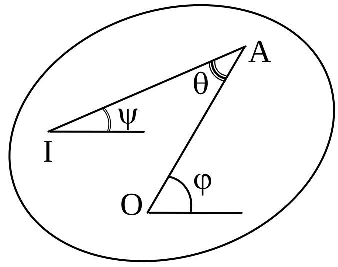
- Các đại lượng $\overline{\omega} = \dot{\varphi}, \overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = \ddot{\varphi}$ là vận tốc góc và gia tốc góc của thành phần chuyển quay tương đối quanh cực O của hình phẳng (s).

* Chú ý: Nếu ta thay đổi điểm cực O, thì vận tốc góc và gia tốc góc của chuyển động quay tương đối quanh cực là không đổi.

* Chứng minh: Giả sử ta thay đổi điểm cực từ O đến I, qua I ta dựng đường thẳng // OA, khi đó từ hình vẽ ta có

$\varphi = \psi + \theta$ với $\theta = IAO = const$ (vì các điểm I, A, O thuộc hình phẳng)

$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \dot{\psi} + \dot{\theta} = \dot{\psi} = \omega \Rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = \varepsilon$$



Hình 2.8.4

8.3 KHẢO SÁT CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC ĐIỂM THUỘC VẬT

8.3.1 Khảo sát vận tốc

8.3.1.1 Định lý liên hệ vận tốc giữa hai điểm

* *Định lý*: Vận tốc của điểm M bất kỳ thuộc hình phẳng (s) bằng tổng hình học vận tốc của điểm cực O và vận tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối quanh cực O của hình phẳng (s).

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO} \qquad (2.8.1)$$

* *Chứng minh*: Khảo sát chuyển động phẳng của hình phẳng (s). Như đã biết, chuyển động của (s) có thể phân tích thành hai chuyển động thành phần là chuyển động tịnh tiến theo của hệ động Oxy và chuyển động quay tương đối quanh cực O của hình phẳng (s). Do đó bất kỳ điểm M nào thuộc (s) cũng sẽ tham gia vào hai chuyển động nói trên, khi đó áp dụng định lý hợp vận tốc ta có

$$\vec{v}_a^M = \vec{v}_e^M + \vec{v}_r^M$$

Vì chuyển động theo là chuyển động tịnh tiến của hệ động Oxy nên ta có

$$\vec{v}_e^M = \vec{v}_{M^*} = \vec{v}_O$$

Vì chuyển động tương đối là chuyển động của hình phẳng (s) quay quanh cực O nên ta có

$$\vec{v}_r^M = \vec{v}_{MO}$$

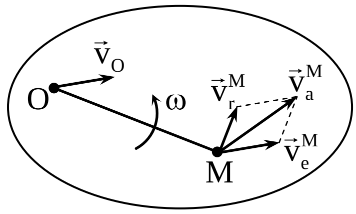
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{v}_a^M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$$

**** Chú ý***: Vận tốc $\vec{v}_{MO}$ có

+ Phương, vuông góc MO

+ Chiều, thuận chiều quay của $\overline{\omega}$ quanh cực O

+ Trị số: $v_{MO} = \omega.MO$



Hình 2.8.5

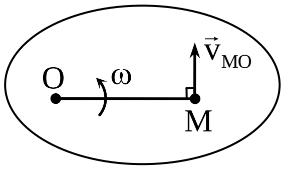
8.3.1.2 Định lý hình chiếu vận tốc

* *Định lý*: Hình chiếu vận tốc hai điểm bất kỳ thuộc hình phẳng (s) chuyển động phẳng lên đường thẳng nối hai điểm đó thì bằng nhau.

$$hch_{MO}\left(\vec{v}_M\right) = hch_{MO}\left(\vec{v}_O\right) \qquad (2.8.2)$$

* *Chứng minh*: Xét hai điểm O và M bất kỳ thuộc hình phẳng (s), chọn một trong hai điểm làm điểm cực, khi đó theo định lý liên hệ vận tốc giữa hai điểm ta có

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_{MO}$$



Hình 2.8.6

Như ta đã biết $\vec{v}_{MO} \perp MO$, nên khi chiếu biểu thức trên lên đường thẳng nối hai điểm M, O ta được

$$hch_{MO}\left(\vec{v}_M\right) = hch_{MO}\left(\vec{v}_O\right)$$

8.3.1.3 Tâm vận tốc tức thời

a, Định nghĩa

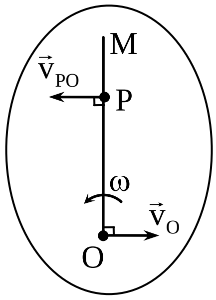
Điểm P trên hình phẳng (s) chuyển động phẳng mà tại thời điểm khảo sát có vận tốc bằng không, gọi là tâm vận tốc tức thời.

b, Sự tồn tại và duy nhất

* *Định lý*: Tại mỗi thời điểm nếu $\omega \neq 0$, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng (s) có vận tốc bằng không.

* *Chứng minh*:

- Chứng minh sự tồn tại của P: Giả sử có hình phẳng (s) chuyển động phẳng với vận tốc điểm cực O là $\vec{v}_O$ và vận tốc góc của chuyển động quay quanh cực là $\overline{\omega}$. Ta quay nửa đường thẳng mang $\vec{v}_O$ quanh O theo chiều quay của $\overline{\omega}$ một góc là 90^0 ta được nửa đường thẳng OM. Trên OM ta lấy điểm P sao cho OP = v_0/ω, khi đó đại lượng $\vec{v}_{PO}$ có



Hình 2.8.7

+ Phương $\perp$ OP (tức // $\vec{v}_O$)

+ Chiều thuận chiều quay của $\overline{\omega}$ (tức ngược chiều $\vec{v}_O$)

Trị số: $v_{PO} = OP.\omega = \dfrac{v_O}{\omega}\omega = v_O$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{PO} = -\vec{v}_O$$

Mặt khác theo định lý liên hệ vận tốc giữa hai điểm ta có

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = \vec{v}_O - \vec{v}_O = 0$$

- Chứng minh sự duy nhất của P: Giả sử tại thời điểm khảo sát tồn tại hai điểm P_1 và P_2 mà $v_{P_1} = v_{P_2} = 0$, khi đó theo định lý liên hệ vận tốc giữa hai điểm, ta có

$$\vec{v}_{P_2} = \vec{v}_{P_1} + \vec{v}_{P_2P_1} \Rightarrow \vec{v}_{P_2P_1} = 0$$

Ta đã biết $v_{P_2P_1} = P_2P_1.\omega = 0$, theo giả thiết $\omega \neq 0 \Rightarrow P_1P_2 = 0 \Rightarrow P_1 \equiv P_2$

c, Sự phân bố vận tốc các điểm thuộc hình phẳng (s)

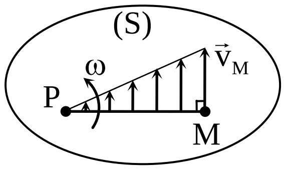
Khảo sát chuyển động của hình phẳng (s) chuyển động phẳng, khi đó có hai khả năng xảy ra như sau:

* Nếu $\omega \neq 0$

Ta lấy tâm vận tốc tức thời P làm cực, xét vận tốc của điểm M bất kỳ thuộc hình phẳng (s), khi đó theo định lý liên hệ vận tốc giữa hai điểm ta có

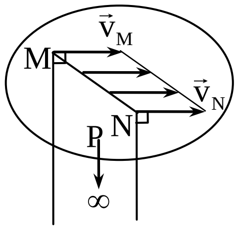
$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{v}_{MP} = \vec{v}_{MP}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_M = \vec{v}_{MP}\begin{cases}\text{Có phương} \perp MP \\ \text{Có chiều, thuận chiều quay của } \overline{\omega} \\ \text{Có trị số: } v_{MP} = MP.\omega\end{cases}$$



Hình 2.8.8

Vậy khi $\omega \neq 0$, vận tốc tức thời của các điểm thuọoc hình phẳng (s) được phân bố giống như (s) đang quay quanh tâm vận tốc tức thời P với vận tốc góc $\overline{\omega}$. Người ta nói (s) quay tức thời quanh P.



Hình 2.8.9

* Nếu $\omega = 0$

Xét vận tốc hai điểm M, N bất kỳ thuộc hình phẳng (s), ta có

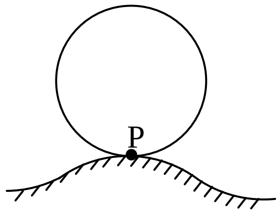
$$\vec{v}_M = \vec{v}_N + \vec{v}_{MN}$$

Theo giả thiết $\omega = 0 \Rightarrow v_{MN} = MN.\omega = 0 \Rightarrow \vec{v}_M = \vec{v}_N$

Vậy khi $\omega = 0$, vận tốc tức thời của mọi điểm thuộc hình phẳng (s) đều bằng nhau. Người ta nói rằng hình phẳng (s) chuyển động tịnh tiến tức thời.

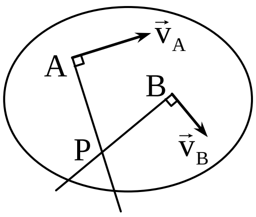
**** Chú ý***: Chuyển động tịnh tiến tức thời của hình phẳng (s) chỉ nói lên tính chất của vận tốc, tuyệt đối không được từ đó suy ra tính chất của gia tốc.

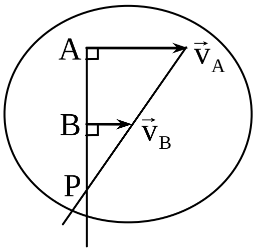
d, Quy tắc thực hành tìm tâm vận tốc tức thời

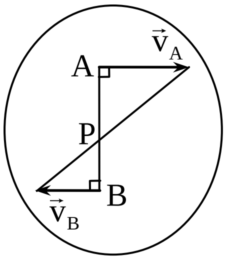


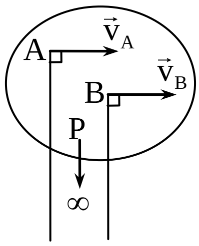
Hình 2.8.10

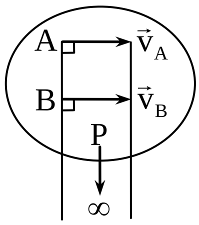
- Với con lăn lăn không trượt, điểm tiếp xúc giữa con lăn và mặt đường là tâm vận tốc tức thời, xem hình 2.8.10.
- Nếu ta biết vận tốc hai điểm A, B thuộc hình phẳng (s), tâm vận tốc của hình phẳng được xác định như trong các hình 2.8.11a,b,c,d,e


Hình 2.8.11a


Hình 2.8.11b


Hình 2.8.11c


Hình 2.8.11d


Hình 2.8.11e

* *Chú ý*: Trong trường hợp $P \to \infty$ ta có

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = 0$$

Khi đó hình phẳng (S) chuyển động tịnh tiến tức thời

8.3.2 Khao sát gia tốc

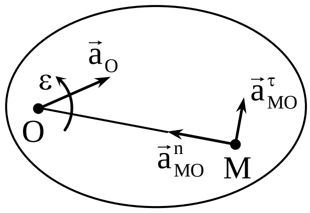
8.3.2.1 Định lý liên hệ gia tốc giữa hai điểm

* *Định lý*: Gia tốc của điểm M bất kỳ thuộc hình phẳng (s) chuyển động phẳng, bằng tổng hình học gia tốc của điểm cực O và gia tốc của điểm M trong chuyển động quay tương đối của hình phẳng (s) quanh O.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_{MO} = \vec{a}_O + \vec{a}^{\tau}_{MO} + \vec{a}^{n}_{MO} \qquad (2.8.3)$$

* ***Chú ý***:

- Thành phần gia tốc $\vec{a}^{\tau}_{MO}$
  + Có phương $\perp$ MO
  + Có chiều, thuận chiều quay của $\overline{\varepsilon}$
  + Trị số: $a^{\tau}_{MO} = MO.\varepsilon$
- Thành phần gia tốc $\vec{a}^{n}_{MO}$
  + Có phương, chiều, hướng từ M $\to$ O
  + Có trị số: $a^{n}_{MO} = MO.\omega^2$



Hình 2.8.12

8.3.2.2 Tâm gia tốc tức thời

a, Định nghĩa

Điểm Q trên hình phẳng (s) mà tại thời điểm khảo sát có gia tốc bằng không, gọi là tâm gia tốc tức thời.

b, Sự tồn tại và duy nhất

* *Định lý*: Ở mỗi thời điểm nếu $\overline{\omega}$ và $\overline{\varepsilon}$ không đồng thời triệt tiêu, có một điểm duy nhất thuộc hình phẳng (s) có gia tốc bằng không.

