Chương 1

NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE

1.1. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

1.1.1. LỰC QUÁN TÍNH CỦA CHẤT ĐIỂM

Xét chất điểm khối lượng m, chuyển động với gia tốc $\vec{a}$ dưới tác dụng của lực $\vec{F}$.

Ta có: $$\vec{F} = m\vec{a}$$

suy ra: $$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0 \qquad (1.1)$$

Đặt $\overrightarrow{F^{qt}} = -m\vec{a}$: gọi là lực quán tính của chất điểm.

Vậy: $$\vec{F} + \overrightarrow{F^{qt}} = 0 \qquad (1.2)$$

1.1.2. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE ĐỐI VỚI CHẤT ĐIỂM

1. Nội dung nguyên lý

Xét chất điểm khối lượng m, chịu tác dụng của lực $\vec{F}$, phản lực liên kết $\vec{R}$ và chuyển động với gia tốc $\vec{a}$. Khi đó ta có:

$$\vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$$

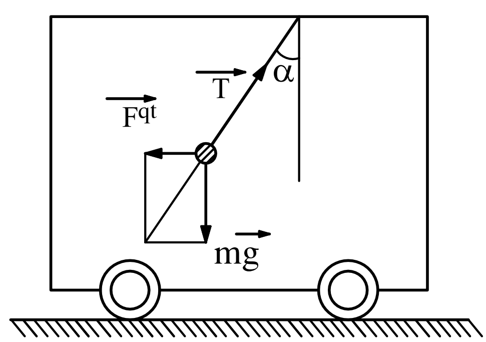
suy ra: $$\vec{F} + \vec{R} + \overrightarrow{F^{qt}} = 0$$

Vậy: $$(\vec{F}, \vec{R}, \overrightarrow{F^{qt}}) \sim 0 \qquad (1.3)$$

Tại mỗi thời điểm, các lực tác dụng lên chất điểm và lực quán tính của nó lập thành một hệ lực cân bằng.

2. Ví dụ

Một quả cầu nhỏ có khối lượng m, được treo vào toa xe chuyển động thẳng với gia tốc $\vec{a}$. Xác định góc lệch α giữa dây treo quả cầu so với phương thẳng đứng (Hình 4.1).



Hình 4.1

Bài giải

Xét chuyển động của vật nặng.

Các lực tác dụng:

+ Trọng lượng $m\vec{g}$.

+ Sức căng $\vec{T}$.

Đặt lực quán tính: $\overrightarrow{F^{qt}} = -m\vec{a}$ ($F^{qt} = ma$)

Áp dụng nguyên lý Đalămbe:

$$(m\vec{g}, \vec{T}, \overrightarrow{F^{qt}}) \sim 0$$

suy ra: $$tg\alpha = \frac{F^{qt}}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

1.2. THU GỌN HỆ LỰC QUÁN TÍNH CỦA CÁC CHẤT ĐIỂM

Tập hợp các lực quán tính của các chất điểm thuộc cơ hệ gọi là hệ lực quán tính ($\overrightarrow{F_1^{qt}}, \overrightarrow{F_2^{qt}}, \ldots, \overrightarrow{F_n^{qt}}$).

Khi thu gọn hệ lực quán tính về tâm thu gọn O, ta được một vectơ chính lực quán tính $\overrightarrow{R^{qt}}$ đặt tại O và một momen chính lực quán tính $\overrightarrow{M_0^{qt}}$ với:

$$\overrightarrow{R^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}}$$
$$\overrightarrow{M_0^{qt}} = \sum \overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k}) \qquad (1.4)$$

Chú ý: $$\overrightarrow{R^{qt}} = \sum \overrightarrow{F_k^{qt}} = -\sum m_k \overrightarrow{a_k} = -M\overrightarrow{a_C}$$

M: Khối lượng toàn cơ hệ.

$\overrightarrow{a_C}$: gia tốc khối tâm C.

Kết quả thu gọn hệ lực quán tính của vật rắn trong một số trường hợp chuyển động thường gặp:

1. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C:

$$\overrightarrow{R^{qt}} = -M\overrightarrow{a_C}$$
$$\overrightarrow{M_C^{qt}} = 0 \qquad (1.5)$$

2. Tấm phẳng quay quanh trục cố định vuông góc với tấm và đi qua khối tâm C của tấm

Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C:

$$\overrightarrow{R^{qt}} = 0$$
$$\overline{M_C^{qt}} = -J_{Cz}\bar{\varepsilon} \qquad (1.6)$$

3. Tấm phẳng chuyển động song phẳng

Thu gọn hệ lực quán tính về khối tâm C:

$$\overrightarrow{R^{qt}} = -M\overrightarrow{a_C}$$
$$\overline{M_C^{qt}} = -J_{Cz}\bar{\varepsilon} \qquad (1.7)$$

1.3. NGUYÊN LÝ ĐALĂMBE ĐỐI VỚI CƠ HỆ

1.3.1. NỘI DUNG NGUYÊN LÝ

Xét cơ hệ có N chất điểm, chất điểm thứ k có khối lượng m_k, chịu tác dụng của ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$ và nội lực $\overrightarrow{F_k^i}$, chuyển động với gia tốc $\overrightarrow{a_k}$ thì lực quán tính của chất điểm sẽ là $\overrightarrow{F_k^{qt}} = -m_k\overrightarrow{a_k}$.

Áp dụng nguyên lý Đalămbe cho chất điểm thứ k:

$$(\overrightarrow{F_k^e}, \overrightarrow{F_k^i}, \overrightarrow{F_k^{qt}}) \sim 0$$

Với toàn hệ ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} (\overrightarrow{F_k^e}, \overrightarrow{F_k^i}, \overrightarrow{F_k^{qt}}) \sim 0$$

Như đã biết trong phần tĩnh học, một hệ lực cân bằng thì vectơ chính và momen chính của hệ lực đối với tâm thu gọn sẽ bằng không. Do đó:

$$\vec{R} = \sum\overrightarrow{F_k^e} + \sum\overrightarrow{F_k^i} + \sum\overrightarrow{F_k^{qt}} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0} = \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^i}) + \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0$$

Theo tính chất nội lực:

$$\sum\overrightarrow{F_k^i} = 0$$

$$\sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^i}) = 0$$

Nên kết quả còn lại:

$$\sum\overrightarrow{F_k^e} + \sum\overrightarrow{F_k^{qt}} = 0$$

$$\sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e}) + \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = 0$$

Mặt khác:

$\sum\overrightarrow{F_k^{qt}} = \overrightarrow{R^{qt}}$: là vectơ chính lực quán tính.

$\sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^{qt}}) = \overrightarrow{M_0^{qt}}$: là momen chính lực quán tính.

Cuối cùng ta có:

$$\begin{aligned} &\sum\overrightarrow{F_k^e} + \overrightarrow{R^{qt}} = 0 \\ &\sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e}) + \overrightarrow{M_0^{qt}} = 0 \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Tại mỗi thời điểm, nếu ta đặt vào từng chất điểm và từng vật rắn của cơ hệ các lực quán tính thu gọn của nó thì hệ gồm các ngoại lực và các lực quán tính thu gọn tác dụng lên cơ hệ lập thành một hệ lực cân bằng.

Ý nghĩa nguyên lý:

+ Nguyên lý Đalămbe cho phép chuyển bài toán động lực học về giải bằng các phương trình cân bằng tĩnh học. Phương pháp như vậy được gọi là phương pháp tĩnh động lực hình học.

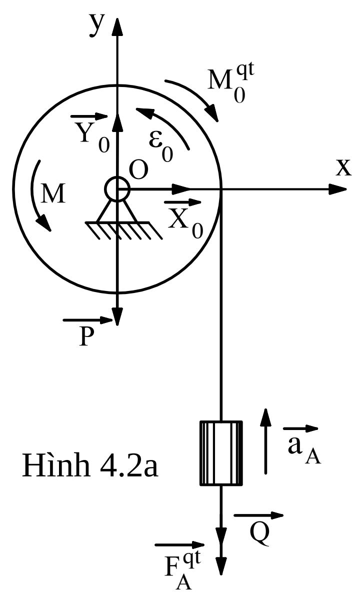
+ Nguyên lý này cho phép xác định phản lực liên kết, đặc biệt là phản lực động lực xuất hiện khi hệ thực hiện chuyển động.

1.3.2. VÍ DỤ

1. Ví dụ 1

Vật nặng A, trọng lượng P được treo vào sợi dây quấn vào tời O, có trọng lượng Q, bán kính R và là trụ tròn đồng chất. Tác dụng lên tời ngẫu lực M không đổi. Xác định gia tốc tời, tìm sức căng dây và phản lực tại O (Hình 4.2a).

Bài giải



Hình 4.2a

■ Xét cơ hệ:

+ Ròng rọc O.

+ Vật nặng A.

Các lực tác dụng:

+ Phản lực tại O $(\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0})$.

+ Các trọng lượng $\vec{P}$, $\vec{Q}$.

+ Ngẫu lực *M*.

Đặt lực quán tính:

+ $M_0^{qt} = J_{Cz}\varepsilon = \dfrac{P}{g}\rho^2\varepsilon$

+ $F_A^{qt} = \dfrac{Q}{g}a_A = \dfrac{Q}{g}R\varepsilon$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{Y_0}, M, \overrightarrow{F_A^{qt}}, M_0^{qt}) \sim 0$$

Hệ phương trình cân bằng :

$$\sum F_{kx} = X_0 = 0 \qquad (1)$$

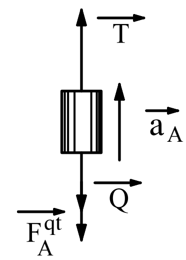
$$\sum F_{ky} = Y_0 - P - Q - F_A^{qt} = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{m_0}(\overrightarrow{F_k}) = -QR + M - F_A^{qt}R - M_0^{qt} = 0 \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra:

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{QRg}{QR^2 + P\rho^2} \\ X_0 = 0 \\ Y_0 = \dfrac{P^2\rho^2 + PQ(R^2 + \rho^2)}{P\rho^2 + QR^2} \end{cases}$$

■ Xét chuyển động vật nặng A (Hình 4.2b):



Hình 4.2b

$$(\vec{Q}, \overrightarrow{F_A^{qt}}, \vec{T}) \sim 0$$

Áp dụng phương trình hình chiếu theo phương $\vec{T}$:

$$T - F_A^{qt} - Q = 0$$

suy ra: $$T = Q + F_A^{qt} = \frac{PQ\rho^2}{P\rho^2 + QR^2}$$

2. Ví dụ 2

Vật nặng A trọng lượng P_1 chuyển động xuống theo mặt phẳng nghiêng góc α với phương ngang làm cho vật B trọng lượng P_2 chuyển động.

Xác định thành phần phản lực ngang của gờ E tác dụng lên lăng trụ EOI. Bỏ qua ma sát (Hình 4.3a).

Bài giải

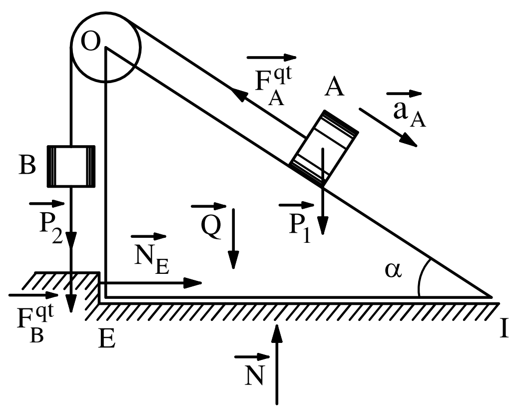
■ Xét cơ hệ:

+ Lăng trụ EOI.

+ Các vật nặng A, B.

Các lực tác dụng:

$\vec{P}_1, \vec{P}_2$, trọng lượng lăng trụ $\vec{Q}$, phản lực tại E $\overrightarrow{N_E}$, phản lực nền $\vec{N}$.



