MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Dao động là một hiện tượng phổ biến trong tự nhiên và trong kỹ thuật. Như dao động của các máy, các phương tiện giao thông vận tải, các tòa nhà cao tầng, những chiếc cầu bắc ngang qua các dòng sông, *...Đó là các hệ dao động trong kỹ thuật.*

Cuốn bài giảng này bao gồm 4 chương như: Mô tả động học các quá trình dao động, Dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do, Dao động tuyến tính của hệ nhiều bậc tự do, Dao động tuyến tính của hệ vô hạn bậc tự do.

Trong quá trình biên soạn, cuốn bài giảng không tránh khỏi khiếm khuyết, rất mong nhận được sự góp ý của bạn đọc để cuốn sách ngày càng hoàn thiện hơn.

Bộ môn Cơ học

Trường Đại học Hàng Hải

Hải Phòng 2016

Chương 1
MÔ TẢ ĐỘNG HỌC CÁC QUÁ TRÌNH DAO ĐỘNG

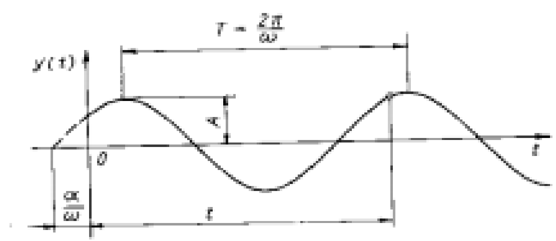
1.1. Dao động điều hòa

1.1.1. Các tham số động học của dao động điều hòa

Dao động điều hòa được mô tả về phương diện động học bởi hệ thức

$$y(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = A\sin\psi(t) \tag{1.1}$$

Dao động điều hòa còn gọi là dao động hình sin. Đại lượng A được gọi là biên độ dao động. Như thế biên độ dao động là giá trị tuyệt đối của độ lệch lớn nhất của đại lượng dao động y(t) so với giá trị trung bình của nó. Đại lượng $\psi(t) = \omega t + \alpha$ được gọi là pha dao động. Góc α được gọi là pha ban đầu.



Đại lượng ω được gọi là tần số vòng của dao động điều hòa, đơn vị là rad/s hoặc 1/s. Vì hàm sin có chu kỳ 2π nên dao động điều hòa có chu kỳ

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.2}$$

Tần số dao động, đơn vị là 1/s hoặc Hz

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.3}$$

Từ công thức (1.1) ta thấy: một dao động điều hòa được xác định khi biết ba đại lượng A, ω và α. Mặt khác, một dao động điều hòa cũng được xác định duy nhất khi biết tần số vòng ω và các điều kiện đầu. Giả sử có dạng.

$$t = 0: \quad y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

Khi đó phương trình (1.1) có

$$y_0 = A\sin\alpha; \qquad \dot{y}_0 = \omega A\cos\alpha$$

Từ đó suy ra $A = \sqrt{y_0^2 + \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}}$ $\qquad \alpha = arctg\frac{\omega y_0}{\dot{y}_0}$ (1.4)

Để xác định pha ban đầu ta cũng cần chú ý đến cả hệ thức sau

$$\alpha = \arcsin\frac{y_0}{A} \qquad (1.5)$$

Người ta cũng hay biểu diễn dao động điều hòa (1.1) dưới dạng sau

$$y(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t \qquad (1.6)$$

So sánh biểu thức (1.6) và biểu thức (1.1) ta có

$$C_1 = A\sin\alpha; \qquad C_2 = A\cos\alpha \qquad (1.7)$$

Từ đó suy ra $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\qquad \alpha = arctg\dfrac{C_1}{C_2} = \arcsin\dfrac{C_1}{A}$ (1.8)

Các hằng số C_1 và C_2 cũng có thể xác định được từ các điều kiện đầu

$$C_1 = y_0; \qquad C_2 = \frac{\dot{y}_0}{\omega}$$

1.1.2. Biểu diễn phức dao động điều hòa

Hàm điều hòa y(t) có thể xem như phần ảo của véc tơ phức $\bar{z}$ quay với vận tốc góc ω trong mặt phẳng số.

$$\bar{z} = Ae^{i(\omega t+\alpha)} = Ae^{i\alpha}e^{i\omega t} = \bar{A}e^{i\omega t} \qquad (1.9)$$

$$y(t) = \mathrm{Im}(\bar{z}(t)) \qquad (1.10)$$

Đại lượng $\bar{A} = Ae^{i\alpha}$ được gọi là biên độ phức.

Nhờ công thức Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Ta có $y(t) = \mathrm{Im}(\bar{z}(t)) = A\,\mathrm{Im}(e^{i(\omega t+\alpha)}) = A\sin(\omega t + \alpha)$

1.1.3. Tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương và cùng tần số

Cho hai dao động điều hòa cùng phương và cùng tần số

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega t + \alpha_1); \qquad y_2(t) = A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$$

Tổng hợp hai dao động điều hòa trên được xác định bởi hệ thức sau

$$y(t) = A_1\sin(\omega t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$$

Sử dụng định lý cộng đối với hàm số sin ta có

$$y(t) = A_1\sin\omega t\cos\alpha_1 + A_1\cos\omega t\sin\alpha_1 + A_2\sin\omega t\cos\alpha_2 + A_2\cos\omega t\sin\alpha_2$$
$$= (A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)\sin\omega t + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)\cos\omega t$$

Ta đưa vào ký hiệu

$$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$$

$$A\sin\alpha = A_1\sin\alpha + A_2\sin\alpha_2$$

Thì biểu thức trên có dạng

$$y(t) = A\sin\omega t\cos\alpha + A\cos\omega t\sin\alpha = A\sin(\omega t + \alpha) \quad (1.11)$$

Như vậy tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương cùng tần số là dao động điều hòa với tần số là tần số của các dao động điều hòa thành phần, biên độ A và góc pha ban đầu α được xác định bởi các hệ thức sau.

$$A = \sqrt{(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2 + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2}$$

$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \quad (1.12)$$

$$\alpha = arctg\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \quad (1.13)$$

Hoặc $$\alpha = \arcsin\frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A} \quad (1.14)$$

1.2. Dao động tuần hoàn

1.2.1. Các tham số động học của dao động tuần hoàn

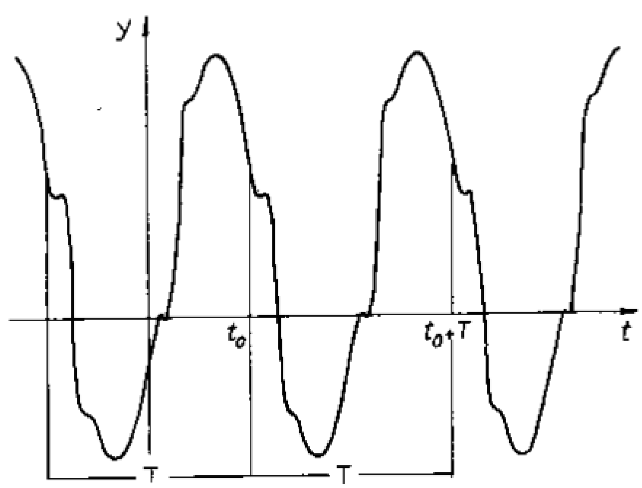
Một hàm số y(t) được gọi là hàm tuần hoàn, nếu tồn tại một hằng số T > 0, sao cho với mọi t ta có hệ thức

$$y(t + T) = y(t) \quad (2.1)$$

Một quá trình dao động được mô tả về mặt động học bởi một hàm tuần hoàn y(t) được gọi là dao động tuần hoàn. Hằng số T nhỏ nhất để cho hệ thức (2.1) được thỏa mãn gọi là chu kỳ dao động.

Chú ý rằng nếu hàm số y(t) có chu kỳ T thì hàm số u(t) = y(at) có chu kỳ T/a. Thực vậy

$$u(t + \frac{T}{a}) = y\left[a(t + \frac{T}{a})\right] = y(at + T) = y(at) = u(t)$$



Biên độ dao động tuần hoàn y(t) được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$A = \frac{1}{2}\left[\max y(t) - \min y(t)\right] \tag{2.2}$$

Đối với dao động tuần hoàn, ngoài các tham số động học đặc trưng cho chu kỳ, tần số, biên độ người ta còn sử dụng các tham số giá trị trung bình theo thời gian của hàm y(t) trong một chu kỳ. Ba loại giá trị trung bình hay được sử dụng là giá trị trung bình tuyến tính

$$y_{tt} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)dt \tag{2.3}$$

giá trị trung bình hiệu dụng

$$y_{hd} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y^2(t)dt} \tag{2.4}$$

Và giá trị trung bình hiệu chỉnh

$$y_{hc} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |y(t)|dt \tag{2.5}$$

Trong các công thức (2.3), (2.4), (2.5) khoảng lấy tích phân [-T/2, T/2] có thể thay bằng khoảng $[t_0, t_0+T]$

1.2.2. Tổng hợp hai dao động điều hòa có cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ

Cho hai dao động điều hòa thành phần

$$y_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1); \qquad y_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Với $$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q} \neq 1 \qquad (p, q = 1, 2, 3\ldots) \tag{2.6}$$

Tổng hợp hai dao động điều hòa trên được xác định bởi hàm

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{2.7}$$

Chu kỳ dao động $T_1 = 2\pi/\omega_1$; $T_2 = 2\pi/\omega_2$

Từ công thức (2.6) ta suy ra chu kỳ dao động tổng hợp y(t) là

$$T = pT_1 = qT_2$$

Vậy tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1:\omega_2$ = p:q là một dao động tuần hoàn chu kỳ $T= pT_1=qT_2$. Nếu p/q là phân số tối giản thì T là bội số chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

1.2.3. Phân tích Fourier các hàm tuần hoàn

Trong thực tế ta ít gặp các dao động điều hòa thuần túy mà thường hay gặp các dao động phức tạp biểu diễn bằng hàm tuần hoàn. Một hàm tuần hoàn chu kỳ $T=2\pi/\omega$ với một số giả thiết mà trong thực tế luôn chấp nhận được có thể phân tích thành chuỗi Fourier

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \qquad (2.8)$$

Trong đó a_0, a_k, b_k được gọi là các hệ số Fourier và được xác định bởi các công thức

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin k\omega t dt, \quad k = 1,2,.. \qquad (2.9)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos k\omega t dt \qquad k= 1,2,\ldots$$

Chuỗi Fourier (2.8) có thể viết dưới dạng chuẩn của dao động

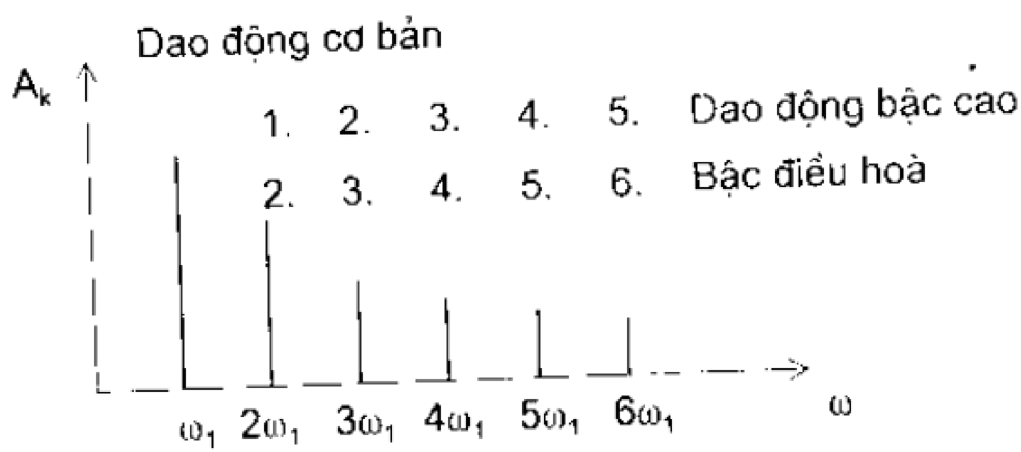
$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) \qquad (2.10)$$

Với $$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \alpha_k = arctg\frac{a_k}{b_k} \qquad (2.11)$$

Việc phân tích một hàm tuần hoàn thành chuỗi Fourier được gọi là phân tích điều hòa. Hằng số a_0 được gọi là giá trị trung bình của dao động, số hạng $A_1\sin(\omega t+\alpha_1)$ được gọi là dao động cơ bản, số hạng $A_k\sin(k\omega t+\alpha_k)$ được gọi là dao động bậc k-1(với k>1) hay gọi là các điều hòa.

1.2.4. Biểu diễn các hàm tuần hoàn trong miền tần số

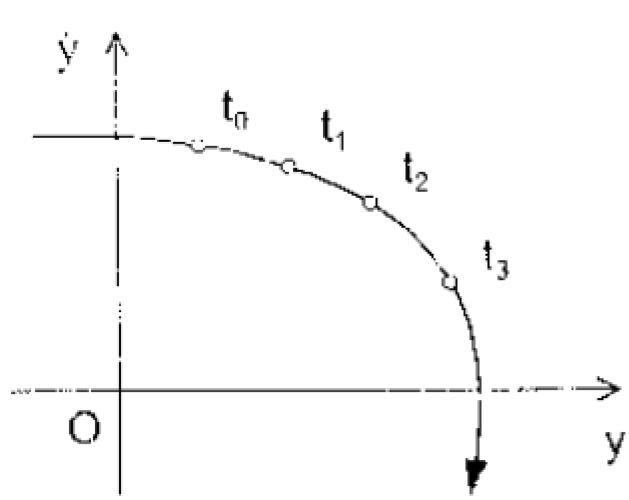
Ta chọn hệ tọa độ vuông góc, trục hoành biểu diễn tần số ω(hoặc tần số f), trục tung biểu diễn độ lớn các biên độ A của các điều hòa. Việc biểu diễn của hàm tuần hoàn y(t) trong mặt phẳng (ω, A) gọi là biểu diễn hàm tuần hoàn y(t) trong miền tần số. Tập hợp các biên độ A_k trong khai triển Fourier (2.10) của hàm tuần hoàn y(t) được gọi là phổ của hàm tuần hoàn y(t).



Việc cho biết các biên độ A_k của các điều hòa chưa đủ thông tin về hàm y(t), bởi vì ta chưa biết được các pha ban đầu của các điều hòa đó. Tuy nhiên từ biên độ và tần số ta cũng có thể giải quyết được khá nhiều vấn đề của bài toán dao động cần nghiên cứu.

1.2.5. Biểu diễn dao động tuần hoàn trên mặt phẳng pha

Giả sử y(t) là một đại lượng dao động. khi đó $\dot{y}(t)$ cũng là một đại lượng dao động. Ta có thể xem y(t), $\dot{y}(t)$ là cách biểu diễn dạng tham số của hàm $\dot{y}(y)$. Ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc với trục hoành là y, trục tung là $\dot{y}$. Đồ thị của hàm $\dot{y}(y)$ trong hệ tọa độ vuông góc đó được gọi là quỹ đạo pha hay đường cong pha. Mặt phẳng $(y, \dot{y})$ được gọi là mặt phẳng pha. Trong mặt phẳng pha, dao động được mô tả bởi sự dịch chuyển của điểm ảnh $P(y, \dot{y})$. Nếu đại lượng dao động là tuần hoàn thì quĩ đạo pha là đường cong kín.



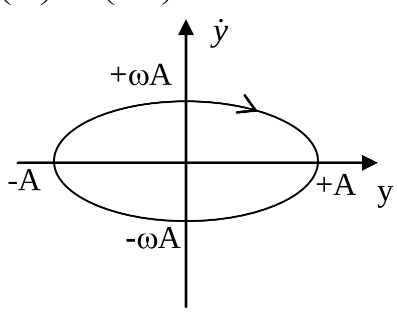
Trường hợp đơn giản của dao động tuần hoàn là dao động điều hòa. Từ phương trình dao động

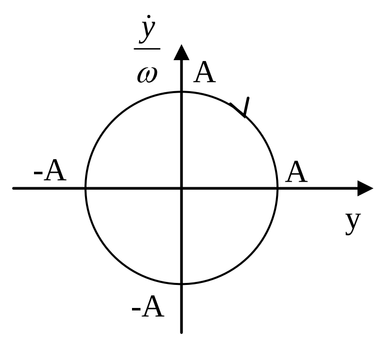
$$y = A\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{y} = \omega A\cos(\omega t + \alpha)$$

Khử t ta được phương trình quỹ đạo pha dao động điều hòa

$$\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}}{\omega A}\right)^2 = 1 \qquad (2.12)$$





Phương trình (2.12) biểu diễn trên mặt phẳng pha một elip với các bán trục là A và ωA(Hình trên). Nếu chọn tỷ lệ xích trên các trục hoành và trục tung một cách thích hợp thì quỹ đạo pha của dao động điều hòa là đường tròn. Đối với một số quá trình dao động tuần hoàn ta rất khó biểu diễn phương trình quỹ đạo pha $\dot{y} = f(y)$ dưới dạng giải tích. Trong trường hợp đó ta phải vẽ quỹ dạo pha bằng cách tính các trị số $y(t_k)$ và $\dot{y}(t_k)$. Ngày nay với sự phát triển của tin học việc vẽ các quỹ đạo pha khá thuận tiện và đơn giản.

1.3. Dao động hầu tuần hoàn và không tuần hoàn

1.3.1. Tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số vô tỷ

Trong phần trên ta thấy tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số hữu tỷ $\omega_1 : \omega_2 = p : q$ là dao động tuần hoàn chu kỳ T = pT_1 = qT_2. Bây giờ ta xét bài toán

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \tag{3.1}$$

Trong đó tỷ số $\omega_1 : \omega_2$ là một số vô tỷ. Dao động tổng hợp y(t) không phải là dao động tuần hoàn vì bội số chung nhỏ nhất của $T_1 = 2\pi / \omega_1$ và $T_2 = 2\pi / \omega_2$ không tồn tại. Tuy nhiên có thể biểu diễn

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q} + \varepsilon \tag{3.2}$$

Với ε bé tùy ý. Khi đó ta chọn $T \approx pT_1 \approx qT_2$, dao động tổng hợp là hàm hầu tuần hoàn. Chú ý rằng hàm y(t) gọi là hàm hầu tuần hoàn nếu với η>0 cho trước bé tùy ý tồn tại một hằng số T^* mà $|y(t+T^*) - y(t)| < \eta$. Vậy tổng hợp hai dao động điều hòa cùng phương khác tần số với tỷ lệ giữa hai tần số là số vô tỷ ta được *dao động hầu tuần hoàn.*

1.3.2. Biểu diễn tích phân Fourier các hàm không tuần hoàn

Như chúng ta đã biết một hàm tuần hoàn có thể biểu diễn qua các hàm điều hòa bằng chuỗi Fourier. Vấn đề ở đây là có thể biểu diễn hàm không tuần hoàn y(t) qua các hàm điều hòa với một số khái niệm suy rộng nào đó về chuỗi Fourier được hay không?

Giả sử y(t) là một hàm xác định trên toàn bộ trục số, trong một đoạn hữu hạn hàm y(t) liên tục hoặc có thể có một số hữu hạn điểm gián đoạn và hàm y(t) tuyệt đối khả tích. Điều đó có nghĩa là tích phân suy rộng

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \tag{3.3}$$

Tồn tại và có giá trị hữu hạn. Khi đó trong toán học đã chứng minh được rằng hàm y(t) có thể biểu diễn dưới dạng tích phân Fourier như sau.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t] d\omega \tag{3.4}$$

trong đó các hàm $a(\omega)$ và $b(\omega)$ được xác định bởi các hệ thức sau

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{3.5}$$

$$b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)\cos\omega\tau d\tau$$

Trong (3.5) các hàm a(ω) và b(ω) là các thành phần biên độ ứng với dải tần số vô cùng bé dω. Các hàm a(ω), b(ω) được gọi là mật độ phổ, hay gọi tắt là mật độ.

$$A(\omega)=\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)} \tag{3.6}$$

Được gọi là phổ mật độ biên độ hay gọi tắt là mật độ biên độ. Bình phương của mật độ biên độ được gọi là phổ mật độ công suất hay gọi tắt là mật độ công suất.

$$A^2(\omega)=a^2(\omega)+b^2(\omega) \tag{3.7}$$

Được gọi là phổ mật độ công suất hay gọi tắt là mật độ công suất. Có tài liệu gọi A(ω) và A^2(ω) là phổ biên độ và phổ công suất.

Nếu y(t) là hàm chẵn hoặc hàm lẻ, thì biểu diễn tích phân Fourier của y(t) sẽ đơn giản hơn nhiều. Nếu y(t) là hàm chẵn, do y(-t)=y(t) nên b(ω)=0 và

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}y(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{3.8}$$

Biểu thức (3.6) có dạng

$$A(\omega)=|a(\omega)| \tag{3.9}$$

Nếu y(t) là hàm lẻ, y(-t)=-y(t), ta có a(ω)=0 và

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}y(\tau)\sin\omega\tau d\tau \tag{3.10}$$

Từ đó suy ra

$$A(\omega)=|b(\omega)|$$

1.3.3. Dao động họ hình sin

Dao động họ hình sin được mô tả về phương diện động học bởi hệ thức

$$y(t)=A(t)\sin[\omega(t)t+\alpha(t)] \tag{3.11}$$

Trong đó A(t), ω(t) và α(t) là các đại lượng dao động thay đổi chậm theo thời gian.

Giả sử ta có dao động mà A(t)=A_0, ω = ω_0 +g(t), α = α_0 +h(t). Khi đó áp dụng biến đổi lượng giác ta có

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0\sin[\omega_0 t+\alpha_0+g(t)t+h(t)] \\ &= \mathrm{A}_0\{\sin(\omega_0 t+\alpha_0)\cos[g(t)t+h(t)]+\sin[g(t)t+h(t)]\cos(\omega_0 t+\alpha_0)\} \\ &= \mathrm{A}_1(t)\sin(\omega_0 t+\alpha_0)+A_2(t)\cos(\omega_0 t+\alpha_0) \end{aligned}$$

Như thế dao động với tần số hoặc pha biến đổi có thể xem như là tổng hợp của hai dao động với biên độ biến đổi.