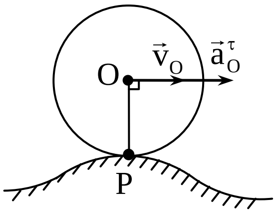
c, *Chú ý*

- Nói chung tâm vận tốc tức thời P và tâm gia tốc tức thời Q không trùng nhau.
- Nếu ω và ε đồng thời triệt tiêu thì gia tốc của mọi điểm thuộc hình ơhẳng (S) đều bằng nhau.
- Đối với trường hợp con lăn lăn không trượt, ta có

$$v_O = PO.\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv_O}{dt} = \frac{a_O^\tau}{R}$$

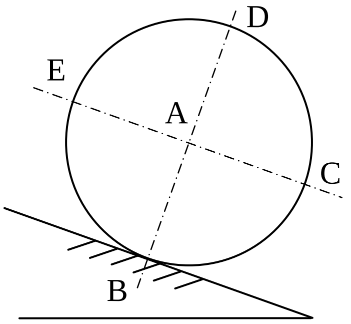
Chiều của $\overline{\varepsilon}$ thuận chiều của $\vec{a}_O^\tau$



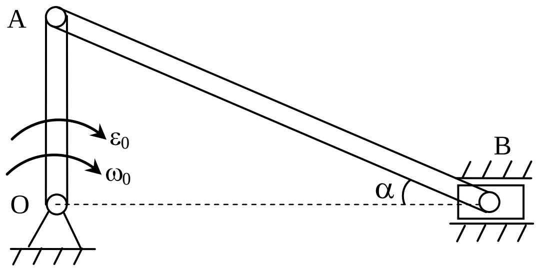
Hình 2.8.13

8.4 BÀI TẬP

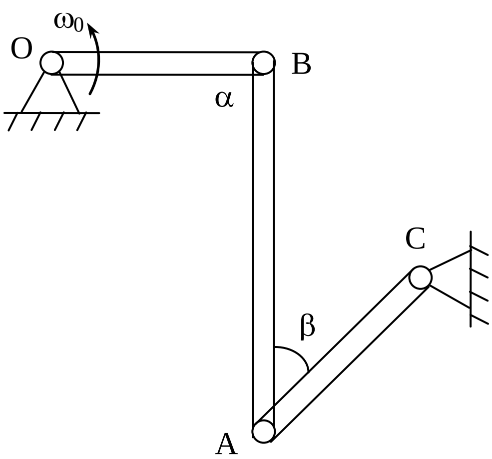
Bài 8.1: Cho đĩa phẳng có bán kính R=0,5m lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng. Tại thời điểm khảo sát tâm đĩa có vận tốc v_A = 1m/s và gia tốc a_A = 3m/s^2. Hãy tìm vận tốc góc của đĩa và vận tốc các điểm C, D, E. Tìm gia tốc góc của đĩa và gia tốc các điểm B, C.



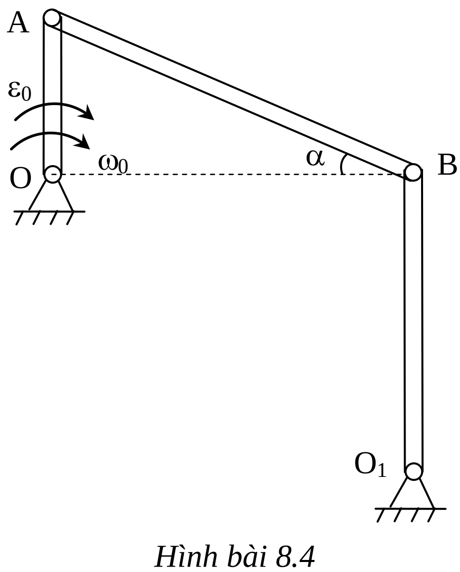
Hình bài 8.1



Hình bài 8.2



Hình bài 8.3



Hình bài 8.4

Bài 8.2: Trong cơ cấu tay quay thanh truyền, tay quay OA dài 35(cm) quay với vận tốc góc ω_0 = 4(rad/s) và gia tốc góc ε_0 = 8(rad/s^2). Tìm vận tốc và gia tốc con chạy B, vận tốc góc và gia tốc góc thanh truyền AB khi OA thẳng đứng và $\alpha = 30^0$.

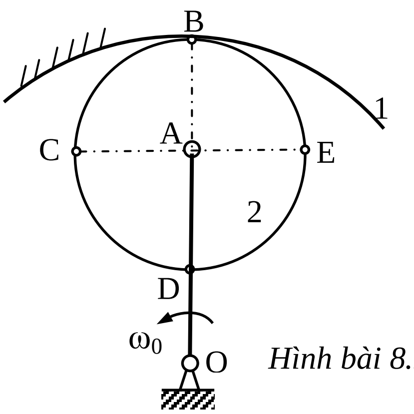
Bài 8.3: Cho cơ cấu bốn khâu như hình vẽ. Tay quay OB = r = 0,5m quay đều với vận tốc góc ω_0 = 4 rad/s, thanh truyền AB = 2r, AC = $r\sqrt{2}$. Tại thời điểm khảo sát các góc $\alpha = 90^0$, $\beta = 45^0$. Hãy tìm vận tốc của các thanh AB và AC.

Bài 8.4: Tay quay OA quay với gia tốc không đổi ε_0 = 5(rad/s^2) và tại thời điểm khảo sát có vận tốc góc ω_0 = 10(rad/s). Biết OA = r = 20(cm), O_1B = R = 100(cm), AB = 120(cm). Tìm vận tốc điểm B và gia tốc (tiếp và pháp) của điểm B khi OA và O_1B ở vị trí thẳng đứng như hình vẽ.

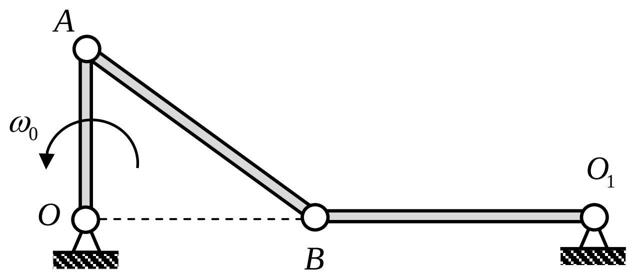
Bài 8.5: Cơ cấu bánh răng hành tinh trên hình vẽ có tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0. Bánh răng 2 bán kính r ăn khớp trong với bánh răng 1 cố định có bán kính R = 3r. Ký hiệu BD và CE là các đường kính của bánh răng 2, hãy xác định.

- Vận tốc của các điểm C, D.
- Gia tốc của các điểm B, E.

Bài 8.6**:** Cho cơ cấu 4 khâu như hình vẽ. *OA = r; AB = 2r;* $O_1B = 2r\sqrt{3}$. Lúc *OA* thẳng đứng, các điểm *O, B,* O_1 cùng nằm trên đường nằm ngang, khi đó thanh *OA* có vận tốc ω_0: Tìm vận tốc góc và gia tốc góc thanh *AB* và thanh O_1B



Hình bài 8.5



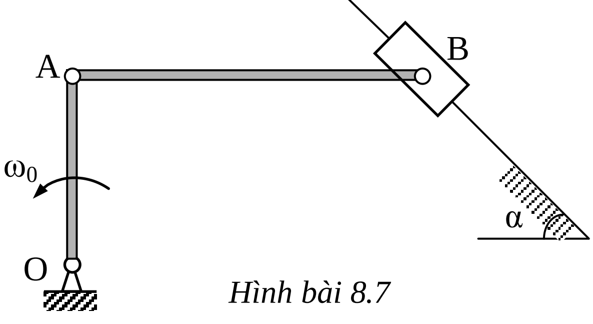
Hình bài 8.6

Bài 8.7: Cho cơ cấu tay quay thanh truyền. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0. Cho biết AB = 2OA = 2r. Tại thời điểm OA $\perp$ AB, $\alpha = 45^0$.

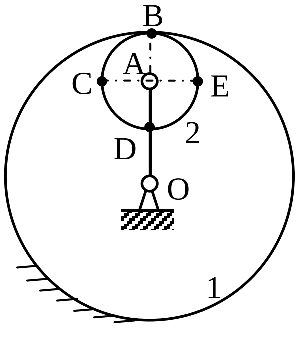
- Xác định vận tốc con chạy B và vận tốc góc của thanh AB.
- Xác định gia tốc con chạy B và gia tốc góc thanh AB

Bài 3: Cơ cấu bánh răng hành tinh có tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω_0. Bánh răng 2 bán kính r ăn khớp trong với bánh răng 1 cố định có bán kính R = 3r. Ký hiệu BD và CE là các đường kính của bánh răng 2, hãy xác định:

- Vận tốc của các điểm C, D.
- Gia tốc của các điểm B, E.



Hình bài 8.7



Hình bài 8.8

PHẦN THỨ BA: ĐỘNG LỰC HỌC

Động lực học là một phần của cơ học lý thuyết, trong đó nghiên cứu các quy luật chuyển động cơ học của các vật thể dưới tác dụng của các lực.

Động lực học được xây dựng trên hệ tiên đề do Galilê và Niutơn đưa ra, thường được gọi là hệ tiên đề Niutơn hay còn gọi là các định luật của Niutơn.