Hình 4.3a

Đặt lực quán tính:

+ $F_A^{qt} = \dfrac{P_1}{g} a_A = \dfrac{P_1}{g} a$

+ $F_B^{qt} = \dfrac{P_2}{g} a_B = \dfrac{P_2}{g} a$ (vì $a_A = a_B = a$)

Áp dụng nguyên lý Đalămbe:

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, \overrightarrow{N_E}, \vec{N}, \overrightarrow{F_A^{qt}}, \overrightarrow{F_B^{qt}}) \sim 0$$

Phương trình cân bằng đối với trục ngang:

$$\sum F_{kx} = N_E - F_A^{qt} \cos\alpha = 0$$

suy ra: $$N_E = F_A^{qt}\cos\alpha = \frac{P_1}{g}a\cos\alpha \qquad (1)$$

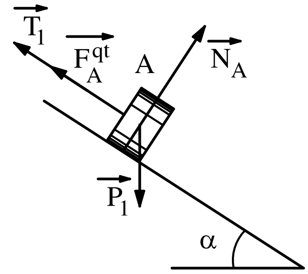
■ Xét chuyển động vật A (Hình 4.3b):

$$(\vec{P_1}, \vec{N_A}, \vec{T_1}, \vec{F_A^{qt}}) \sim 0$$

Phương trình hình chiếu lên phương $\vec{T_1}$:

$$-P_1\sin\alpha + T_1 + F_A^{qt} = 0$$

suy ra: $$T_1 = P_1\sin\alpha - \frac{P_1}{g}a \qquad (2)$$



Hình 4.3b

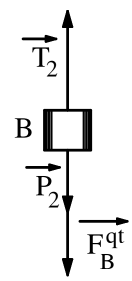
■ Xét chuyển động vật B (Hình 4.3c):

$$(\vec{P_2}, \vec{T_2}, \vec{F_B^{qt}}) \sim 0$$

Phương trình hình chiếu lên phương $\vec{T_2}$:

$$-P_2 + T_2 - F_B^{qt} = 0$$

suy ra: $$T_2 = P_2 + \frac{P_2}{g}a \qquad (3)$$



Hình 4.3c

Bỏ qua khối lượng ròng rọc O nên sức căng của hai nhánh dây bằng nhau.

$$T_1 = T_2$$

Từ (2) và (3) ta có: $$P_1\sin\alpha - \frac{P_1}{g}a = P_2 + \frac{P_2}{g}a$$

Vậy: $$a = \frac{P_1\sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2}g$$

Thay vào (1):

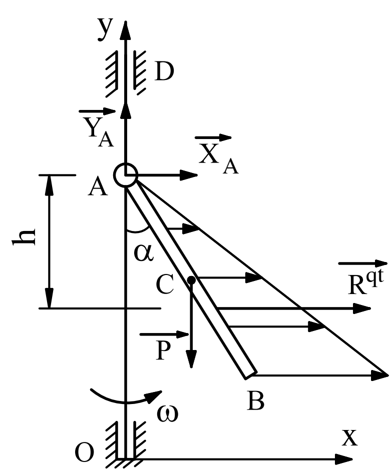
$$N_E = \frac{P_1}{g}a\cos\alpha = P_1\cos\alpha\frac{P_1\sin\alpha - P_2}{P_1 + P_2}$$

3.Ví dụ 3

Thanh đồng chất AB = l, trọng lượng P được gắn bằng bản lề A vào trục quay thẳng đứng OD. Trục quay OD cùng thanh AB quay đều với vận tốc góc ω. Bỏ qua ma sát, xác định góc lệch α khi thanh AB ở trạng thái cân bằng động. Xác định phản lực tại A (Hình 4.4).

Bài giải

Khảo sát thanh AB quay quanh trục OD với vận tốc góc ω ở trạng thái cân bằng động.



Hình 4.4

Các lực tác dụng:

+ Trọng lượng $\vec{P}$.

+ Phản lực tại A $(\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A})$

Đặt lực quán tính:

Vì hệ các lực quán tính của thanh AB phân bố tuyến tính nên hợp lực $\overrightarrow{R^{qt}} = M\overrightarrow{a_C}$ đặt tại điểm cách điểm A một đoạn $\frac{2}{3}AB$. Ta có : $h = \frac{2}{3}l\cos\alpha$.

$$R^{qt} = Ma_C^n = \frac{P}{2}\frac{l}{2}\omega^2 \sin\alpha$$

Áp dụng nguyên lý Đalămbe:

$$(\vec{P}, \overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{R^{qt}}) \sim 0$$

Hệ phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = -X_A + R^{qt} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_A - P = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \overline{m}_A(\overrightarrow{F_k}) = R^{qt}\frac{2l}{3}\cos\alpha - P\frac{l}{2}\sin\alpha \qquad (3)$$

Từ (1) suy ra: $X_A = R^{qt} = \frac{P}{g}\frac{l}{2}\omega^2 \sin\alpha$

Từ (2) suy ra: $Y_A = P$

Từ (3) suy ra: $\frac{P}{g}\frac{l}{2}\omega^2 \sin\alpha \frac{2l}{3}\cos\alpha - P\frac{l}{2}\sin\alpha = 0$

hay:

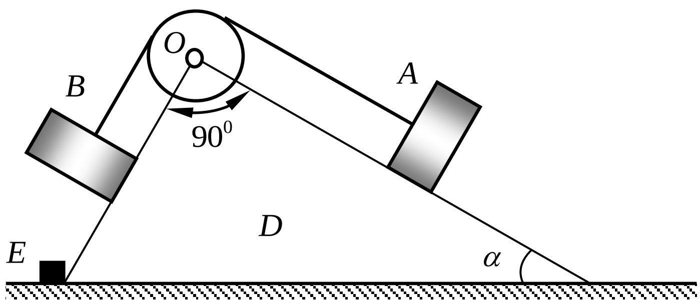
$$\sin\alpha\left(\frac{l}{3}\omega^2\cos\alpha - \frac{1}{2}g\right) = 0$$

+ Nếu $\sin\alpha = 0$, suy ra: $\alpha = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

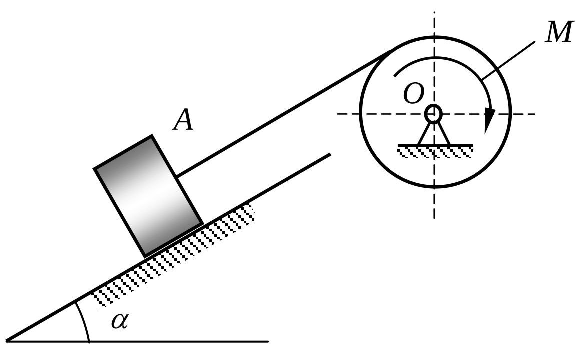
+ Nếu $\frac{l}{3}\omega^2\cos\alpha - \frac{1}{2}g = 0$, suy ra: $\cos\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{l\omega^2}$ (điều kiện $\frac{3}{2}\frac{g}{l\omega^2} < 1$)

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

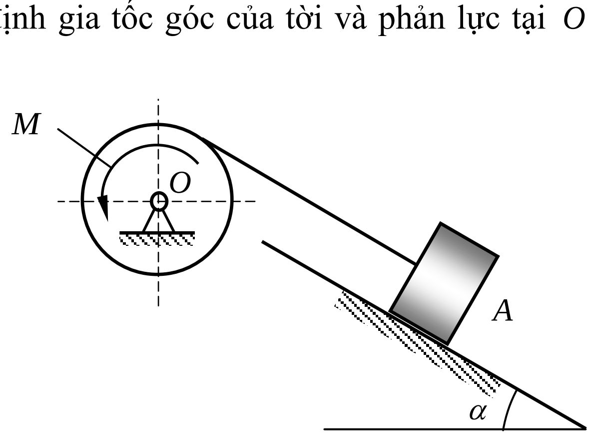
Bài 1: Vật nặng A trọng lượng P_1, hạ xuống theo mặt nghiêng của chêm D, truyền chuyển động cho vật nặng B trọng lượng P_2 nhờ một sợi dây không trọng lượng, không dãn, vòng qua ròng rọc cố định O. Bỏ qua ma sát. Xác định áp lực của chêm D lên mố E của nền.



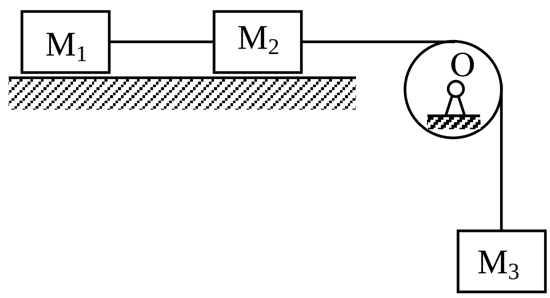
Bài 2: Momen quay không đổi M tác dụng vào tang quay của tời có bán kính R, trọng lượng P. Vật nặng A, trọng lượng Q buộc vào đầu sợi dây quấn vào tang quay , nó được kéo lên theo mặt phẳng nghiêng với phương ngang một góc α. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa vật A và mặt phẳng nghiêng là f. Áp dụng nguyên lý Đalămbe, xác định gia tốc góc của tời và phản lực tại O, xem tời là đĩa tròn đồng chất.



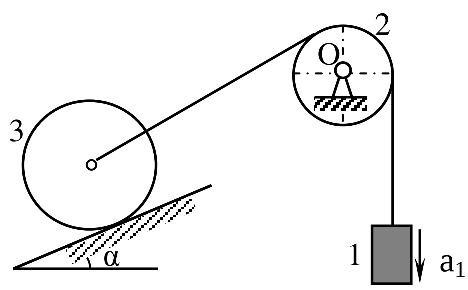
Bài 3: Vật nặng A, trọng lượng P, trượt xuống mặt phẳng nghiêng một góc α so với phương ngang, làm cho tời O quay. Tời O có trọng lượng Q, bán kính R, chịu momen cản M. Bỏ qua ma sát giữa vật A và mặt nghiêng. Áp dụng nguyên lý Đalămbe, xác định gia tốc góc của tời và phản lực tại O, xem tời là đĩa tròn đồng chất.



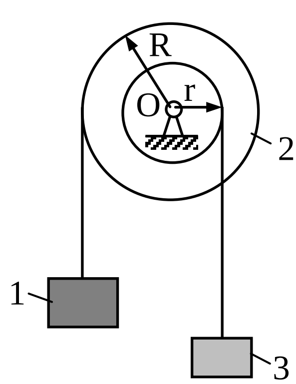
Bài 4: Cho ba vật nặng khối lượng m_1, m_2, m_3 nối với nhau bằng dây mềm không giãn không trọng lượng vắt qua ròng rọc cố định O. Hai vật M_1 và M_2 nằm trên mặt ngang nhẵn, còn vật M_3 treo thẳng đứng. Ròng rọc xem là đĩa tròn đồng chất khối lượng m. Áp dụng nguyên lý đalămbe tìm gia tốc của các tải trọng và sức căng dây nối vật M_2 với M_3. Bỏ qua ma sát ở ổ trục ròng rọc.



Bài 5: Vật 1 có trọng lượng P_1 rơi xuống với gia tốc a_1 làm cho đĩa 2 quay và đĩa 3 lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng α. Đĩa 2 có trọng lượng P_2, bán kính r. Đĩa đồng chất 3 có trọng lượng P_3, bán kính R. Dây song song với mặt phẳng nghiêng. Tìm lực căng của các nhánh dây, lực liên kết tại trục O và lực ma sát tại mặt phẳng nghiêng. Bỏ qua ma sát lăn và ma sát ở ổ trục.

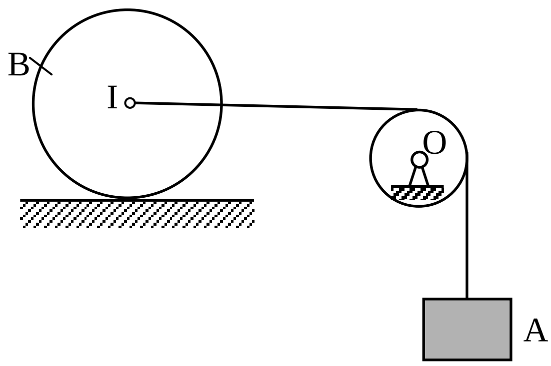


Bài 6: Cho vật 1 có trọng lượng P_1 rơi xuống làm cho ròng rọc 2 trọng lượng Q, bán kính quán tính đối với trục quay là ρ quay quanh trục kéo vật nặng 3 có trọng lượng P_2 đi lên. Kích thước ròng rọc cho trên hình vẽ. Áp dụng nguyên lý Đalămbe xác định gia tốc góc của ròng rọc và phản lực tại trục O.



Bài 7: Sợi dây nhẹ không dãn vắt qua ròng rọc tâm O, bán kính r, trọng lượng P_1, một đầu buộc vật A trọng lượng P, đầu kia buộc vào tâm I của bánh xe B bán kính R trọng lượng Q. Vật A rơi xuống làm bánh xe B lăn không trượt trên

đường ngang. Xác định gia tốc của vật A nếu bỏ qua ma sát lăn và ma sát ở ổ trục ròng rọc, bánh xe và ròng rọc xem như những đĩa tròn đồng chất.



Chương 2

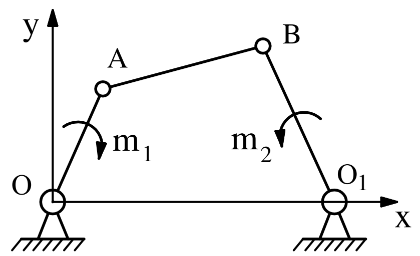
NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.1. CÁC KHÁI NIỆM VỀ CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

2.1.1. ĐỊNH NGHĨA CƠ HỆ KHÔNG TỰ DO

Là tập hợp các chất điểm mà trong chuyển động, ngoài lực tác dụng, vị trí và vận tốc của chúng còn bị ràng buộc bởi một số điều kiện hình học và động học cho trước.

Ví dụ xét cơ cấu bốn khâu như hình 5.1. Đây là cơ hệ không tự do vì nó chịu những điều kiện ràng buộc về mặt hình học:



Hình 5.1

+ $A \in (O_1, O_1A)$

+ $B \in (O_1, O_1B)$

+ $AB = const$

Các điều kiện này độc lập với các lực tác dụng lên cơ cấu và các điều kiện đầu của chuyển động cơ cấu.

2.1.2. LIÊN KẾT. PHƯƠNG TRÌNH LIÊN KẾT. PHÂN LOẠI LIÊN KẾT

1. Liên kết

Là các điều kiện ràng buộc cơ hệ về mặt hình học và động học.

2. Phương trình liên kết

a. Định nghĩa:

Là các phương trình và bất phương trình biểu thị về mặt toán học mối ràng buộc về mặt hình học và động học đối với các chất điểm thuộc cơ hệ. Chúng có dạng :

$$f_\alpha(t, x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, ..., \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \geq 0 \quad (\alpha = \overline{1, s}) \qquad (2.1)$$

hay dưới dạng tắt:

$$f_\alpha(t, x_k, y_k, z_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k) \geq 0 \qquad (2.2)$$

b. Các ví dụ minh hoạ:

Xét cơ cấu bốn khâu ở ví dụ trên. Các khâu OA và O_1B có chiều dài tương ứng là r_1 và r_2, khâu song phẳng AB có chiều dài *l*. Vị trí của cơ cấu được xác định qua các toạ độ của hai điểm A và B.