Dao động với biên độ biến đổi theo quy luật

$$A(t) = A_0 e^{\beta t}$$

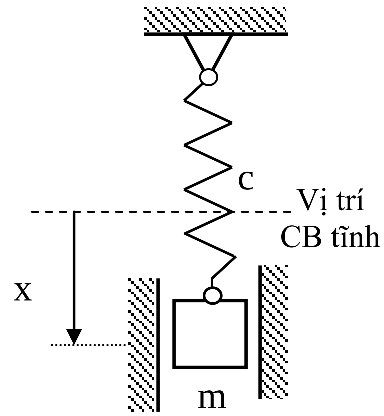
Có một vai trò quan trọng trong lý thuyết dao động. Nếu $\beta < 0$ thì dao động tắt dần, nếu $\beta > 0$ dao động tăng dần.

Chương 2

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

2.1 Dao động tự do không cản

2.1.1 Các thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động



Thí dụ 1: Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.

Xét vật nặng có khối lượng m treo vào lò xo có hệ số cứng c. Bỏ qua khối lượng của lò xo.

Động năng và thế năng của hệ có dạng

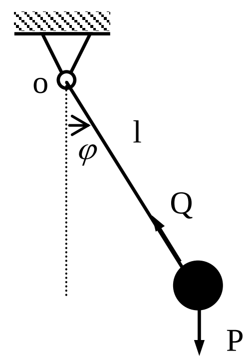
$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \quad \Pi = \frac{1}{2} cx^2$$

Thế vào phương trình Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Ta nhận được phương trình dao động của hệ

$$m\ddot{x} + cx = 0$$



Thí dụ 2: Dao động của con lắc toán học

Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = -mgy = -mgl\cos\varphi$$

Thê vào phương trình Lagrange loại hai ta có phương trình sau

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Trường hợp con lắc dao động nhỏ, ta có $\sin\varphi \approx \varphi$. Khi đó phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có dạng.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

2.1.2 Tính toán dao động tự do không cản

Nếu sử dụng ký hiệu $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ (1.1)

Thì phương trình dao động tự do không cản có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (1.2)$$

Nghiệm của phương trình (2.1) có dạng

$$q = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t \qquad (1.3)$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Các hằng số này được xác định từ điều kiện đầu

$t = 0; \quad q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$

Để xác định các hằng số C_1, C_2 ta đạo hàm (1.3) theo thời gian

$$\dot{q} = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t \tag{1.4}$$

Thế các điều kiện đầu vào (1.3) và (1.4) ta được

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \tag{1.5}$$

Chú ý nghiệm (1.3) cũng có thể viết dưới dạng

$$q = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \tag{1.6}$$

Trong đó A và α là các hằng số tùy ý. Do hệ thức

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sin\omega_0 t\cos\alpha + \sin\alpha\cos\omega_0 t$$

Nên từ (1.3) (1.5) và (1.6) dễ dàng tính được

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0}\right)}, \qquad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_0\frac{q_0}{\dot{q}_0} \tag{1.7}$$

Biểu thức (1.6) ta thấy dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hòa. Vì vậy dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hòa.

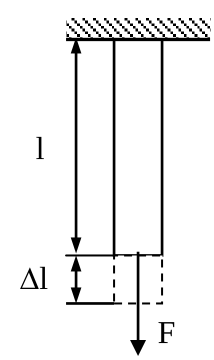
* *Nhận xét, dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do là dao động điều hòa có các tính chất sau:*

- Tần số riêng và chu kỳ dao động không phụ thuộc vào các điều kiện đầu mà chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ.
- Biên độ dao động là hằng số. Biên độ dao động và pha ban đầu của dao động tự do không cản phụ thuộc vào các điều kiện đầu và các tham số của hệ.

Việc xác định tần số dao động riêng (1.1) là nhiệm vụ quan trọng nhất của bài toán dao động tự do.

2.1.3 Xác định các tham số độ cứng của hệ dao động

a) Tính toán hệ số cứng qui đổi của thanh đàn hồi



+ Nếu lò xo là các thanh đàn hồi không trọng lượng, Trường hợp thanh đàn hồi(lò xo) chịu kéo nén, Từ giáo trình sức bền vật liệu, ta có

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

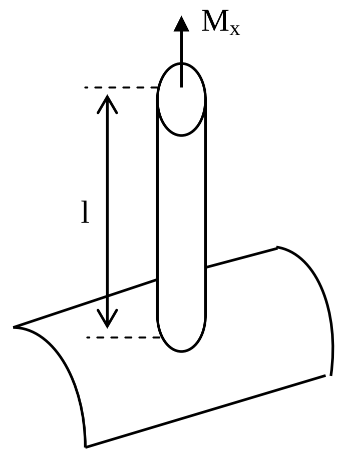
Trong đó: E là mô đun đàn hồi , A là diện tích mặt cắt ngang. Từ đó ta suy ra

$$F = \frac{EA}{l}\Delta l = c\Delta l$$

Vậy độ cứng qui đổi được xác định bởi công thức

$$c = \frac{EA}{l} \tag{1.8}$$

+ Trong trường hợp thanh đàn hồi (lò xo) chịu xoắn. Từ giáo trình sức bền vật liệu ta có



$$\Delta\varphi = \frac{M_x l}{GI_p}$$

Trong đó: G là mô đun trượt, I_p là mô men quán tính cực của mặt cắt ngang.

Từ công thức trên dễ dàng suy ra

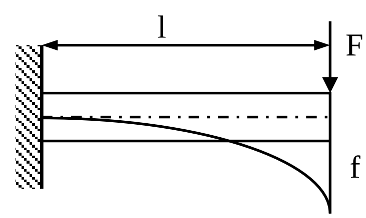
$$M_x = \frac{Gl_p}{l}\Delta\varphi = c\Delta\varphi$$

Vậy độ cứng qui đổi trong trường hợp thanh xoắn có dạng

$$c = \frac{GI_p}{l} \tag{1.9}$$

+ Trương hợp thanh đàn hồi(lò xo) bị uốn, hệ số cứng qui đổi c còn phụ thuộc vào các điều kiện biên. Từ giáo trình sức bền vật liệu, ta tính độ võng

$$f = \frac{1}{3}\frac{Fl^3}{EI}$$



Trong đó: EI là độ cứng chống uốn. Từ đó ta suy ra

$$F = \frac{3EI}{l^3} f = cf$$

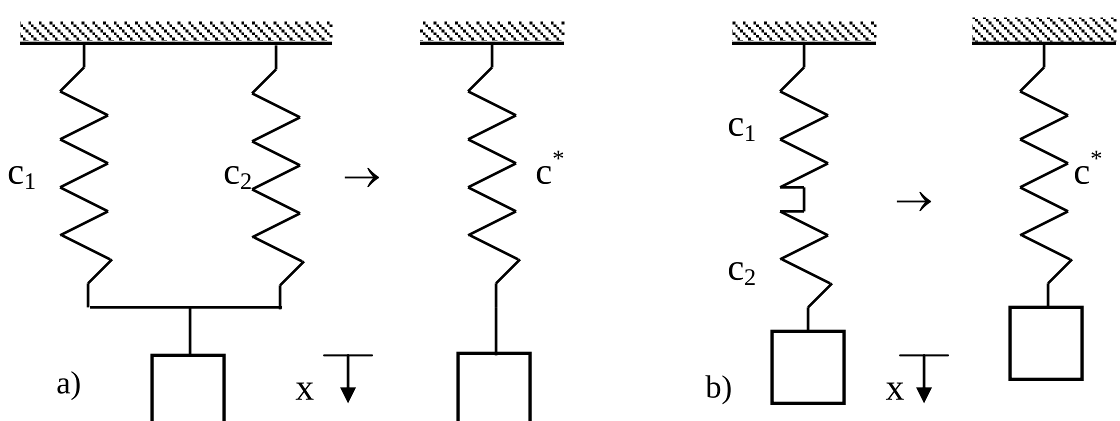
Vậy độ cứng qui đổi c được xác định bởi công thức

$$c = \frac{3EI}{l^3} \tag{1.10}$$

b) Tính toán lò xo thay thế tương đương của các hệ các lò xo mắc song song và mắc nối tiếp

Đối với hệ hai lò xo mắc song song, ta có thể thay thế tương đương bằng hệ có một lò xo. Từ biểu thức lực đàn hồi lò xo, ta suy ra công thức tính hệ số cứng lò xo tương đương.

$$F = c_1 x + c_2 x = c^* x \quad \rightarrow c^* = c_1 + c_2$$



Nếu hệ có n lò xo mắc song song, ta có

$$c^* = \sum_{j=1}^{n} c_j \tag{1.11}$$

Đối với hệ có hai lò xo mắc nối tiếp. Nếu ở hệ thay thế lò xo dãn ra một đoạn x bằng tổng bằng tổng hai độ dãn x_1 và x_2 của hệ ban đầu thì ta có

$$F = c_1 x_1 = c_2 x_2; \qquad x_1 + x_2 = x \qquad\qquad F = c^* x$$

Tù đó suy ra $x = \dfrac{F}{c_1} + \dfrac{F}{c_2} = \dfrac{F}{c^*} \rightarrow \dfrac{1}{c^*} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}$

Nếu hệ có n lò xo mắc nối tiếp thì công thức tính hệ số cứng lò xo thay thế có dạng

$$\frac{1}{c^*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \tag{1.12}$$

2.2 Dao động tự do có cản

Quan sát hệ dao động, ta thấy dao động tự do nói chung tắt dần theo thời gian đó là ảnh hưởng của lực cản. Hai loại lực cản phổ biến nhất là lực ma sát nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc và lực ma sát khô.

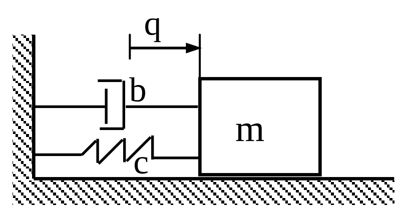
2.2.1 Tính toán dao động tự do có ma sát nhớt

Xét dao động của hệ như hình vẽ. Do có thêm lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, nên phương trình vi phân dao động của hệ là.

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \tag{2.1}$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \qquad 2\delta = \frac{b}{m} \tag{2.2}$$



Phương trình (2.1) có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{2.3}$$

Phương trình đặc trưng của (2.3) là

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{2.4}$$

Tùy theo quan hệ giữa δ và ω_0, có thể xảy ra các trường hợp sau

$\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ): $\qquad \lambda_{1,2} = -\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\delta \geq \omega_0$ (lực cản lớn): $\qquad \lambda_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

a) Trường hợp thứ nhất $\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \tag{2.5}$$

Trong đó $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ (2.6)

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu

t=0: $q(0)=q_0$ $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$

Từ các điều kiện đầu dễ dàng xác định được

$C_1 = q_0$; $C_2 = \dfrac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\omega}$ (2.7)

Để biến đổi biểu thức (2.5) ta đưa vào các hằng số A và β xác định theo biểu thức sau

$C_1 = A\sin\beta$ $C_2 = A\cos\beta$

Từ đó suy ra $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ $tg\beta = \dfrac{C_1}{C_2}$

Biểu thức nghiệm (2.5) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$q = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) \quad (2.8)$$

Từ biểu thức nghiệm (2.8) ta thấy: Khi lực cản đủ nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần. Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không. Dao động được mô tả bởi phương trình (2.8) là dao động họ hình sin.

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt lôga. Độ tắt lôga Λ được xác định bởi hệ thức

$$\Lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T$$

Độ tắt lôga đặc trưng cho độ giảm "biên độ" dao động tắt dần. Trong thực tế ta thường xác định tỷ số hai biên độ dao động sau k chu kỳ

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$

Từ đó ta suy ra

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{k}\ln\frac{q(t)}{q(t+kT)} \quad (*)$$

b) Trường hợp thứ hai $\delta > \omega_0$ (lực cản lớn)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.3) có dạng

$$q = Ae^{-\delta t}sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,t + \beta) \quad (2.9)$$

c. Trường hợp thứ ba $\delta = \omega_0$ (lực cản tới hạn)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2) \quad (2.10)$$

Chuyển động của hệ là tắt dần, không dao động. Trong một số tài liệu người ta còn sử dụng khái niệm độ cản Lehr(Ký hiệu D) được xác định bởi hệ thức

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}}$$

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (2.3) có thể viết dưới dạng

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Do hệ thức $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau:

D<1($\delta < \omega_0$): độ cản nhỏ

D =1($\delta = \omega_0$): độ cản tới hạn

D>1($\delta > \omega_0$): độ cản lớn

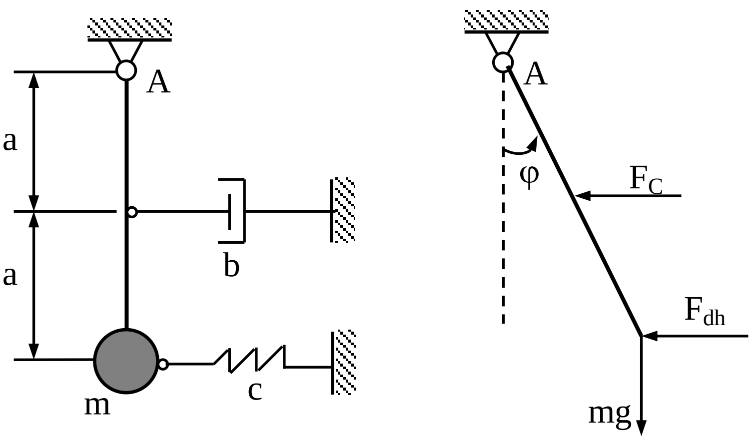
Căn cứ vào độ cản Lehr ta có kết luận: Khi D<1 chuyển động của hệ là dao động tắt dần, khi D$\geq$1 chuyển động của hệ tắt dần, không dao động.

Ta có hệ thức liên hệ giữa độ tắt lôga và độ cản Lehr

$$\Lambda = \delta T = 2\pi\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \qquad (**)$$

Thí dụ 3: Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi như hình vẽ. Bỏ qua khối lượng của thanh.

- Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có khả năng dao động nhỏ?
- Xác định độ cản Lehr D cần thiết để sau mười dao động. biên độ giảm còn 1/10 biên độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động.



Lời giải

Áp dụng định lý biến thiên moomen động lượng đối với trục đi qua A và do φ nhỏ xấp xỉ sinφ ≈ φ, cosφ ≈ 1, ta thu được phương trình vi phân dao động của hệ.

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{4m}\dot{\varphi} + (\frac{c}{m} + \frac{g}{2a})\varphi = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Trong đó $\quad 2\delta = \frac{b}{4m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{2a}$

Để hệ có khả năng dao động nhỏ thì $\delta < \omega_0$. Từ đó suy ra

$$\frac{b}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{b} < 8\sqrt{\mathrm{cm} + \frac{\mathrm{gm}^2}{2a}}$$

Từ các công thức (*) và (**) ta có

$$10\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\frac{q_n}{q_{n+10}} = \ln 10 \quad \rightarrow \mathrm{D} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{20\pi}{\ln 10}\right)^2 + 1}} = 0{,}037$$

Chu kỳ dao động tự do

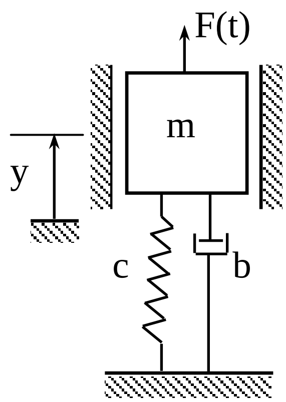
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2am}{2ac+gm}}$$

2.2.2 Tính toán dao động tự do có ma sát khô

2.3 Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hòa

2.3.1 Các dạng kích động và phương trình vi phân dao động

a) Kích động lực



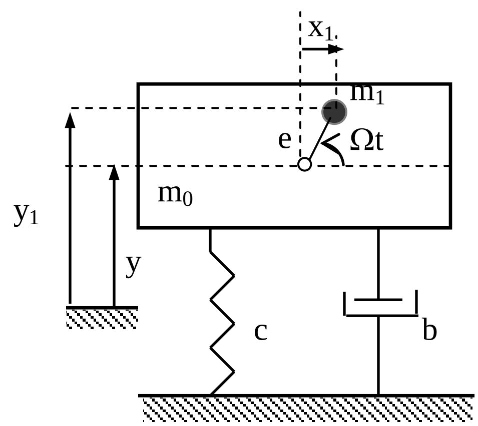
Trên hình vẽ là mô hình dao động khối lượng – lò xo chịu kích động lực. Giả sử $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$, trong đó $\hat{F}$ là giá trị cực đại của hàm F(t). Đối với mô hình này ta có

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2; \qquad \pi = \frac{1}{2}cy^2; \qquad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2; \qquad Q^* = F(t)$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q^*$$

Ta được $\qquad m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{F}\sin\Omega t \qquad (3.1)$



Chia hai vế (3.1) cho m và đưa vào ký hiệu $\hat{y} = \frac{\hat{F}}{c}$, biến đổi (3.1) về dạng

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2\hat{y}\sin\Omega t \qquad (3.1a)$$

b) Kích động bởi khối lượng lệch tâm

Mô hình như hình vẽ. Rô to có khối lượng lệch tâm m_1, quay đều với vận tốc góc Ω.

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

Do $x_1 = e\cos\Omega t; \quad \dot{x}_1 = -e\Omega\sin\Omega t$

$y_1 = y + e\sin\Omega t; \quad \dot{y}_1 = \dot{y} + e\Omega\cos\Omega t$

Nên $v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{y}^2 + 2\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + e^2\Omega^2$

$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + m_1\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + \frac{1}{2}m_1e^2\Omega^2$ trong đó $m = m_0+m_1$

Các biểu thức thế năng và hàm hao tán

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2$$

Thế các biêu thức vào phương trình Lagrange loại 2, ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = m_1e\Omega^2\sin\Omega t \tag{3.2}$$

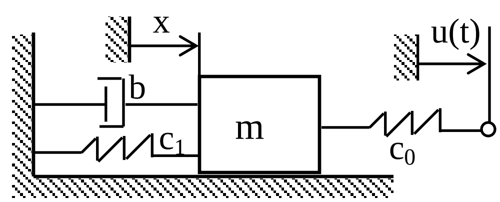
Biến đổi phương trình trên ta có

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \Omega^2\hat{y}\sin\Omega t \tag{3.2a}$$

Trong đó $\hat{y} = \frac{m_1}{m_0 + m_1}e$

c) Kích động bằng lực đàn hồi

Trên hình vẽ là mô hình hệ chịu kích động lực đàn hồi tuyến tính. Bỏ qua ma sát trượt động(μ=0). Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$



Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1x + c_0[x - u(t)] = 0$$

Do $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$ nên ta có

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c_0\hat{u}\sin\Omega t \tag{3.3}$$

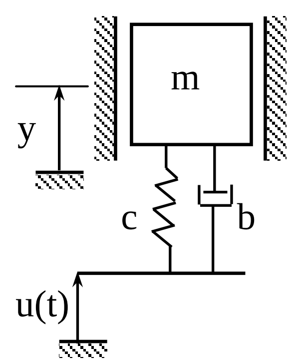
Trong đó $c = c_1+c_0$

Nếu ta sử dụng ký hiệu $\hat{x} = \frac{c_0}{c_1 + c_0}\hat{u}$ thì phương trình (3.3) biến đổi được về dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\hat{x}\sin\Omega t \tag{33a}$$

d) Kích động động học

Trên hình vẽ là mô hình chịu kích động động học. Giả sử điểm chân của bộ lò xo và cản nhớt chuyển động theo qui luật điều hòa $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng



$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + c(y - u) = 0$$

Thế $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$; $\dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$ vào phương trình trên ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{u}(c\sin\Omega t + b\Omega\cos\Omega t) \quad (3.4)$$

Chia hai vế (3.4) cho m ta được

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0 \hat{y}(\omega_0 \sin\Omega t + 2\delta\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\Omega t) \quad (3.4a)$$

Trong đó $\hat{y} = \hat{u}$

e) Kích động bằng lực cản nhớt

Hình vẽ dưới là mô hình hệ chịu kích động bằng lực cản nhớt. Mặt trượt nhẵn tuyệt đối(μ = 0). Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b_1\dot{x} + cx + b_0[\dot{x} - \dot{u}(t)] = 0$$

Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t;\quad \dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$ khi đó phương trình trên có dạng

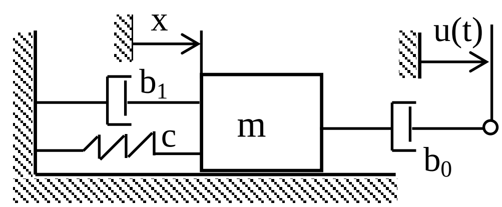
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b_0\hat{u}\Omega\cos\Omega t \quad (3.5)$$

với $b = b_0 + b_1$

Chia hai vế (3.5) cho m ta được

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta\Omega\hat{x}\cos\Omega t \quad (3.5a)$$

Trong đó $\hat{x} = \frac{b_0}{b}\hat{u}$



Qua các thí dụ trên ta thấy: Phương trình vi phân dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hòa có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H_1\sin\Omega t + H_2\cos\Omega t \quad (3.5b)$$

Hoặc

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1\sin\Omega t + h_2\cos\Omega t \quad (3.5c)$$

Chú ý, nếu ta sử dụng độ cản Lehr D thì phương trình (3.1a) có dạng như sau

$$\ddot{y} + 2D\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2\hat{y}\sin\Omega t \quad (3.5d)$$

Trong đó $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ $\quad D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{cm}}$

2.3.2 Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + cq = H\sin\Omega t \quad (3.6)$$

Ta đưa vào các ký hiệu $\omega_0^2 = \frac{c}{m};\quad h = \frac{H}{m}$ thì phương trình (3.6) có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h\sin\Omega t \quad (3.7)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và một nghiệm riêng của phương trình có vế phải. Để giải phương trình vi phân (3.7) ta xét hai trường hợp.