Chương VI: Động lực học chất điểm

10. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VÀ HỆ TIÊN ĐỀ ĐỘNG LỰC HỌC

10.1 CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

10.1.1 Các mô hình cơ học

a, Chất điểm (còn được gọi là vật điểm)

Là một điểm hình học có mang khối lượng chuyển động. Chất điểm là mô hình của các vật thể mà kích thước của nó có thể bỏ qua được do quá nhỏ so với các vật thể khác hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát chuyển động.

b, Vật rắn tuyệt đối (gọi tắt là vật rắn)

Vật rắn tuyệt đối là một tập hợp gồm vô số các chất điểm mà khoảng cách giữa hai chất điểm bất kỳ luôn không đổi trong suốt thời gian chuyển động. Trong thực tế các vật mà biến dạng của nó có thể bỏ qua được do quá bé hoặc không đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát chuyển động, được xem là vật rắn tuyệt đối, thường được gọi tắt là vật rắn.

c, Cơ hệ

- Các cơ hệ có thể là: Hệ các chất điểm, hệ các vật rắn, hệ liên tục (chất lỏng, vật rắn biến dạng), hệ các phần tử hữu hạn, hệ hỗn hợp.
- Trong giáo trình này ta chỉ khảo sát các hệ gồm các chất điểm và các vật rắn (mà chủ yếu là các vật rắn phẳng) được gọi tắt là cơ hệ.

10.1.2 Lực

Như ta đã biết, lực chính là tác dụng tương hỗ cơ học giữa các vật thể.

Trong tĩnh học lực được coi là không đổi. Trong động lực học, lực là đại lượng biến đổi cả phương, chiều và cường độ. Sự biến đổi đó phụ thuộc vào thời gian, vị trí và vận tốc của chất điểm.

$$\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \qquad (3.10.1)$$

** Phân loại lực*

- Nội lực và ngoại lực

+ Ngoại lực: Là lực do các chất điểm và các vật thể bên ngoài cơ hệ đang khảo sát tác dụng lên các chất điểm và các vật thể thuộc cơ hệ đang khảo sát, ký hiệu: $\vec{F}^e$

+ Nội lực: Là lực do các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ đang khảo sát tác dụng lẫn nhau, ký hiệu: $\vec{F}^i$

**** Chú ý***. Véc tơ chính và mômen chính của hệ nội lực đối với một điểm bất kỳ luôn triệt tiêu

$$\sum \vec{F}^i = 0; \quad \sum \vec{m}_O(\vec{F}^i) = 0 \qquad (3.10.2)$$

- Lực hoạt động và lực liên kết

+ Lực liên kết: là các lực xuất hiện tại các mối liên kết giữa các vật thể qua chỗ tiếp xúc hình học, ký hiêu: $\vec{R}$

+ Các lực không phải là lực liên kết được gọi là các lực hoạt động. (VD: Trọng lực, Sức đẩy của gió, …), ký hiệu: $\vec{F}^a$

10.1.3 Hệ quy chiếu quán tính

Là hệ quy chiếu thoả mãn các định luật quán tính của Niutơn. Người ta còn gọi hệ quy chiếu quán tính là hệ quy chiếu cố định. Đối với đa số bài toán áp dụng trong kỹ thuật, trái đất có thể xem một cách gần đúng là hệ quy chiếu quán tính.

10.2 HỆ TIÊN ĐỀ CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

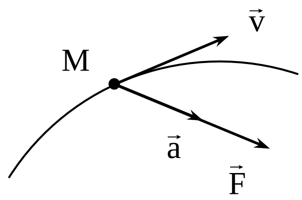
10.2.1 Tiên đề 1 (Định luật quán tính)

Chất điểm không chịu tác dụng của lực nào sẽ đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều. Trạng thái đứng yên hay chuyển động thẳng đều của chất điểm được gọi là trạng thái quán tính của nó.

10.2.2 Tiên đề 2 (Định luật cơ bản của động lực học)

Trong hệ quy chiếu quán tính, dưới tác dụng của lực, chất điểm chuyển động với gia tốc có cùng hướng với lực và có giá trị tỷ lệ với cường độ của lực.

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (3.10.3)$$



Hình 3.10.1

Trong đó hệ số tỷ lệ m có giá trị không đổi, là số đo quán tính của chất điểm, được gọi là khối lượng của chất điểm

Chú ý. Đẳng thức (3.10.3) được gọi là phương trình cơ bản của động lực học. Khi viết (3.10.3) cho chất điểm rơi tự do trong trường trọng lực ta có

$$\vec{P} = m\vec{g} \qquad (3.10.4)$$

10.2.3 Tiên đề 3 (Định luật về tính độc lập giữa tác dụng của các lực)

Dưới tác dụng của đồng thời của một số lực, chất điểm chuyển động với gia tốc bằng tổng hình học các gia tốc mà chất điểm có được khi mỗi lực tác dụng riêng biệt.

Giả sử ta có chất điểm khối lượng m chịu tác dụng của các lực: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$, khi đó ta có

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + ... + \vec{a}_n$$

trong đó:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, ..., \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}$$

Thay vào trên ta được

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (3.10.5)$$

Đẳng thức (3.10.5) cũng được gọi là phương trình cơ bản của động lực học.

10.2.4 Tiên đề 4 (Định luật tác dụng và phản tác dụng)

Các lực tác dụng tương hỗ giữa hai chất điểm có cùng đường tác dụng, ngược chiều nhau và cùng cường độ.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12} \qquad (3.10.6)$$

Tiên đề này là cơ sở của động lực học hệ chất điểm (hay cơ hệ)

10.2.5 Tiên đề 5 (Tiên đề về giải phóng liên kết)

Chất điểm không tự do (tức chất điểm chịu liên kết) có thể được xem như chất điểm tự do bằng cách giải phóng nó khỏi các liên kết và thay thế tác dụng của các liên kết vừa được giải phóng bằng các phản lực liên kết tương ứng.

11. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM

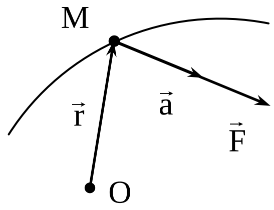
11.1 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT ĐIỂM VÀ HỆ CÁC CHẤT ĐIỂM

11.1.1 Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

a, Dạng véc tơ

Khảo sát chuyển động của chất điểm có khối lượng m, trong hệ quy chiếu O, dưới tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Viết phương trình cơ bản của động lực học cho chất điểm này ta được

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$



Hình 3.11.1

Như đã biết trong phần động học, ta có: $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ ($\vec{r}$ là véc tơ định vị của chất điểm M trong hệ quy chiếu O), thay vào trên ta được.

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (3.11.1)$$

Phương trình (3.11.1) được gọi là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng vécto.

b, Dạng toạ độ đề các

Ta gắn vào hệ quy chiếu O một hệ trục toạ độ Đề các Oxyz, rồi chiếu (3.11.1) lên các trục của hệ toạ độ đó ta được

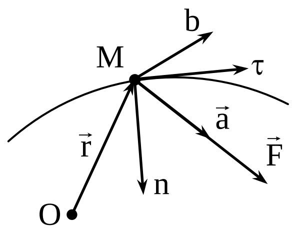
$$\left\{ m\ddot{x} = \sum F_{kx}; m\ddot{y} = \sum F_{ky}; m\ddot{z} = \sum F_{kz} \right. \qquad (3.11.2)$$

(3.11.2) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng toạ độ Đề các.

c, Dạng toạ độ tự nhiên

Khảo sát chuyển động của chất điểm trên đường cong (c) trong một hệ quy chiếu O nào đó. Vào thời điểm t, vị trí của chất điểm M, tại đó ta xác định được một hệ trục toạ độ tự nhiên $M\tau nb$. Chiếu (3.11.1) lên hệ trục toạ độ này ta được

$$\left\{ m\ddot{s} = \sum F_{k\tau}; m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = \sum F_{kn}; 0 = \sum F_{kb} \right. \qquad (3.11.3)$$



Hình 3.11.2

(3.11.3) là phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng toạ độ tự nhiên.

11.1.2 Phương trình vi phân của chuyển động của hệ chất điểm

Khảo sát cơ hệ gồm n chất điểm, ta viết phương trình vi phân chuyển động cho từng chất điểm, ta được

$$\begin{cases} m_2\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\ddot{\vec{r}}_n = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i \end{cases} \qquad (3.11.4)$$

Đây là hệ phương trình vi phân chuyển động của hệ các chất điểm.

11.2 HAI BÀI TOÁN CƠ BẢN CỦA ĐỘNG LỰC HỌC

11.2.1 Bài toán thuận

Cho biết chuyển động của chất điểm, hãy xác định lực tác dụng lên chất điểm ấy.

Để giải bài toán này ta áp dụng trực tiếp phương trình cơ bản của động lực học

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Dưới đây là một số thí dụ cho dạng bài toán này

a, thí dụ 1

Kéo một vật nặng có trọng lượng là P đi lên nhanh dần với gia tốc là $\vec{a}$. Hãy xác định sức căng của dây cáp

Giải

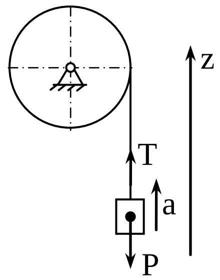
Khảo sát chuyển động của vật nặng, được xem như một chất điểm. Các lực tác dụng vào vật gồm $\vec{P}$ và $\vec{T}$. Viết phương trình cơ bản của động lực học cho chất điểm này ta được

$$\frac{P}{g}\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$$

Chiếu phương trình này lên trục z ta được

$$\frac{P}{g}a = T - P \Rightarrow T = P + \frac{a}{g}P$$

$$\Rightarrow \quad T = \left(1 + \frac{a}{g}\right)P$$



Hình 3.11.3

b, Thí dụ 2

Tìm áp lực của ôtô lên cầu tại đỉnh A của cầu, biết ôtô có trọng lượng là P, vận tốc của ôtô tại đỉnh A là $\vec{v}$, bán kính cong của cầu tại A là ρ.

Giải

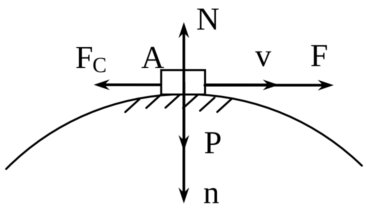
Khảo sát chuyển động của ô tô được xem như một chất điểm. Các lực tác dụng vào ô tô bao gồm: $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}, \vec{F}_C$. Viết phương trình cơ bản của động lực học cho chất điểm này ta được

$$\frac{P}{g}\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_C$$

Chiếu phương trình này lên phương pháp tuyến $\vec{n}$ ta được

$$\frac{P}{g}a_n = P - N \Rightarrow N = P - \frac{P}{g}\frac{v^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad N = P\left(1 - \frac{v^2}{g\rho}\right)$$



Hình 3.11.4

11.2.2 Bài toán ngược

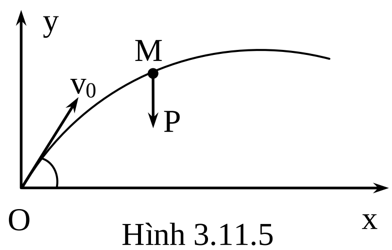
Cho biết các lực tác dụng lên chất điểm và các điều kiện đầu của chuyển động (vị trí ban đầu và vận tốc ban đầu), hãy xác định chuyển động của chất điểm ấy.

Để giải bài toán này ta áp dụng các dạng phương trình vi phân chuyển động của chất điểm. Dưới đây là một thí dụ cho dạng bài toán này.