Điều kiện để điểm A không rời khỏi đường tròn (O, r_1):

$$f_1(t, x_A, y_A, x_B, y_B) = x_A^2 + y_A^2 - r_1^2 = 0$$

Điều kiện để điểm B không rời khỏi đường tròn (O_1, r_2):

$$f_2(t,\, x_A,\, y_A,\, x_B,\, y_B) = (x_B - a)^2 + (y_B - b)^2 - r_2^2 = 0$$

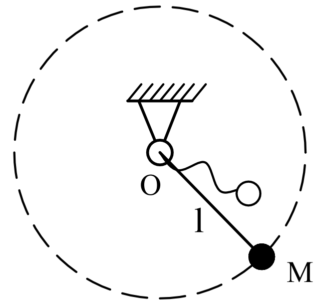
Với a, b là các toạ độ của O_1, $(a = OO_1, b = 0)$

Điều kiện ràng buộc về khoảng cách hai điểm A và B không đổi:

$$f_3(t,\, x_A,\, y_A,\, x_B,\, y_B) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l^2 = 0$$

Như vậy, ta có ba phương trình liên kết biểu diễn các điều kiện ràng buộc đối với cơ cấu bốn khâu. Trong trường hợp này s = 3.

Xét chuyển động của chất điểm M, khối lượng m buộc vào đầu một sợi dây không giãn chiều dài l, còn đầu kia buộc vào điểm O cố định (Hình 5.2).



Hình 5.2

Điều kiện ràng buộc với chất điểm M luôn luôn cách O một khoảng không lớn hơn l:

$$f(t,\, x_M\,,\, y_M) = x_M^2 + y_M^2 - l^2 \le 0$$

Số phương trình liên kết ở đây *s = 1.*

Nếu giả thiết dây luôn ở trạng thái căng (coi OM là một thanh mảnh) thì phương trình liên kết có dạng:

$$f(t,\, x_M\,,\, y_M) = x_M^2 + y_M^2 - l^2 = 0$$

Nếu chiều dài của dây biến đổi theo thời gian (tức là $l = l(t)$) và coi như dây luôn luôn bị căng thì phương trình liên kết là:

$$f(t,\, x_M\,,\, y_M) = x_M^2 + y_M^2 - l^2(t) = 0$$

3. Phân loại liên kết

a. Liên kết giữ và không giữ:

Nếu các điều kiện ràng buộc được thể hiện bằng các phương trình thì liên kết gọi là liên kết giữ, ngược lại nếu bằng các bất phương trình thì liên kết được gọi là liên kết không giữ.

b. Liên kết dừng và không dừng:

Nếu phương trình liên kết không chứa rõ biến thời gian thì liên kết được gọi là liên kết dừng, ngược lại nếu chứa rõ biến thời gian thì liên kết là không dừng.

c. Liên kết holonom và không holonom:

Nếu trong phương trình liên kết không chứa các yếu tố vận tốc hoặc có chứa các yếu tố vận tốc nhưng nhờ phép tích phân đưa về dạng không chứa các yếu tố vận tốc thì liên kết được gọi là holonom. Nếu các phương trình liên kết chứa các yếu tố vận tốc nhưng không thể loại trừ nhờ phép tích phân thì được gọi là không holonom.

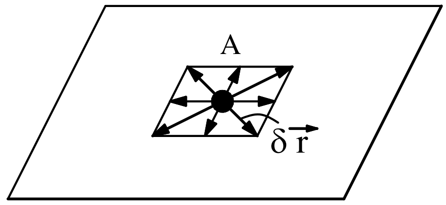
Ở đây chúng ta chỉ khảo sát đối với các cơ hệ chịu liên kết holonom, giữ và dừng, tức là phương trình liên kết có dạng:

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, ..., \; x_n, y_n, z_n) = 0 \quad \alpha = \overline{1, s} \tag{2.3}$$

2.1.3. DI CHUYỂN KHẢ DĨ VÀ SỐ BẬC TỰ DO CỦA CƠ HỆ

1. Di chuyển khả dĩ

Di chuyển khả dĩ của hệ là tập hợp tất cả các di chuyển vô cùng nhỏ mà các chất điểm thuộc hệ có thể thực hiện được sao cho phù hợp với các liên kết tại một thời điểm đã cho.



Hình 5.3

Di chuyển khả dĩ của chất điểm được ký hiệu $\delta\vec{r}$ (phân biệt với các di chuyển thực $d\vec{r}$)

Ví dụ: Quả cầu A đặt trên mặt nào đó thì liên kết của quả cầu với mặt tựa đó là liên kết tựa (Hình 5.3). Di chuyển khả dĩ là các di chuyển vô cùng nhỏ nằm trong mặt phẳng tiếp xúc.

2. Số bậc tự do của cơ hệ

Số bậc tự do của cơ hệ bằng số di chuyển khả dĩ độc lập của hệ đó. Giả sử hệ có N chất điểm thì có 3N di chuyển khả dĩ độc lập nhưng có s phương trình liên kết. Do đó số bậc tự do của cơ hệ sẽ là $n = 3N - s$. Trong thực tế người ta xác định số bậc tự do của cơ hệ qua việc phân tích khả năng chuyển động độc lập của cơ hệ.

Phương pháp thực hành xác định số bậc tự do của cơ hệ:

+ Nếu cản trở một di chuyển khả dĩ độc lập mà cơ hệ đứng yên thì cơ hệ có một bậc tự do.

+ Nếu cản trở hai di chuyển khả dĩ độc lập mà cơ hệ mới đứng yên thì cơ hệ có hai bậc tự do.

2.1.4. TOẠ ĐỘ SUY RỘNG CỦA CƠ HỆ

Tập hợp các thông số đủ để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định được gọi là các toạ độ suy rộng của cơ hệ.

Các toạ độ suy rộng được ký hiệu là $q_1, q_2, ..., q_n$. Các toạ độ suy rộng có thể là toạ độ Đêcác của các chất điểm thuộc cơ hệ, góc quay hay toạ độ cong,...

Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ các toạ độ suy rộng nên các toạ độ Đêcac của các chất điểm thuộc hệ có thể biểu diễn qua các toạ độ suy rộng.

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, ..., q_n) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, ..., q_n) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, ..., q_n) \end{aligned} \tag{2.4}$$

hay:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{2.5}$$

Chú ý: *Số bậc tự do bằng số toạ độ suy rộng của cơ hệ.*

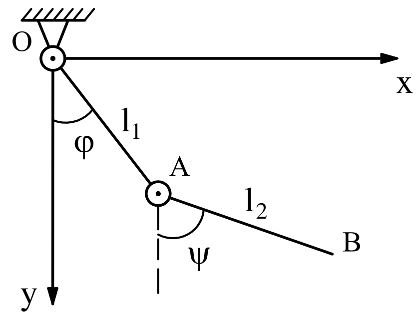
Xét trường hợp con lắc kép như hình 5.4, ta có thể xác định vị trí của con lắc kép bằng cách chọn toạ độ suy rộng như sau:

$$\begin{cases} q_1 = \varphi \\ q_2 = \psi \end{cases}$$

Các toạ độ Đêcác của các chất điểm thuộc cơ hệ được biểu diễn thông qua chúng như sau:

$$x_A = l_1 \sin\varphi \;;\; y_A = l_1 \cos\varphi$$

$$x_B = l_1 \sin\varphi + l_2 \sin\psi \;;\; y_B = l_1 \cos\varphi + l_2 \cos\psi$$



Hình 5.4

2.1.5. CÔNG KHẢ DĨ

Công khả dĩ là công sinh ra bởi lực tác dụng lên chất điểm trên di chuyển khả dĩ của chất điểm đó.

Công khả dĩ của lực hoạt động $\overrightarrow{F^a}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^a

Công khả dĩ của phản lực liên kết $\vec{R}$ trên di chuyển khả dĩ là δA^R

2.1.6. LỰC SUY RỘNG

Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\{\delta \vec{r}_k\}$. Khi đó, biểu thức công khả dĩ sẽ là:

$$\sum \delta A_k = \sum \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx}.\delta x_k + F_{ky}.\delta y_k + F_{kz}.\delta z_k)$$

Chọn các toạ độ suy rộng đủ: q_1, q_2,..., q_n.

Từ biểu diễn của toạ độ Đềcác qua toạ độ suy rộng :

$$x_k = x_k(t, q_1, q_2, ..., q_n)$$
$$y_k = y_k(t, q_1, q_2, ..., q_n)$$
$$z_k = z_k(t, q_1, q_2, ..., q_n)$$

Ta có:

$$\delta x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\delta y_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\delta z_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

Thay vào biểu thức của công khả dĩ, ta đ- ợc:

$$\sum \delta A_k = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{N} (F_{kx}.\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}.\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}.\frac{\partial z_k}{\partial q_i}) \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i \qquad (2.6)$$

Trong đó:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx}.\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}.\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}.\frac{\partial z_k}{\partial q_i}) = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \qquad (2.7)$$

đ- ợc gọi là lực suy rộng t- ơng ứng với toạ độ suy rộng q_i.

Chú ý: Đối với cơ hệ hôlônôm và các toạ độ suy rộng đủ thì $\{\delta q_i\}$trong (2.6) độc lập đối với nhau. Còn trong tr- ờng hợp toạ độ suy rộng d- thì giữa các $\{\delta q_i\}$có quan hệ phụ thuộc:

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_j}\delta q_j = 0 \qquad \beta = \overline{1,s}$$

Thứ nguyên của lực suy rộng:

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}$$

Vì vậy, nếu toạ độ suy rộng là độ dài thì lực suy rộng có thứ nguyên của lực thông th- ờng, còn nếu toạ độ là góc thì lực suy rộng có thứ nguyên của ngẫu lực.

PH□ƠNG PHÁP TÍNH LỰC SUY RỘNG

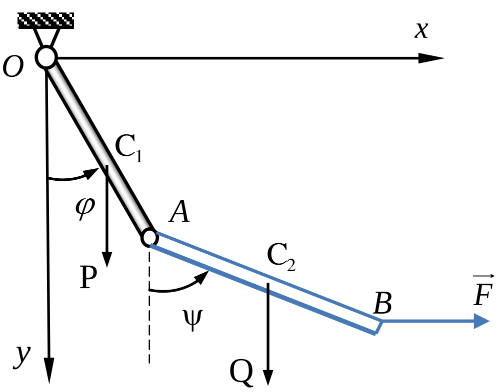
Ph□ơng pháp 1

Dựa trực tiếp vào biểu thức

$$Q_i = \sum_{k=1}^{N}\left(F_{kx}.\frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky}.\frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz}.\frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k.\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}$$

Yêu cầu: Phải tìm hình chiếu của các lực lên các trục toạ độ Đềcác và toạ độ điểm đặt của lực viết trong toạ độ Đềcác thông qua toạ độ suy rộng.

Ví dụ: Xét con lắc kép chịu tác động của lực $\vec{F}$ và có trọng l- ợng : $\vec{Q},\vec{P}$. Độ dài các thanh: OA = R, AB = l, $OC_1 = s_1$, $OC_2 = s_2$ (C_1, C_2 là trọng tâm của thanh OA, AB).



- Chọn hệ trục toạ độ vuông góc nh- hình vẽ.

- Toạ độ suy rộng đủ là : φ ,ψ.

- Điểm đặt của các lực.

+ $\vec{P}$ đặt tại $C_1(x_1, y_1)$:

$$\vec{P}\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = P \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = s_1\sin\varphi \\ y_1 = s_1\cos\varphi \end{cases}$$

+ $\vec{Q}$ đặt tại $C_2(x_2, y_2)$:

$$\vec{Q}\begin{cases} Q_x = 0 \\ Q_y = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = R\sin\varphi + s_2\sin\psi \\ y_2 = R\cos\varphi + s_2\cos\psi \end{cases}$$

+ $\vec{F}$ đặt tại $B(x_3, y_3)$:

$$\vec{F}\begin{cases} F_x = F \\ F_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = R\sin\varphi + l.\sin\psi \\ y_3 = R\cos\varphi + l.\cos\psi \end{cases}$$

Do $P_x = Q_x = F_y = 0$ nên ta không phải tính đạo hàm riêng của x_1, x_2, y_3 theo các toạ độ suy rộng φ, ψ.

Thực hiện các phép tính sau:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -s_1.\sin\varphi \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = -R.\sin\varphi \qquad \frac{\partial y_2}{\partial \psi} = -s_2.\sin\psi$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = R.\cos\varphi \qquad \frac{\partial x_3}{\partial \psi} = l.\cos\psi$$

Thay vào biểu thức Q_i , ta có:

$$Q_\varphi = P_y.\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} + Q_y.\frac{\partial y_2}{\partial \varphi} + F_x.\frac{\partial x_3}{\partial \varphi} = -P.s_1.\sin\varphi - Q.R.\sin\varphi + F.R.\cos\varphi$$

$$Q_\psi = P_y.\frac{\partial y_1}{\partial \psi} + Q_y.\frac{\partial y_2}{\partial \psi} + F_x.\frac{\partial x_3}{\partial \psi} = -Q.s_2.\sin\psi + F.l.\cos\psi$$

Ph□ơng pháp 2

Dựa vào biểu thức công khả dĩ

$$\delta A_k = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k.\delta\vec{r}_k = \sum_{k=1}^{N} (F_{kx}.\delta x_k + F_{ky}.\delta y_k + F_{kz}.\delta z_k)$$

Yêu cầu:

- Biểu diễn các toạ độ Đếcác theo toạ độ suy rộng.
- Tính biến phân của toạ độ Đềcác theo các biến phân của toạ độ suy rộng.
- Thay vào biểu thức công khả dĩ. Khi đó, các đại l- ợng đứng tr- ớc các biến phân của toạ độ suy rộng chính là lực suy rộng.