$\Omega \neq \omega_0$(xa cộng hưởng) và $\Omega \approx \omega_0$(gần cộng hưởng).

- Khi $\Omega \neq \omega_0$ ta tìm nghiệm riêng của (3.7) dưới dạng

$$q^* = A\sin\Omega t \tag{3.8}$$

Thế (3.8) vào phương trình (3.7), so sánh với các hệ số của sinΩt, ta có

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{ với } \Omega \neq \omega_0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.7) có dạng

$$q(t) = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{3.9}$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu. Giả sử t = 0; $q(0)=q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.Thế các điều kiện này vào biểu thức (3.9) và đạo hàm của nó, ta có

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Vậy nghiệm (3.9) có dạng

$$q(t) = q_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{3.10}$$

Nếu bỏ qua các thành phần dao động tự do trong (3.10) ta có biểu thức xác định trạng thái bình ổn của dao động cưỡng bức.

$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{H}{c(1-\eta^2)}\sin\Omega t \tag{3.11}$$

Từ biểu thức nghiệm (3.10). Khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$; biểu thức nghiệm (3.10) có dạng

$$q(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \tag{3.12}$$

Ta xét trường hợp khi tần số Ω của lực kích động rất gần với tần số dao động tự do ω_0. Ta đưa vào ký hiệu $\Omega - \omega_0 = 2\varepsilon$

Trong đó ε là một đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các số hạng bé cỡ ε trong biểu thức q ta có

$$\begin{aligned} q &\approx \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}(\sin\Omega t - \sin\omega_0 t) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\sin\frac{\Omega - \omega_0}{2}t \\ &= \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\varepsilon t\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t \approx -\frac{h\sin\varepsilon t}{2\Omega\varepsilon}\cos\Omega t \end{aligned} \tag{3.13}$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm sinεt biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó 2π/ε rất lớn. Trong trường hợp này có thể xem biểu thức (3.13) là qui luật dao động với chu kỳ 2π/Ω và biên độ biến đổi (h/2Ωε)sinεt. Hiện tượng dao động này gọi là hiện tượng phách.

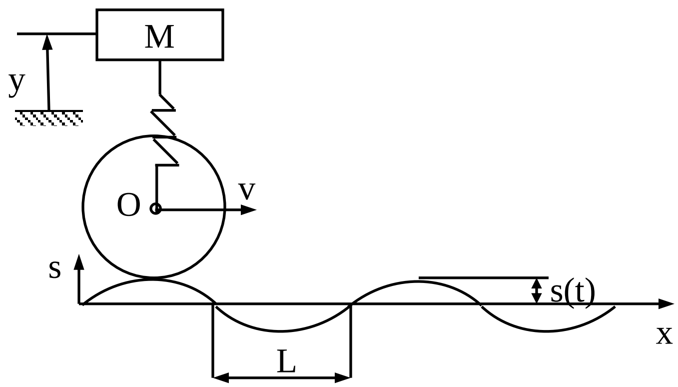
- Xét trường hợp $\Omega \to \omega_0 (\varepsilon \to 0)$. Khi đó, ta có thể thay $\sin\varepsilon t$ bằng εt trong biểu thức (3.13) và ta có hệ thức

$$q = -\frac{ht}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \qquad (3.14)$$

Nhận xét: - Trường hợp xa cộng hưởng $\Omega \neq \omega_0$

- Trường hợp gần cộng hưởng $\Omega \approx \omega_0$. Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_0 + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_0$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

Thí dụ 4: Bánh xe O lăn không trượt trên mặt đường gồ ghề lượn song. Vận tốc tâm O của bánh xe luôn không đổi là v = 60 km/h. Mặt đường lượn sóng có phương trình là $s = \hat{s}\sin(\frac{\pi x}{L})$ với $\hat{s} = 2$ cm, L= 100 cm. Xác định biên độ dao động cưỡng bức thẳng đứng của vật thể M có khối lượng m, nối với trục bánh xe bằng lò xo có độ cứng c. Biết rằng biến dạng tĩnh của lò xo dưới tác dụng của vật thể là δ_0 = 10 cm.



Lời giải

Từ điều kiện cân bằng tĩnh $c\delta_0 = mg$ ta suy ra $c = \frac{mg}{\delta_0}$

Phương trình vi phân chuyển động của vật M có dạng

$$m\ddot{y} + c(y - s) = 0 \quad \to \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{s}\sin\frac{\pi x}{L}$$

Với $$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{mg}{m\delta_0} = \frac{g}{\delta_0} = 98{,}1 \ \ 1/\mathrm{s}^2$$

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi v t}{L} = \Omega t, \text{ với } \Omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{16{,}6\pi}{1} = 16{,}6\pi$$

Khi đó nghiệm riêng của phương trình trên là

$$y = A\sin\Omega t, \text{ với } A = \frac{\omega_0^2 \hat{s}}{\left|\omega_0^2 - \Omega^2\right|} = \frac{\hat{s}}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{2}{\left|1 - \frac{(16{,}6\pi)^2}{98{,}1}\right|} = 0{,}075 \ \text{cm}$$

2.3.3 Tính toán dao động cưỡng bức có ma sát nhớt

Các phương trình vi phân dao động tuyến tính chịu kích động điều hòa của hệ một bậc tự do có ma sát nhớt có thể viết dưới dạng như sau

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1 \sin\Omega t + h_2 \cos\Omega t \qquad (3.15)$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng

$$q^*(t) = M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \qquad (3.16)$$

Thế (3.16) vào phương trình (3.15) rồi so sánh các hệ số của sinΩt và cosΩt, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định M và N.

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)M - 2\delta\Omega N = h_1$$

$$2\delta\Omega M + (\omega_0^2 - \Omega^2)N = h_2$$

Giải rat a được

$$M = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)h_1 + 2\delta\Omega h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$

$$N = \frac{-2\delta\Omega h_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \qquad (3.17)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.15) là tổng của nghiệm riêng (3.16) và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất.

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \qquad (3.18)$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức nghiệm (3.18) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức của hệ. Thành phần dao động cưỡng bức (3.16) có thể biểu diễn dưới dạng

$$q^*(t) = \hat{q}\sin(\Omega t + \varphi) \qquad (3.19)$$

Trong đó $\hat{q} = \sqrt{M^2 + N^2} = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_0^2\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$ (3.20)

$$tg\varphi = \frac{N}{M}$$

Ở đây, ta dùng ký hiệu $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$, $\mathrm{D} = \dfrac{\delta}{\omega_0}$. So sánh phương trình vi phân (3.15) với các phương trình vi phân (3.5b), (3.5c) và (3.5d) ta rút ra các hệ thức sau:

- Trường hợp kích động lực hoặc kích động qua lò xo

$$\hat{q} = V_1(\eta, \mathrm{D})\hat{y}; \qquad \mathrm{V}_1 = \left[(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

- Trường hợp kích động động học

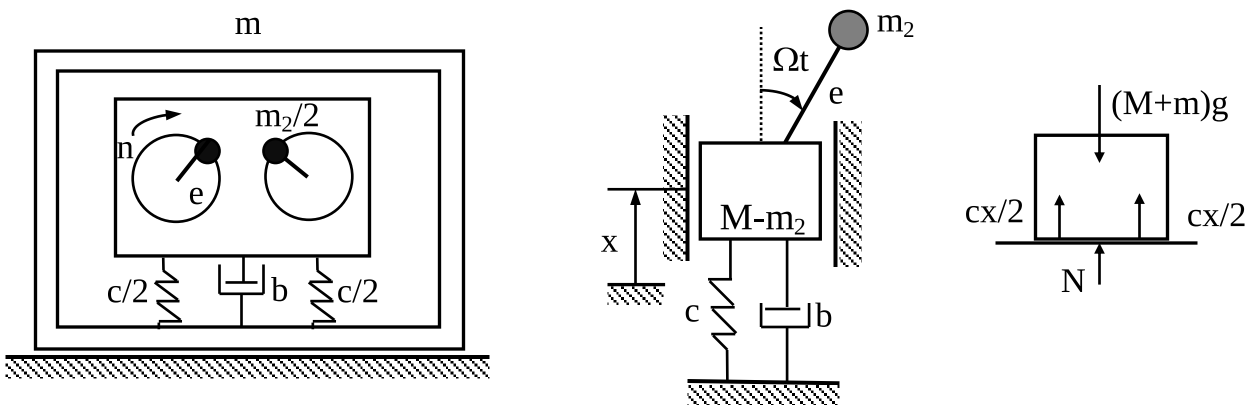
$$\hat{q} = V_2(\eta, \mathrm{D})\hat{y}; \qquad \mathrm{V}_2 = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}\,\mathrm{V}_1$$

- Trường hợp kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\hat{q} = V_3(\eta, D)\hat{y}; \qquad V_3 = \eta^2 V_1$$

Các hàm V_1, V_2, V_3 được gọi là các hàm khuếch đại(hay các hệ số động lực).

Thí dụ 5: Bộ phận làm việc của máy đầm đất có khối lượng M tựa trên các lò xo như hình vẽ. Khối lượng vỏ máy là m. Ở bộ phận làm việc có hai khối lượng lệch tâm(mỗi khối lượng là $m_2/2$) quay với số vòng quay là n. Hãy chọn các tham số của máy sao cho máy làm việc ở vùng cộng hưởng và trong quá trình làm việc vỏ máy không nẩy lên khỏi đất.



a) b) c)

Lời giải: Mô hình cơ học của bộ phận làm việc của máy như hình b. Bộ phận này dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh. Tọa độ của m_2 là

$$x_2 = x + e\cos\Omega t$$

Phương trình vi phân chuyển động của mô hình máy làm đất là

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \Omega^2 m_2 e\cos\Omega t$$

$$\to \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \Omega^2 x_0 \cos\Omega t \quad \text{với} \quad x_0 = \frac{m_2 e}{M}$$

Nghiệm của phương trình này theo (3.19) có dạng

$$x = x_0 V_3 \cos(\Omega t - \varphi)$$

Với $$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Khi cản nhỏ, hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\eta \approx 1$

$$\Omega \approx \omega_0 \to \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \to c \approx \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 M$$

Khi cộng hưởng $$V_3 \approx \frac{1}{2D}$$

Để đơn giản bỏ lực cản. Khi đó phản lực pháp tuyến của nền tác dụng lên vỏ máy hình c.

$$N = (M+m)g - cx$$

Do $V_3 \approx \dfrac{1}{2D}$ nên ta có

$$N_{\min} = (M+m)g - cx_{\max} = (M+m)g - \frac{cx_0}{2D}$$

Điều kiện để vỏ máy không nẩy khỏi nền

$$N_{\min} \geq 0 \rightarrow (M+m)g \geq \frac{cx_0}{2D} \rightarrow D \geq \frac{cx_0}{2(M+m)g}$$

2.3.4 Một vài nhận xét về tính chất dao động cưỡng bức khi có ma sát

Qua các tính toán trên ta có một số nhận xét về tính chất của dao động tuyến tính có cản nhớt chịu kích động điều hòa ở trạng thái bình ổn như sau:

- Dao động cưỡng bức khi có cản xảy ra với tần số của lực kích động.
- Biên độ dao động cưỡng bức không phụ thuộc vào các điều kiện đầu và thời gian. Do đó dao động cưỡng bức không tắt dần vì lực cản.
- Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức tuy khá lớn, nhưng vẫn là đại lượng hữu hạn. Nó chưa phải là giá trị lớn nhất trong các giá trị của biên độ.
- Trong dao động cưỡng bức có cản nhớt luôn xảy ra sự lệch pha giữa pha dao động và pha của lực kích động.
- Ở xa vùng cộng hưởng, biên độ dao động cưỡng bức với lực cản nhỏ không khác mấy so với biên độ dao động cưỡng bức không cản. Ở vùng gần cộng hưởng lực cản có một vai trò rất quan trọng.

2.4. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động đa tần và chịu kích động tuần hoàn

2.4.1. Tính toán dao động của hệ chịu kích động đa tần

Trong thực tế ta cũng hay gặp dao động của hệ chịu kích động của tổ hợp các lực ngoài với các tần số khác nhau.

2.4.2. Tính toán dao động khi hai kích động điều hòa có tần số gần nhau

Phương trình vi phân của hệ dao động một bậc tự do không cản chịu tác dụng của hai lực điều hòa với các tần số Ω_1 và Ω_2 có dạng

$$m\ddot{q} + cq = \hat{F}_1 \sin\Omega_1 t + \hat{F}_2 \sin\Omega_2 t$$

2.4.3. Tính toán dao động của hệ chịu kích động tuần hoàn

Trong thực tế ta hay gặp các lực kích động tuần hoàn. Như đã biết từ giải tích toán, hàm f(t) tuần hoàn chu kỳ T bao giờ cũng có thể khai triển thành chuỗi Fourier

$$f(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t) \qquad (4.1)$$

Trong đó $\Omega=2\pi/T$ là tần số cơ bản của lực kích động. Các hệ số Fourier a_0, a_j, $b_j(j=1,\ldots,\infty)$ được xác định theo công thức sau

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\
a_j &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos j\Omega t dt \\
b_j &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin j\Omega t dt
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Từ các công thức (4.2) ta thấy, nếu f(t) là hàm chẵn thì $b_j = 0$; nếu f(t) là hàm lẻ thì $a_0=a_j = 0$. Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do chịu tác dụng của lực tuần hoàn có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{l}{m}\left[a_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos j\Omega t + b_j \sin j\Omega t)\right] \tag{4.3}$$

Tìm nghiệm của phương trình (4.3) dưới dạng

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos j\Omega t + B_j\sin j\Omega t) \tag{4.4}$$

Thế biểu thức (4.4) vào phương trình (4.3) và so sánh các hệ số của sinjΩt và cosjΩt, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các hằng số chưa biết A_0, A_j, B_j.

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2 A_0 = \frac{a_0}{m} \\
&\left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2\right]A_j + 2\delta j\Omega B_j = \frac{a_j}{m} \\
&-2\delta j\Omega A_j + \left[\omega_0^2 - (j\Omega)^2\right]B_j = \frac{b_j}{m}
\end{aligned}
$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{a_0}{m\omega_0^2} \\
A_j &= \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right]a_j - 2\delta j\Omega b_j}{m\left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2\right]} \\
B_j &= \frac{\left[\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right]b_j + 2\delta j\Omega a_j}{m\left[\left(\omega_0^2 - j^2\Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 j^2\Omega^2\right]}
\end{aligned}
$$

Do hệ thức tam giác

$$A_j\cos j\Omega t + B_j\sin j\Omega t = C_j\sin(j\Omega t + \alpha_j)$$

Với $C_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$, tgα_j = A_j/B_j; biểu thức (4.4) có thể viết dưới dạng

$$q^* = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \tag{4.5}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (4.3) khi $\delta < \omega_0$ có dạng

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} C_j \sin(j\Omega t + \alpha_j) \tag{4.6}$$

Số hạng thứ nhất của (4.6) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Với t đủ lớn, ta chỉ cần quan tâm tới thành phần thứ hai của (4.6), biểu thị dao động cưỡng bức của hệ

2.5 Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động không tuần hoàn

2.5.1 Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) \tag{5.1}$$

Phương trình trên biến đổi về dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = g(t) \tag{5.2}$$

Để tìm nghiệm của phương trình (5.2) trước hết ta tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{5.3}$$

Trong trường hợp lực cản nhỏ ($\delta < \omega_0$), nghiệm tổng quát của phương trình (5.3)

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) = e^{-\delta t}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) \tag{5.4}$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số, còn $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$. Nếu đặt $q_1 = e^{-\delta t}\cos\omega t$, $q_2 = e^{-\delta t}\sin\omega t$ thì biểu thức (5.4) được viết dưới dạng

$$q(t) = C_1q_1 + C_2q_2 \tag{5.5}$$

Theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange ta tìm nghiệm của phương trình vi phân có vế phải (5.2) dưới dạng tương tự như (5.5) với C_1 và C_2 là các hàm của thời gian.

$$q(t) = C_1(t)q_1 + C_2(t)q_2 \tag{5.6}$$

$$\dot{q}(t) = \dot{C}_1q_1 + \dot{C}_2q_2 + C_1\dot{q}_1 + C_2\dot{q}_2$$

Nếu ta đưa vào điều kiện

$$\dot{C}_1q_1 + \dot{C}_2q_2 = 0 \tag{5.7}$$

Thì biểu thức đối với $\dot{q}(t)$ có dạng

$$\dot{q}(t) = C_1\dot{q}_1 + C_2\dot{q}_2 \tag{5.8}$$

Đạo hàm biểu thức (5.8) theo t

$$\ddot{q}(t) = \dot{C}_1\dot{q}_1 + \dot{C}_2\dot{q}_2 + C_1\ddot{q}_1 + C_2\ddot{q}_2 \tag{5.9}$$

Thế các biểu thức (5.6), (5.8) và (5.9) vào phương trình vi phân (5.2) ta nhận được

$$\dot{C}_1\dot{q}_1 + \dot{C}_2\dot{q}_2 = g(t) \tag{5.10}$$

Từ hai phương trình (5.7) và (5.10) ta được

$$\dot{C}_1 = -\frac{q_2}{q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2} g(t)$$

$$\dot{C}_2 = \frac{q_1}{q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2} g(t)$$

Thế các biểu thức $q_1 = e^{-\delta t}\cos\omega t$, $q_2 = e^{-\delta t}\sin\omega t$ vào hai phương trình trên ta nhận được các phương trình vi phân cấp một để xác định các hàm $C_1(t)$ và $C_2(t)$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= -\frac{1}{\omega} e^{\delta t}\sin\omega t.g(t) \\ \dot{C}_2 &= \frac{1}{\omega} e^{\delta t}\cos\omega t.g(t) \end{aligned} \tag{5.11}$$

Tích phân (5.11) ta được

$$\begin{aligned} C_1(t) &= A - \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{\delta\tau}\sin\omega\tau.g(\tau)d\tau \\ C_2(t) &= B + \frac{1}{\omega}\int_0^\tau e^{\delta\tau}\cos\omega\tau.g(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{5.12}$$

Thế (5.12) vào (5.6) ta được biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình (5.2)

$$q(t) = e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau).g(\tau)d\tau \tag{5.13}$$

Chú ý đến các điều kiện đầu

$$q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Ta xác định được các hằng số tích phân

$$A = q_0 \quad B = \frac{1}{\omega}(\dot{q}_0 + \delta q_0)$$

Biểu thức nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (5.2) với các điều kiện đầu $q(0)=q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ bây giờ có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t}\left[q_0\cos\omega t + \frac{1}{\omega}(\dot{q}_0 + \delta q_0)\sin\omega t\right] + \frac{1}{\omega}\int_0^t e^{-\delta(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau).g(\tau)d\tau \tag{5.14}$$

2.5.2 Tìm nghiệm bằng hàm va chạm

Xét phương trình vi phân dao động dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t) = I\delta(t) \tag{5.15}$$

Trong đó δ(t) là hàm Delta Dirac, xác định bởi hệ thức

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } t \neq 0 \\ \infty & \text{khi } t = 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \tag{5.17}$$

Phương trình (5.15) hằng số I là cường độ của một va chạm tùy ý trong một khoảng thời gian rất bé. Phương trình (5.15) có thể viết lại dưới dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = g(t) = \frac{I}{m}\delta(t) \tag{5.18}$$

Giả sử khi t<0 hệ ở trạng thái tĩnh. Do đó tại thời điểm ngay trước lúc va chạm (ta ký hiệu là t = -0), ta có các điều kiện đầu.

$$q(-0) = 0; \quad \dot{q}(-0) = 0$$

Tại thời điểm t = 0 xảy ra hiện tượng va chạm. Thời điểm va chạm rất ngắn. tại thời điểm ngay sau va chạm(ký hiệu là t=+0), ta có điều kiện đầu

$$q(+0) = 0; \quad \dot{q}(+0) = \dot{q}_0 = v_0 \tag{5.19}$$

Do hàm g(t)=0 với t≠0, nên phương trình vi phân dao động ứng với t≠0 có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \tag{5.20}$$

Nghiệm của phương trình (5.20) có dạng

$$q(t) = e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\dot{q}(t) = e^{-\delta t}\left[(\omega B - \delta A)\cos\omega t - (\omega A + \delta B)\sin\omega t\right]$$

Các hằng số tích phân A và B được xác định từ các điều kiện đầu (5.19)

$$A = 0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}$$

Do đó biểu thức nghiệm sau va chạm có dạng

$$q(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin\omega t \tag{5.21}$$

Để xác định hằng số vận tốc v_0 ta tích phân phương trình vi phân (5.18) nhân hai vế phương trình (5.18) với dt rồi lấy tích phân từ - ε đến ε ta được

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\dot{q} + 2\delta \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dq + \omega_0^2 \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q dt = \frac{I}{m} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt$$

Do trong quá trình va chạm chỉ có bước nhảy về vận tốc,còn q(+0)=q(-0)=0, nên từ phương trình trên ta suy ra

$$\dot{q}(+0) - \dot{q}(-0) = \dot{q}(+0) = \frac{I}{m} = v_0$$

Thế giá trị v_0 vừa tìm được vào (5.21) và chú ý đến quan hệ $\omega = \omega_0 \sqrt{1-D^2}$ ta nhận được nghiệm phương trình dao động

$$q(t) = \frac{Ie^{-\delta t}}{m\omega_0 \sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-D^2}\, t) \tag{5.22}$$

Hàm (5.22) được gọi là hàm truyền va chạm, trong đó I là cường độ va chạm. Đối với va chạm đơn vị, hàm truyền va chạm đơn vị có dạng

$$q_{vc} = \frac{q(t)}{I} = \frac{e^{-\delta t}}{m\omega_0 \sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-D^2}\, t) \tag{5.23}$$

Nếu va chạm không xảy ra ở thời điểm t=0 mà ở thời điểm $t=t^*$ bất kỳ, thì ta có thể nhận được hàm va chạm bằng một phép dịch chuyển trục thời gian một cách đơn giản. Từ phương trình (5.22) ta suy ra

$$q(t-t^*) = \frac{Ie^{-\delta(t-t^*)}}{m\omega} \sin\omega(t-t^*) \tag{5.24}$$

Từ (5.23) ta nhận được

$$q_{vc}(t-t^*) = \frac{e^{-\delta(t-t^*)}}{m\omega} \sin\omega(t-t^*) \tag{5.25}$$

Chương 3

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

Trong chương này ta cũng chỉ xét dao động của hệ cơ học hôlônôm. Dao động nhỏ của hệ n bậc tự do quanh vị trí cân bằng tĩnh. Khi đó hệ các phương trình vi phân mô tả dao động của hệ là hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số.