Một viên đạn được bắn lên với vận tốc ban đầu là $\vec{v}_0$ làm với phương ngang một góc α, bỏ qua sức cản của không khí. Tìm quy luật chuyển động của viên đạn.

Giải

Khảo sát chuyển động của viên đạn được coi như một chất điểm. Do bỏ qua sức cản của không khí nên lực tác dụng vào nó chỉ còn trọng lực $\vec{P}$. Áp dụng phương trình vi phân chuyển động của chất điểm dạng toạ độ Đề các cho chất điểm này ta được



Hình 3.11.5

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} = 0 \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} = -P = -mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \qquad (1)$$

Điều kiện đầu của chuyển động là

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = \dot{x}_0 = v_0\cos\alpha \\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = v_0\sin\alpha \end{cases} \qquad (2)$$

Từ (1) ta có

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1 \\ \dot{y} = -gt + c_2 \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2) ta suy ra

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_3 \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4 \end{cases} \quad (4)$$

Thay các điều kiện đầu (2) vào (3) và (4) ta được

$$\{c_1 = v_0 \cos\alpha; c_2 = v_0 \sin\alpha; c_3 = 0; c_4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t.\cos\alpha \\ y = v_0 t.\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (5)$$

Phương trình (5) mô ta chuyển động của viên đạn trong mặt phẳng Oxy, từ (5) ta dễ thấy quỹ đạo của viên đạn là một đường Parabol.

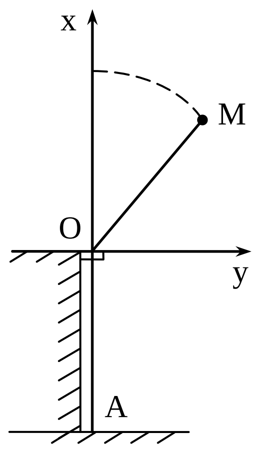
11.3 BÀI TẬP

Bài 11.1: Một xe goòng có khối lượng là 700kg đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc 15^0. Để giữ cho xe chạy đều ta dùng dây cáp song song với dốc. Vận tốc chạy đều của xe là 1,6m/s. Xác định lực căng của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó bị hãm dừng lại trong 4giây. Hệ số cản chuyển động tổng cộng là f = 0,015 và lúc hãm coi rằng xe chạy chậm dần đều.

Bài 11.2: Một ôtô chở hàng có khối lượng là 6 tấn chạy xuống một chiếc phà với tốc độ là 21,6km/h. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe chạy thêm một quãng là 10m, cho rằng khi ấy ôtô chuyển động chậm dần đều. Tính lực căng mỗi dây cáp (có hai dây cáp) buộc giữ phà, coi rằng dây cáp luôn luôn căng.

Bài 11.3: Một vật nặng chạy theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng về phía trên với vận tốc ban đầu v_0 = 15m/s. Mặt phẳng nghiêng tạo với mặt phẳng ngang một góc $\alpha = 30^0$. Cho hệ số ma sát f = 0,1. Tìm đoạn đường vật nặng đi được cho đến lúc dừng hẳn và tìm thời gian vật chạy trên quãng đường đó.

Bài 11.4: Một dây đàn hồi được giữ chặt ở điểm A vòng qua một vòng nhẫn cố định O. Ở đầu cuối tự do của nó lắp một quả cầu M khối lượng m kg. Chiều dài của dây lúc không giãn là l = AO. Để kéo giãn dây ra 1cm cần một lực bằng k^2m Niutơn. Sau khi kéo dây giãn ra theo đường thẳng đứng dài gấp đôi, ta chuyền cho quả cầu vận tốc v_0 vuông góc với phương thẳng đứng. Xác định quỹ đạo của quả cầu, bỏ qua tác dụng của trọng lực và xem như sức căng tỉ lệ với độ giãn dài của nó.



Hình bài 11.4

Chương VII: Các định lý tổng quát của động lưc học

12.1 CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC KHỐI CỦA CƠ HỆ VÀ VẬT RẮN

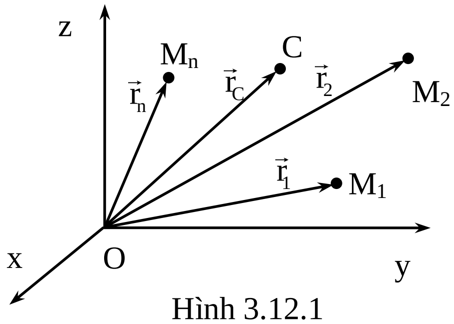
12.1.1 Khối tâm của cơ hệ

12.1.1.1 Khối tâm của hệ n chất điểm

* *Định nghĩa*. Khối tâm của hệ n chất điểm là một điểm hình học C được xác định bởi công thức sau

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k \qquad (3.12.1)$$

Trong đó m_k và $\vec{r}_k$ lần lượt là khối lượng và véc tơ định vị của chất điểm thứ k, $M = \sum m_k$ là khối lượng của tất cả các chất điểm của cơ hệ.



Hình 3.12.1

**Các toạ độ của khối tâm C*

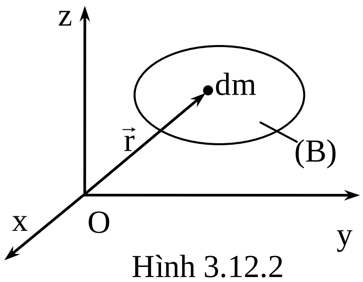
$$x_C = \frac{1}{M}\sum m_k x_k;\;\; y_C = \frac{1}{M}\sum m_k y_k;\;\; z_C = \frac{1}{M}\sum m_k z_k \qquad (3.12.2)$$

12.1.1.2 Khối tâm của vật rắn

* *Định nghĩa*. Khối tâm của vật rắn là một điểm hình học C được xác định bởi công thức

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} \vec{r}dm \qquad (3.12.3)$$

Trong đó m là khối lượng của vật rắn



Hình 3.12.2

**Các toạ độ của khối tâm C*

$$x_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} xdm;\;\; y_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} ydm;\;\; z_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} zdm \qquad (3.12.4)$$

* *Chú ý*. Đối với vật rắn nằm gần quả đất thì khối tâm của vật rắn trùng với trọng tâm của nó.

12.1.1.3 Khối tâm của cơ hệ

* *Định nghĩa*. Khối tâm của cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn là một điểm hình học C được xác định bởi công thức

$$\vec{r}_C = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i + \sum_{k=1}^{p} m_k \vec{r}_{Ck}\right) \qquad (3.12.5)$$

Trong đó:

+ $m_i, \vec{r}_i$ là khối lượng và véc tơ định vị của chất điểm thứ i
+ $m_k, \vec{r}_{Ck}$ là khối lượng và véc tơ định vị của khối tâm C_k của vật rắn thứ k
+ $M = \sum m_i + \sum m_k$ là khối lượng của toàn cơ hệ

* *Các toạ độ của khối tâm C*

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{M}\left(\sum m_i x_i + \sum m_k x_{Ck}\right) \\ y_C = \frac{1}{M}\left(\sum m_i y_i + \sum m_k y_{Ck}\right) \\ z_C = \frac{1}{M}\left(\sum m_i z_i + \sum m_k z_{Ck}\right) \end{cases} \qquad (3.12.6)$$

12.1.2 Mômen quán tính của vật rắn

12.3.2.1 Mômen quán tính của vật rắn đối với một trục và đối với một điểm

a, Mômen quán tính của vật rắn đối với một trục

* *Định nghĩa*. Mômen quán tính của vật rắn đối với trục z, là đại lượng vô hướng, ký hiệu J_z, được xác định theo công thức

$$J_z = \int_{(B)} \rho^2 dm \qquad (3.12.7)$$

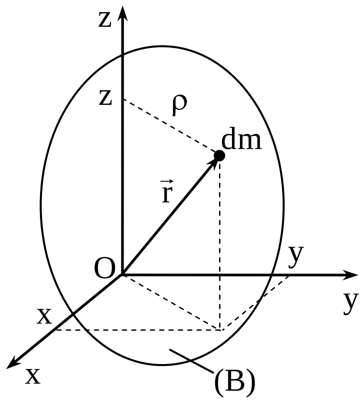
Trong đó ρ là khoảng cách từ phân tố dm của vật rắn đến trục z. Từ hình vẽ ta thấy

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow \quad J_z = \int_{(B)} (x^2 + y^2) dm \qquad (3.12.8)$$

Tương tự ta có

$$J_x = \int_{(B)} (y^2 + z^2) dm \, ; \; J_y = \int_{(B)} (x^2 + z^2) dm \qquad (3.12.9)$$



Hình 3.12.3

b, Mô men quán tính của vật rắn đối với một điểm

* *Định nghĩa*. Mô men quán tính của vật rắn đối với điểm O, ký hiệu J_O, được xác định bởi công thức

$$J_O = \int_{(B)} r^2 dm = \int_{(B)} (x^2 + y^2 + z^2) dm \qquad (3.12.10)$$

Trong đó r là khoảng cách từ phân tố dm của vật rắn đến điểm O.

* *Chú ý*. Từ (3.12.8), (3.12.9) và (3.12.10) ta có

$$J_O = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right) \qquad (3.12.11)$$

c, Bán kính quán tính

* *Định nghĩa*. Trong kỹ thuật người ta hay sử dụng khái niệm bán kính quán tính của vật rắn đối với trục z, ký hiệu là ρ_z được định nghĩa bởi công thức

$$\rho_z{}^2 = \frac{J_z}{m} \qquad (3.12.12)$$

Trong đó m là khối lượng của vật rắn, J_z là mômen quán tính của vật rắn đối với trục z.

d, Các mômen quán tính tích

Các mômen quán tính tích, ký hiệu: J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} được cho bởi các công thức sau

$$J_{xy} = \int_{(B)} xydm = J_{yx} ; J_{yz} = \int_{(B)} yzdm = J_{zy} ; J_{xz} = \int_{(B)} xzdm = J_{zx} \qquad (3.12.13)$$

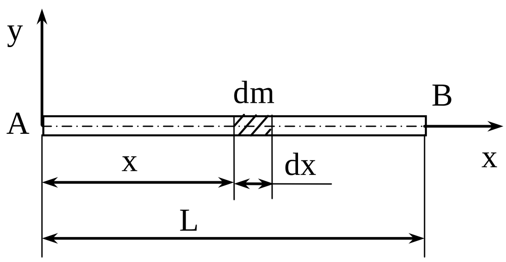
e, Mômen quán tính của một số vật đồng chất có dạng hình học đơn giản

**** Thanh đồng chất***

Theo định nghĩa ta có

$$J_y = \int_0^L x^2 dm$$

đối với thanh đồng chất ta có dm = γdx, trong đó γ = m/*l* là khối lượng của một đơn vị dài.