Ví dụ: Đối với con lắc kép trên, biểu thức của toạ độ suy rộng có dạng

$$\sum \delta A_k = P.\delta y_1 + Q.\delta y_2 + F.\delta x_3$$

các biến phân đ- ợc tính nh- sau

$$y_1 = s_1.\cos\varphi \Rightarrow \delta y_1 = -s_1.\sin\varphi.\delta\varphi$$

$$y_2 = R.\cos\varphi + s_2.\cos\psi \Rightarrow \delta y_2 = -R.\sin\varphi.\delta\varphi - s_2\sin\psi.\delta\psi$$

$$x_3 = R.\sin\varphi + l.\sin\psi \Rightarrow \delta x_3 = R.\cos\varphi.\delta\varphi + l.\cos\psi.\delta\psi$$

Thay vào biểu thức công khả dĩ, ta có

$$\sum \delta A_k = P.(-s_1.\sin\varphi.\delta\varphi) + Q.(-R.\sin\varphi\delta\varphi - s_2\sin\psi\delta\psi) + F(R.\cos\varphi\delta\varphi + l\cos\psi\delta\psi)$$

$$= (F.\cos\varphi - P.s_1.\sin\varphi - Q.R.\sin\varphi)\delta\varphi + (F.l.\cos\psi - Q.s_2.\sin\psi)\delta\psi$$

Lực suy rộng nhận đ- ợc

$$Q_\varphi = F.R.\cos\varphi - P.s_1.\sin\varphi - Q.R.\sin\varphi$$

$$Q_\psi = F.l.\cos\psi - Q.s_2.\sin\psi$$

Ph□ơng pháp 3

Nếu ta chọn các toạ độ suy rộng đủ thì biến phân của các toạ độ suy rộng đủ độc lập với nhau. Do đó, ta có thể tính từng lực suy rộng riêng rẽ bằng cách chọn các di chuyển khả dĩ đặc biệt.

- Để tính Q_i , ta chọn: $\delta q_1 = 0, ..., \delta q_{i-1} = 0, \delta q_i \neq 0, \delta q_{i+1} = 0, ..., \delta q_n = 0$.
- Tính công khả dĩ của các lực trong di chuyển khả dĩ đặc biệt đã chọn

$$\sum \delta A_k(\delta q_i)$$

Mà: $\sum \delta A_k(\delta q_i) = Q_i.\delta q_i$

Suy ra

$$Q_i = \frac{\sum \delta A_k(\delta q_i)}{\delta q_i} \tag{2.8}$$

Ví dụ: Ta làm ví dụ đối với con lắc kép trên

Để tính Q_φ , ta chọn: $\delta\varphi \neq 0$, $\delta\psi = 0$ (tức cho thanh OA di chuyển một góc $\delta\varphi$ còn thanh AB chuyển động tịnh tiến). Công khả dĩ nhận đ- ợc

$$\sum \delta A_k(\delta\varphi) = P.(-s_1.\sin\varphi.\delta\varphi) + Q(-R\sin\varphi\delta\varphi) + F.(R.\cos\varphi\delta\varphi)$$

$$= (F.R.\cos\varphi - P.s_1.\sin\varphi - Q.R.\sin\varphi)\delta\varphi$$

Suy ra

$$Q_\varphi = \frac{\sum \delta A_k(\delta\varphi)}{\delta\varphi} = F.R.\cos\varphi - P.s_1.\sin\varphi - Q.R.\sin\varphi$$

Để tính Q_ψ , ta chọn: $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi \neq 0$ (tức giữ thanh OA cố định cho thanh AB quay quanh A). Biểu thức công khả dĩ nhận đ- ợc :

$$\sum \delta A_k(\delta\psi) = P.0 - Q.s_2.\sin\psi.\delta\psi + F.l.\cos\psi.\delta\psi$$

$$= (F.l.\cos\psi - Q.s_2.\sin\psi)\delta\psi$$

Suy ra

$$Q_\psi = \frac{\sum \delta A_k(\delta\psi)}{\delta\psi} = F.l.\cos\psi - Q.s_2.\sin\psi$$

Nhận xét: Ph- ơng pháp 2 và 3 đ- ợc sử dụng nhiều nhất đặc biệt là ph- ơng pháp 3 khi toạ độ suy rộng đ- ợc chọn là đủ.

Chú ý: Ngoài ba ph- ơng pháp nêu trên ta còn có thể tính lực suy rộng nh- sau. Khi các lực tác dụng lên cơ hệ vừa là lực có thế và không thế.

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i^* \tag{2.9}$$

Trong đó: $\Pi(q_1, q_2,\ldots q_n)$ là hàm thế năng của cơ hệ

Q_i^* là lực suy rộng của các lực không thế

Ví dụ: Ta làm ví dụ đối với con lắc kép ở trên.

Vì $\vec{Q}, \vec{P}$ là các lực có thế nên ta có hàm thế năng

$$\begin{aligned}\Pi &= -P.y_1 - Q.y_2 + const \\ &= -P.s_1\cos\varphi - Q(R\cos\varphi + s_2\cos\psi) + const \\ &= -(P.s_1 + Q.R)\cos\varphi - Q.s_2.\cos\psi + const\end{aligned}$$

Nh- ng do $\vec{F}$ là lực không thế nên ta tính Q_i^* theo biểu thức trên

$$\sum \delta A(\vec{F}) = F_x.\delta x_3 + F_y.\delta y_3 = F(R.\cos\varphi\delta\varphi + l.\cos\psi\delta\psi)$$

Vậy
$$Q_\varphi^* = F.R.\cos\varphi$$
$$Q_\psi^* = F.l.\cos\psi$$

Suy ra

$$Q_\varphi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} + Q_\varphi^* = -(P.s_1 + Q.R)\sin\varphi + F.R.\cos\varphi$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} + Q_\psi^* = -Q.s_2.\sin\psi + F.l.\cos\psi$$

2.1.7. LIÊN KẾT LÝ TƯỞNG

Liên kết được gọi là lý tưởng nếu tổng công của tất cả các lực liên kết trong mọi di chuyển khả dĩ của cơ hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^R = 0 \qquad (2.10)$$

Ví dụ: Nếu bỏ qua ma sát, khi vật trượt trên đường cong (hay mặt cong) cố định sẽ có công của phản lực liên kết tựa $\vec{N}$ bằng không.

2.2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ

2.2.1. NỘI DUNG NGUYÊN LÝ

Điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng cân bằng ở vị trí đã cho là tổng công nguyên tố các lực hoạt động trong mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không.

$$\sum \delta A_k^a = \sum \vec{F_k}\delta\vec{r_k} = 0 \qquad (2.11)$$

Chứng minh

1. Điều kiện cần

+ Giả thiết hệ có liên kết lý tưởng và cân bằng.

+ Kết luận $\sum \delta A_k^a = 0$

Theo giả thiết hệ cân bằng nên mọi chất điểm thuộc hệ cũng cân bằng dưới tác dụng của lực chủ động và phản lực liên kết. Xét chất điểm thứ k chịu tác dụng của lực hoạt động $\overrightarrow{F_k^a}$ và phản lực liên kết $\overrightarrow{R_k}$

Vì chất điểm thứ k cân bằng nên $\overrightarrow{F_k^a} + \overrightarrow{R_k} = 0$

Trên một di chuyển khả dĩ bất kỳ $\delta\overrightarrow{r_k}$ nào đó, ta có:

$$\delta A_k = (\overrightarrow{F_k^a} + \overrightarrow{R_k})\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Xét toàn hệ: $$\sum \delta A_k = \sum (\overrightarrow{F_k^a} + \overrightarrow{R_k})\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

hay: $$\sum \overrightarrow{F_k^a}\delta\overrightarrow{r_k} + \sum \overrightarrow{R_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

Do hệ chịu liên kết lý tưởng nên $\sum \overrightarrow{R_k}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$

Do đó: $$\sum \delta A_k^a = \sum \overrightarrow{F_k^a}\delta\overrightarrow{r_k} = 0$$

2. Điều kiện đủ

+ Giả thiết $\sum \delta A_k^a = 0$

+ Kết luận hệ cân bằng.

Giả thiết hệ chịu liên kết lý tưởng và cân bằng, có tổng công nguyên tố của các lực chủ động tác dụng lên hệ thoả mãn $\sum \delta A_k^a = 0$. Khi đó nếu hệ ở trạng thái cân bằng thì sẽ cân bằng mãi mãi. Nếu ở một thời điểm nào đó hệ bắt đầu chuyển động thì biến thiên động năng $\delta T > 0$. Do đó $\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^R > 0$. Theo giả thiết hệ chịu liên kết lý tưởng nên $\sum \delta A_k^R = 0$. Từ đó suy ra $\sum \delta A_k^a > 0$, điều này trái giả thiết. Vậy hệ phải ở trạng thái cân bằng.

Chú ý:

+ Nếu hệ chịu liên kết lý tưởng thì chỉ cần tính đến các lực hoạt động còn phản lực liên kết có thể bỏ qua.

+ Nếu có ma sát ta coi lực ma sát là lực chủ động.

2.2.2. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG CỦA HỆ TRONG TOẠ ĐỘ SUY RỘNG

Điều kiện cân bằng:

$$\sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n = 0 \tag{2.12}$$

Do δq_1, δq_2,..., δq_n độc lập với nhau nên đẳng thức trên chỉ thoả mãn khi:

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = 0 \tag{2.13}$$

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ có liên kết lý tưởng cân bằng trong toạ độ suy rộng là tất cả các lực suy rộng tương ứng với các toạ độ suy rộng của hệ bằng không.

Số các điều kiện cân bằng bằng số toạ độ suy rộng hay số bậc tự do của hệ.

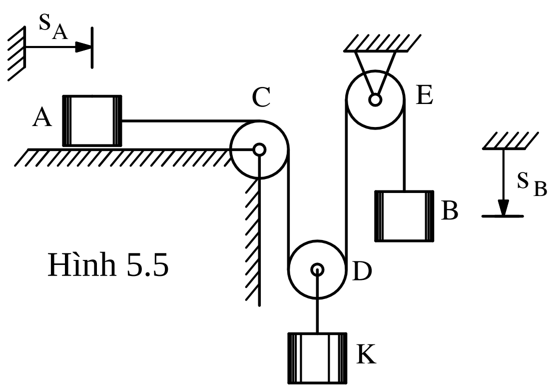
Trường hợp các lực hoạt động tác dụng lên hệ là những lực có thế và hàm thế năng có dạng $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ta có điều kiện cân bằng như sau:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \; i = \overline{1,n} \qquad (2.14)$$

2.2.3. VÍ DỤ

1.Ví dụ 1

Cho cơ hệ được biểu diễn như hình vẽ. Dây mềm mảnh, nhẹ và không giãn được buộc vào vật A, vòng qua ròng rọc cố định C, ròng rọc động D, ròng rọc cố định E, cuối cùng được buộc vào vật nặng B. Tại trục ròng rọc động D có treo vật K có trọng lượng Q. Cho biết hai vật A, B có cùng trọng lượng P. Xác định P theo Q và xác định hệ số ma sát trượt f giữa vật A và mặt phẳng ngang để hệ cân bằng (Hình 5.5).



Hình 5.5

Bài giải

Khảo sát cơ hệ gồm các vật A, K, B.

Hệ có hai bậc tự do *n* = 2.

Chọn các toạ độ suy rộng: $q_1 = s_A$, $q_2 = s_B$

Để viết các điều kiện cân bằng của cơ hệ, ta tính các lực suy rộng Q_{sA} và Q_{sB}.

+ Tính lực suy rộng Q_{sA} : Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta s_A > 0$ và $\delta s_B = 0$

$$\sum \delta A_k = -F_{ms}\delta s_A + Q\delta s_k = (-F_{ms} + \frac{Q}{2})\delta s_A = (-fP + \frac{Q}{2})\delta s_A$$

Do $\delta s_A = 2\delta s_K$, suy ra: $\qquad Q_{sA} = -fP + \dfrac{Q}{2}$

+ Tính lực suy rộng Q_{sB} : Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta s_B > 0$ và $\delta s_A = 0$

$$\sum \delta A_k = P\delta s_B - Q\delta s_k = (P - \frac{Q}{2})\delta s_B$$

Do $\delta s_B = 2\delta s_K$, suy ra: $Q_{sB} = P - \frac{Q}{2}$

Điều kiện cân bằng của cơ hệ:

$$Q_{sA} = -fP + \frac{Q}{2} = 0 \quad ; \quad Q_{sB} = P - \frac{Q}{2} = 0$$

suy ra:
$$\begin{cases} P = \frac{Q}{2} \\ f = 1 \end{cases}$$

2. Ví dụ 2

Cho hệ dầm gồm hai thanh AB và BD nối với nhau bằng bản lề B, liên kết với tường nhờ ngàm A và với mặt nằm ngang nhờ gối tựa có con lăn D. Trên dầm AB có tải trọng phân bố đều cường độ q N/m, tại điểm giữa của dầm OD có tác dụng lực tập trung P. Chiều dài dầm AB bằng 2a và chiều dài của BD là 4a (Hình 5.6a).