Trong các bài toán kỹ thuật, ta thường gặp bốn mô hình cơ học: Hệ các vật rắn, hệ các phần tử hữu hạn, hệ liên tục, hệ nhiều vật hỗn hợp.

3.1 Thành lập các phương trình vi phân dao động

***** *Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange II*

Các phương trình Lagrange loại II được áp dụng để thiết lập các phương trình vi phân chuyển động của hệ hôlônôm có dạng tổng quát như sau

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \qquad i=1,\ldots,n$$

** Phương pháp lực*

Phương pháp lực hay được sử dụng để thiết lập các phương trình dao động của hệ thanh có khối lượng tập trung.

3.2 Dao động tự do không cản

Phương trình vi phân mô tả dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$M\ddot{q}+Cq=0 \tag{1.1}$$

Trong đó M và C là các ma trận vuông cấp n có các phần tử là hằng số. Trong nhiều bài toán thực tế, chúng là các ma trận thực đối xứng.

3.2.1 Các tần số riêng và các dạng dao động riêng

Ta tìm nghiệm của (1.1) dưới dạng

$$q=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{1.2}$$

Thế biểu thức (1.2) vào phương trình (1.1) rồi đơn giản đi biểu thức $\sin(\omega t+\alpha)$ ta nhận được phương trình

$$(C-\omega^2 M)a=0 \tag{1.3}$$

Để cho phương trình đại số tuyến tính thuần nhất (1.3) có nghiệm không tầm thường, điều kiện cần là

$$\left|C-\omega^2 M\right|=0 \tag{1.4}$$

Phương trình (1.4) là một phương trình đại số bậc n đối với ω^2 và được gọi là phương trình tần số hoặc phương trình đặc trưng. Các nghiệm ω_k(k=1,...,n) của phương trình tần số được gọi là các tần số riêng. Thay lần lượt các giá trị của ω_k(k=1,...,n) vào phương trình (1.3) ta nhận được các hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định các thành phần của véc tơ riêng a_k.

$$(C - \omega_k^2 M)a_k = 0 \tag{1.5}$$

Do phương trình (1.5) là hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất có định thức hệ số bằng không nên các thành phần của véc tơ a_k được xác định sai khác một hằng số nhân. Chẳng hạn ta có thể chọn a_{1k} một cách tùy ý.

Ta đưa vào ký hiệu

$$v_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{1k}} \text{ hoặc } v_i^{(k)} = \frac{a_i^{(k)}}{a_1^{(k)}} \qquad \text{i, k = 1,2,...,n} \tag{1.6}$$

Thay lần lượt các $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ vào phương trình (1.5) ta xác định được ma trận

$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ v_{n1} & v_{n2} & ... & v_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Mỗi véc tơ cột của ma trận (1.7)

$$v_k = [v_{1k}\ \mathrm{v}_{2k} ... \mathrm{v}_{nk}]^T = [v_1^{(k)}\ \mathrm{v}_2^{(k)},..., v_n^{(k)}]$$

Cho ta biết một dạng dao động riêng của hệ dao động (1.1). Ma trận V được gọi là ma trận dạng riêng. Như thế ma trận dạng riêng cho ta biết tất cả các dạng dao động riêng có thể có của hệ dao động.

Xét trường hợp hệ hai bậc tự do. Khi đó các phương trình vi phân dao động tự do không cản có dạng.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Phương trình tần số (1.4) có dạng

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \omega^2 m_{11} & c_{12} - \omega^2 m_{12} \\ c_{21} - \omega^2 m_{21} & c_{22} - \omega^2 m_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (c_{11} - \omega^2 m_{11})(c_{22} - \omega^2 m_{22}) - (c_{12} - \omega^2 m_{12})(c_{21} - \omega^2 m_{21}) = 0 \tag{1.9}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu $v_i = \dfrac{a_2^{(i)}}{a_1^{(i)}}$ thì từ phương trình (1.5) ta suy ra các phương trình xác định các phần tử của ma trận dạng riêng

$$(c_{11} - \omega_i^2 m_{11}) + v_i(c_{12} - \omega_i^2 m_{12}) = 0 \quad \text{i=1,2} \tag{1.10a}$$

Hoặc

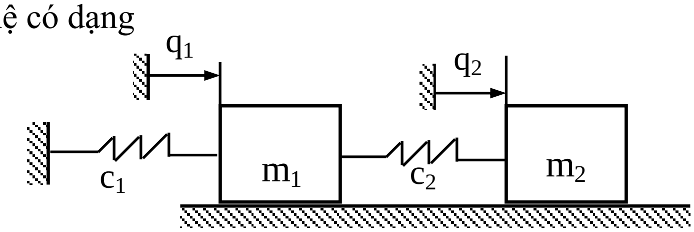
$$(c_{21} - \omega_i^2 m_{21}) + v_i(c_{22} - \omega_i^2 m_{22}) = 0 \quad \text{i=1,2} \tag{1.10b}$$

Ma trận dạng riêng của hệ hai bậc tự do trên có dạng

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

Thí dụ 1: Cho mô hình dao động như hình vẽ. Hãy xác định ma trận dạng riêng khi $c_1=c_2=c$, $m_1=m_2=m$, sau đó vẽ các dạng dao động riêng của hệ.

Lời giải: Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2$$

$$\pi = \frac{1}{2} c_1 q_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (q_2 - q_1)^2$$

Sử dụng phương trình lagrănge II, ta dễ dàng thiết lập được phương trình vi phân dao động tự do của hệ

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tương ứng với phương trình(1.3) ta có

$$\left\{ \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Từ đó ta suy ra phương trình tần số

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức ta được phương trình

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} = 0$$

Từ đó ta tính được các tần số riêng

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2} \right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}$$

Thế các biểu thức của ω_1 và ω_2 vào phương trình (*) ta có

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1 \omega_1^2) / c_2 \end{bmatrix} a_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 / (c_2 - m_2 \omega_1^2) \end{bmatrix} a_{11}$$

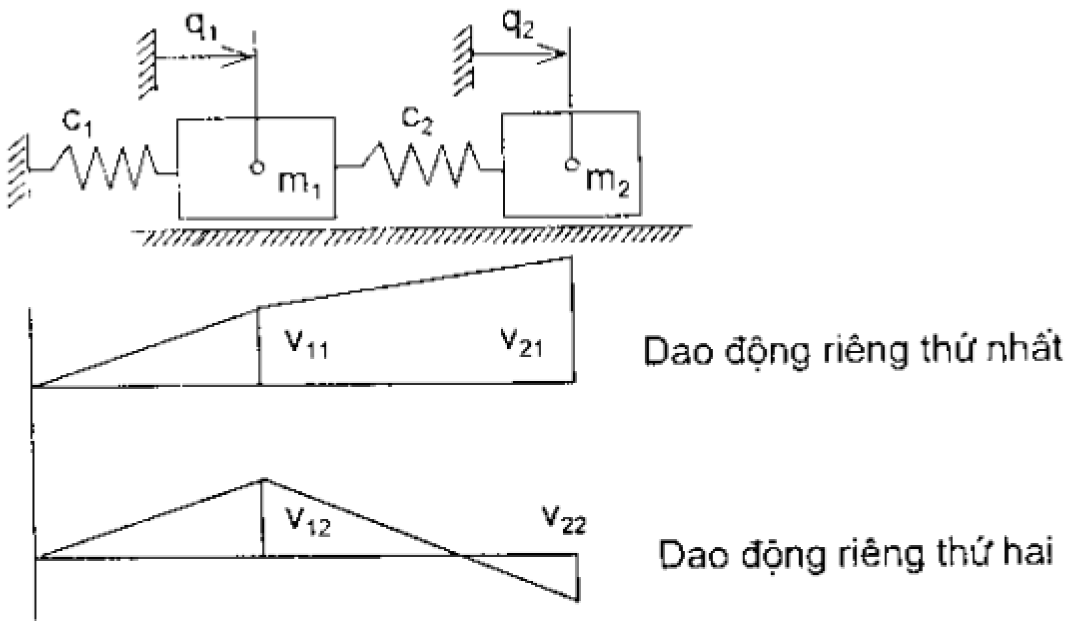
$$a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (c_1 + c_2 - m_1 \omega_2^2) / c_2 \end{bmatrix} a_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ c_2 / (c_2 - m_2 \omega_2^2) \end{bmatrix} a_{12}$$

Trong đó các đại lượng a_{11} và a_{12} là các hằng số chọn tùy ý.

Khi $c_1=c_2=c$, $m_1=m_2=m$, ta dễ dàng tính được

$$V=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}62 & -0{,}62 \end{bmatrix}$$

Hình vẽ dưới đây cho ta các dạng dao động riêng thứ nhất và thứ hai



3.2.2 Tính chất trực giao của các véc tơ riêng

Xét phương trình dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do

$$M\ddot{q}+Cq=0 \qquad (1.11)$$

Nếu các ma trận khối lượng M và ma trận độ cứng C là các ma trận thực đối xứng thì các véc tơ riêng v_k tương ứng với các tần số riêng ω_k sẽ trực giao với ma trận khối lượng M và ma trận độ cứng C. Ta có hệ thức

$$v_j^T M v_i = 0\,; \qquad v_j^T C v_i = 0 \quad \text{khi } \omega_i \neq \omega_j \qquad (1.12)$$

3.2.3 Các tọa độ chính

Phương trình dao động tự do không cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$M\ddot{q}+Cq=0 \qquad (1.13)$$

Nếu ta có thể chọn được các tọa độ suy rộng đặc biệt sao cho với các tọa độ đó, các ma trận khối lượng và ma trận độ cứng đều có dạng đường chéo, thì các tọa độ suy rộng đó được gọi là các tọa độ chính. Ký hiệu các tọa độ chính p_1, p_2,..., p_n.

Thực hiện phép đổi biến

$$q = Vp \qquad (1.14)$$

trong đó V là ma trận dạng riêng. Thế (1.14) vào (1.13) ta có

$$MV\ddot{p}+CVp=0$$

Nhân bên trái phương trình trên với V^T ta được

$$V^T MV\ddot{p} + V^T CVp = 0 \tag{1.15}$$

Do tính chất (1.12) các ma trận V^TMV và V^TCV là các ma trận đường chéo

$$V^T MV = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mu_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & \mu_n \end{bmatrix}; \qquad V^T CV = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma_2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & \gamma_n \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Vì vậy các phương trình (1.15) có dạng

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i p_i = 0 \qquad \text{i=1,2,...,n} \tag{1.17}$$

Trong đó $\quad \mu_i = v_i^T M v_i; \;\; \gamma_i = v_i^T C v_i \qquad (1.18)$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\omega_i^2 = \frac{\gamma_i}{\mu_i} \tag{1.19}$$

Thì phương trình (1.17) xác định các dạng dao động chính có dạng

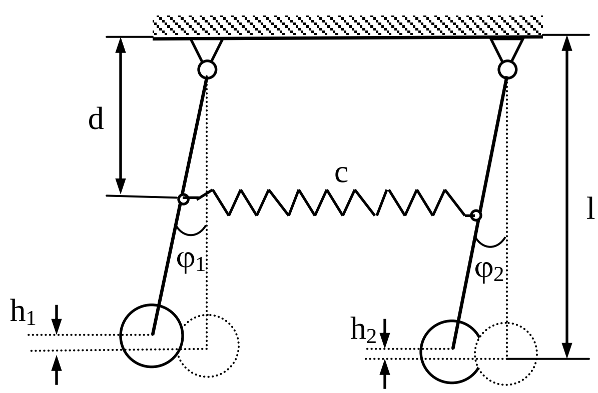
$$\ddot{p}_i + \omega_i^2 p_i = 0 \qquad \text{i=1,2,..,n} \tag{1.20}$$

Việc giải phương trình (1.20) đã được trình bày trong chương 2

Thí dụ 2: Một hệ hai con lắc có chiều dài mỗi thanh là l, khối lượng mỗi vật điểm là m. Hai thanh được nối với nhau bằng lò xo có hệ số cứng là c, ở vị trí cách trục quay một đoạn là d(Xem hình vẽ dưới). Độ dài của lò xo ở trạng thái không biến dạng bằng khoảng cách giữa hai trục con lắc. Bỏ qua khối lượng các thanh, khối lượng lò xo và lực cản.

a. Xác định các tọa độ chính của hệ.
b. Xác định dao động tự do của hệ với các điều kiện đầu $\varphi_1(0)=\varphi_0$, $\varphi_2(0)=0$, $\dot{\varphi}_1(0)=0,\ \dot{\varphi}_2(0)=0$.

Lời giải



Trước hết thiết lập phương trình dao động tự do của hệ.

$$T = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2)$$

$$\Pi = mgh_1 + mgh_2 + \frac{1}{2}cd^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Có $\quad h_1 = l(1-\cos\varphi_1) \approx \frac{1}{2}l\varphi_1^2$

$$h_2 = l(1-\cos\varphi_2) \approx \frac{1}{2}l\varphi_2^2$$

Nên ta có $\Pi = \frac{1}{2}[(mgl + cd^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2cd^2\varphi_1\varphi_2]$

Thay vào phương trình Lagrange II ta có phương trình dao động tự do của hệ hai con lắc.

$$ml^2\ddot{\varphi}_1 + (mgl + cd^2)\varphi_1 - cd^2\varphi_2 = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi}_2 - cd^2\varphi_1 + (mgl + cd^2)\varphi_2 = 0$$

Ở thí dụ này ta có $m_{11} = m_{22} = ml^2$, $m_{12} = 0$, $m_{21} = 0$, $c_{11} = c_{22} = mgl + cd^2$, $c_{12} = c_{21} = -cd^2$. Do đó phương trình tần số có dạng

$$(mgl + cd^2 - ml^2\omega^2)^2 - c^2d^4 = 0$$

Từ đó suy ra $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}$

Bây giờ ta xác định các phần tử của ma trận dạng riêng. Từ phương trình (1.10a) ta suy ra

$$v_1 = -\frac{c_{11} - m_{11}\omega_1^2}{c_{12} - m_{12}\omega_1^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2\frac{g}{l}}{-cd^2} = l$$

$$v_2 = -\frac{c_{11} - m_{11}\omega_2^2}{c_{12} - m_{12}\omega_2^2} = -\frac{mgl + cd^2 - ml^2\left(\frac{g}{l} + \frac{2cd^2}{ml^2}\right)}{-cd^2} = -l$$

Vậy ma trận dạng riêng là

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l & -l \end{bmatrix}$$

Từ đó ta có $\varphi_1 = p_1 + p_2$ $\varphi_2 = p_1 - p_2$

Suy ra $p_1 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$

$$p_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$$

Phương trình dao động dạng tọa độ chính

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0$$

$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = 0$$

Từ đó ta dễ dàng tìm được các dạng dao động chính

$$p_1(t) = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1); \qquad p_2(t) = C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Trở lại tọa độ suy rộng φ_1, φ_2 ta được

$$\varphi_1(t) = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\varphi_2(t) = C_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - C_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Các hằng số C_1, C_2, α_1, α_2 được xác định từ các điều kiện đầu $\varphi_1(0)=\varphi_0$, $\varphi_2(0)=0$, $\dot{\varphi}_1(0)=0,\ \ \dot{\varphi}_2(0)=0$. Đạo hàm theo thời gian các hàm φ_1, φ_2 ta được

$$\dot{\varphi}_1(t)=\omega_1 C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)+\omega_2 C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

$$\dot{\varphi}_2(t)=\omega_1 C_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)-\omega_2 C_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)$$

Từ các điều kiện đầu đã cho ta được hệ bốn phương trình xác định C_1, C_2, α_1, α_2

$$C_1\sin\alpha_1+C_2\sin\alpha_2=\varphi_0$$

$$C_1\sin\alpha_1-C_2\sin\alpha_2=0$$

$$\omega_1 C_1\cos\alpha_1+\omega_2 C_2\cos\alpha_2=0$$

$$\omega_1 C_1\cos\alpha_1-\omega_2 C_2\cos\alpha_2=0$$

Từ hai phươn trình thứ ba và thứ tư ta suy ra

$$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=0\ \ \rightarrow\ \ \alpha_1=\alpha_2=\frac{\pi}{2}$$

Từ hai phương trình đầu ta có

$$2C_1\sin\alpha_1=2C_2\sin\alpha_2=\varphi_0\ \ \ \rightarrow\ \ \ \mathrm{C}_1=C_2=\frac{1}{2}\varphi_0$$

Vậy dao động tự do của hệ hai con lắc có dạng

$$\varphi_1(t)=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)=\varphi_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

$$\varphi_2(t)=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)=\varphi_0\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$$

3.2.4 Các tọa độ chuẩn

Như ta đã biết, bằng phép thế q=Vp(V là ma trận dạng riêng, p là véc tơ các tọa độ chính)ta có thể đưa phương trình vi phân dao động

$$M\ddot{q}+Cq=0$$

Về dạng vế trái tách rời nhau

$$\mu_i\ddot{p}_i+\gamma_i p_i=0 \qquad \text{i=1,2,...,n}$$

Trong đó $\quad \mu_i=v_i^T M v_i;\ \ \gamma_i=v_i^T C v_i$

Do các phần tử của véc tơ v_i của ma trận dạng riêng V được xác định sai khác một hằng số nhân, cho nên ta có thể chọn các véc tơ v_i một cách thích hợp sao cho

$$V^T M V=\begin{bmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & ... & 1\end{bmatrix}=E \qquad (1.21)$$

Ma trận dạng riêng được chọn như thế được gọi là ma trận dạng riêng chuẩn. Ta ký hiệu ma trận dạng riêng chuẩn bằng V_n. Như thế nếu V_n là ma trận dạng riêng chuẩn thì ta có các hệ thức

$$V^T MV = E \qquad V^T CV = D_\omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

Bằng phép thế $q=V_n p$ ta có thể đưa phương trình

$$M\ddot{q} + Cq = 0$$

Về dạng $\quad E\ddot{p} + D_\omega p = 0$

Các tọa độ chính $p = [p_1, p_2,...,p_n]^T$ trong phép thế $q = V_n p$ được gọi là các tọa độ chuẩn. Chú ý rằng các tọa độ chuẩn là các tọa độ chính đặc biệt. Ta vẫn sử dụng các ký hiệu p_i để chỉ các tọa độ chuẩn. Nếu ta biết được ma trận dạng riêng

$$V = [v_1, v_2,..., v_n] \tag{1.22}$$

Thì ma trận dạng riêng chuẩn được xác định bởi hệ thức

$$V_n = \left[\frac{1}{\alpha_1} v_1, \frac{1}{\alpha_2} v_2, ..., \frac{1}{\alpha_n} v_n \right] \tag{1.23}$$

Trong đó các hằng số α_i được xác định bởi công thức

$$\alpha_i = \pm\sqrt{\mu_i} = \pm\sqrt{v_i^T M v_i} \tag{1.24}$$

3.3 Dao động tự do có cản

Phương trình vi phân dao động tự do có cản của hệ n bậc tự do có dạng

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0 \tag{2.1}$$

Trong đó M, B, C là các ma trận vuông cấp n với các phần tử là các hằng số. Tùy theo cấu trúc của ma trận cản B, hệ có thể thực hiện dao động tự do tắt dần và cũng có thể thực hiện chuyển động không dao động. Về phương diện dao động, ta quan tâm chủ yếu đến trường hợp hệ thực hiện dao động tự do tắt dần. Như vậy bài toán quan trọng hàng đầu trong đoạn này là xác định khi nào hệ thực hiện dao động tự do tắt dần, sau đó mới đến thuật toán tìm nghiệm.

3.3.1 Phương pháp giải trực tiếp(ma trận cản tùy ý)

a) Phương trình xác định trị riêng

Ta tìm nghiệm của phương trình (2.1) dưới dạng

$$q(t) = \hat{q}e^{\lambda t}, \quad \hat{q} \text{ là véc tơ hằng} \tag{2.2}$$

Thế nghiệm (2.2) vào phương trình (2.1) rồi đơn giản đi thừa số $e^{\lambda t}$, ta được phương trình của bài toán giá trị riêng tổng quát

$$\left(\lambda^2 M + \lambda B + C\right)\hat{q} = 0 \qquad (2.3)$$

Điều kiện cần để cho các phần tử của véc tơ $\hat{q}$ không đồng thời triệt tiêu là

$$P(\lambda) = \det\left(\lambda^2 M + \lambda B + C\right) = 0 \qquad (2.4)$$

Phương trình (2.4) được gọi là phương trình đặc trưng. Khi M là ma trận chính qui. $\det M \neq 0$, thì $P(\lambda)$ là đa thức bậc 2n của λ với hệ số thực. Giải phương trình (2.4) ta có được 2n nghiệm thực hoặc phức liên hợp. Các trị riêng phức và thực của (2.3) có thể viết dưới dạng

$$\lambda_k = -\delta_k + i\omega_k; \qquad \lambda_{k+s} = -\delta_k - i\omega_k \qquad k=1,...,s \leq n$$

$$\lambda_k = -\bar{\delta}_k \qquad k=2s+1,...,2n$$

b) Phân tích các khả năng dao động theo các trị riêng

- *Trường hợp trị riêng có phần thực âm khác không*

Định nghĩa: Khi $\delta_k > 0 (k = 1,..., s)$, $\bar{\delta}_k > 0 (k = 2s+1,...,2n)$ thì cản được gọi là đạt yêu cầu.