Hình 3.12.4

$$\Rightarrow \quad J_y = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \frac{1}{3}\frac{m}{L} x^3 \Big|_0^L$$

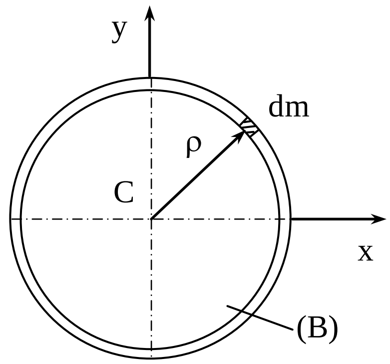
$$\Rightarrow \quad J_y = \frac{mL^3}{3} \qquad (3.12.14)$$

*** Vành tròn đồng chất**

Ta có

$$J_z = \int_{(B)} \rho^2 dm = \int_{(B)} R^2 dm = R^2 \int_{(B)} dm$$

$$\Rightarrow \quad J_z = mR^2 \qquad (3.12.15)$$



Hình 3.12.5

Chú ý. Công thức (3.12.15) cũng được áp dụng cho trường hợp trụ mỏng. Ngoài ra dựa vào công thức (3.12.11) ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{2} mR^2$$

*** Đĩa tròn đồng chất**

Ta có

$$J_z = \int_{(B)} \rho^2 dm = \int_{(B)} r^2 dm$$

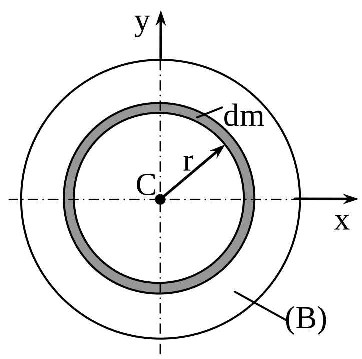
Ta chia đĩa thành nhiều vành tròn ta được

$dm = \gamma.2\pi r.dr$ với $\gamma = m/\pi R^2$

$$\Rightarrow \quad dm = \frac{m}{\pi R^2}.2\pi r dr$$

$$\Rightarrow \quad J_z = \int_0^R r^2 \frac{2m}{R^2} r dr = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^R$$

$$\Rightarrow \quad J_z = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (3.12.16)$$



Hình 3.12.6

Chú ý. Công thức (3.12.16) cũng được áp dụng đối với trường hợp trụ đặc. Ngoài ra dựa vào (3.12.11) ta dễ dàng chứng minh được

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{4} mR^2$$

12.3.2.2 Công thức tính mômen quán tính của vật rắn đối với các trục song song

* *Định lý Huyghen*. Mômen quán tính của vật rắn đối với trục Δ bất kỳ bằng tổng của mômen quán tính của nó đối với trục song song với trục Δ nhưng đi qua khối tâm C của vật và tích của khối lượng vật với bình phương khoảng cách giữa hai trục.

$$J_\Delta = J_{\Delta C} + Md^2 \qquad (3.12.17)$$

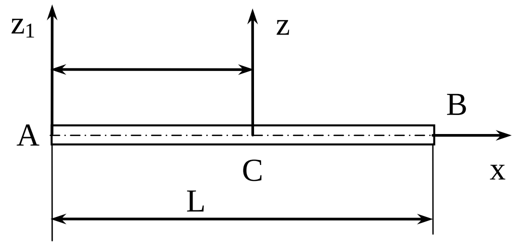
* *Ví dụ*. Xét thanh đồng chất

$$J_{Az1} = J_{Cz} + Md^2$$

$$\Rightarrow \quad J_{Cz} = J_{Az1} - Md^2$$

$$\Rightarrow \quad J_{Cz} = \frac{1}{3} ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad J_{Cz} = \frac{ML^2}{12} \qquad (3.12.18)$$



Hình 3.12.7

12.3.2.3 Trục quán tính chính và trục quán tính chính trung tâm

a, Các định nghĩa

- Trục Oz được gọi là trục quán tính chính tại O nếu thoả mãn điều kiện sau

$$J_{zx} = J_{zy} = 0 \qquad (3.12.19)$$

- Trục Oz được gọi là trục quán tính chính trung tâm nếu nó là trục quán tính chính và đi qua khối tâm của vật.

Chú ý. Người ta đã chứng minh được rằng tại mỗi điểm của vật rắn luôn tồn tại ba trục quán tính chính vuông góc với nhau.

b, Các định lý về xác định trục quán tính chính của các vật đồng chất

* *Định lý 1.* Nếu vật rắn đồng chất có một trục đối xứng thì trục đó là trục quán tính chính trung tâm.

* *Định lý 2.* Nếu vật rắn đồng chất có mặt phẳng đối xứng thì trục thẳng góc với mặt phẳng đối xứng đó là trục quán tính chính tại giao điểm của mặt phẳng đối xứng và trục.

12.2 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG LƯỢNG

12.2.1 Các định nghĩa

a, Động lượng của chất điểm

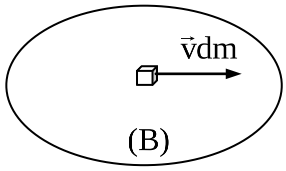
Động lượng của chất điểm là một đại lượng véc tơ, ký hiệu: $\vec{q}$, bằng tích của khối lương chất điểm với véc tơ vận tốc của nó

$$\vec{Q} = m\vec{v} \qquad (3.12.20)$$

b, Động lượng của vật rắn

* *Định nghĩa.* Động lượng của vật rắn (B) là một đại lượng véc tơ được xác định bởi công thức

$$\vec{Q}_B = \int_{(B)} \vec{v}dm \qquad (3.12.21)$$



Hình 3.12.8

Trong đó $\vec{v}dm$ là động lượng phân tố dm của vật rắn (B).

* *Chú ý.* theo định nhĩa khối tâm của vật rắn ta có

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} \vec{r}dm \Rightarrow \dot{\vec{r}}_C = \frac{1}{m}\int_{(B)} \dot{\vec{r}}dm = \frac{1}{m}\int_{(B)} \vec{v}dm \Rightarrow \int_{(B)} \vec{v}dm = m\vec{v}_C$$

$$\Rightarrow \quad \vec{Q}_B = m\vec{v}_C \qquad (3.12.22)$$

trong đó m và $\vec{v}_{CB}$ là khối lượng và vận tốc khối tâm vật rắn (B).

c, Động lượng của cơ hệ

* *Định nghĩa.* Động lượng của cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn là tổng động lượng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ, ký hiệu: $\vec{Q}$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p} m_k\vec{v}_{Ck} \qquad (3.12.23)$$

Trong đó

$m_i, \vec{v}_i$ là khối lượng và vận tốc của chất điểm thứ i

$m_k, \vec{v}_{Ck}$ là khối lượng và vận tốc khối tâm của vật rắn thứ k

* *Chú ý.* Cũng tương tự như ở trên, từ định nghĩa khối tâm của cơ hệ ta cũng suy ra được

$$\vec{Q} = M\vec{v}_C \qquad (3.12.24)$$

Trong đó:

$$M = \sum m_i + \sum m_k$$

$\vec{v}_C$: là vận tốc khối tâm của cơ hệ

d, Xung lượng của lực (còn gọi là xung lực)

- Xung lượng nguyên tố của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian vô cùng bé dt, là một đại lượng véc tơ, ký hiệu: $d\vec{S}$ được cho bởi công thức sau

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \qquad (3.12.25)$$

- Xung lượng hữu hạn của lực $\vec{F}$ trong khoảng thời gian từ t_1 đến t_2 được cho bởi công thức

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \qquad (3.12.26)$$

12.2.2 Định lý biến thiên động lượng

a, Định lý dạng đạo hàm

* *Định lý*. Đạo hàm theo thời gian động lượng của cơ hệ bằng tổng các ngoại lực tác dụng lên các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ.

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^{\,e} \qquad (3.12.27)$$

* *Chú ý*. Định lý này có thể được viết dưới dạng hình chiếu như sau

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e \qquad (3.12.28)$$

b, Định lý dạng hữu hạn

* *Định lý*. Biến thiên động lượng của cơ hệ trong một khoảng thời gian hữu hạn bằng tổng xung lượng của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ trong khoảng thời gian đó

$$\vec{Q}(t_2) - \vec{Q}(t_1) = \sum \vec{S}_k^e \qquad (3.12.29)$$

* *Chú ý*. Định lý này cũng có thể được viết dưới dạng hình chiếu như sau

$$Q_x(t_2) - Q_x(t_1) = \sum S_{kx}^e; Q_y(t_2) - Q_y(t_1) = \sum S_{ky}^e; Q_z(t_2) - Q_z(t_1) = \sum S_{kz}^e \qquad (3.12.30)$$

12.2.3 Định lý bảo toàn động lượng

* *Định lý 1*. Nếu tổng các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ bằng không thì động lượng của cơ hệ được bảo toàn.

* *Chứng minh*. Từ (3.12.27) ta có

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^{\,e} \Rightarrow \text{nếu } \sum \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{const}$$

* *Định lý 2*. Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ lên một trục cố định luôn bằng không, thì hình chiếu của động lượng lên trục đó được bảo toàn.

* *Chứng minh*. Từ (3.12.28) ta có

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \Rightarrow \text{nếu } \sum F_{kx}^e = 0 \Rightarrow Q_x = \text{const}$$

12.3 ĐỊNH LÝ CHUYỂN ĐỘNG KHỐI TÂM

12.3.1 Định lý

Khối tâm của cơ hệ chuyển động như một chất điểm có khối lượng bằng khối lượng của cả cơ hệ và chịu tác dụng của lực bằng véc tơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e \qquad (3.12.31)$$

Chú ý. Định lý trên có thể viết dưới dạng toạ độn đề các như sau

$$\{M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e; M\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e; M\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e \qquad (3.12.32)$$

12.3.2 Định luật bảo toàn chuyển động khối tâm

* *Định lý 1*. Nếu véc tơ chính của hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ luôn luôn bằng không thì khối tâm của cơ hệ hoặc đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều.

Chứng minh. Ta có $M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e \Rightarrow$ nếu $\sum \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow \vec{a}_C = 0 \Rightarrow \vec{v}_C = \overrightarrow{\text{Const}}$ có hai khả năng xảy ra như sau.

+ Nếu $\vec{v}_C = 0$ khối tâm của cơ hệ đứng yên.

+ Nếu $\vec{v}_C = \overrightarrow{\text{Const}} \neq 0$ khối tâm của cơ hệ chuyển động thẳng đều.

* *Định lý 2*. Nếu tổng hình chiếu của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ lên một trục cố định nào đó luôn luôn bằng không thì toạ độ khối tâm của cơ hệ trên trục đó hoặc đứng yên hoặc chuyển động đều.

Chứng minh:

Ta có $M\ddot{x}_C = \sum F^e_{kx}; M\ddot{y}_C = \sum F^e_{ky}; M\ddot{z}_C = \sum F^e_{kz}$, Giả sử nếu $\sum F^e_{kx} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_C = 0 \Rightarrow \dot{x}_C = \text{const}$. Có hai khả năng xảy ra như sau.

+ Nếu $\dot{x}_C = 0 \Rightarrow x_C = \text{Const}$

+ Nếu $\dot{x}_C = \text{const} \neq 0 \Rightarrow x_C$ chuyển động đều.