Tìm phản lực tại gối D và ngàm A. Bỏ qua ma sát.

Bài giải

Khảo sát cơ hệ là dầm ghép. Cơ hệ không có bậc tự do.

■ Tìm phản lực tại D: Ta giải phóng liên kết tại D, thay bằng phản lực $\overrightarrow{N_D}$ tương ứng.

Cơ hệ một bậc tự do.

Chọn toạ độ suy rộng là góc định vị φ của thanh BD đối với thanh AB.

Tính Q_φ: Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta\varphi \neq 0$ (Hình 5.6b).

$$\sum \delta A_k = P\delta s_C - N_D \delta s_D = P2a\delta\varphi - N_D 4a\delta\varphi = (P2a - N_D 4a)\delta\varphi$$

suy ra: $Q_\varphi = P2a - N_D 4a$

Từ điều kiện cân bằng : $Q_\varphi = 0$

suy ra: $N_D = \frac{P}{4}$

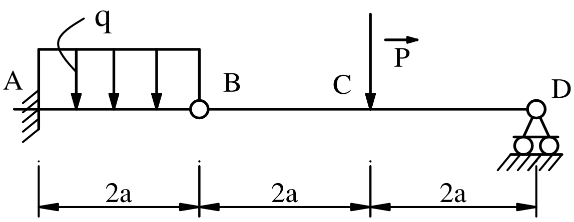
■ Tìm phản lực liên kết tại A:

Giải phóng liên kết tại C, thay bằng các phản lực $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, m_A$ tương ứng.

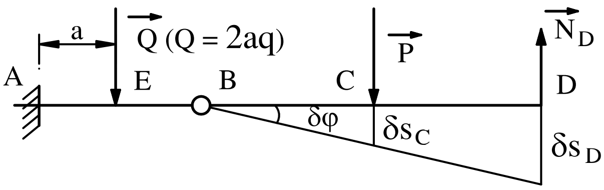
Cơ hệ ba bậc tự do.

Chọn các toạ độ suy rộng:
$$q_1 = x_D$$
$$q_2 = \varphi$$
$$q_3 = \psi$$

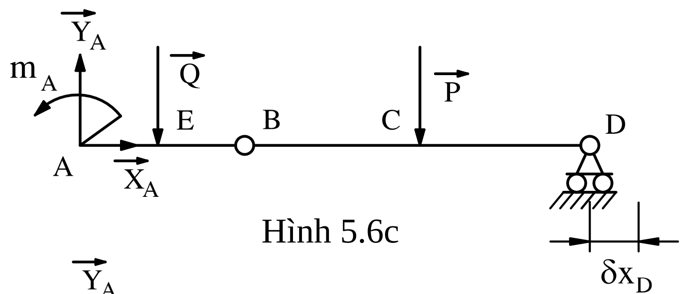
Với x_D là hoành độ điểm D, φ là góc định vị của thanh BD so với trục ngang Ox, ψ là góc định vị của thanh AB đối với thanh BD.



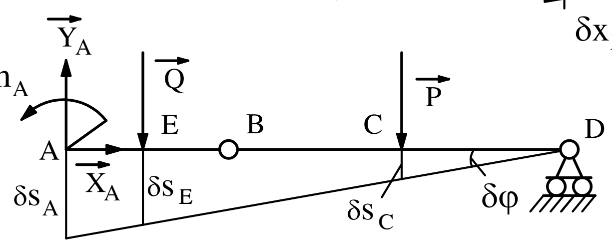
Hình 5.6a



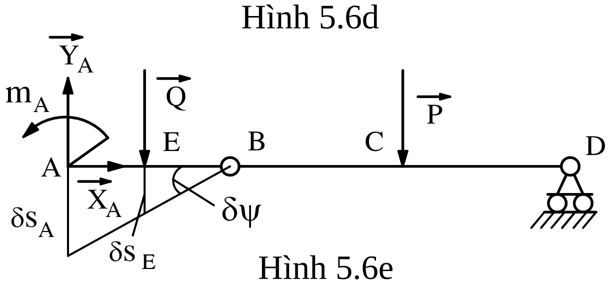
Hình 5.6b



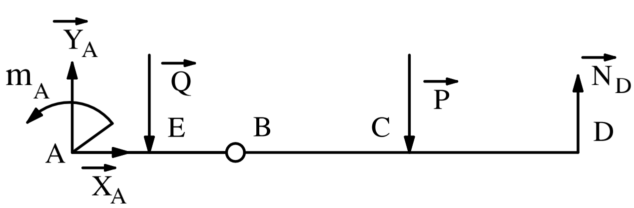
Hình 5.6c



Hình 5.6d



Hình 5.6e



Hình 5.6f

Tính Q_{xD}: Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta x_D \neq 0,\ \delta\varphi = \delta\psi = 0$ (hình 5.6c).

$$\sum \delta A_k = X_A \delta x_D$$

suy ra: $$Q_{xD} = X_A$$

Tính lực suy rộng Q_φ: Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta\varphi \neq 0, \delta x_D = \delta\psi = 0$ (Hình 5.6d).

$$\sum \delta A_k = P\delta s_C + Q\delta s_E - Y_A\delta s_A + m_A\delta\varphi = P2a\delta\varphi + Q5a\delta\varphi - Y_A 6a\delta\varphi + m_A\delta\varphi$$

$$= (P2a + Q5a - Y_A 6a + m_A)\delta\varphi$$

suy ra: $$Q_\varphi = P2a + Q5a - Y_A 6a + m_A$$

Tính lực suy rộng Q_ψ: Cho cơ hệ di chuyển khả dĩ $\delta\psi \neq 0, \delta x_D = \delta\varphi = 0$ (Hình 5.6e).

$$\sum \delta A_k = Q\delta x_E - Y_A\delta x_A + m_A\delta\psi = Qa\delta\psi - Y_A 2a\delta\psi + m_A\delta\psi$$
$$= (Qa - Y_A 2a + m_A)\delta\psi$$

suy ra: $$Q_\varphi = Qa - Y_A 2a + m_A$$

Từ điều kiện cân bằng của hệ:

$$Q_{xD} = 0, \; Q_\varphi = 0, \; Q_\psi = 0$$

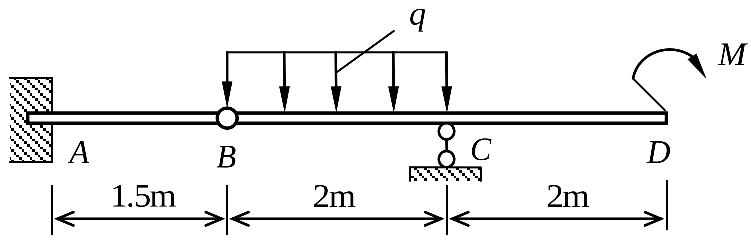
Ta nhận được:

$$X_A = 0 \quad ; \quad Y_A = Q + \frac{P}{2} \quad ; \quad m_A = a(P+Q)$$

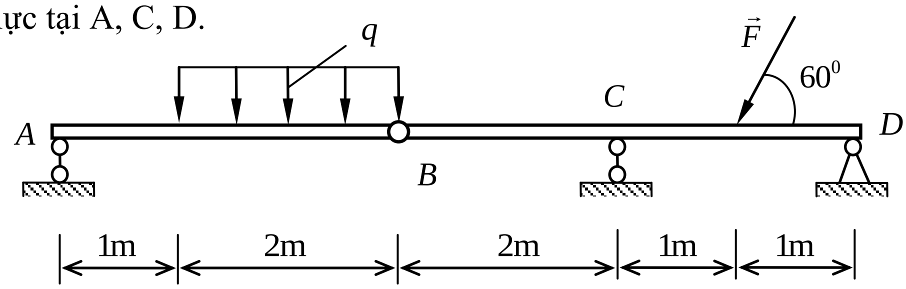
■ Chú ý: Có thể đồng thời giải phóng liên kết tại A và D. Lúc đó cơ hệ có bốn bậc tự do (Hình 5.6f). Chọn các toạ độ suy rộng : x_D, y_D, φ, ψ và tiến hành tính các lực suy rộng $Q_{xD}, Q_{yD}, Q_\varphi$ và Q_ψ. Từ điều kiện triệt tiêu lực suy rộng ta xác định được các phản lực liên kết N_C, X_A, Y_A, m_A.

PHẦN BÀI TẬP CHƯƠNG 2

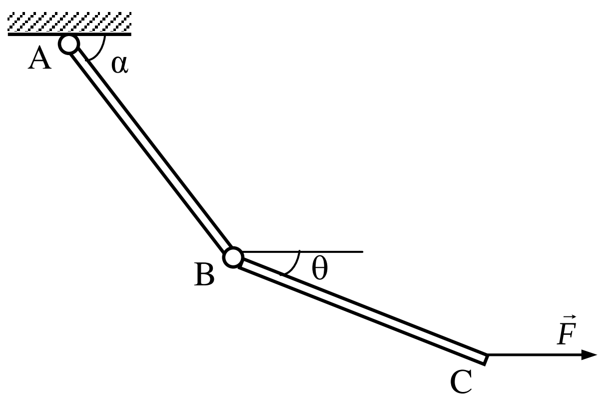
Bài 1: Cho hệ dầm chịu liên kết và kích thước như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các dầm, biết $q = 8\text{kN/m}, M = 20\text{kNm}$. Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ, tìm các phản lực tại *A* và *C*.



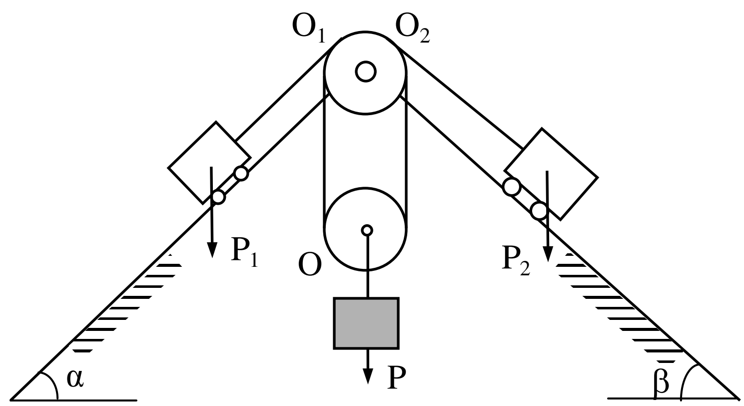
Bài 2: Cho hệ dầm có kích thước và chịu liên kết như hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng các dầm. Biết $q = 5\text{kN/m}, F = 20\text{kNm}$. Áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ, tìm phản lực tại A, C, D.



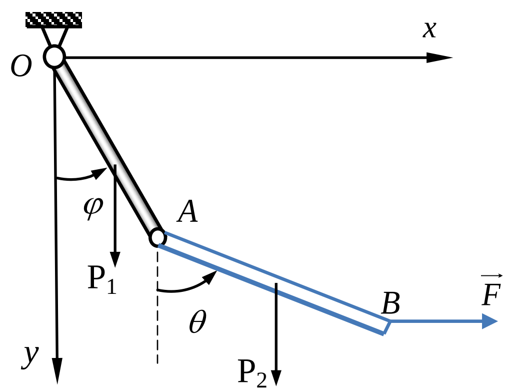
Bài 3: Cho hệ thanh như hình vẽ. Thanh AB có trọng lượng P. Hỏi trọng lượng Q của thanh BC và lực F phải là bao nhiêu để hệ cân bằng ở vị trí và α = 60^0 và θ = 30^0. Cho AB = BC = 2L.



Bài 4: Tìm trọng lượng P_1 và P_2 của hai vật nặng được giữ cân bằng trên các mặt nghiêng nhờ vật nặng trọng lượng P, nếu vật nặng P_1 và P_2 được buộc vào 2 đầu của một sợi dây, sợi dây này đi từ vật nặng P_1 qua ròng rọc O_1 gắn trên trục nằm ngang đến ròng rọc động O mang vật nặng P, sau đó vòng qua ròng rọc O_2 cùng trục với ròng rọc O_1 và cuối cùng đến vật nặng P_2. Ma sát, cũng như khối lượng các ròng rọc và dây bỏ qua.



Bài 5: Hai thanh đồng chất OA và AB nối với nhau bằng bản lề A được treo vào tường nhờ bản lề O. Tại điểm B có lực $\vec{F}$ tác dụng theo phương ngang hướng từ trái sang phải. Cho OA = $2l_1$; AB = $2l_2$, trọng lượng của các thanh OA và AB lần lượt là P_1 và P_2. Tìm các góc lệch φ_1 và θ của các thanh OA và AB làm với phương thẳng đứng để cơ hệ ở trạng thái cân bằng.



Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CƠ HỆ

3.1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

3.1.1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT ĐỘNG LỰC HỌC

Xét cơ hệ gồm N chất điểm chịu liên kết lý tưởng. Ngoài lực hoạt động $\vec{F}_k^a$ và phản lực liên kết $\vec{R}_k$, ta thêm vào chất điểm thứ k lực quán tính $\vec{F}_k^{qt} = -m_k\vec{a}_k$. Theo nguyên lý Đalămbe cho chất điểm k ta có:

$$\left(\vec{F}_k^a, \vec{R}_k, \vec{F}_k^{qt}\right) \sim 0$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ rồi áp dụng nguyên lý di chuyển khả dĩ, ta có

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} + \sum \delta A_k^R = 0 \qquad (3.1)$$

Nhưng do hệ chịu liên kết lý tưởng nên $\sum \delta A_k^R = 0$ do đó

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} = 0 \qquad (3.2)$$

Vậy ta có

$$\sum \left(\vec{F}_k^a + \vec{F}_k^{qt}\right)\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (3.3)$$

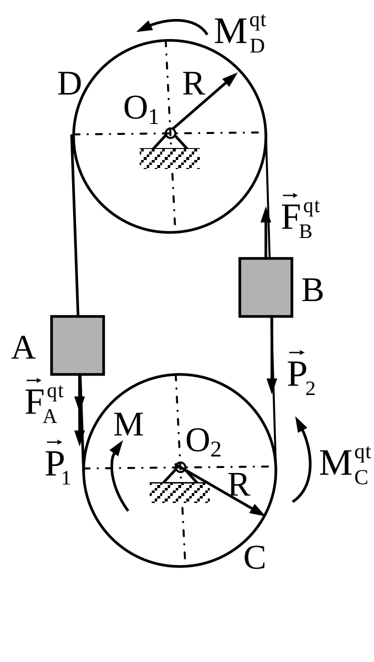
Đẳng thức (3.2) gọi là phương trình tổng quát động lực học.

Nếu hệ chịu liên kết lý tưởng thì tại mỗi thời điểm tổng công nguyên tố của các lực hoạt động và các lực quán tính đặt vào hệ trên mọi di chuyển khả dĩ của hệ đều bằng không.

3.1.2. VÍ DỤ

1. Ví dụ 1

Tại đĩa C ở dưới tác dụng một mômen quay M. Xác định gia tốc của tải trọng A trọng lượng P_1 được kéo lên trên, nếu trọng lượng của đối trọng B là P_2. Các đĩa C và D đồng chất cùng bán kính R, trọng lượng Q. Bỏ qua khối lượng của dây.



Bài giải

- Xét cơ hệ gồm: Đĩa C, D, tải trọng A, B.
- Hệ có một bậc tự do
- Chọn tọa độ suy rộng độc lập là x(độ dịch chuyển của tải trọng A).
- Các lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ: $\vec{Q}_C, \vec{Q}_D, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{M}$
- Lực quán tính: $F_A^{qt} = \dfrac{p_1}{g} a_A, \quad F_B^{qt} = \dfrac{P_2}{g} a_B$

Với $a_A = a_B = a = \varepsilon R$ => $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$

Từ đó ta có $M_C^{qt} = J_{CZ}\varepsilon = \dfrac{Q}{2g}R^2\varepsilon = \dfrac{QRa}{2g}$, $\quad M_D^{qt} = J_{Dz}\varepsilon = \dfrac{QRa}{2g}$

Áp dụng phương trình tổng quát động lực học ta có

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} = \delta A(\vec{Q}_C) + \delta A(\vec{Q}_D) + \delta A(\vec{P}_1) + \delta A(\vec{P}_2) + \delta A(\vec{M}) + \delta A(M_C^{qt}) + \delta A(M_D^{qt}) +$$
$$+ \delta A(\vec{F}_A^{qt}) + \delta A(\vec{F}_B^{qt}) = 0$$

$$\sum \delta A = -P_1\delta x + P_2\delta x + M\frac{\delta x}{R} - M_C^{qt}\frac{\delta x}{R} - M_D^{qt}\frac{\delta x}{R} - F_A^{qt}\delta x - F_B^{qt}\delta x = 0$$

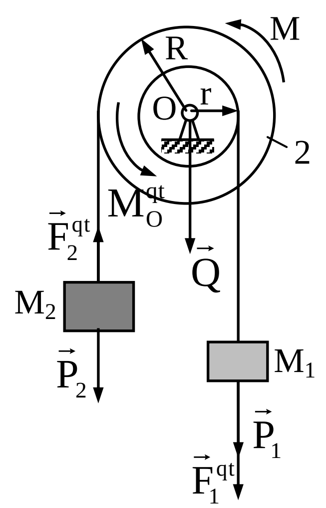
$$\Rightarrow \sum \delta A = (-P_1 + P_2 + \frac{M}{R} - \frac{M_C^{qt}}{R} - \frac{M_D^{qt}}{R} - F_A^{qt} - F_B^{qt})\delta x = 0$$

Do $\delta x \neq 0$ suy ra: $-P_1 + P_2 + \dfrac{M}{R} - \dfrac{M_C^{qt}}{R} - \dfrac{M_D^{qt}}{R} - F_A^{qt} - F_B^{qt} = 0$

Thay vào ta thu được kết quả như sau: $a = \dfrac{M + (P_2 - P_1)R}{(P_1 + P_2 + Q)R}g$

2. Ví dụ 2

Hai vật nặng M_1, M_2 có trọng lượng tương ứng P_1, P_2 được buộc vào hai dây quấn vào hai tang của một tời bán kính R, r. Để nâng vật nặng M_1 lên, tác dụng lên tời một mômen quay M. Tìm gia tốc góc của tời quay. Biết trọng lượng của tời là Q và bán kính quán tính đối với trục quay là ρ.



Bài giải

- Hệ có một bậc tự do.
- Các lực hoạt động tác dụng lên hệ: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{Q}, M$
- Các lực quán tính:

$$F_1^{qt} = \frac{P_1}{g}a_1 = \frac{P_1}{g}r\varepsilon$$

$$F_2^{qt} = \frac{P_2}{g}a_2 = \frac{P_2}{g}R\varepsilon$$

$$M_O^{qt} = J_O\varepsilon = \frac{Q}{g}\rho^2\varepsilon$$

Cho hệ một di chuyển khả dĩ ứng với tời quay một góc δφ theo chiều M, ta có:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} = P_2\delta s_2 - P_1\delta s_1 + M\delta\varphi - F_2^{qt}\delta s_2 - F_1^{qt}\delta s_1 - M_O^{qt}\delta\varphi = 0$$

Với $\quad \delta s_1 = r\delta\varphi, \quad \delta s_2 = R\delta\varphi$

Thay vào ta thu được kết quả như sau:

$$\varepsilon = \frac{M + P_2 R - P_1 r}{P_2 R^2 + Q\rho^2 + P_1 r^2} g$$

3.2. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG II

3.2.1. PHƯƠNG TRÌNH LAGRĂNG II

Từ phương trình tổng quát động lực học, ta có

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{qt} = 0 \qquad (3.4)$$

Giả sử hệ có n bậc tự do và vị trí của nó được xác định bởi các tọa độ suy rộng $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Theo công thức đã biết $\sum \delta A_k^a = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n$

Tương tự với các lực quán tính ta cũng có

$$\sum \delta A_k^{qt} = Q_1^{qt} \delta q_1 + Q_2^{qt} \delta q_2 + \ldots + Q_n^{qt} \delta q_n$$

Thay vào (3.4) ta có

$$\left(Q_1 + Q_1^{qt}\right)\delta q_1 + \left(Q_2 + Q_2^{qt}\right)\delta q_2 + \ldots + \left(Q_n + Q_n^{qt}\right)\delta q_n = 0$$

Vì $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ độc lập nhau nên đẳng thức trên chỉ thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_1^{qt} &= 0 \\ Q_2 + Q_2^{qt} &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_n + Q_n^{qt} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Mặt khác, qua một số phép biến đổi toán học và cơ học ta có

$$Q_i^{qt} = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \qquad (3.6)$$

Thay (3.6) vào (3.5) ta thu được

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_n} = Q_n \end{cases} \qquad (3.7)$$

Hệ (3.7) được gọi là phương trình Lagrăng II, mô tả chuyển động của cơ hệ. Trong đó $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ là các lực suy rộng ứng với các tọa độ suy rộng là $q_1, q_2, \ldots, q_n$. đã được xác định ở chương trước.

3.2.2. TÍCH PHÂN ĐẦU CỦA CHUYỂN ĐỘNG

1. Tích phân năng lượng

Khảo sát cơ hệ chịu liên kết hôlônôm, giữ, dừng và lý tưởng có n bậc tự do, Các lực hoạt động là các lực thế. Khi đó cơ năng của cơ hệ.

$$E = T + \Pi = \text{const} = h \tag{3.8}$$

Đẳng thức (3.8) được gọi là tích phân năng lượng, còn h được gọi là hằng số năng lượng, nó được xác định từ điều kiện đầu của chuyển động.

2. Tích phân xycơlic

Tọa độ q_s được gọi là tọa độ xycơlic, nếu:

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0, \quad Q_s = 0 \tag{3.9}$$

Lúc này phương trình Lagrăng II ứng với tọa độ này có dạng như sau

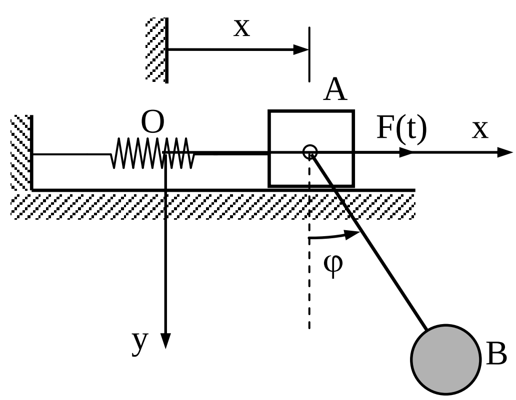
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = C \tag{3.10}$$

Đẳng thức (3.10) là một tích phân đầu của cơ hệ, được gọi là tích phân xycơlic.

3.2.3. VÍ DỤ

1. Ví dụ 1

Một con lắc toán học khối lượng m_2, dài l được nối vào con trượt A khối lượng m_1. Con trượt được nối vào tường bằng lò xo có độ cứng c. Cho biết con trượt A có thể trượt không ma sát trên nền nhẵn. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



Bài giải

Cơ hệ có 2 bậc tự do: n = 2

Chọn tọa độ suy rộng: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$

Phương trình Lagrăng II

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial x} = Q_x \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \end{cases}$$

Ta có động năng của cơ hệ: $T = T_A + T_B$

$$T_A = \frac{1}{2}m_1 v_A^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2$$

$$T_B = \frac{1}{2}m_2 v_B^2$$

Mặt khác

$$x_B = x + l\sin\varphi, \qquad \dot{x}_B = \dot{x} + l\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$y_B = l\cos\varphi, \qquad \dot{y}_B = -l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \ v_B^2 = \dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2 = \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2$$

Vậy thay vào ta thu được

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2 l^2\dot{\varphi}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Tính toán lực suy rộng: Chọn gốc thế năng là O

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^*$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*$$

Ta có :

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2 - m_2 gl\cos\varphi + C$$

Để tính lực suy rộng của các lực không thế ta có:

$$\sum \delta A = F(t)\delta x$$

$$\Rightarrow \ Q_x^* = F(t), \quad Q_\varphi^* = 0$$

Vậy ta tính được

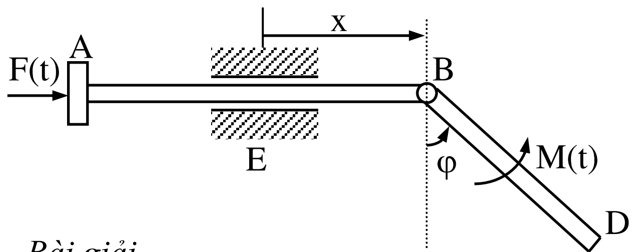
$$Q_x = -cx + F(t), \qquad Q_\varphi = -m_2 gl\sin\varphi$$

Thay vào phương trình Lagrăng II ta được:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\ddot{x}+m_2l\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2l\dot{\varphi}^2\sin\varphi=-cx+F(t)\\ \ddot{x}\cos\varphi+l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0\end{cases}$$

2. Ví dụ 2

Tay máy chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng, gồm hai thanh đồng chất AB và BD nối với nhau bằng bản lề B. Thanh AB nằm ngang, khối lượng ***m₁***, chịu tác dụng của lực nằm ngang ***F(t)***, trượt dọc trong rãnh E nhẵn trơn. Thanh thẳng BD có chiều dài ***2l*** khối lượng ***m₂***, chịu tác dụng của ngẫu lực có mô men ***M(t)***(Hình 2). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của tay máy theo các tọa độ suy rộng x, φ.