Khi cản đạt yêu cầu thì hệ thực hiện dao động tự do tắt dần. Hệ dao động là ổn định tiệm cận. Tùy theo tính chất của chuyển động của hệ, ta có thể phân ra thành ba trường hợp sau:

Cản yếu: s=n, $\omega_k \neq 0$ (k=1,...,n)

Cản mạnh: $\lambda_k = -\bar{\delta}_k < 0$, $(k = 1,...,2n)$

Cản hỗn hợp: Trường hợp còn lại.

Trong trường hợp cản yếu, hệ thực hiện chuyển động dao động. Trường hợp cản mạnh, hệ thực hiện chuyển động tắt dần.

- *Các trường hợp khác*

Khi trị riêng λ_k có $\delta_k = 0$ hoặc $\bar{\delta}_k = 0$, nghiệm riêng tương ứng với λ_k sẽ bị chặn. Hệ (2.1) ổn định giới hạn.

Khi phương trình (2.3) có trị riêng λ_k có phần thực dương thì nghiệm riêng tương ứng với λ_k sẽ tăng lên vô cùng khi t tăng. Hệ không dao động. Ta không xét trường hợp này.

3.4 Dao động cưỡng bức

3.4.1 Phương pháp giải trực tiếp

a) Dao động cưỡng bức không cản chịu kích động điều hòa.

Dao động tuyến tính cưỡng bức không cản của hệ n bậc tự do chịu kích động điều hòa có dạng

$$M\ddot{q} + Cq = \hat{f}\sin\Omega t \qquad (3.1)$$

Ở chế độ chuyển động bình ổn, ta tìm nghiệm phương trình (3.1) dưới dạng

$$q(t) = u \sin \Omega t \tag{3.2}$$

Thế (3.2) vào (3.1) ta suy ra

$$\left(-\Omega^2 M + C\right) u = \hat{f} \Rightarrow u = H(\Omega)\hat{f} \tag{3.3}$$

Trong đó $H(\Omega) = \left(-\Omega^2 M + C\right)^{-1}$ và được gọi là ma trận truyền.

Giải hệ phương trình đại số (3.3) ta được

$$u_k(\Omega) = \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} \tag{3.4}$$

Trong đó $\Delta(\Omega) = \det(-\Omega^2 M + C)$ (3.5)

$\Delta_k(\Omega)$ có được bằng cách thay véc tơ $\hat{f}$ vào cột thứ k của Δ. So sánh (3.5) với (1.4) trong cùng chương này ta thấy $\Delta(\Omega)$=0 khi $\Omega = \omega_j$ (j=1,2,...,n). Ta phân biệt ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\Delta(\Omega) = 0, \quad \Delta_k(\Omega) \neq 0$ Khi đó tần số lực kích động Ω trùng với một trong các tần số dao động riêng. Biên độ dao động tăng lên vô cùng. Trường hợp này được gọi là trường hợp cộng hưởng.

Trường hợp 2: $\Delta(\Omega)=0$, $\Omega=\omega_j$

$$\Delta_k(\Omega)=0 \text{ với mọi k và } \lim_{\Omega \to \omega_j} \frac{\Delta_k(\Omega)}{\Delta(\Omega)} < \infty$$

Trong trường hợp này mặc dù tần số lực kích động trùng với tần số riêng nhưng biên độ dao động vẫn bị giới nội. Trường hợp này được gọi là trường hợp giả cộng hưởng.

Trường hợp 3: $\Delta(\Omega) \neq 0$, $\Delta_k(\Omega)=0$ với k xác định.

Trong trường hợp này $u_k=0$. Dao động ứng với tọa độ thứ k bị dập tắt.

b) Dao động cưỡng bức có cản chịu kích động tuần hoàn

Dao động cưỡng bức có cản nhớt của hệ tuyến tính n bậc tự do được mô tả bởi phương trình vi phân dạng ma trận

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(t) \tag{3.6}$$

Trong đó M, B, C là các ma trận hằng số, f(t) là véc tơ cột các ngoại lực tác dụng. Giả sử f(t) là véc tơ tuần hoàn theo thời gian và có thể khai triển thành chuỗi Fourier một cách gần đúng

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t) \tag{3.7}$$

Ta sử dụng nguyên lý cộng tác dụng trong lý thuyết hệ phương trình vi phân tuyến tính để tìm nghiệm (3.6). Trước hết ta tìm nghiệm phương trình

$$M\ddot{q}_0 + B\dot{q}_0 + Cq_0 = a_0$$

dưới dạng $q_0 = v_0$

Từ hai phương trình trên ta nhận được hệ phương trình xác định v_0

$$Cv_0 = a_0 \tag{3.8}$$

Sau đó tìm nghiệm của phương trình

$$M\ddot{q}_k + B\dot{q}_k + Cq_k = a_k \cos k\Omega t + b_k \sin k\Omega t \tag{3.9}$$

Nghiệm (3.9) được tìm dưới dạng

$$q_k = u_k \sin k\Omega t + v_k \cos k\Omega t$$

Đạo hàm véc tơ q_k theo t sau đó thế vào (3.9) rồi so sánh các hệ số, ta nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính để xác định các véc tơ u_k và v_k

$$\begin{bmatrix} C - k^2\Omega^2 M & -k\Omega B \\ k\Omega B & C - k^2\Omega^2 M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_k \\ a_k \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Khi định thức của ma trận hệ số của hệ phương trình trên khác không, thì các véc tơ u_k và v_k được xác định duy nhất. Như thế nghiệm của phương trình dao động cưỡng bức (3.6) khi f(t) tuần hoàn được tính theo biểu thức.

$$q = v_0 + \sum_{k=1}^{m} (u_k \sin k\Omega t + v_k \cos k\Omega t) \tag{3.11}$$

Trong đó v_0 được xác định từ phương trình (3.8) còn u_k và v_k được xác định từ phương trình (3.10)

3.4.2. Phương pháp ma trận dạng riêng

Phương pháp ma trận dạng riêng được áp dụng thuận tiện đối với hệ tuyến tính không cản

$$M\ddot{q} + Cq = f(t) \tag{3.12}$$

Trong đó M và C là các ma trận thực, đối xứng.

Áp dụng phép biến đổi tọa độ $\qquad q = Vp \qquad (3.13)$

Với V là ma trận dạng riêng, p là véc tơ tọa độ chính, ta đưa được phương trình (3.12) về dạng

$$MV\ddot{p} + CVp = f(t)$$

Nhân bên trái phương trình trên với ma trận chuyển vị V^T của ma trận dạng riêng ta được

$$V^T MV\ddot{p} + V^T CVp = V^T f(t) \tag{3.14}$$

Các ma trận V^TMV và V^TCV là các ma trận đường chéo và có dạng như (1.16).

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$h_i = v_i^T f \qquad \text{(i=1,2,...n)} \tag{3.15}$$

Thì phương trình (3.14) viết được dưới dạng hệ n phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

$$\mu_i \ddot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i \qquad \text{(i=1,2,...n)} \tag{3.16}$$

Trong đó μ_i γ_i được xác định bởi công thức (1.18)

Nghiệm của mỗi phương trình của hệ (3.16) ứng với điều kiện đầu

$$p_i(0) = p_{i0}\,; \quad \dot{p}_i(0) = \dot{p}_{i0}\,,$$

Theo công thức trong chương 2 có dạng

$$p_i(t) = p_{io}\cos\omega_i t + \frac{\dot{p}_{i0}}{\omega_i}\sin\omega_i t + \frac{1}{\mu_i\omega_i}\int_0^t h_i(\tau)\sin\omega_i(t-\tau)d\tau \qquad (3.17)$$

Trong đó $\quad \omega_i^2 = \dfrac{\gamma_i}{\mu_i}$

Đối với trường hợp kích động điều hòa $f_i(t)=f_i\sin\Omega t$, theo công thức (3.15) ta có

$$h_i(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} v_{ki}\hat{f}_k\right)\sin\Omega t = \hat{h}_i\sin\Omega t$$

Các phương trình (3.16) đối với trường hợp này có dạng

$$\mu_i\ddot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i\sin\Omega t \qquad (\mathrm{i} = 1,2,...\mathrm{n}) \qquad (3.18)$$

Nghiệm của các phương trình (3.16) trong giai đoạn bình ổn là

$$p_i = \frac{h_i}{\gamma_i\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)}\sin\Omega t$$

Trở về tọa độ ban đầu q_k ta có

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^{n} v_{ki}p_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{v_{ki}h_i}{\gamma_i\left(1-\dfrac{\Omega^2}{\omega_i^2}\right)}\sin\Omega t \qquad (3.19)$$

Như thế, khi chịu kích động điều hòa, hệ dao động với tần số của lực kích động và dạng dao động phụ thuộc vào các tham số của hệ và tần số của kích động ngoài. Từ công thức (3.19) ta thấy: Khi tần số kích động Ω bằng tần số riêng ω_i của hệ, biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô hạn. Hiện tượng đó gọi là hiện tượng cộng hưởng.

Nếu kể đến lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, phương trình vi phân dao động cưỡng bức có dạng

$$M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = f(t) \qquad (3.20)$$

Trong kỹ thuật ta hay gặp trường hợp

$$B = \alpha_1 M + \alpha_2 C$$

Với α_1, α_2 là các hằng số thực. Tương tự như các mục trước, bằng phép biến đổi (3.13) phương trình (3.20) đưa về dạng

$$\mu_i\ddot{p}_i + \beta_i\dot{p}_i + \gamma_i p_i = h_i(t) \qquad (\mathrm{i} = 1,2,...,\mathrm{n}) \qquad (3.21)$$

Trong đó μ_i, γ_i, β_i được xác định bởi công thức (1.18) còn h_i tính theo công thức (3.15). Việc tìm nghiệm của phương trình (3.21) đã được trình bày trong chương 2.

Chương 4
DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Các hệ liên tục còn được gọi là các hệ vô hạn bậc tự do. Trong chương này ta xét dao động của dây, dao động của thanh và dầm, dao động của màng và dao động của tấm. Các đại lượng vật lý đặc trưng cho dao động của hệ vô hạn bậc tự do như khối lượng, độ cứng phân bố một cách liên tục.

4.1. Dao động uốn của dây

4.1.1 Thiết lập phương trình sóng của dây

Ta xét một dây có khối lượng dọc theo đơn vị độ dài μ không đổi và chịu lực kéo $\vec{S}$ ở đầu dây. Nếu ta kéo dây lệch khỏi vị trí cân bằng, sau đó bỏ ra thì dây sẽ thực hiện dao động tự do. Độ võng theo phương z là w=w(x,t). Dịch chuyển u theo phương x có thể bỏ qua khi độ võng w và góc xoay tgα=$\frac{\partial w}{\partial x} = w'$ đủ nhỏ. Để thiết lập phương trình vi phân chuyển động của dây ta tách ra xét một đoạn dây ds rất ngắn.

Do giả thiết $w' \ll 1$, ta có các xấp xỉ sau

$$\alpha \approx \sin\alpha \approx w', \quad (\alpha + d\alpha) \approx \sin(\alpha + d\alpha) \approx w' + w''dx$$

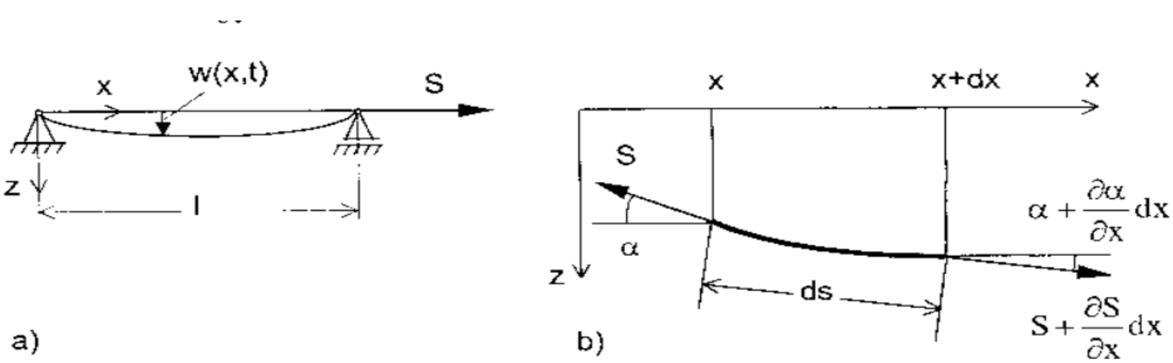
$$\cos\alpha \approx 1, \qquad \cos(\alpha + \mathrm{d}\alpha) \approx 1, \qquad \mathrm{ds} \approx \mathrm{dx}$$

Với các xấp xỉ trên ta sử dụng ký hiệu $dm = \mu ds \approx \mu dx$ ta nhận được phương trình chuyển động của phần tử dây theo trục ox và oz

$$0 = -S + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx \right) \tag{1.1}$$

$$\mu dx\ddot{w} = -Sw' + (S + \frac{\partial S}{\partial x} dx)(w' + w''dx) \tag{1.2}$$

Trong đó $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ là gia tốc của phần tử dây theo hướng z.



Từ phương trình (1.1) ta có

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \rightarrow S = const$$

Thế biểu thức $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$ vào phương trình (1.2), ta nhận được phương trình

$$\mu \ddot{w} = S w''$$

Sử dụng ký hiệu $c^2 = \frac{S}{\mu}$, phương trình trên có dạng

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.3)$$

Phương trình dao động hàm riêng (1.3) được gọi là phương trình sóng. Hằng số c có thứ nguyên vận tốc được gọi là vận tốc lan truyền sóng.

Nếu ta gọi diện tích thiết diện mặt cắt là A, mật độ khối là ρ, ứng suất của dây là σ, thì ta có

$$\mu = \rho A, \quad S = \sigma A$$

Từ đó tốc độ lan truyền sóng có biểu thức $c = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ (1.4)

Để giải được phương trình (1.3) ta phải biết các điều kiện đầu và các điều kiện biên. Các điều kiện đầu là độ võng và vận tốc của các điểm của dây ở thời điểm đầu(t_0=0).

$$w(x, 0) = w_0(x), \qquad \dot{w}(x,0) = v_0(x) \qquad (1.5)$$

Các điều kiện biên là các điều kiện về biến dạng và lực ở các biên. Như thí dụ hình vẽ trê, dịch chuyển ở hai gối đỡ hai đầu dây bằng không.

$$w(0,t) = 0, \quad w(l, t) = 0 \qquad (1.6)$$

4.1.2 Phương pháp Bernoulli, dao động

Bây giờ ta trình bày cách giải phương trình (1.3) bằng phương pháp Bernoulli. Tìm nghiệm (1.3) dưới dạng

$$w(x,t) = X(x)T(t) \qquad (1.7)$$

Thế (1.7) vào phương trình (1.3) ta được

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

Do vế trái của phương trình chỉ phụ thuộc vào x, còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t, cho nên hai vế phải bằng hằng số. Với mục đích định trước, ta ký hiệu hằng số đó là $-\omega^2$.

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

Từ đó ta nhận được hai phương trình vi phân thường

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (1.8)$$

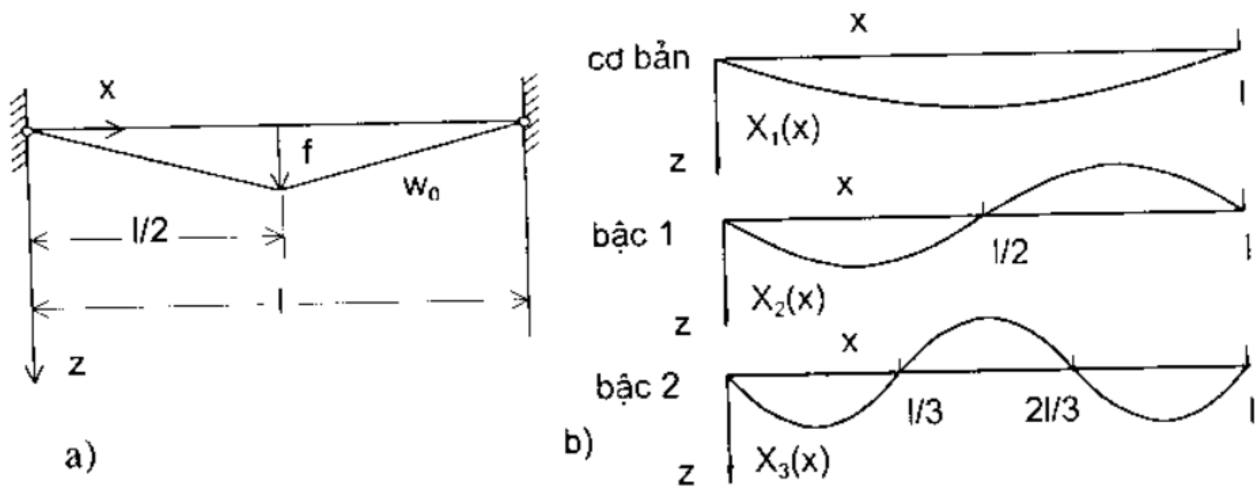
$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này có dạng

$$X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x$$

$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \quad (1.9)$$

Trong đó A, B, C, D và ω là các đại lượng được xác định từ các điều kiện biên và các điều kiện đầu.



Ví dụ 1: Ta xét dao động uốn của dây có hai đầu gắn chặt. Các điều kiện biên có dạng

w(0, t) = 0 → X(0) = 0: A = 0

w(l, t) = 0 → X(l) = 0: $B\sin\frac{\omega}{c}l = 0$ (1.10)

Để cho nghiệm X(x) không đồng nhất bằng không, thì B ≠ 0, do đó ta có

$$\sin\frac{\omega}{c}l = 0 \rightarrow \frac{\omega}{c}l = k\pi \rightarrow \omega_k = k\pi\frac{c}{l}, \ \ k = 1, 2, ... \quad (1.11)$$

Phương trình $\sin\frac{\omega}{c}l = 0$ được gọi là phương trình đặc trưng, còn các đại lượng ω_k được gọi là các tần số riêng.

Ứng với mỗi tần số riêng ω_k ta có một hàm riêng(dạng dao động riêng)

$$X_k(x) = B_k\sin\frac{\omega_k}{c}x = B_k\sin\frac{k\pi x}{l} \quad (1.12)$$

Thế các biểu thức (1.12) và (1.9) vào (1.7) ta được

$$w_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \sin\frac{k\pi x}{l}\left(C_k\cos\omega_k t + D_k\sin\omega_k t\right) \quad (1.13)$$

Trong đó không giảm tính chất tổng quát, ta chọn $B_k = 1$.

Biểu thức (1.13) mô tả một dao động riêng của dây với tần số riêng ω_k và dạng dao động riêng $X_k(x)$. Từ hệ thức (1.11) ta thấy có vô số các dạng dao động riêng của dây(k = 1, 2,…). Tần số riêng ω_1 được gọi là tần số cơ bản. Còn dao động riêng tương ứng được gọi là dao động riêng cơ bản.

Các dao động riêng (1.13) là các nghiệm riêng của phương trình (1.3). Vì phương trình (1.3) là phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, áp dụng phương pháp cộng nghiệm, ta nhận được nghiệm tổng quát của ví dụ này.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi x}{l}\left(C_k \cos\omega_k t + D_k \sin\omega_k t\right) \qquad (1.14)$$

Trong đó các tần số riêng ω_k được xác định từ hệ thức (1.11). Các hằng số C_k, D_k được xác định từ các điều kiện đầu (1.5)

$$w(x, 0)=w_0(x): \quad \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin\frac{k\pi x}{l} = w_0(x)$$

$$\dot{w}(x,0) = v_0(x): \quad \sum_{k=1}^{\infty} D_k \omega_k \sin\frac{k\pi x}{l} = v_0(x) \qquad (1.15)$$

Để xác định các hằng số C_k, D_k ta nhân phương trình (1.15) với $X_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l}$ rồi lấy tích phân theo chiều dài của dây. Với chú ý

$$\int_0^l X_i(x) X_k(x) dx = \int_0^l \sin\frac{i\pi x}{l} \sin\frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq k \\ \dfrac{l}{2} & \text{khi } i = k \end{cases} \qquad (1.16)$$

Ta nhận được

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx$$

$$D_k = \frac{2}{\omega_k l}\int_0^l v_0(x) \sin\frac{k\pi x}{l} dx \qquad (1.17)$$

Như vậy, nghiệm (1.11) được xác định một cách duy nhất. Điều kiện (1.16) được gọi là điều kiện trực giao của các hàm riêng.