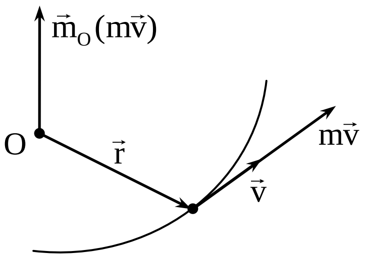
12.4 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN MÔMEN ĐỘNG LƯỢNG

12.4.1 Các định nghĩa

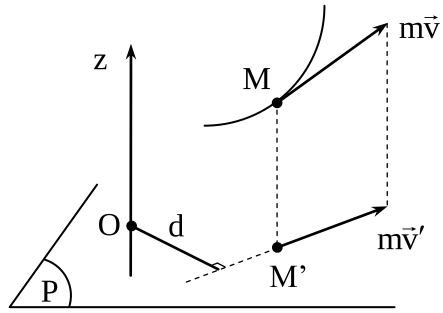
a, Mômen động lượng của chất điểm

- Mômen động lượng của chất điểm đối với điểm O là một đại lượng véc tơ, ký hiệu: $\vec{L}_O$, là mômen đối với điểm O của véc tơ động lượng chất điểm ấy (hình 3.12.9).

$$\vec{L}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}) = \vec{r} \wedge m\vec{v} \tag{3.12.33}$$



Hình 3.12.9



Hình 3.12.10

- Mômen động lượng của chất điểm đối với trục z là một lượng đại số, ký hiệu: $\bar{L}_z$, là mômen đối với trục z của véc tơ động lượng chất điểm ấy (hình 3.12.10).

$$\bar{L}_z = \bar{m}_z(m\vec{v}) = \bar{m}_O(m\vec{v}') = \pm mv'd \tag{3.12.34}$$

Trong đó:

+ $m\vec{v}'$ là véc tơ hình chiếu của véc tơ $m\vec{v}$ trên mặt phẳng P vuông góc với trục z.

+ d là khoảng cách từ điểm O (là giao điểm của trục z với mặt phẳng P) đến giá mang véc tơ $m\vec{v}'$

+ Lấy dấu cộng khi $m\vec{v}'$ vòng quanh O ngược chiều kim đồng hồ, lấy dấu trừ khi $m\vec{v}'$ vòng quanh O cùng chiều kim đồng hồ.

* *Chú ý*. Từ định lý liên hệ giữa mômen của lực đối với một điểm và mômen của lực đối với một trục ta suy ra được

$$\bar{m}_z(m\vec{v}) = hch_z\left[\vec{m}_O(m\vec{v})\right] \tag{3.12.35}$$

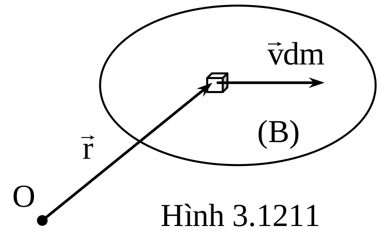
với $O \in z$

b, Mômen động lượng của vật rắn

* *Định nghĩa*

- Mômen động lượng của vật rắn đối với điểm O là một đại lượng véc tơ được cho bởi công thức

$$\vec{L}_O = \int_{(B)} (\vec{r} \wedge \vec{v})dm \tag{3.12.36}$$



Hình 3.1211

- Mômen động lượng của vật rắn đối với trục z là lượng đại số được cho bởi công thức

$$\bar{L}_z = \int_{(B)} d\bar{L}_z = \int_{(B)} \bar{m}_z(\vec{v}dm) \tag{3.12.37}$$

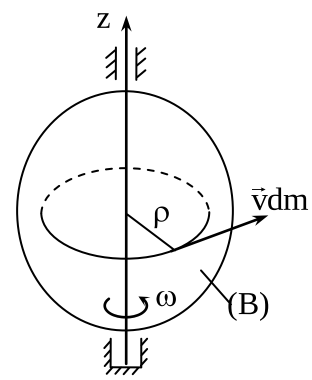
* *Mômen động lượng của vật rắn trong một số chuyển động*

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến: Đối với vật rắn chuyển động tịnh tiến, vận tốc mọi điểm thuộc vật bằng nhau và bằng vận tốc khối tâm C của vật, nên từ (3.12.35) ta có

$$\vec{L}_O = \int_{(B)} (\vec{r}\wedge\vec{v})dm = \int_{(B)} (\vec{r}\wedge\vec{v}_C)dm = \left(\int_{(B)} \vec{r}dm\right)\wedge\vec{v}_C$$

$$= m\vec{r}_C \wedge \vec{r}_C = \vec{r}_C \wedge (m\vec{r}_C)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_O = \vec{m}_O(m\vec{v}_C) \qquad (3.12.38)$$



Hình 3.12.12

- Vật rắn chuyển động quay quanh trục cố định

Ta có $d\overline{L}_z = \rho\overline{v}dm = \rho^2\overline{\omega}dm$

$$\Rightarrow \quad \overline{L}_z = \int_{(B)} d\overline{L}_z = \int_{(B)} \rho^2\overline{\omega}dm = \overline{\omega}\int_{(B)} \rho^2 dm = J_z\overline{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{L}_z = J_z\overline{\omega} \qquad (3.12.39)$$

c, Mômen động lượng của cơ hệ

- Mômen động lượng của cơ hệ (gồm n chất điểm và p vật rắn) đối với điểm O là một đại lượng véc tơ bằng tổng các véc tơ mômen động lượng của của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ lấy đối với điểm O

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n}\vec{m}_O(m_i\vec{v}_i) + \sum_{k=1}^{p}\int_{(B_k)} (\vec{r}\wedge\vec{v})dm = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}\wedge m_i\vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p}\int_{(B_k)} (\vec{r}\wedge\vec{v})dm \qquad (3.12.40)$$

- Mômen động lượng của cơ hệ đối với trục z bằng tổng mômen động lượng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ lấy đối với trục z.

$$\overline{L}_z = hch_z\left[\vec{L}_O\right] = \sum_{i=1}^{n}\overline{m}_z(m_i\vec{v}_i) + \sum_{k=1}^{p}\overline{L}_z^{(B_k)} \qquad (3.12.41)$$

12.4.2 Định lý biến thiên mômen động lượng

Định lý. Đạo hàm theo thời gian mômen động lượng của cơ hệ đối với một tâm hay một trục bằng tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với tâm hay trục đó.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum\vec{m}_O(\vec{F}_k^e);\ \frac{d\overline{L}_z}{dt} = \sum\overline{m}_z(\vec{F}_k^e) \qquad (3.12.42)$$

12.4.3 Định luật bảo toàn mômen động lượng

* *Định lý*. Nếu tổng mômen của các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ đối với một tâm hay một trục mà luôn bằng không thì mômen động lượng của cơ hệ đối với tâm hay trục đó được bảo toàn.

* *Chứng minh*. Từ công thức (3.12.42) ta thấy

$$\Rightarrow \quad \text{Nếu } \sum\vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Nếu } \sum\overline{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0 \Rightarrow \frac{d\overline{L}_z}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{L}_z = \text{const}$$

12.5 ĐỊNH LÝ BIẾN THIÊN ĐỘNG NĂNG

12.5.1 Công của lực

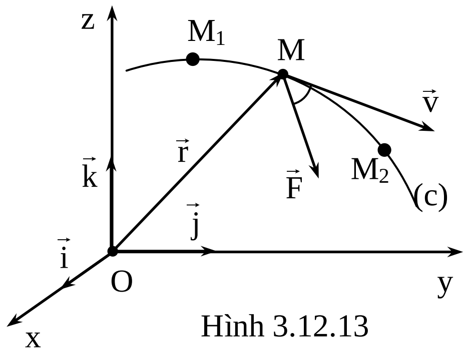
a, Công nguyên tố của lực

* *Định nghĩa*: Công nguyên tố của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt của nó di chuyển trên đường cong (c) một đoạn vô cùng nhỏ ds được cho bởi công thức

$$d'A(\vec{F}) = F.\cos(\alpha).ds \qquad (3.12.43)$$

Trong đó α là góc giữa lực $\vec{F}$ và véc tơ vận tốc $\vec{v}$ của điểm đặt lực. Mặt khác ta có

$$ds = vdt \Rightarrow d'A(\vec{F}) = F.v.\cos(\alpha).dt = \vec{F}.\vec{v}.dt$$



Hình 3.12.13

mà $\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow \vec{v}dt = d\vec{r} \Rightarrow d'A(\vec{F}) = \vec{F}d\vec{r}$

$$\Rightarrow \quad d'A(\vec{F}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

với

$$\begin{cases} \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} \\ d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{cases}$$

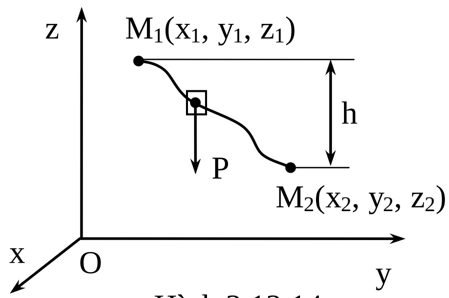
$$\Rightarrow \quad d'A(\vec{F}) = F.\cos(\alpha).ds = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (3.12.44)$$

b, Công hữu hạn của lực

Định nghĩa. Công hữu hạn của lực $\vec{F}$ khi điểm đặt của nó di chuyển trên đường cong (c) một đoạn hữu hạn từ M_1 đến M_2 được cho bởi công thức

$$A(\vec{F}) = \int_{S_1}^{S_2} F.\cos(\alpha).ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}d\vec{r} = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (3.12.45)$$

c, Biểu thức công của một số lực



Hình 3.12.14

* *Công của trọng lực*

Ta có

$$A(\vec{P}) = \int_{M_1M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

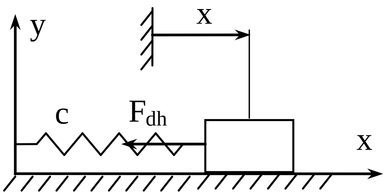
Từ hình vẽ ta thấy $F_x = F_y = 0$, $F_z = 0$, nên ta suy ra

$$A(\vec{P}) = \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_{z_1}^{z_2} -Pdz = -P(z_2 - z_1)$$

Nếu điểm đặt của lực di chuyển từ trên xuống, ta có $z_2 < z_1 \Rightarrow A(\vec{P}) > 0$. Nếu điểm đặt của lực di chuyển từ dưới lên, ta có $z_2 > z_1 \Rightarrow A(\vec{P}) < 0$. Gọi $h = |z_2 - z_1|$ là hiệu độ cao, khi đó ta có

$$A(\vec{P}) = \pm Ph \qquad (3.12.46)$$

Lấy dấu cộng khi trọng tâm của vật di chuyển từ trên xuống, lấy dấu trừ khi trọng tâm của vật di chuyển từ dưới lên.