Bài giải

Cơ hệ có 2 bậc tự do: n = 2

Chọn tọa độ suy rộng: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$

Phương trình Lagrăng II

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial x}=Q_x\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}=Q_\varphi\end{cases}$$

Ta có động năng của cơ hệ: $T = T_{AB} + T_{BD}$

$$T_{AB}=\frac{1}{2}m_1\dot{x}^2,\quad T_{BD}=\frac{1}{2}m_2v_{C_2}^2+\frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2$$

$$x_{C_2}=x+l\sin\varphi,\quad \dot{x}_{C_2}=\dot{x}+l\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$y_{C_2}=l\cos\varphi,\qquad \dot{y}_{C_2}=-l\sin\varphi\dot{\varphi}$$

$$v_{C_2}^2=\dot{x}_{C_2}^2+\dot{y}_{C_2}^2=\dot{x}^2+2l\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+l^2\dot{\varphi}^2,\qquad J_{Cz}=\frac{m_2l^2}{3}$$

Thay vào ta có động năng của cơ hệ

$$T=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}^2+m_2l\cos\varphi\dot{x}\dot{\varphi}+\frac{2}{3}m_2l^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + \frac{4}{3}m_2 l^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{4}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

Tính toán lực suy rộng

$$Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x^*$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} + Q_\varphi^*$$

Ta có :

$$\Pi = -m_2 gl\cos\varphi + C$$

Để tính lực suy rộng của các lực không thế ta có:

$$\sum \delta A = F(t)\delta x + M(t)\delta\varphi$$

$$\Rightarrow \; \mathrm{Q}_\mathrm{x}^* = F(t), \quad \mathrm{Q}_\varphi^* = M(t)$$

Vậy ta tính được

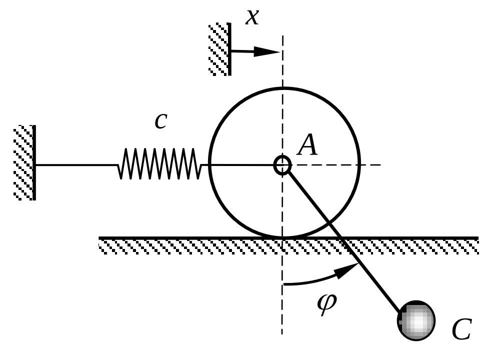
$$Q_x = F(t), \qquad \mathrm{Q}_\varphi = -m_2 gl\sin\varphi + M(t)$$

Thay vào phương trình Lagrăng II ta được:

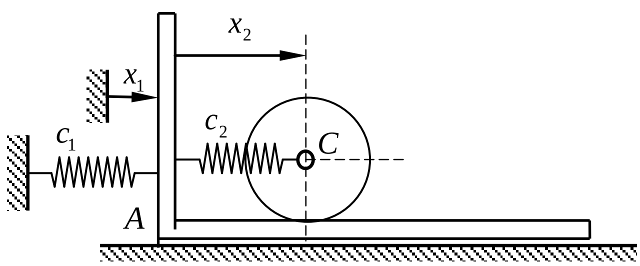
$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi = \mathrm{F(t)} \\ m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + \dfrac{4}{3}m_2 l^2\ddot{\varphi} = -m_2 gl\sin\varphi + M(t) \end{cases}$$

PHẦN BÀI TẬP CHƯƠNG 3

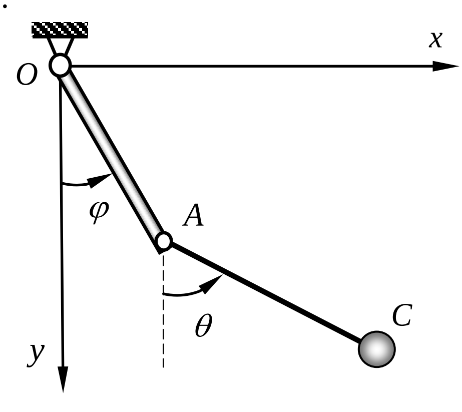
Bài 1: Thành lập phương trình vi phân chuyển động của một con lắc có khối lượng m_2 và có độ dài l, điểm treo của nó nằm tại tâm của đĩa tròn đồng chất bán kính r và có khối lượng m_1. Đĩa có thể lăn không trượt dọc theo trục ngang, tâm của đĩa nối với giá cố định nhờ một lò xo có độ cứng c.



Bài 2: Cho cơ hệ như trên hình vẽ. Con lăn tâm C là trụ tròn đồng chất, khối lượng m_2 lăn không trượt trên tấm A. Tấm A có khối lượng m_1, chuyển động không ma sát trên nền ngang. Các lò xo có độ cứng lần lượt là c_1 và c_2. Khi $x_1 = 0$ và $x_2 = l$, các lò xo không biến dạng. Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là x_1 và x_2. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.

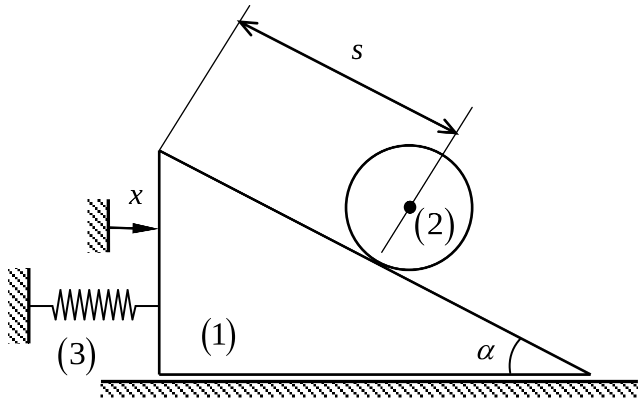


Bài 3: Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Thanh đồng chất OA trọng lượng $P = m_1 g$, chiều dài l_1, nối với giá cố định bằng bản lề O, khối tâm C_1. Thanh mảnh AC khối lượng không đáng kể, chiều dài l_2, nối với thanh OA bằng bản lề tại A (các trục khớp vuông góc mặt phẳng hình vẽ). Quả cầu nhỏ C trọng lượng $Q = m_2 g$ (coi như chất điểm). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.

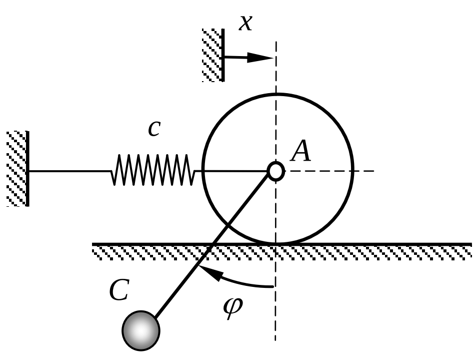


Bài 4: Theo mặt phẳng nghiêng của lăng trụ (1) hợp với phương ngang một góc α, một khối trụ đồng chất (2) có khối lượng m_2 chuyển động lăn không trượt làm cho lăng trụ dịch chuyển trên mặt phẳng nhẵn nằm ngang và lò xo (3) biến dạng. Lò xo (3) gắn vào tường thẳng đứng, có hệ số cứng c. Khi $x = 0$, lò xo không biến dạng. Khối lượng của lăng trụ là m_1.

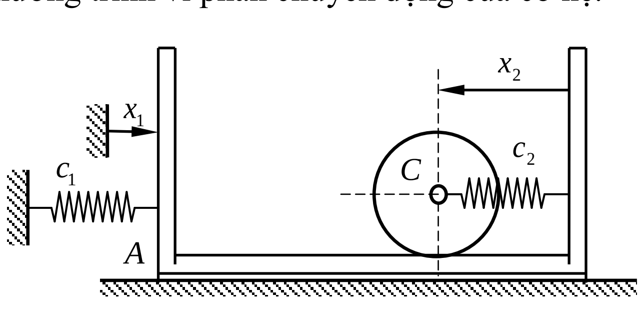
Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x và s.



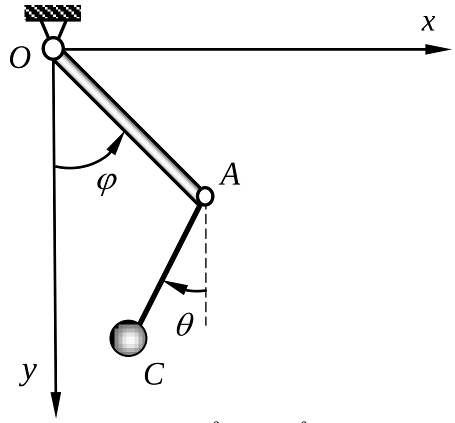
Bài 5: Thành lập phương trình vi phân chuyển động của một con lắc có khối lượng m_2 và có độ dài l, điểm treo của nó nằm tại tâm của đĩa tròn đồng chất bán kính r và có khối lượng m_1. Đĩa có thể lăn không trượt dọc theo trục ngang, tâm của đĩa nối với giá cố định nhờ một lò xo có độ cứng c.



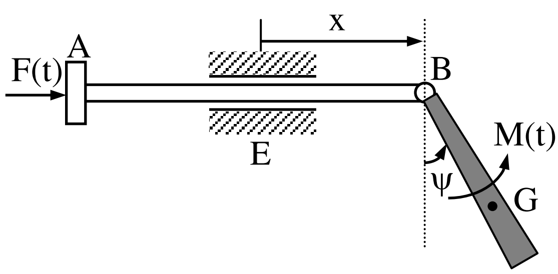
Bài 6: Cho cơ hệ như trên hình vẽ. Con lăn tâm C là trụ tròn đồng chất, khối lượng m_2 lăn không trượt trên tấm A. Tấm A có khối lượng m_1, chuyển động không ma sát trên nền ngang. Các lò xo có độ cứng lần lượt là c_1 và c_2. Khi $x_1 = 0$ và $x_2 = l$, các lò xo không biến dạng. Chọn tọa độ suy rộng cho hệ là x_1 và x_2. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ.



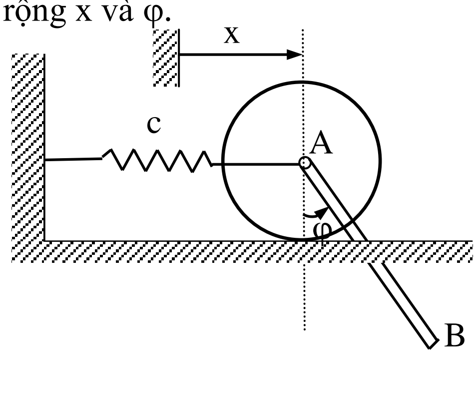
Bài 7: Cho cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng như hình vẽ. Thanh đồng chất OA trọng lượng $P = m_1 g$, chiều dài l_1, nối với giá cố định bằng bản lề O, khối tâm C_1. Thanh mảnh AC khối lượng không đáng kể, chiều dài l_2, nối với thanh OA bằng bản lề tại A (các trục khớp vuông góc mặt phẳng hình vẽ). Quả cầu nhỏ C trọng lượng $Q = m_2 g$ (coi như chất điểm). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ.



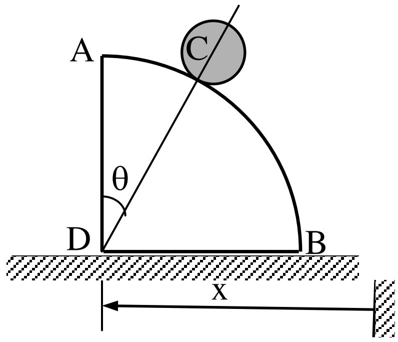
Bài 8: Tay máy chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng gồm thanh đồng chất AB và vật rắn G nối với nhau bằng bản lề B. Thanh AB nằm ngang, trọng lượng P, chịu tác dụng của lực nằm ngang ***F(t)***, trượt được trong rãnh E nhẵn trơn. Vật rắn G có trọng lượng ***Q***, khoảng cách từ điểm treo B đến khối tâm G là ***a***, mô men quán tính của vật G đối với trục đi qua điểm B của nó là J_B, đồng thời vật rắn G chịu tác dụng của ngẫu lực có mô men ***M(t)***(Hình 2). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của tay máy theo các tọa độ suy rộng x và ψ.



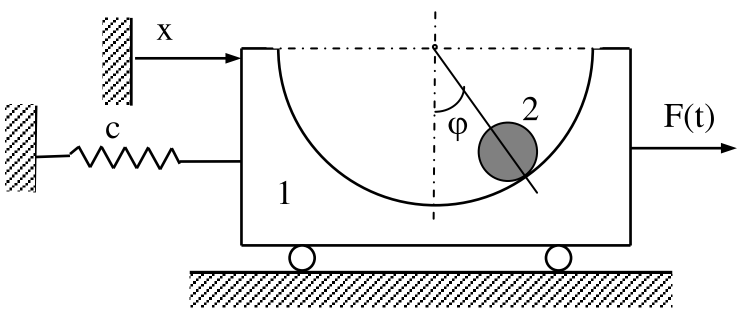
Bài 9: Cho con lăn là hình trụ đồng chất bán kính ***R*** trọng lượng ***P*** lăn không trượt trên mặt nằm ngang, tâm của đĩa nối với tường cố định nhờ một lò xo có độ cứng c. Thanh AB = ***l*** đồng chất trọng lượng Q nối bản lề tại A. Hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng(hình 2). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x và φ.



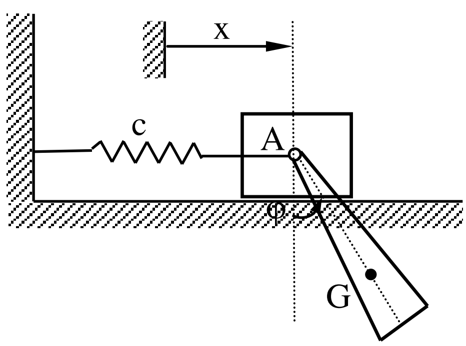
Bài 10: Vật 1 có khối lượng m_0, có biên dạng là cung phần tư đường tròn, bán kính R, có thể trượt không ma sát theo phương ngang. Đĩa tròn đồng chất C, có khối lượng m, bán kính r, lăn không trượt theo cung tròn AB. Bỏ qua ma sát lăn(hình 2). Viết phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng x và θ.



Bài 11: Trong xà 1 khối lượng $\boldsymbol{m_1}$, có khoét theo chiều dọc một rãnh trụ có bán kính $\boldsymbol{R}$, một hình trụ tròn đồng chất 2 bán kính $\boldsymbol{r}$, khối lượng $\boldsymbol{m_2}$ lăn không trượt trong rãnh. Trục rãnh và trục hình trụ 2 song song với nhau. Xà 1 chuyển động trên mặt phẳng ngang nhẵn dưới tác dụng của lực ngang ***F(t)***, lực đàn hồi tuyến tính của lò xo có độ cứng c(hình 2). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ theo tọa độ suy rộng x và φ.



Bài 12: Vật 1 có khối lượng m_1 đặt trên nền ngang nhẵn. Con lắc 2 có khối lượng m_2 quay được quanh trục A, mô men quán tính đối với trục qua khối tâm G là J, khoảng cách AG = L. Lò xo có độ cứng c, khi x = 0 lò xo không biến dạng(hình 2). Thiết lập phương trình vi phân chuyển động của hệ theo tọa độ suy rộng x và φ.