Ví dụ 2: Để minh họa ta xét trường hợp $v_0(x) = 0$, còn $w_0(x)$ có dạng hình tam giác như hình vẽ trên. Theo (1.17) ta có $D_k = 0$ còn C_k được tính với hàm $w_0(x)$ có dạng

$$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2fx}{l} & \text{khi } 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2f\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) & \text{khi } \dfrac{1}{2} \le x \le l \end{cases}$$

Ta dễ dạng tính được

$$C_k = \frac{4f}{l}\left[\int_0^{l/2}\frac{x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx - \int_{l/2}^{l}\left(\frac{x}{l}-l\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right] = \frac{8f}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

Thế các C_k, D_k vào biểu thức (1.14) ta được

$$w(x,t) = f\,\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\omega_k t \qquad (1.18)$$

Chú ý rằng trong nhiều vấn đề thực tế người ta chỉ quan tâm đến việc xác định các tần số riêng và dạng dao động riêng. Trong bài toán này, chúng ta chưa cần quan tâm đến các điều kiện đầu. Trong bài toán dao động cưỡng bức, hiện tượng cộng hưởng là hiện tượng khi tần số của lực kích động trùng với một trong các tần số dao động riêng của hệ. Vì vậy để tránh hiện tượng cộng hưởng, ta cần phải biết các tần số riêng.

Trong các hệ kỹ thuật, bao giờ cũng có phần tử cản. Hệ số cản càng lớn, khi tần số riêng càng cao. Vì vậy các dao động cao tần được kích động một cách yếu ớt và tắt khá nhanh. Trong thực tế chỉ các dao động riêng cơ bản và các dao động riêng bậc một là có ý nghĩa quan trọng.

Thí dụ 3: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của dây một đầu ngàm chặt, một đầu tự do(Hình 4.4a). Tần số riêng cơ bản sẽ thay đổi thế nào khi lực kéo S ở dây tăng gấp đôi?

Theo công thức (1.9), nghiệm của X(x) có dạng

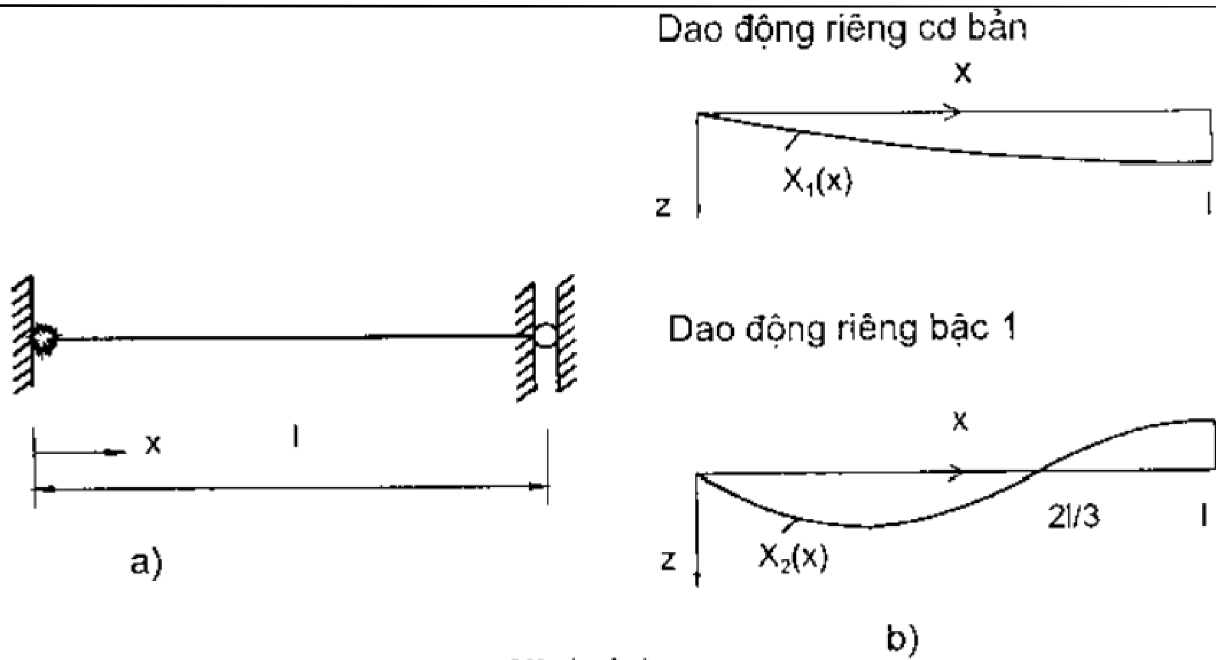
$$X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x$$

Các điều kiện biên có dạng

$$X(0) = 0: \quad A = 0$$

$$X'(l) = 0: \quad B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = 0$$

Từ phương trình thứ hai khi B≠0 ta có phương trình đặc trưng



Hình 4.4

$$\cos\frac{\omega}{c}l = 0$$

Từ phương trình này, khi ω > 0, ta tìm được các tần số riêng

$$\frac{\omega}{c}l = \frac{2k-1}{2}\pi \quad \rightarrow \quad \omega_k = \frac{2k-1}{2}\frac{\pi c}{l}, \quad k = 1, 2, ...$$

Từ đó suy ra các hàm riêng

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi x}{l}\right), \quad k = 1, 2, ...$$

Dao động riêng cơ bản và dao động riêng bậc 1 có dạng

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{2l}, \quad X_1(x) = B_1 \sin\frac{\pi x}{2l}$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi c}{2l}, \quad X_2(x) = B_2 \sin\frac{3\pi x}{2l}$$

Chú ý đến công thức (1.4), tần số dao động riêng cơ bản có dạng

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{S}{\mu l^2}}$$

Khi lực kéo S tăng gấp đôi, thì ω_1 được nhân với $\sqrt{2}$

4.2. Dao động dọc và dao động xoắn của thanh thẳng

4.2.1 Dao động dọc tự do của thanh đồng chất thiết diện không đổi

Xét một thanh thẳng(Hình a) có mật độ khối là ρ(x), thiết diện là A(x), môđun đàn hồi là E. Thanh thực hiện dao động u(x, t) dọc trục x. Áp dụng nguyên lý d'Alember, xét một phân tố của thanh chịu lực như hình vẽ b. Phương trình chuyển động theo trục x của phân tố thanh có dạng

$$\rho(x)A(x)dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -N + (N + \frac{\partial N}{\partial x}dx)$$

$$\rightarrow \rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2.1)$$

Từ giáo trình sức bền vật liệu ta có

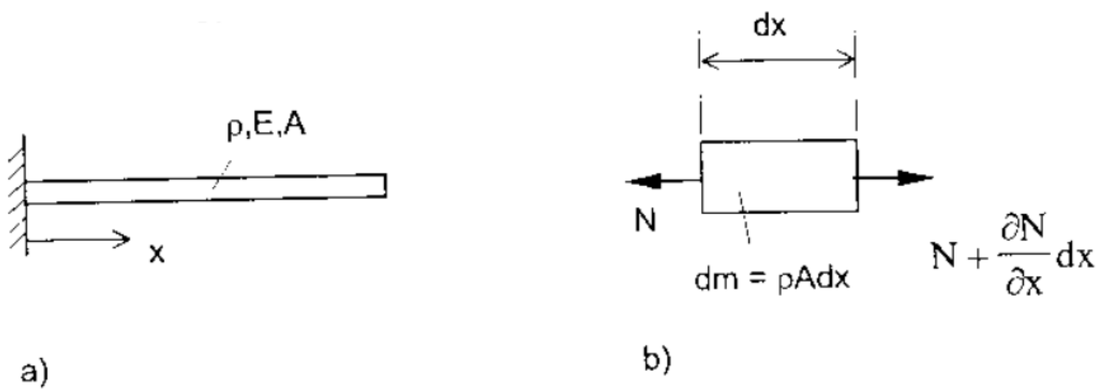
$$N = EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}$$

Thế biểu thức trên vào phương trình (2.1) ta nhận được phương trình dao động dọc tư do của thanh thẳng

$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[EA(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0 \qquad (2.2)$$

Khi ρ(x) và A(x) đều là các hằng số, từ phương trình (2.2) ta suy ra phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng dồng chất tiết diện không đổi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \qquad c^2 = \frac{E}{\rho} \qquad (2.3)$$



Như vậy phương trình dao động dọc tự do của thanh thẳng là phương trình đạo hàm riêng cấp hai có dạng giống như phương trình (1.3). Bây giờ ta tìm nghiệm của phương trình (2.3) dưới dạng

$$u(x, t) = X(x)T(t) \qquad (2.4)$$

Thế biểu thức nghiệm (2.4) vào phương trình (2.3) ta có

$$X(x)\ddot{T}(t) - c^2X''(x)T(t) = 0$$

$$\rightarrow c^2\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}$$

Do vế trái của phương trình trên chỉ phụ thuộc vào x, còn vế phải chỉ phụ thuộc vào t, cho nên hai vế đó phải bằng hằng số. Ta ký hiệu hằng sô đó là $-\omega^2$

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

Từ đó nhận được hai phương trình vi phân thường

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \tag{2.5}$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \tag{2.6}$$

Nghiệm tổng quát của các phương trình này có dạng

$$X(x) = A^* \cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x \tag{2.7}$$

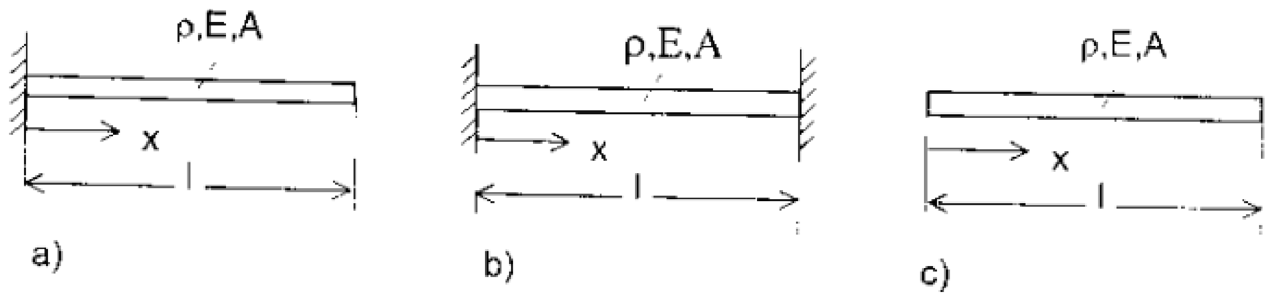
$$T(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t \tag{2.8}$$

Các hằng số A^*, B được xác định từ các điều kiện biên, còn các hằng số C, D được xác định từ các điều kiện đầu.

Đối với thanh một đầu ngàm chặt, một đầu tự do(hình 4.6a), các điều kiện biên có dạng

$$u(0, t) = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A^* = 0$$

$$N(l,t) = EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad X'(l) = 0 \quad \rightarrow \quad B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = 0$$



Hình 4.6

Với các giả thiết B ≠ 0, ω > 0, ta suy ra phương trình đặc trưng

$$\cos\frac{\omega}{c}l = 0 \tag{2.9}$$

Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng

$$\omega_k = \frac{2k-1}{2}\frac{\pi c}{l} = \frac{2k-1}{2}\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \quad k = 1, 2, ...$$

$$X_k(x) = B_k \sin\left(\frac{2k-1}{2}\frac{\pi x}{l}\right); \quad k = 1, 2, ... \tag{2.10}$$

Đối với thanh hai đầu bị ngàm chặt(Hình 4.6b), các điều kiện biên có dạng

$$X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A^* = 0; \quad X(l) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\frac{\omega}{c}l = 0$$

Từ đó ta có các tần số riêng và các hàm riêng

$$\omega_k = k\frac{\pi c}{l} = k\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \qquad X_k(x) = B_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (2.11)$$

Đối với thanh hai đầu tự do(Hình 4.6c), các điều kiện biên có dạng

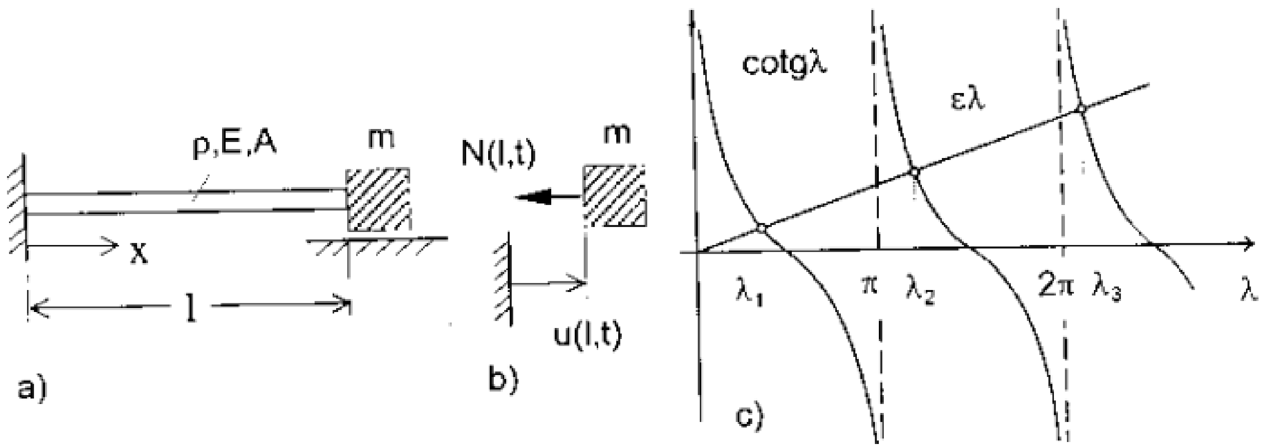
$$X'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0; \quad X'(l) = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\frac{\omega}{c}l = 0$$

Từ đó ta nhận được

$$\omega_k = k\frac{\pi c}{l} = k\pi\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \qquad X_k(x) = A_k^* \cos\frac{k\pi x}{l} \qquad (2.12)$$

Như thế, từ các điều kiện biên, chúng ta xác định được các tần số riêng và các hàm riêng.

Thí dụ 4: Hãy xác định các tần số riêng và các hàm riêng của thanh một đầu bị ngàm chặt, một đầu mang khối lượng điểm m như hình a.



Lời giải: Điều kiện biên bên trái

$$u(0, t) = 0 \quad \rightarrow \quad X(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A^* = 0$$

Điều kiện biên bên phải

$$EA\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = -m\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad EAX'(l) = m\omega^2 X(l)$$

$$\rightarrow EAB\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = m\omega^2 B\sin\frac{\omega}{c}l$$

$$\rightarrow \cot g\frac{\omega}{c}l = \frac{m\omega c}{EA}$$

Ta đưa vào các ký hiệu

$$\lambda = \frac{\omega l}{c}; \qquad \varepsilon = \frac{m}{\rho Al}$$

Và chú ý đến $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$ từ phương trình trên ta suy ra

$$\cot g\lambda = \varepsilon\lambda \tag{2.13}$$

giải phương trình (2.13) bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị, ta nhận được một tập vô hạn các giá trị riêng λ_k. Từ đó suy ra các tần số riêng và các hàm riêng

$$\omega_k = \lambda_k \frac{c}{l} = \lambda_k \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}; \quad \mathrm{k} = 1, 2, ...$$

$$X_k(x) = B_k \sin\lambda_k \frac{x}{l}$$

Nếu ta chọn ε = 1, thì ta có

$$\lambda_1 = 0{,}860 \quad \to \quad \omega_1 = \lambda_1 \frac{c}{l} = 0{,}860\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

$$\lambda_2 = 3{,}425 \quad \to \quad \omega_2 = \lambda_2 \frac{c}{l} = 3{,}425\sqrt{\frac{E}{\rho l^2}}$$

4.2.2 Dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi

Để nghiên cứu ta làm thí dụ khảo sát dao động của thanh một đầu ngàm, một đầu tự do. Tại đầu tự do tác dụng một lực dọc thay đổi tuần hoàn theo t là $F(t)=F_0\cos\Omega t$ (Hình 4.9a)

Phương trình vi phân dao động dọc của thanh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.14}$$

Các điều kiện biên

$$u(0, t) = 0; \quad N(l, t) = EA\,u'(l,t) = F_0\cos\Omega t \tag{2.15}$$

Bài toán này được gọi là bài toán có điều kiện biên không thuần nhất. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất $u_h(x, t)$ và một nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất $u_p(x, t)$

$$u(x, t)=u_h(x, t)+u_p(x, t) \tag{2.16}$$

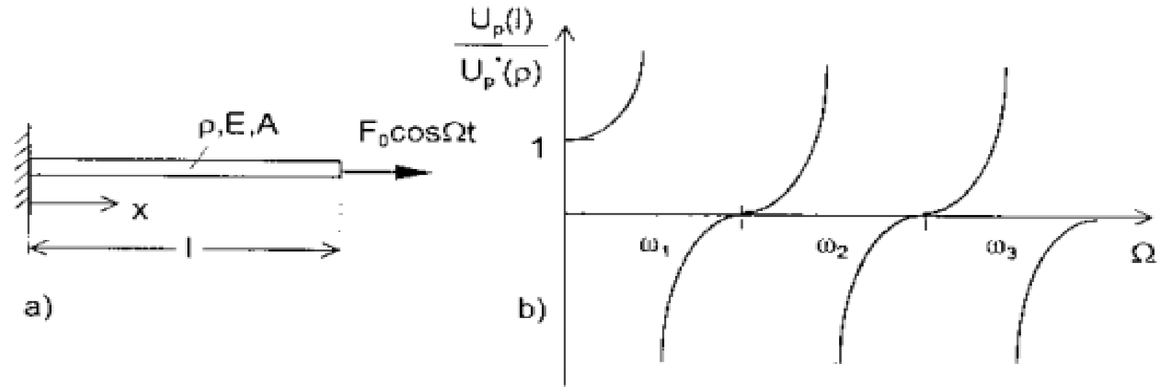
Nghiệm tổng quát của bài toán tuyến tính thuần nhất có dạng

$$u_h(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(C_k\cos\omega_k t + D_k\sin\omega_k t\right)X_k(x) \tag{2.17}$$

Trong đó ω_k là các tần số riêng, $X_k(x)$ là các hàm riêng

Ta tìm nghiệm riêng bài toán tuyến tính không thuần nhất dưới dạng

$$u_p(x,t) = U_p(x)\cos\Omega t \qquad (2.18)$$



Hình 4.9

Thế biểu thức (2.18) vào phương trình (2.14) ta nhận được phương trình vi phân thường

$$\frac{d^2U_p}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}U_p = 0 \qquad (2.19)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này có dạng

$$U_p(x) = B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x$$

Vậy ta có $\quad u_p(x,t) = \left(B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x\right)\cos\Omega t \qquad (2.20)$

Các hằng số B_1 và B_2 được xác định từ các điều kiện biên (2.15)

$u_p(0, t) = 0$: $\quad B_1 = 0$

$$EAu'_p(l,t) = F_0\cos\Omega t: \qquad EAB_2\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l = F_0 \;\rightarrow B_2 = \frac{F_0}{EA\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}$$

Vậy nghiệm riêng (2.20) có dạng

$$u_p(x,t) = \frac{F_0 c}{EA\Omega}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}x}{\cos\frac{\Omega}{c}l}\cos\Omega t \qquad (2.21)$$

Nghiệm tổng quát (2.16) là tổng của hai nghiệm (2.17) và (2.21). Các hằng số C_k và D_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Trong các hệ kỹ thuật, thường tồn tại thành phần cản. Do đó với t đủ lớn, nghiệm của bài toán thuần nhất sẽ dần tới không. Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm riêng (2.21).

Trên hình 4.9b biểu diễn đồ thị biên độ dao động dọc của điểm cuối thanh (x = l) theo tần số Ω. Trong đó ký hiệu

$$U_p(l)=\frac{F_0 l}{EA}\frac{\sin\frac{\Omega}{c}l}{\frac{\Omega}{c}l\cos\frac{\Omega}{c}l}; \qquad \mathrm{U}_\mathrm{p}^*(l)=\frac{F_0 l}{EA}$$

Khi Ω→0, do $\sin\frac{\Omega}{c}l\to\frac{\Omega}{c}l$, $\cos\frac{\Omega}{\mathrm{c}}l\to 1$ nên $\frac{U_p(l)}{U_p^*(l)}\to 1$ với $U_p^*(l)=\frac{F_0 l}{EA}$ là độ dãn tĩnh của thanh. Do phương trình đặc trưng dao động dọc tự do là $\cos\frac{\omega}{c}l=0$, nên khi $\Omega\to\omega_k$(tần số riêng) thì biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô cùng(do $\cos\frac{\Omega}{c}l\to 0$). Vậy hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\Omega=\omega_k$(k=1, 2, …). Chú ý biểu thức nghiệm riêng (2.21) chỉ sử dụng được khi $\Omega\neq\omega_k$. Khi $\Omega\to\omega_k$, biểu thức nghiệm riêng có dạng

$$u_p(x,t)=U_p(x)t\cos\Omega t \tag{2.22}$$

Việc tìm nghiệm riêng trong trường hợp này đã được xét trong chương 2.

Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán dao động dọc cưỡng bức của thanh thẳng đồng chất thiết diện không đổi, trên thanh chịu tác dụng của lực dọc trục cường độ p(x,t). Khi đó phương trình vi phân dao động dọc cưỡng bức không cản của thanh có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{p(x,t)}{\mu} \tag{2.23}$$

Áp dụng phương pháp khai triển theo các hàm riêng, ta tìm nghiệm riêng của phương trình (2.23) dưới dạng

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}q_i(t)X_i(x) \tag{2.24}$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng, được xác định từ phương trình

$$X_i''(x)+\left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 X_i(x)=0 \tag{2.25}$$

Thế biểu thức nghiệm (2.24) vào phương trình (2.23) ta có

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t)X_i(x)-c^2 q_i(t)X_i''(x)\right]=\frac{1}{\mu}p(x,t)$$

Chú ý đến (2.25) phương trình trên có dạng

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)\right]X_i(x)=\frac{1}{\mu}p(x,t) \tag{2.26}$$

Nhân hai vế của phương trình (2.26) với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo chiều dài của thanh

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)\right]\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx=\frac{1}{\mu}\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ phương trình trên ta suy ra hệ phương trình vi phân thường

$$\ddot{q}_k(t)+\omega_k^2 q_k(t)=\frac{\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx}{\mu\int_0^l X_k^2(x)dx}=f_k(t)\quad (\mathrm{k}=1,2,...) \tag{2.27}$$

Giải hệ phương trình dạng tọa độ chính (2.27) ta xác định được các hàm $q_k(t)$. Sau đó thế vào biểu thức (2.24) ta tìm được nghiệm riêng của phương trình (2.23).