Hình 3.13.15

* *Công của lực đàn hồi tuyến tính*

Từ hình 3.12.15 ta có, $F_x = - F_{dh}$, $F_y = F_z = 0$

$$\Rightarrow \quad A(\vec{F}_{dh}) = \int_{M_1M_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) = -\int_{x_1}^{x_2} F_{dh} dx$$

Mà $F_{dh} = cx$, với x là độ biến dạng của lò xo kể từ vị trí chưa biến dạng

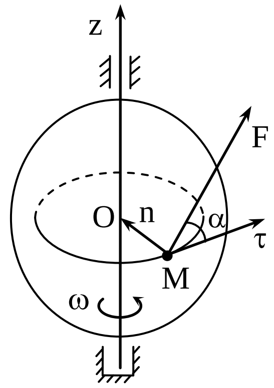
$$\Rightarrow \quad A(\vec{F}_{dh}) = -\int_{x_1}^{x_2} cxdx = -\frac{1}{2}c\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right)$$

Nếu chọn $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = x$, ta có

$$A(\vec{F}_{dh}) = -\frac{1}{2}cx^2 \qquad (3.12.47)$$

* *Công của ngẫu lực*

$$d'A(\bar{M}) = \bar{M}d\varphi \Rightarrow A(\bar{M}) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{M}d\varphi \qquad (3.12.48)$$



Hình 3.12.16

* *Công của lực tác dụng lên vật rắn quay quanh một trục cố định*

Cho lực $\vec{F}$ tác dụng lên vật rắn quay quanh trục cố định như hình 3.12.16, khi đó ta có

$$d'A(\vec{F}) = \vec{F}d\vec{r} = Fds\cos\alpha$$

Với α là góc giữa $\vec{F}$ và véc tơ vận tốc $\vec{v}_M$ hay là góc giữa $\vec{F}$ và trục tiếp tuyến Mτ, do đó ta có

$$d'A(\vec{F}) = F_\tau ds = F_\tau.OM.d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad d'A(\vec{F}) = \overline{m}_z(\vec{F}).d\varphi \qquad (3.12.49)$$

* *Công của lực tác dụng vào tấm chuyển động song phẳng*

Ta coi tấm chuyển động song phẳng như vật rắn chuyển động quay quanh trục đi qua tâm vận tốc tức thời và vuông góc với tấm, khi đó ta có

$$d'A(\vec{F}) = \overline{m}_P(\vec{F})d\varphi = \overline{m}_C(\vec{F})d\varphi + \vec{F}_C d\vec{r}_C \qquad (3.12.50)$$

Chú ý: Nếu tấm chịu tác dụng của ngẫu lực có mô men $\overline{M}$ nằm trong mặt phẳng của tấm, ta có

$$d'A(\overline{M}) = \overline{M}d\varphi \qquad (3.12.51)$$

* *Công của hệ nội lực trong vật rắn*

Đối với vật rắn biến dạng, nói trung công của hệ nội lực trong nó luôn khác không. Đối với vật rắn tuyệt đối thì công của hệ nội lực trong nó luôn bằng không.

12.5.2 Công suất

Định nghĩa. Công suất là công của lực sinh ra trong một đơn vị thời gian, ký hiệu: W

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} \qquad (3.12.52)$$

Chú ý. Với ngẫu lực $\overline{M}$ tác dụng vào vật quay quanh trục cố định thì công suất của nó được cho bởi công thức

$$W = \frac{d'A}{dt} = \frac{\overline{M}d\varphi}{dt} = \overline{M}\overline{\omega} \qquad (3.12.53)$$

12.5.3 Động năng

a, Động năng của chất điểm

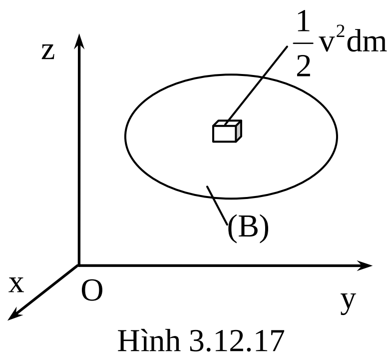
Định nghĩa. Động năng của chất điểm có khối lượng m, chuyển động với vận tốc $\vec{v}$ là một đại lượng vô hướng luôn dương, ký hiệu: T, được cho bởi công thức

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \ (kgm^2/s^2) \qquad (3.12.54)$$

b, Động năng của vật rắn

* *Định nghĩa*. Động năng của vật rắn được cho bởi công thức

$$T = \frac{1}{2}\int_{(B)} v^2 dm \qquad (3.12.55)$$



Hình 3.12.17

* *Động năng của vật rắn trong một số chuyển động*

- Vật rắn chuyển động tịnh tiến

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 \qquad (3.12.56)$$

Trong đó: m và $\vec{v}_C$ là khối lượng và vận tốc khối tâm của vật rắn.

- Vật rắn chuyển động quay quanh một trục cố định

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \qquad (3.12.57)$$

Trong đó J_z là mô men quán tính của vật rắn đối với trục quay z, ω là vận tốc góc của vật.

- Vật rắn chuyển động song phẳng

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 \qquad (3.12.58)$$

Trong đó: m là khối lượng của vật, $\vec{v}_C$ là vận tốc khối tâm của vật, J_c là mô men quán tính của vật đối với trục đi qua khối tâm C của nó, ω là vận tốc góc của vật.

c, Động năng của cơ hệ

Động năng của cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn là tổng động năng của các chất điểm và các vật rắn thuộc cơ hệ

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_{M_i} + \sum_{k=1}^{p} T_{B_k} \tag{3.12.59}$$

12.5.4 Định lý biến thiên động năng

a, Dạng vi phân

* *Định lý 1*: Vi phân động năng của cơ hệ bằng tổng công nguyên tố của tất cả các ngoại lực và các nội lực tác dụng lên cơ hệ.

$$dT = \sum d'A(\vec{F}_k^e) + \sum d'A(\vec{F}_k^i) \tag{3.12.60}$$

b, Dạng hữu hạn

* *Định lý 2*: Biến thiên động năng của cơ hệ trong một dịch chuyển nào đó của nó bằng tổng công của tất cả các ngoại lực và các nội lực tác dụng lên cơ hệ trong dịch chuyển đó.

$$T_2 - T_1 = \sum A(\vec{F}_k^e) + \sum A(\vec{F}_k^i) \tag{3.12.61}$$

c, Dạng đạo hàm

* *Định lý 3*: Đạo hàm theo thời gian động năng của cơ hệ bằng tổng công suất của các ngoại lực và các nội lực tác dụng lên cơ hệ.

$$\frac{dT}{dt} = \sum w(\vec{F}_k^e) + \sum w(\vec{F}_k^i) \tag{3.12.62}$$

12.6 ĐỊNH LÝ BẢO TOÀN CƠ NĂNG

12.6.1 Trường lực

- Trường lực là khoảng không gian vật lý mà khi chất điểm hay vật rắn chuyển động trong đó sẽ chịu tác dụng của lực chỉ phụ thuộc vào vị trí chất điểm hay vật rắn. Ví dụ: Trường trọng lực, trường lực đàn hồi.
- Trường lực thế là trường lực mà công của lực do trường lực này tác dụng lên chất điểm hay vật rắn chuyển động trong đó chỉ phụ thuộc vào vị trí đầu và vị trí cuối của điểm đặt lực. Ví dụ: Trường trọng lực, trường lực đàn hồi tuyến tính
- Lực do trường lực thế tác dụng lên chất điểm hay vật rắn được gọi là lực thế, có dạng.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \tag{3.12.63}$$

với (x, y, z) là các toạ độ của điểm đặt lực trong toạ độ Đề các.

12.6.2 Thế năng

Khảo sát cơ hệ gồm n chất điểm và p vật rắn. Giả sử cơ hệ chịu tác dụng của các lực có thể $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_m$ được đặt tại các điểm M_1, M_2, …, M_m. Ta chọn một vị trí "0" ($M_1^{(0)}$, $M_2^{(0)}$, …, $M_m^{(0)}$) bất kỳ làm gốc, gọi là vị trí quy chiếu, khi đó ta có định nghĩa sau.

* *Định nghĩa*. Thế năng của cơ hệ tại một vị trí "1" nào đó, ký hiệu: π_1, bằng tổng công của các lực thế tác dụng lên cơ hệ khi nó di chuyển từ vị trí đó về vị trí quy chiếu "0" đã chọn

$$\Pi_1 = \sum \left[A(\vec{F}_k) \right]_{M_k^{(1)} \to M_k^{(0)}} = A_{1-0} \tag{3.12.64}$$

* *Chú ý*.

- Do vị trí quy chiếu được chọn tuỳ ý nên thế năng của cơ hệ tại một vị trí nào đó được xác định sai khác một hằng số cộng.
- Thế năng của cơ hệ tạ vị trí quy chiếu bằng không. $\pi_0 = 0$

- Như đã biết công của lực thế chỉ phụ thuộc vào vị trí của các điểm đặt lực $M_1, M_2, \ldots, M_m$ do đó thế năng của cơ hệ cũng phụ thuộc vào vị trí của các điểm $M_1, M_2, \ldots, M_m$ khi đó ta có hàm có dạng như

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_m, y_m, z_m) \quad (3.12.65)$$

được gọi là hàm thế

* Các ví dụ

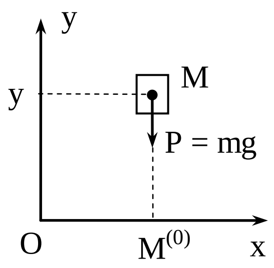
- Thế năng của trọng lực (Hình 3.12.18)

$$\Pi = A_{MM_0} = Py = mgy \quad (3.12.66)$$

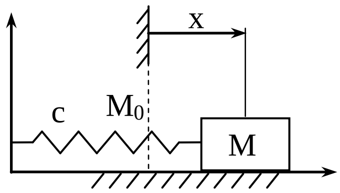
- Thế năng của lực đàn hồi lò xo (Hình 3.12.19)

$$\Pi = A_{MM_0} = \frac{1}{2}cx^2 \quad (3.12.67)$$

Trong đó: c là độ cứng của lò xo, x là độ biến dạng của lò xo so với vị trí chưa biến dạng



Hình 3.12.18



Hình 3.12.19

12.6.3 Các tính chất của lực thế

* *Tính chất 1*: Công của các lực thế khi cơ hệ di chuyển trong trường lực thế bằng hiệu thế năng giữa vị trí đầu và vị trí cuối của cơ hệ.

$$A_{M^{(1)}M^{(2)}} = \Pi_{M^{(1)}} - \Pi_{M^{(2)}} \quad (3.12.68)$$

* *Chứng minh*. Vì công của lực thế không phụ thuộc vào dạng quỹ đạo của các điểm đặt lực nên ta có:

$$A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}0} + A_{0\text{-}2} = A_{1\text{-}0} - A_{2\text{-}0} \Rightarrow A_{1\text{-}2} = \Pi_1 - \Pi_2$$

* *Tính chất 2*: Nếu $\vec{F}_k(x_k, y_k, z_k)$ là một lực thế tác dụng lên cơ hệ, khi đó ta có

$$F_{kx} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}; F_{ky} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}; F_{kz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_k} \quad (3.12.69)$$

với Π là thế năng của cơ hệ.