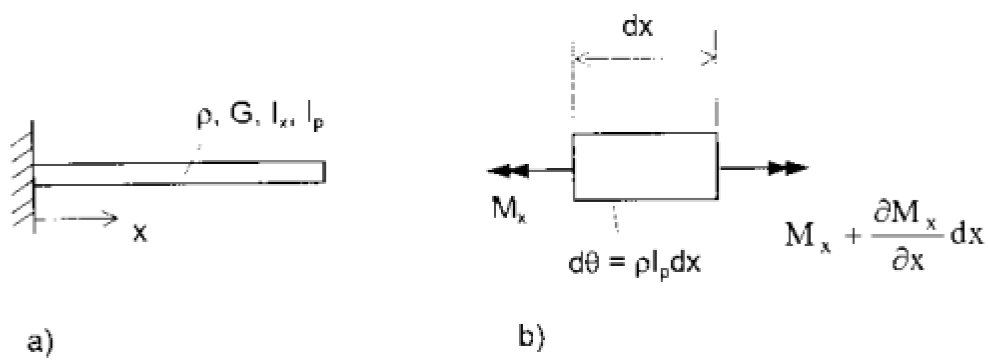
4.2.3 Dao động xoắn của thanh thẳng

Trước hết ta thiết lập phương trình vi phân dao động xoắn của thanh có thiết diện biến đổi (hình 4.11a). Ta tách ra một phân tố nhỏ(hình 4.11b). Mômen quán tính là $d\theta=\rho dx\int_A r^2 dA=\rho I_p dx$, với I_p là mômen quán tính thiết diện cực. Áp dụng định lý mômen động lượng ta có

$$d\theta\ddot{\varphi}=-M_x+\left(M_x+\frac{\partial M_x}{\partial x}dx\right)+q(x,t)dx$$

$$\rightarrow \rho I_p(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial M_x}{\partial x}=q(x,t) \tag{2.28}$$

Trong đó ρ là mật độ khối lượng, q(x,t) là cường độ mômen ngoại lực tác dụng lên thanh. Theo định luật Hook đối với thanh xoắn ta có hệ thức



Hình 4.11

$$M_x=GI_d(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.29}$$

Trong đó G là môđun cắt, I_d là mômen quán tính thiết diện xoắn, $GI_d(x)$ là độ cứng chống xoắn. Đối với mặt cắt hình tròn $I_d = I_p$. Nói chung I_d khác I_p.

Thế biểu thức (2.29) vào phương trình (2.28) ta nhận được phương trình vi phân dao động xoắn của thanh thẳng thiết diện biến đổi

$$\rho I_p(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[GI_d(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right] = q(x,t) \tag{2.30}$$

Khi thanh có thiết diện không đổi I_p và I_d là các hằng số. Nếu ta đưa vào các ký hiệu

$$c^2 = \frac{GI_d}{\rho I_p}, \qquad \mu = \rho \mathrm{I_p} \tag{2.31}$$

Thì từ phương trình (2.30) ta nhận được phương trình dao động xoắn của thanh có thiết diện không đổi

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{q(x,t)}{\mu} \tag{2.32}$$

Phương trình dao động xoắn của thanh thẳng dó dạng giống như phương trình dao động uốn của dây và phương trình dao động dọc của thanh. Cách giải phương trình này đã được trình bày ở trên.

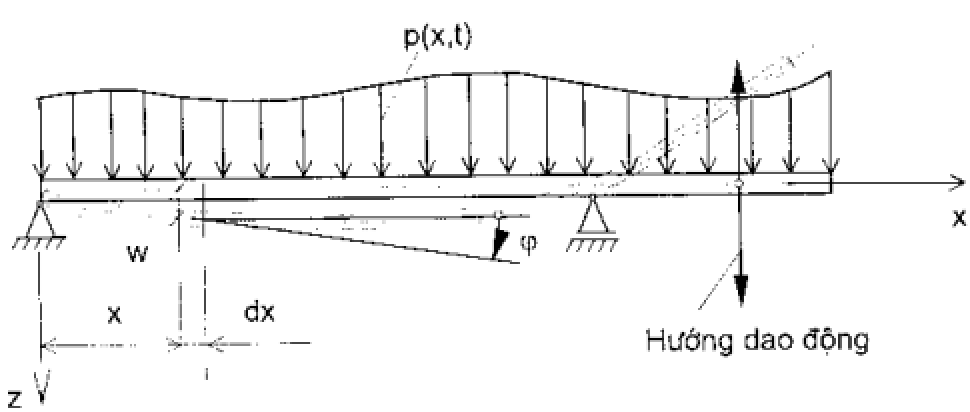
4.3. Dao động uốn của dầm

Khi nghiên cứu dao động uốn của dầm, ta giả thiết rằng mặt cắt của dầm đối xứng qua hai trục. Chẳng hạn mặt cắt của dầm có dạng hình tròn, hình chữ nhật, hình chữ I. Khi mặt cắt của dầm không đối xứng qua hai trục thì dầm sẽ thực hiện dao động uốn và xoắn đồng thời. Bài toán đó ta không xét ở đây.

Khi bỏ qua lực quán tính quay và biến dạng trượt của trục dầm ta có dầm Euler-Bernoulli. Nếu quan tâm đến lực quán tính quay và biến dạng trượt của trục dầm ta có dầm Timoshenko.

4.3.1 Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm

a. Dầm Timoshenko



Hình 4.13

Giả sử các mặt cắt của dầm luôn luôn phẳng và vuông góc với trục võng của dầm. Trục hình học của dầm khi chưa biến dạng thì thẳng. Ta lấy đường thẳng này làm trục x, còn trục z chọn vuông góc với trục x(hình 4.13). Bỏ qua dao động xoắn và dao động dọc trục. Dầm chỉ thực hiện dao động uốn theo phương z.

Khác với bài toán tĩnh, ở đây độ võng w, góc xoay φ, mômen uốn M và lực cắt Q là các hàm của tọa độ x và thời gian t

$$w(x, t); \qquad \varphi(x, t); \qquad M(x, t); \qquad Q(x, t)$$

Như đã biết trong các tài liệu về độ bền quan hệ giữa độ võng và góc xoay có dạng

$$tg\varphi = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \approx \varphi(x,t) \qquad (3.1)$$

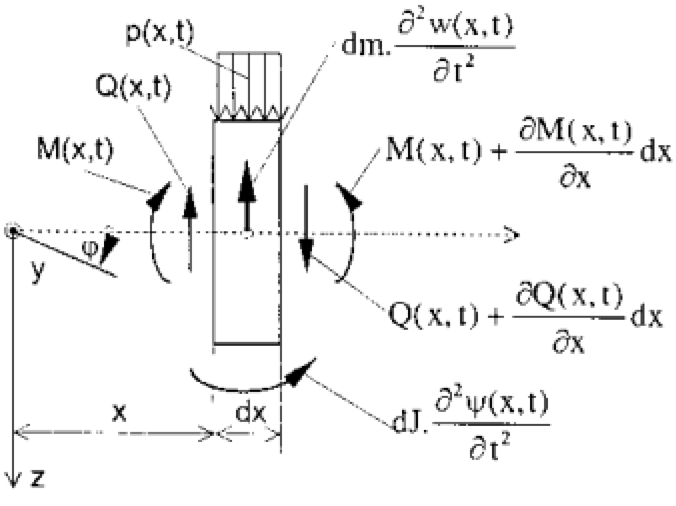
Ta tưởng tượng tách một phân tố nhỏ của dầm có chiều dài dx như hình 4.14. Trong đó góc xoay φ bằng tổng góc xoay ψ(do mômen uốn M gây nên) và góc trượt θ(do lực cắt Q gây ra)

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \theta \qquad (3.2)$$

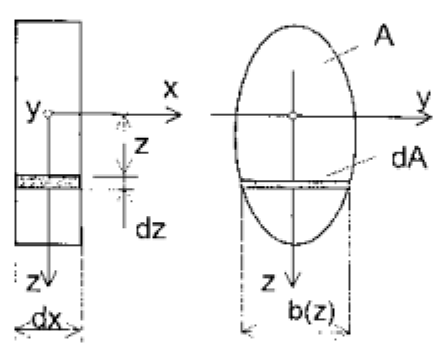
Để thiết lập các phương trình vi phân dao động uốn của dầm, ta áp dụng nguyên lý d'Alembert. Từ điều kiện cân bằng các lực theo phương z ta có

$$-dm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Q + \frac{\partial Q}{\partial x}dx - Q + p(x,t)dx = 0 \qquad (3.3)$$

Trong đó dm = μ(x)dx, với μ(x) là khối lượng một đơn vị dài của dầm.



Hình 4.14



Hình 4.15

Từ điều kiện cân bằng mômen các lực, ta nhận được phương trình

$$M+\frac{\partial M}{\partial x}dx-M-Q\frac{dx}{2}-\left(Q+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\right)\frac{dx}{2}+dJ\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (3.4)$$

Trong đó dJ là mômen quán tính khối của phân tố đối với trục y.

$$dJ = \int z^2 dm^*$$

nếu dầm là thanh đồng chất thì do $dm^*=\rho dAdx$, ta có hệ thức

$$dJ=\rho dx\int_A z^2 dA=\rho I(x)dx$$

Trong đó $I(x)=\int_A z^2 dA$ là mômen quán tính mặt đối với trục y

Từ các phương trình (3.3) và (3.4) ta suy ra

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}+p(x,t) \qquad (3.5)$$

$$\rho I(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=Q-\frac{\partial M}{\partial x} \qquad (3.6)$$

Trong các giáo trình sức bền vật liệu ta có các hệ thức sau

$$M=-EI(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3.7)$$

$$Q=k^*GA(x)\theta = k^*GA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right) \qquad (3.8)$$

Trong đó: G môđun trượt, k^* là hệ số phân bố trượt.

Thế các biểu thức (3.7) và (3.8) vào các phương trình (3.5) và (3.6) ta nhận được hệ hai phương trình đạo hàm riêng cấp hai đối với độ võng w(x,t) và góc xoay ψ(x,t) mô tả dao động uốn của dầm Timoshenko.

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=k^*G\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)\right]+p(x,t) \qquad (3.9)$$

$$\rho I(x)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=k^*GA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)+E\frac{\partial}{\partial x}\left[I(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] \qquad (3.10)$$

Để giải hệ hai phương trình này cần biết các điều kiện biên và các điều kiện đầu.

b. Dầm Timoshenko đồng chất thiết diện không đổi

Do A(x) và I(x) là các hằng số, từ hệ hai phương trình dao động của dầm Timoshenko ở trên ta suy ra các phương trình đơn giản.

$$Gk^*A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)=\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-p(x,t) \qquad (3.11)$$

$$-Gk^*A\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi\right)=EI\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\rho I\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (3.12)$$

Đạo hàm phương trình (3.12) theo x rồi cộng vào phương trình (3.11) ta được

$$0 = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x,t) + EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \rho I \frac{\partial^3 \psi}{\partial t^2 \partial x} \tag{3.13}$$

Mặt khác từ phương trình (3.11) ta suy ra

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{Gk^* A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{Gk^* A} p(x,t)$$

Đạo hàm riêng phương trình trên theo x, rồi theo t hai lần ta được

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\mu}{Gk^* A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{Gk^* A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\mu}{Gk^* A}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{1}{Gk^* A}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \tag{3.14}$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình (3.13) với chú ý $\mu = \rho A$, ta có phương trình đạo hàm riêng cấp 4, mô tả dao động uốn của dầm Timoshenko đồng chất thiết diện không đổi.

$$\begin{aligned} & EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho I\left(1 + \frac{E}{k^* G}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{k^* G}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \\ & = p(x,t) - \frac{EI}{k^* GA}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\rho I}{k^* GA}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

c. Dầm Euler-Bernoulli

Đối với dầm Euler-Bernoulli, do bỏ qua lực quán tính quay(ρI(x)=0) và biến dạng trượt của trục dầm (θ=0), từ các công thức (3.2), (3.7), (3.6) ta suy ra.

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial x} = \psi, \qquad M = -EI(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad Q - \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

Từ đó ta có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \tag{2}$$

Thế (2) vào phương trình (3.5) ta được phương trình dao động uốn của dầm Euler-Bernoulli

$$\mu(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] = p(x,t) \tag{3.16}$$

Đối với dầm Euler-Bernoulli đồng chất, thiết diện không đổi tử (3.16) ta suy ra

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{3.17}$$

4.3.2. Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Trước hết ta xét dao động uốn tự do của dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli. Từ phương trình vi phân (3.17) ta có phương trình dao động uốn tự do.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.18)$$

Áp dụng phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm của phương trình (3.19) dưới dạng

$$w(x,t) = X(x)T(t) \qquad (3.19)$$

Thế biểu thức (3.19) vào phương trình (3.18) ta được

$$T(t)X^{(IV)}(x) + \frac{\mu}{EI}\ddot{T}(t)X(x) = 0$$

Từ đó suy ra

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{EI}{\mu}\frac{X^{(IV)}(x)}{X(x)} \qquad (3.20)$$

Do vế phải của phương trình (3.20) là hàm chỉ phụ thuộc vào x, còn vế trái là hàm chỉ phụ thuộc vào t, cho nên cả hai vế bằng một hằng số. Do có chủ định trước, ta gọi hằng số đó là ω^2. Từ đó suy ra

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \qquad (3.21)$$

$$X^{(IV)}(x) - \frac{\mu\omega^2}{EI}X(x) = 0 \qquad (3.22)$$

Nghiệm của (3.21) có dạng

$$T(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (3.23)$$

Trong phạm vi bài toán xác định các tần số dao động riêng, ta phải tìm nghiệm phương trình (3.22) . Để biểu diễn nghiệm một cách gọn gàng, ta đưa vào đại lượng không thứ nguyên λ

$$\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}l^4 \qquad (3.24)$$

Khi đó phương trình (3.22) có dạng

$$X^{(IV)}(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X(x) = 0 \qquad (3.25)$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.25) dưới dạng

$$X(x) = C_1\cos\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_2\sin\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_3\cosh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_4\sinh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) \qquad (3.26)$$

ở đây ta nhắc lại một ít về định nghĩa và các tính chất sơ cấp của các hàm hyperbol

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$tghx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \cot ghx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Sinh0 = 0; cosh0 = 1; tgh0 = 0; cotgh0 = $\pm\infty$

$(\sinh x)' = \cosh x$ $\qquad\qquad (\cosh x)' = \sinh x$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 trong biểu thức (3.26) được xác định từ các điều kiện biên.

Ở đầu dầm có gối tựa bản lề, độ võng và mômen uốn đều bằng không, do đó ta có

$$X = 0, \qquad \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \qquad (3.27a)$$

Ở đầu dầm bị ngàm chặt, độ võng và góc xoay đều bằng không, ta có

$$X = 0, \qquad \frac{dX}{dx} = 0 \qquad (3.27b)$$

Ở đầu dầm tự do, mômen uốn và lực cắt đều bằng không, do đó

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3X}{dx^3} = 0 \qquad (3.27c)$$

Ở hai đầu dầm, bao giờ cũng có bốn điều kiện biên. Từ các điều kiện biên, ta có thể xác định được các hằng số trong hệ thức (3.26). Trong quá trình đó, chúng ta sẽ nhận được phương trình đặc trưng. Giải phương trình đặc trưng ta nhận được các tần số riêng ω_j. Ứng với mỗi tần số riêng ω_j ta có một trị riêng λ_j, và theo (3.26) ta có một hàm riêng $X_j(x)$. Ta sẽ xét tính chất trực giao của các hàm riêng này. Giả sử $X_j(x)$, $X_k(x)$ là hai hàm riêng tương ứng với ω_j, ω_k. Từ phương tình (3.25) ta suy ra

$$\frac{d^4X_j(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_j}{l}\right)^4 X_j(x)$$

$$\frac{d^4X_k(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_k}{l}\right)^4 X_k(x)$$

Nhân phương trình thứ nhất với $X_k(x)$, phương trình thứ hai với $X_j(x)$, trừ đi nhau rồi lấy tích phân theo x, ta được

$$\frac{\lambda_j^4 - \lambda_k^4}{l^4}\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx + \int_0^l \left(X_j(x)\frac{d^4X_k}{dx^4} - X_k(x)\frac{d^4X_j}{dx^4}\right)dx = 0$$

Bằng cách tích phân từng phần, ta có

$$\frac{\lambda_k^4 - \lambda_j^4}{l^4}\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx = \left(X_j\frac{d^3X_k}{dx^3} - X_k\frac{d^3X_j}{dx^3} + \frac{dX_k}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2} - \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_k}{dx^2}\right)\Bigg|_0^l$$

Chú ý đến các điều kiện biên (3.27a), (3.27b), (3.27c) ta có vế phải của phương trình trên luôn bằng không. Vậy ta có điều kiện trực giao

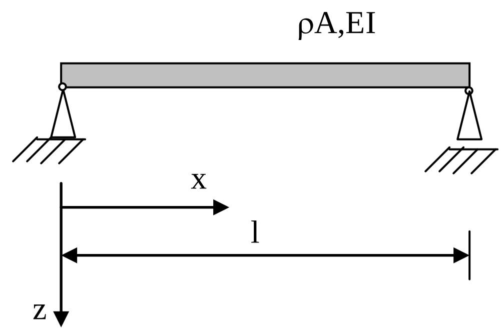
$$\int_0^l X_j(x)X_k(x)dx = 0 \qquad \text{Khi } j \neq k$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.18) có dạng

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k(x)\left(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t\right) \tag{3.28}$$

Các hằng số A_k, B_k được xác định từ các điều kiện đầu.

<u>Ví dụ 1:</u> Ta xét dao động uốn tự do của dầm hai đầu tựa bản lề như hình vẽ



Các điều kiện trong bài toán này là độ võng w(x,t) và mômen uốn M(x,t) triệt tiêu ở hai biên x= 0 và x = l

$$w(0,t)=0 \qquad M(0,t)=-EIw''(0,t)=0$$

$$w(l,t)=0 \qquad M(l,t)=-EIw''(l,t)=0$$

Với các điều kiện này, từ biểu thức nghiệm (3.26) ta suy ra 4 phương trình để xác định các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4.

$$X(0)=0:\quad C_1+C_3=0$$

$$X(l)=0:\quad C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda+C_3\cosh\lambda+C_4\sinh\lambda=0$$

$$X''(0)=0:\quad -C_1+C_3=0$$

$$X''(l)=0:\quad -C_1\cos\lambda-C_2\sin\lambda+C_3\cosh\lambda+C_4\sinh\lambda=0$$

Từ các phương trình trên và do sinhλ≠0 nên $C_1 = C_3 = C_4= 0$. Mặt khác để cho $C_2 \neq 0$, ta có phương trình đặc trưng

$$\sin\lambda=0$$

giải ra ta được

$$\lambda_k=k\pi\rightarrow\omega_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}};\quad k=1,2,... \tag{3.29}$$

Các hàm riêng (3.26) bây giờ có dạng

$$X_k(x)=C_2^{(k)}\sin\lambda_k\frac{x}{l}=C_2^{(k)}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.30}$$

Khi k = 1,2 ta có

$$\omega_1=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \qquad X_k(x)=C_2^{(1)}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\omega_2=\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \qquad X_2(x)=C_2^{(2)}\sin\frac{2\pi x}{l}$$

Biểu thức nghiệm tổng quát (3.28) trong thí dụ này có dạng

$$w(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t) \tag{3.31}$$

Trong đó ta lấy $C_2^{(k)} = 1$. Từ các điều kiện đầu

$$w(x,0) = w_0(x); \qquad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = v_0(x)$$

Ta có các biểu thức để xác định A_k và B_k

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = w_0(x)$$

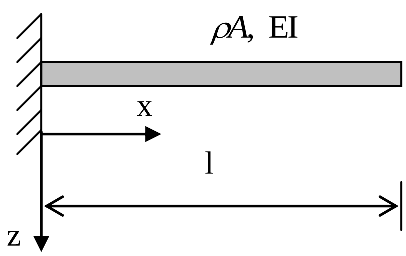
$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \omega_k \sin\frac{k\pi x}{l} = v_0(x)$$

Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng (3.26), từ các biểu thức trên ta suy ra

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l w_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$B_k = \frac{2}{\omega_k l}\int_0^l v_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

<u>Ví dụ 2</u>: Xác định các tần số riêng và các hàm riêng của dầm một đầu ngàm chặt, một đầu tự do. Các điều kiện biên có dạng



$$w(0,t) = 0; \qquad M(l,t) = -EIw''(l,t) = 0$$

$$w'(0,t) = 0; \qquad Q(l,t) = -EIw''(l,t) = 0$$

Với các điều kiện biên trên từ biểu thức nghiệm (3.26)

Ta suy ra hệ bốn phương trình tuyến tính thuần nhất

$X(0) = 0: \quad C_1 + C_3 = 0$

$X'(0) = 0: \quad C_2 + C_4 = 0$

$X''(l) = 0: \quad -C_1\cos\lambda - C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0$

$X'''(l) = 0: \quad C_1\sin\lambda - C_2\cos\lambda + C_3\sinh\lambda + C_4\cosh\lambda = 0$

Từ hai phương trình đầu của hệ bốn phương trình trên ta suy ra $C_1 = -C_3$; $C_2 = -C_4$

Sau đó thế vào hai phương trình sau ta được

$$C_1(\cos\lambda + \cosh\lambda) + C_2(\sin\lambda + \sinh\lambda) = 0$$

$$C_1(\sin\lambda - \sinh\lambda) - C_2(\cos\lambda + \cosh\lambda) = 0 \qquad (3.32)$$

Điều kiện cần để cho C_1, C_2 không đồng nhất triệt tiêu là định thức các hệ số phải bằng không

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\lambda + \cosh\lambda & \sin\lambda + \sinh\lambda \\ \sin\lambda - \sinh\lambda & -(\cos\lambda + \cosh\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó ta nhận được phương trình đặc trưng

$$\cos\lambda\cosh\lambda + 1 = 0 \qquad (3.33)$$

Giải phương trình (3.33) bằng phương pháp số hoặc phương pháp đồ thị ta nhận được tập vô hạn nghiệm $\lambda = \lambda_i (i=1,2,\ldots)$. Khi biết được các giá trị riêng λ_i , từ công thức (3.23) ta xác định được các tần số riêng.

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{3.34}$$

Ứng với mỗi trị riêng λ_I, theo (3.26) ta có một hàm riêng

$$X_i(x) = C_1^{(i)}\cos\frac{\lambda_i x}{l} + C_2^{(i)}\sin\frac{\lambda_i x}{l} + C_2^{(i)}\cosh\frac{\lambda_i x}{l} + C_4^{(i)}\sinh\frac{\lambda_i x}{l} \tag{3.35}$$

Từ hệ phương trình (3.32) ta suy ra

$$C_2^{(i)} = -\frac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}C_1^{(i)}$$

Do đó $\qquad C_4^{(i)} = -C_2^{(i)} = \dfrac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}C_1^{(i)}$

Mặt khác như trên đã chỉ ra $C_3^{(i)} = -C_1^{(i)}$

Thế $C_2^{(i)};C_3^{(i)};C_4^{(i)}$ xác định theo $C_1^{(i)}$ vào biểu thức (3.35) ta được dạng cụ thể của hàm riêng $X_i(x)$

$$X_i(x) = C_1^{(i)}\left[\cos\frac{\lambda_i x}{l} - \cosh\frac{\lambda_i x}{l} + \frac{\cos\lambda_i + \cosh\lambda_i}{\sin\lambda_i + \sinh\lambda_i}\left(-\sin\frac{\lambda_i x}{l} + \sinh\frac{\lambda_i x}{l}\right)\right]$$

Giải bằng số phương trình đặc trưng (3.33) ta được

$$\lambda_1 = 1{,}875 \rightarrow \omega_1 = 3{,}516\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

$$\lambda_2 = 4{,}694 \rightarrow \omega_2 = 22{,}034\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \tag{3.36}$$

Biểu thức nghiệm tổng quát (3.28) trong trường hợp này có dạng

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)(A_i\cos\omega_i t + B_i\sin\omega_i t) \tag{3.37}$$

Các hằng số A_i, B_i được tìm từ các điều kiện đầu

$$w(x,0) = w_0(x), \qquad \frac{\partial \text{w}(\text{x},0)}{\partial \text{t}} = v_0(x)$$

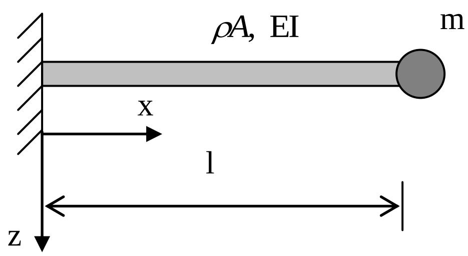
Như thế, ta có

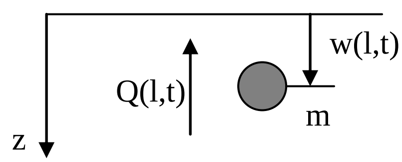
$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)A_i = w_0(x), \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i X_i(x)B_i = v_0(x)$$

Nhân hai vế của các phương trình trên với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân theo x từ 0 đến l. Chú ý đến tính chất trực giao của các hàm riêng, ta được

$$A_k = \frac{\int_0^l w_0(x) X_k(x) dx}{\int_0^l X_k^2(x) dx} \qquad B_k = \frac{\int_0^l v_0(x) X_k(x) dx}{\omega_k \int_0^l X_k^2(x) dx}$$

Thí dụ 3: Cho dầm đồng chất, thiết diện không đổi, đầu bên trái ngàm chặt, đầu bên phải tự do mang khối lượng m. Cho biết $\varepsilon = m/\mu l = 3/4$. Hãy xác định các tần số riêng cơ bản và các tần số riêng bậc 1.





Lời giải: Cũng giống như trường hợp dầm bị ngàm chặt một đầu, một đầu tự do ở trên, ta có ba điều kiện biên

$$w(0,t) = 0, \qquad w'(0,t) = 0, \qquad M(l,t) = -EIw''(l,t) = 0$$

Để tìm điều kiện biên thứ tư, ta tưởng tách khối lượng m khỏi dầm. Từ định luật Newton II đối với khối lượng m ta có

$$m\ddot{w}(l,t) = -Q(l,t) \rightarrow EIw'''(l,t) - m\ddot{w}(l,t) = 0$$

Với các điều kiện biên trên, từ biểu thức nghiệm (3.19), (3.23), (3.26) ta có

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$C_2 + C_4 = 0$$

$$-C_1 \cos\lambda - C_2 \sin\lambda + C_3 \cosh\lambda + C_4 \sinh\lambda = 0$$

$$C_1 \sin\lambda - C_2 \cos\lambda + C_3 \sinh\lambda + C_4 \cosh\lambda + \varepsilon\lambda(C_1 \cos\lambda + C_2 \sin\lambda + C_3 \cosh\lambda + C_4 \sinh\lambda) = 0$$

Từ hai phương trình đầu ta suy ra $C_1 = -C_3$, $C_2 = -C_4$. Thế vào hai phương trình sau ta được

$$-C_1(\cos\lambda + \cosh\lambda) - C_2(\sin\lambda + \sinh\lambda) = 0$$

$$C_1(\sin\lambda + \varepsilon\lambda\cos\lambda - \sinh\lambda - \varepsilon\lambda\cosh\lambda) - C_2(\cos\lambda - \varepsilon\lambda\sin\lambda + \cosh\lambda + \varepsilon\lambda\sinh\lambda) = 0$$

Từ điều kiện cần để cho C_1, C_2 không đồng nhất triệt tiêu, ta nhận được phương trình đặc trưng.

$$1 + \cosh\lambda\cos\lambda + \varepsilon\lambda(\sinh\lambda\cos\lambda - \cosh\lambda\sin\lambda) = 0 \qquad (3.38)$$

Khi ε = 3/4, giải phương trình trên bằng phương pháp số ta có

$$\lambda_1 = 1{,}320 \rightarrow \omega_1 = 1{,}742\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

$$\lambda_2 = 4{,}060 \to \omega_2 = 16{,}48\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \tag{3.39}$$

4.3.3 Dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli đồng chất thiết diện không đổi

Đoạn này ta xét bài toán dao động uốn cưỡng bức dầm đồng chất thiết diện không đổi theo mô hình Euler-Bernoulli, chịu tác dụng của ngoại lực theo phương vuông góc với trục của dầm. Phương trình vi phân dao động uốn cưỡng bức của dầm Euler-Bernoulli có dạng

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{3.40}$$

a. Biến đổi phương trình đạo hàm riêng (3.40) về hệ phương trình vi phân thường

Áp dụng phương pháp Bernoulli, tìm nghiệm phương trình (3.40) dưới dạng

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(t) \tag{3.41}$$

Trong đó $X_i(x)$ là các hàm riêng

Thế biểu thức (3.41) vào (3.40) ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[EIX_i^{(IV)}(x)q_i(x) + \mu X_i(x)\ddot{q}_i(t)\right] = p(x,t)$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \frac{EI}{\mu}\frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)}q_i(t)\right]X_i(x) = \frac{p(x,t)}{\mu}$$

Chú ý đến các biểu thức (3.22) ta có

$$\frac{EI}{\mu}\frac{X_i^{(IV)}(x)}{X_i(x)} = \omega_i^2 \tag{3.42}$$

Thế (3.42) vào phương trình trên ta được

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]X_i(x) = \frac{p(x,t)}{\mu}$$

Nhân cả hai vế của phương trình này với hàm riêng $X_k(x)$ rồi lấy tích phân dọc theo chiều dài của thanh

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t)\right]\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$$

Do điều kiện trực giao của các hàm riêng ta suy ra

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx}{\mu\int_0^l X_k^2(x)dx} = h_k(t) \tag{3.43}$$

Như thế ta đưa việc giải phương trình đạo hàm riêng (3.40) về việc giải phương trình vi phân thường (3.43).

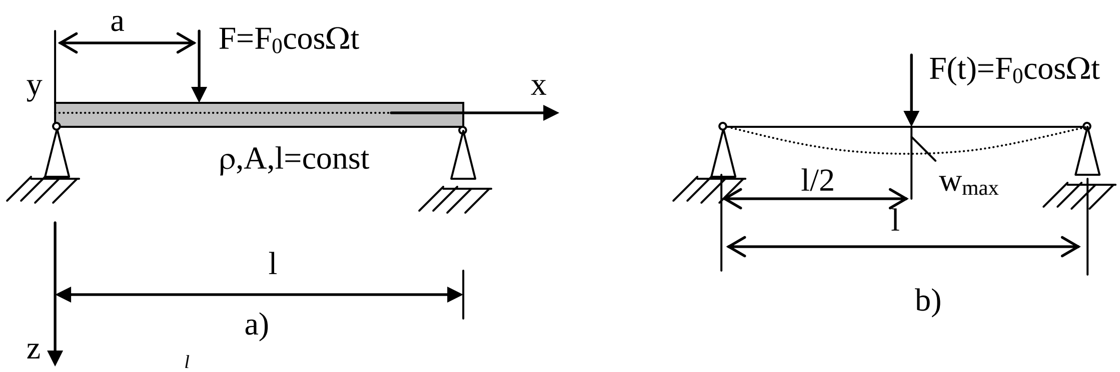
b. Lực kích động tập trung điều hòa

Xét dao động uốn của dầm chịu lực kích động tập trung điều hòa $F_0\cos\Omega t$ như hình vẽ. Theo công thức (3.30) hàm riêng $X_k(x)$ có dạng

$$X_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Trước hết ta tính tích phân

$$\int_0^l X_k^2(x)dx=\int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k\pi x}{l}\right)-\frac{1}{4}\sin\left(2\frac{k\pi x}{l}\right)\right]\Bigg|_0^l=\frac{l}{2}$$



Để tích phân $\int_0^l p(x,t)X_k(x)dx$ trong trường hợp này ta sử dụng khái niệm hàm Delta-Dirac.

Theo định nghĩa hàm Delta-Dirac được xác định bởi hệ thức

$$\delta(x-a)=0 \text{ khi } x\neq a \text{ và } \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)dx=1 \qquad (3.44)$$

Hàm này có tính chất

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a) \qquad (3.45)$$

Áp dụng vào bài toán của ta. Từ biểu thức

$$p(x,t)=F_0\cos\Omega t\,\delta(x-a)$$

Ta suy ra

$$\int_0^l F_0\cos\Omega t\,\delta(x-a)X_k(x)dx=F_0\cos\Omega t\int_0^l X_k(x)\delta(x-a)dx$$

$$=F_0\cos\Omega t\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\delta(x-a)dx=F_0\cos\Omega t\sin\frac{k\pi a}{l}$$

Phương trình (3.43) bây giờ có dạng

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{F_0 \cos\Omega t \sin\dfrac{k\pi a}{l}}{\mu \dfrac{l}{2}} = \frac{2F_0 \sin\dfrac{k\pi a}{l}}{\mu l}\cos\Omega t \tag{3.46}$$

Nghiệm dừng của phương trình (3.46) theo chương 2 có dạng

$$q_k(t) = \frac{2F_0 \sin\dfrac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t \tag{3.47}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.40) trong trường hợp này có dạng

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) q_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2F_0 \sin\dfrac{k\pi a}{l}}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega^2)} \sin\frac{k\pi x}{l}\cos\Omega t$$

$$w(x,t) = \frac{2F_0 \cos\Omega t}{\mu l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{k\pi a}{l}}{\omega_k^2 - \Omega^2}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.48}$$

Công thức (3.48) là biểu thức tính độ võng ở vị trí x bất kỳ của dầm tại thời điểm t.

Khi a = l/2, ta có

$$w(x,t) = \frac{2F_0 \cos\Omega t}{\mu l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{k\pi}{2}}{\omega_k^2 - \Omega^2}\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.49}$$

Chú ý rằng

$$\omega_k = \frac{\lambda_k^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{k^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\eta = k^2\frac{\Omega}{\omega_k} = \frac{\Omega l^2}{\pi^2}\sqrt{\frac{\mu}{EI}}$$

Thì công thức nghiệm (3.48) có dạng

$$w(x,t) = \frac{2F_0 l^3 \cos\Omega t}{\pi^4 EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{k\pi a}{l}}{k^4 - \eta^2}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

Để minh họa ta lấy a = l/2 và $\eta = \dfrac{\Omega l^2}{\pi^2}\sqrt{\dfrac{\mu}{EI}} = 0{,}7$. Khi đó ta có thể tính độ võng ở giữa dầm một cách tương đối đơn giản(Hình b).

$$w(\frac{l}{2},t) = \frac{2F_0 l^3 \cos\Omega t}{\pi^4 EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)}{k^4 - 0{,}49}$$

Chú ý rằng

$$\sum_{k=1,3,5,7}^{\infty} \frac{1}{k^4 - 0{,}49} = \frac{1}{0{,}51} + \frac{1}{80{,}51} + \frac{1}{624{,}51} + \frac{1}{1295{,}51} + \ldots \approx 1{,}975$$

Do đó

$$w(\frac{l}{2}, t) = \frac{F_0 l^3}{24{,}65EI} \cos\Omega t$$

Biên độ dao động ở giữa dầm là

$$w_{\max} = \frac{F_0 l^3}{24{,}65EI}$$

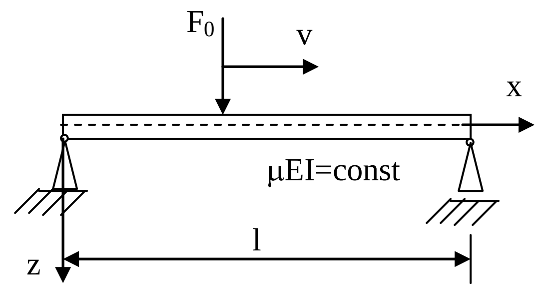
Nếu dầm chịu tác dụng của lực F(t)=F_0=const ở giữa dầm, theo sức bền vật liệu độ võng tĩnh ở giữa dầm là

$$w_t = \frac{F_0 l^3}{48EI}$$

Như thế độ võng động cực đại ở giữa dầm lớn gần gấp đôi độ võng tĩnh tại đó. Ngoài ra chú ý rằng khi $\eta = k^2 \rightarrow \Omega = \omega_k$ Thì xảy ra hiện tượng cộng hưởng.

c. Lực di động có trị số không đổi

Xét bài toán dao động uốn của dầm hai đầu bản lề dưới tác dụng của lực F_0 = const di chuyển với tốc độ v không đổi như hình vẽ.



Ta đã biết các hàm riêng của dầm hai đầu chịu liên kết bản lề

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$$

Do đó $\int_0^l X_k^2(x)dx = \frac{l}{2}$

Sử dụng hàm Delta-Dirac, tải trọng p(x,t) trong bài toán này có dạng

$$p(x,t) = F_0 \delta(x - vt)$$

Do tính chất của hàm Delta-Dirac(công thức 3.45) ta có

$$\int_0^l F_0 \sin\frac{k\pi x}{l}\delta(x - vt)dx = F_0 \sin\left(\frac{k\pi v}{l}t\right)$$

Phương trình (3.43) đối với bài toán này có dạng

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{2F_0}{\mu l}\sin\Omega_k t \qquad (3.50)$$

Trong đó ta đưa vào ký hiệu

$$\Omega_k = \frac{k\pi v}{l} \tag{3.51}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.50) đã được tính toán kỹ trong chương 2 có dạng

$$q_k(t) = A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t + \frac{2F_0}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin\Omega_k t \tag{3.52}$$

Các hằng số A_k, B_k được xác định từ các điều kiện đầu. Giả sử cho biết điều kiện đầu

$$w_0(x) = w(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) q_i(0) = 0$$

$$v_0(x) = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) \dot{q}_i(0) = 0 \tag{3.53}$$

Do tính chất trực giao của các hàm riêng, từ các điều kiện đầu (3.53) ta suy ra

$$q_k(0) = 0, \qquad \dot{q}_k(0) = 0, \qquad k = 1,2,... \tag{3.54}$$

Với điều kiện đầu (3.54), từ (3.52) ta dễ dàng xác định được các hằng số A_k, B_k

$$A_k = 0, \qquad B_k = -\frac{2F_0\Omega_k}{\mu l \omega_k(\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \tag{3.55}$$

Thế (3.55) vào biểu thức (3.52) ta được

$$q_k(t) = -\frac{2F_0\Omega_k}{\mu l \omega_k(\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin\omega_k t + \frac{2F_0}{\mu l(\omega_k^2 - \Omega_k^2)} \sin\Omega_k t \tag{3.56}$$

Theo công thức (3.41) biểu thức tính độ võng của dầm có dạng

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) q_k(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} \left[\sin\Omega_k t - \frac{\Omega_k}{\omega_k} \sin\omega_k t\right] \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.57}$$

Nếu ta đưa vào ký hiệu

$$\eta_k = \frac{\Omega_k}{\omega_k} \tag{3.58}$$

Thì $$\frac{2F_0}{\mu l}\frac{1}{\omega_k^2 - \Omega_k^2} = \frac{2F_0}{\mu l \omega_k^2}\frac{1}{1-\eta_k^2} = \frac{2F_0 l^3}{k^4\pi^4 EI}\frac{1}{1-\eta_k^2}$$

Biểu thức (3.57) bây giờ có thể viết lại dưới dạng như sau

$$w(x,t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4(1-\eta_k^2)} \left(\sin\Omega_k t - \eta_k \sin\omega_k t\right) \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{3.59}$$

Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\Omega_k = \omega_k$. Chú ý đến các biểu thức (3.29) và (3.51) ta dễ dàng xác định được vận tốc tới hạn v_{kth}

$$\Omega_k = \omega_k \rightarrow v_{kth} = \frac{k\pi}{l}\sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{3.60}$$

Ở vùng cộng hưởng, độ võng của dầm sẽ đạt giá trị lớn nhất. Ta xác định độ võng của dầm khi v = v_{th}. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $\Omega_1 = \omega_1$. Khi đó trong tổng (3.59) ta chỉ cần giữ lại số hạng ứng với k=1. Để đơn giản cách viết ta bỏ chỉ số 1 ở Ω_1 và ω_1 đi. Vậy ta có

$$w_{th}(x,t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l}\lim_{\Omega\to\omega}\frac{\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega}\sin\omega t}{1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}}$$

ở đây biểu thức cần tính giới hạn có dạng $\frac{0}{0}$. Áp dụng qui tắc Loopital ta tính được

$$w_{th}(x,t) = \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l}\lim_{\Omega\to\omega}\frac{t\cos\Omega t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t}{-2\frac{\Omega}{\omega^2}} = \frac{F_0 l^3}{\pi^4 EI}\sin\frac{\pi x}{l}(\sin\omega t - t\omega\cos\omega t)$$

Thay $\omega = \Omega = \frac{\pi}{l}v_{th}$ (biểu thức 3.51) vào biểu thức trên ta được

$$w_{th}(x,t) = \frac{F_0 l^3}{\pi^4 EI}\left[\sin\left(\frac{\pi v_{th}}{l}t\right) - \frac{\pi v_{th}}{l}t\cos\left(\frac{\pi v_{th}}{l}t\right)\right]\sin\frac{\pi x}{l} \tag{3.61}$$

Tìm cực trị của hàm (3.61) theo t. Muốn vậy ta tính đạo hàm riêng theo t và cho bằng không

$$\frac{\partial w_{th}(x,t)}{\partial t} = 0 \to t = \frac{1}{v_{th}}$$

Từ đó ta có

$$w_{th\max}(x) = \frac{1}{\pi^3}\frac{F_0 l^3}{EI}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{3.62}$$

Khi x=l/2, độ võng cực đại ở điểm giữa dầm là

$$w_{th\max}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{\pi^3}\frac{F_0 l^3}{EI} \tag{3.63}$$

Từ giáo trình sức bền vật liệu, người ta tính được độ võng tĩnh ở điểm giữa dầm khi có lực F_0=const tác dụng ở giữa dầm là

$$w_t = \frac{F_0 l^3}{48EI}$$

Như thế độ võng cực đại (3.63) lớn gần gấp rưỡi độ võng tĩnh.

Khi v<<v_{1th}, tức là $\eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_1} << 1$, từ biểu thức (3.59) ta suy ra công thức gần đúng xác định độ võng

$$w(x,t) \approx \frac{2F_0 l^3}{\pi^4 EI}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{l}vt\right) \tag{3.64}$$

Đó là biểu thức xác định độ võng tĩnh của dầm chịu tác dụng của lực F_0 đặt ở điểm các xa đầu bên trái dầm một đoạn vt mà chúng ta đã biết trong giáo trình sức bền vật liệu.

4.3.4 Dao động uốn tự do của dầm Timoshenko thiết diện không đổi

4.3.5 Dao động uốn tự do của dầm Euler-Bernoulli có thiết diện thay đổi

Đối với dầm có thiết diện biến đổi việc tìm chính xác các tần số dao động riêng là bài toán khá cồng kềnh, phức tạp. Vì vậy người ta thường hay sử dụng các phương pháp gần đúng để xác định chúng. Để tính các tần số riêng của dầm Euler-Bernoulli ta có các phương pháp gần đúng sau:

- *Phương pháp Rayleigh*
- *Phương pháp Ritz*