12.6.4 Định lý bảo toàn cơ năng

a, Khái niệm cơ hệ bảo toàn

Cơ hệ chỉ chịu tác dụng của các lực hoạt động có thế được gọi là cơ hệ bảo toàn (hay gọi tắt là cơ hệ bảo toàn)

b, Định lý bảo toàn cơ năng

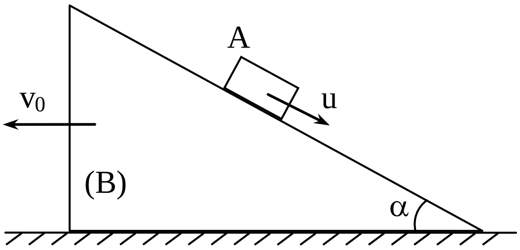
Định lý. Khi cơ hệ chỉ chịu tác dụng của các lực hoạt động có thế thì tổng động năng và thế năng của cơ hệ luôn luôn không đổi.

$$E = T + \pi = const \quad (3.12.70)$$

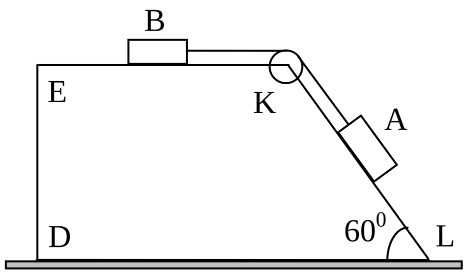
E: Được gọi là cơ năng

12.7 BÀI TẬP

Bài 12.1: Cho cơ hệ gồm vật nặng A trọng lượng P_1 đặt trên mặt nghiêng của lăng trụ B có trọng lượng P_2. Góc nghiêng của mặt lăng trụ với mặt phẳng ngang là α. Lăng trụ được đặt trên mặt ngang nhẵn như hình vẽ. Ban đầu vật nặng A nằm yên tương đối trên mặt lăng trụ, còn chính lăng trụ thì trượt sang trái với vận tốc là v_0. Hãy xác định vận tốc của lăng trụ khi vật nặng A trượt xuống theo mặt phẳng nghiêng của lăng trụ với vận tốc tương đối là u.



Hình bài 12.1



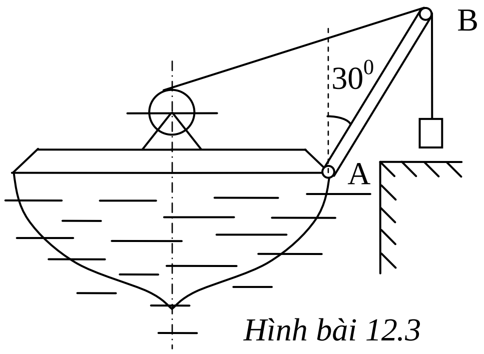
Hình bài 12.2

Bài 12.2: Hai vật nặng A và B có khối lượng là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng sợi dây mềm, nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc K và được đặt trêncác mặt LK và KE của lăng trụ DEKL. Lăng trụ này có khối lượng là m_3 đặt trên nền ngang nhẵn.

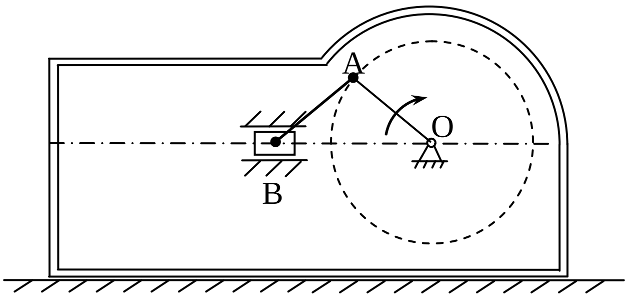
Tìm di chuyển của lăng trụ khi vật nặng A trươt xuống theo mặt phẳng nghiêng KL một đoạn là S. Ban đầu hệ đứng yên.

Bài 12.3: Xác định di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu khi cần AB mang vật nặng có khối lượng bằng 2 tấn cất thẳng đứng lên từ vị trí ban đầu nghiêng góc 30^0 như hình vẽ. Khối lượng của tầu và cần cẩu là 20 tấn, chiều dài AB = 8m. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB.

Bài 12.4: Một động cơ hơi nước đặt nằm ngang trên mặt móng trơn nhẵn. Tay quay OA có chiều dài r và quay đều với vận tốc góc ω. Thanh truyền AB dài bằng tay quay (OA = AB). Coi khối lượng của các bộ phận chuyển động được thu gọn về thành hai khối lượng m_1 và m_2 tập trung ở đầu tay quay và ở trọng tâm của pittông B. Khối lượng của vỏ động cơ là m_3. Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ. Biết ban đầu pittông ở vị trí xa nhất về bên trái.

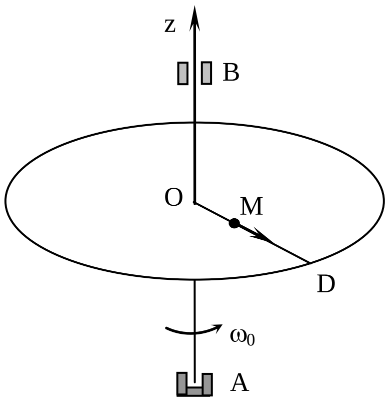


Hình bài 12.3

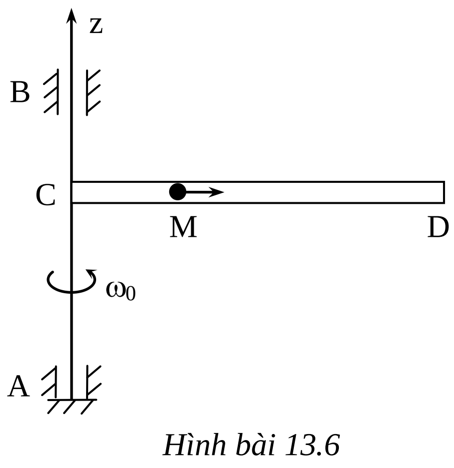


Hình bài 12.4

Bài 12.5: Khi đĩa tròn đông chất bán kính R, khối lượng m_1 nằm ngang đang quay quanh trục thẳng đứng AB đi qua tâm O của đĩa với vận tốc góc ω_0 thì có chất điểm M khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài theo bán kính OD. Hỏi đĩa quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu khi chất điểm chuyển động đến điểm giữa bán kính OD.



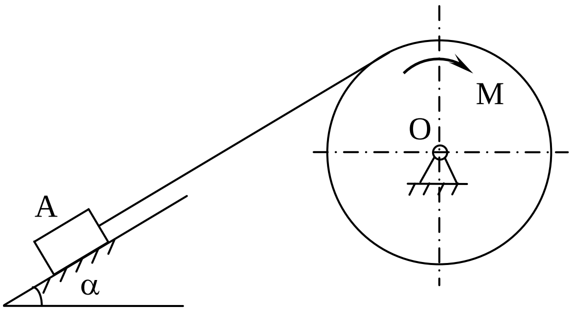
Hình bài 13.5



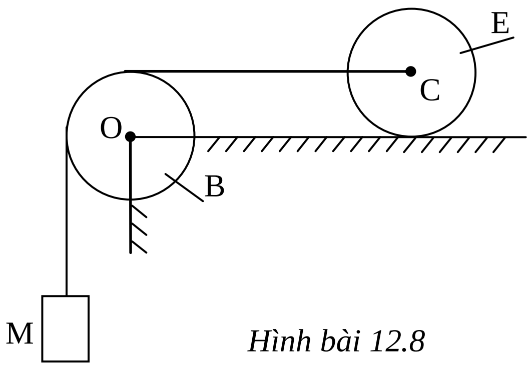
Hình bài 13.6

Bài 12.6: Ống CD nằm ngang có chiều dài L, có thể quay tự do quanh trục thẳng đứng AB. Bên trong ống có quả cầu (xem như một chất điểm), có khối lượng m. Ban đầu ống quay với vận tốc góc ω_0 còn quả cầu nằm cách trục quay một khoảng MC = a (a < L/2). Hãy xác định vận tốc góc ω của ống khi quả cầu di chuyển đến vị trí cách trục quay một khoảng MC = b (b > L/2). Biết mô men quán tính của ống đối với trục quay là J. Bỏ qua ma sát tại các ổ trục.

Bài 12.7: Một ngẫu lực có mômen quay M không đổi tác dụng lên tang của một trục tời có bán kính R và trọng lượng P_1. Quấn vào tang tời một sợi dây mềm nhẹ và không giãn, đầu kia của dây được buộc vào vật nặng A có trọng lượng là P_2 để kéo nó lên theo mặt phẳng nghiêng như hình vẽ. Hệ số ma sát trượt động giữa A và mặt nghiêng là f. Tang tời được xem là trụ tròn đồng chất. Hãy tìm biểu thức vận tốc góc của tời theo góc quay của nó.



Hình bài 12.7

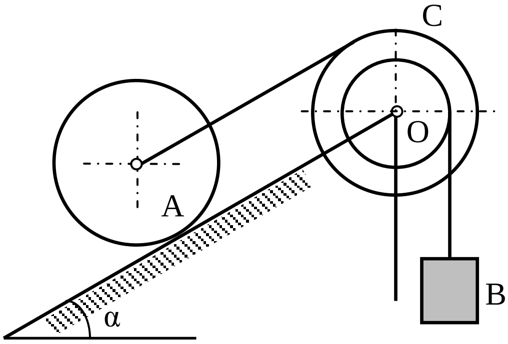


Hình bài 12.8

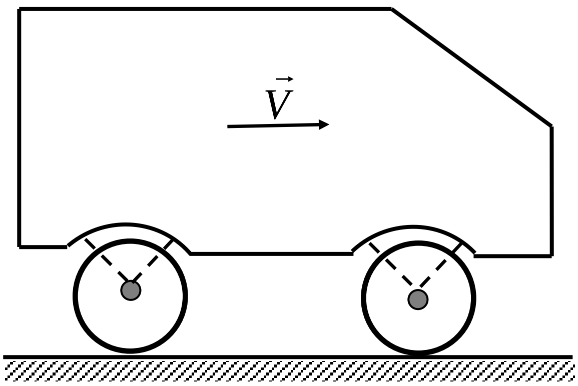
Bài 12.8: Cho cơ hệ gồm vật nặng A trọng lượng Q, ròng rọc cố định B và con lăn E có cùng trọng lượng P, cùng bán kính r và cùng là trụ tròn đồng chất. Con lăn E lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Hãy xác định vận tốc của vật A khi nó đi xuống một đoạn h. Biết ban đầu hệ đứng yên, trọng lượng dây không đáng kể và bỏ qua ma sát lăn giữa cong lăn và mặt đường.

Bài 12.9: Một ròng rọc kép C có bán kính nhỏ **r** và bán kính lớn **R** có trọng lượng **Q**, có thể quay quanh trục cố định O cuốn dây không giãn, không trọng lượng. Một đầu dây treo vật nặng B có trọng lượng $\mathbf{P_1}$ chuyển động theo phương thẳng đứng còn đầu kia buộc vào tâm A của bánh xe đồng chất có trọng lượng $\mathbf{P_2}$ bán kính **R** có thể lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng cố định hợp với phương ngang góc **α.** Tính vận tốc của vật B khi vật B rơi xuống đoạn **h**.

Bài 12.10: Ô tô cùng với 4 bánh xe có trọng lượng **P**, mỗi bánh có trọng lượng **q**, bán kính **r**, bán kính quán tính đối với trục bánh là **ρ** như hình vẽ. Nếu tác dụng vào các bánh sau(bánh chủ động) mômen quay M_q thì ô tô bắt đầu chuyển động từ trạng thái đứng yên với vận tốc **V**. Coi các bánh xe lăn không trượt, bỏ qua ma sát lăn. Viết phương trình vi phân chuyển động của hệ.



Hình bài 12.9



Hình bài 12.10