Chương 4

VA CHẠM CỦA CÁC VẬT RẮN

Va chạm là một hiện t- ợng cơ học hay gặp trong kỹ thuật. Có những và chạm có hại, ta không mong muốn (va chạm của hai ôtô, ...), nh- ng cũng có những hiện t- ợng va chạm có lợi, đ- ợc sử dụng trong kỹ thuật (búa đóng cọc, các máy va rung, ...).

4.1.CÁC GIẢ THIẾT GẦN ĐÚNG TRONG QUÁ TRÌNH VA CHẠM

4.1.1.Định nghĩa

Va chạm của các vật rắn là sự tiếp xúc bất thình lình của các vật rắn, gây nên sự thay đổi các đặc tr□ng cơ học của các vật thể này : vận tốc các điểm và vận tốc góc của các vật rắn va nhau thay đổi một l□ợng hữu hạn trong một khoảng thời gian rất bé.

4.1.2.Các đặc điểm của quá trình va chạm

1.Thời gian va chạm

Trong quá trình va chạm giữa các vật rắn, thời gian va chạm rất bé. Ký hiệu t_1 là thời điểm đầu va chạm, t_2 là thời điểm cuối va chạm, ta có $\Delta t = t_2 - t_1$ rất bé.

2.Sự biến dạng và khôi phục khi va chạm

Trong quá trình va chạm, các vật rắn va nhau và bị biến dạng ở vùng tiếp xúc. Mức độ và trạng thái biến dạng phụ thuộc vào bản chất đàn hồi của hai mặt va chạm vào nhau. Quan sát các vật thể va chạm, ta thấy : Lúc đầu các vật thể bị biến dạng ở vùng tiếp xúc, sau đó do tính chất đàn hồi của vật liệu, chúng khôi phục lại dần hình dáng cũ. Căn cứ vào tính chất đàn hồi của vật liệu, ng- ời ta phân loại va chạm nh- sau :

- Va chạm mềm : không có giai đoạn khôi phục.
- Va chạm đàn hồi : có giai đoạn khôi phục.
- Va chạm tuyệt đối đàn hồi : Các vật thể khôi phục lại đúng hình dáng cũ.

3.Lực va chạm và xung lực va chạm

Khi hai vật rắn va nhau, các lực liên kết xuất hiện ở các vật va nhau trong thời gian va chạm đ- ợc gọi là các lực va chạm. Các loại lực hoạt động khác tác dụng lên các vật rắn va chạm đ- ợc gọi là các lực thông th- ờng. Ký hiệu lực va chạm là $\vec{R}(t)$.

Do quá trình va chạm xảy ra trong khoảng thời gian rất nhỏ, vận tốc các điểm thay đổi một l- ợng hữu hạn, cho nên các lực va chạm có trị số rất lớn và biến thiên rất nhanh. Vì vậy, ng- ời ta th- ờng đánh giá tác dụng của lực va chạm qua xung l- ợng của chúng.

Định nghĩa : Xung l□ợng của lực va chạm trong thời gian va chạm $\Delta t = t_2 - t_1$ đ□ợc gọi là xung lực va chạm.

$$\vec{S} = \int_{t1}^{t2} \vec{R}(t)dt \qquad (4.1)$$

4.1.3.Các giả thiết gần đúng

+ Vùng tiếp xúc biến dạng của các vật rắn là một vùng nhỏ so với diện tích bề mặt của các vật rắn va chạm vào nhau. Do đó, ta có thể sử dụng mô hình hai vật rắn tiếp xúc điểm khi tính toán va chạm của các vật rắn.

+ Trong quá trình va chạm, do thời gian va chạm Δt rất bé, sự thay đổi vị trí các vật thể va chạm là nhỏ. Do đó, ta có thể bỏ qua dịch chuyển trong va chạm.

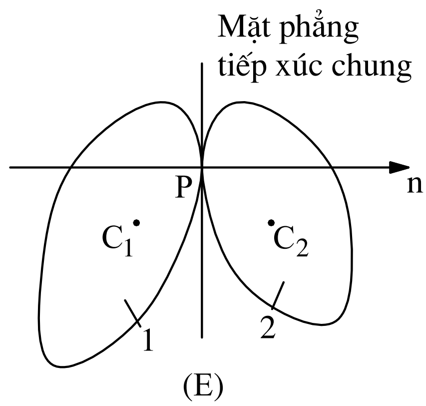
+ Các lực va chạm lớn tới mức có thể bỏ qua tác dụng của các lực thông th- ờng (trọng l- ợng, sức đẩy của gió, lực cản không khí, ...) trong thời gian va chạm.

4.1.4.Mô hình cơ học của hai vật rắn phẳng va chạm

Xét hai vật rắn 1 và 2. Trong thời gian va chạm, chúng tiếp xúc với nhau tại điểm P. Ta ký hiệu P_1 là điểm thuộc vật rắn 1, P_2 là điểm thuộc vật rắn 2, tại thời điểm va chạm chúng trùng nhau tại P.

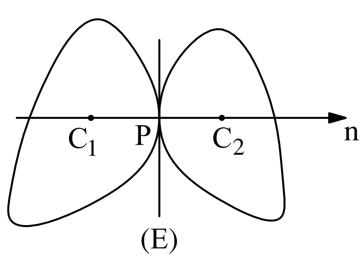
1.Mặt phẳng tiếp xúc và đ□ờng va chạm

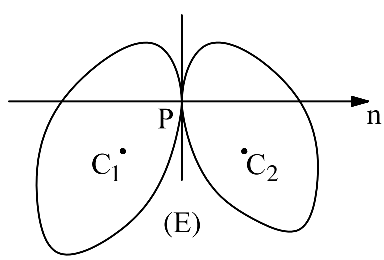
Khi hai vật rắn chạm vào nhau, ở điểm tiếp xúc P, chúng có chung một mặt phẳng tiếp tuyến gọi là mặt phẳng tiếp xúc. Đ- ờng pháp tuyến chung với mặt phẳng tiếp xúc tại P gọi là đ- ờng va chạm, ký hiệu Pn.



2.Sự phân loại va chạm

a.Va chạm xuyên tâm và va chạm không xuyên tâm :

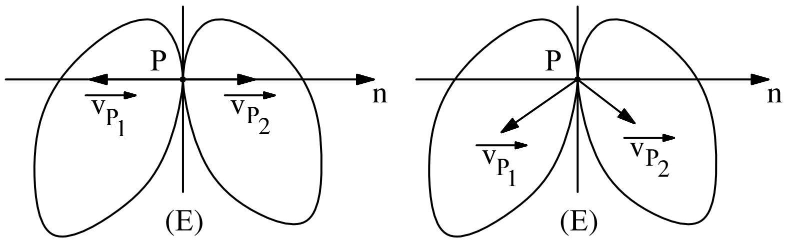




Nếu đ- ờng va chạm đi qua C_1, C_2 thì va chạm đ- ợc gọi là xuyên tâm.

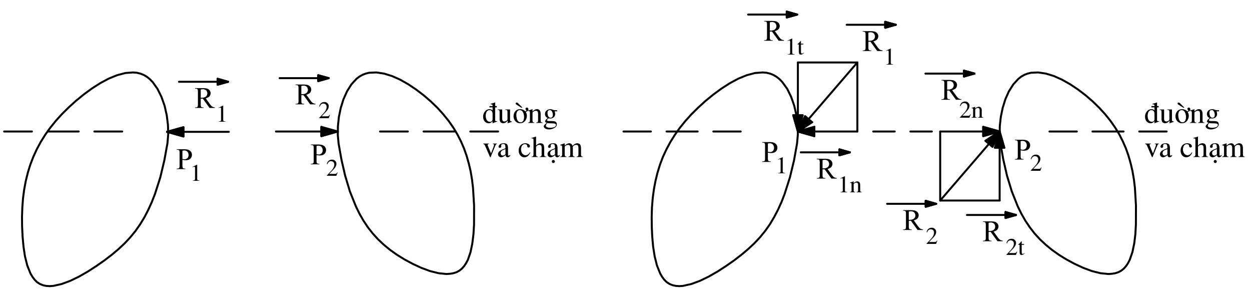
Nếu đ- ờng va chạm không đi qua C_1, C_2 thì va chạm đ- ợc gọi là không xuyên tâm.

b.Va chạm thẳng và va chạm xiên



Nếu vận tốc ở điểm tiếp xúc P dọc theo h- ớng đ- ờng va chạm thì va chạm đ- ợc gọi là va chạm thẳng. Ng- ợc lại khi vận tốc ở điểm tiếp xúc P không trùng với h- ớng của đ- ờng va chạm thì va chạm đ- ợc gọi là va chạm xiên.

c.Va chạm nhẵn (không có ma sát) và không nhẵn (có ma sát) :



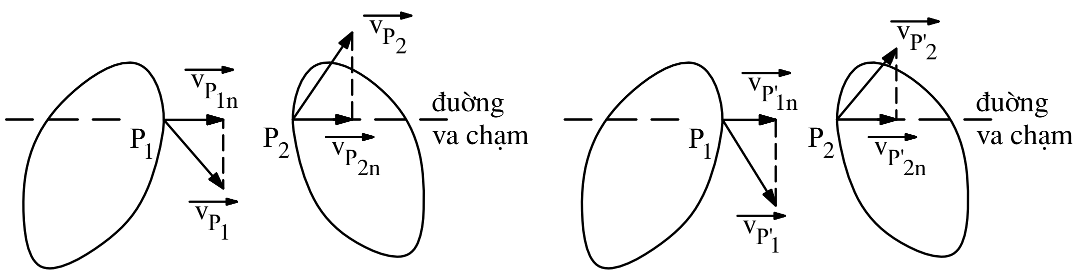
$$\overrightarrow{R_1} = -\overrightarrow{R_2}$$

$$\overrightarrow{R_{1n}} = -\overrightarrow{R_{2n}}$$
$$\overrightarrow{R_{1t}} = -\overrightarrow{R_{2t}}$$

Va chạm đ- ợc gọi là nhẵn nếu lực va chạm giữa hai vật thể dọc theo h- ớng của đ- ờng va chạm. Ng- ợc lại, khi lực va chạm có thành phần tiếp tuyến khác không, va chạm đ- ợc gọi là không nhẵn.

3.Định luật Niutơn và Poatxông về va chạm

a.Định luật Niutơn



Tr- ớc va chạm   Sau va chạm

Ta có : $e = -\dfrac{v'_{P2n} - v'_{P1n}}{v_{P2n} - v_{P1n}} = const$ (4.2)

v_{P1}, v_{P2} : vận tốc của P_1, P_2 tr- ớc va chạm.

v'_{P1}, v'_{P2} : vận tốc của P_1, P_2 sau va chạm.

e : hệ số khôi phục (hệ số va chạm). Hệ số này phụ thuộc vào tính chất của vật liệu các vật va chạm, th- ờng đ- ợc xác định bằng thực nghiệm.

b.Định luật Poatxông :

Thời gian va chạm đ- ợc chia làm hai giai đoạn : giai đoạn biến dạng $(t_1 \le t \le t_C)$ và giai đoạn khôi phục $(t_C \le t \le t_2)$.

Ký hiệu $\overrightarrow{S_1}$ là xung lực va chạm trong giai đoạn biến dạng, $\overrightarrow{S_2}$ là xung lực va chạm trong giai đoạn khôi phục.

Ta có : $\bar{e} = \dfrac{S_2}{S_1} = const$, $\bar{e}$: hệ số khôi phục (hệ số biến dạng).

Nếu va chạm nhẵn (không có ma sát) thì $\bar{e} = e$.

Do đó ta dùng ký hiệu e để chỉ hệ số khôi phục Niutơn cũng nh- Poatxông.

Nhận xét :

+ Va chạm mềm : e = 0.

+ Va chạm tuyệt đối đàn hồi : e = 1.

+ Va chạm đàn hồi : 0 < e < 1.

4.2.CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA ĐỘNG LỰC HỌC TRONG QUÁ TRÌNH VA CHẠM

4.2.1.Định lý động l□ợng

Định lý động l- ợng của cơ hệ : $\overrightarrow{Q_2} - \overrightarrow{Q_1} = \sum \overrightarrow{S_k^e}$ (4.3)

$\sum \overrightarrow{S_k^e}$: tổng xung l- ợng của các ngoại lực $\overrightarrow{F_k^e}$.

Trong bài toán va chạm, do bỏ qua các lực thông th- ờng nên $\sum \overrightarrow{S_k^e}$ là tổng xung l- ợng các lực va chạm ngoài.

Mặt khác :

$$\overrightarrow{Q_1} = M\overrightarrow{v_C}(t_1), \quad \overrightarrow{Q_2} = M\overrightarrow{v_C}(t_2) \tag{4.4}$$

Với M là khối l- ợng toàn cơ hệ, $\overrightarrow{v_C}(t_1), \overrightarrow{v_C}(t_2)$ là vận tốc khối tâm của cơ hệ tr- ớc và sau va chạm.

Định lý : Biến thiên động l- ợng của cơ hệ trong va chạm bằng tổng xung l- ợng các lực va chạm ngoài.

$$M\overrightarrow{v_C}(t_2) - M\overrightarrow{v_C}(t_1) = \sum \overrightarrow{S_k^e} \tag{4.5}$$

4.2.2.Định lý momen động l□ợng

Định lý momen động l- ợng đối với cơ hệ có dạng :

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \sum \overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e}) \tag{4.6}$$

$\overrightarrow{L_0}$: momen động l- ợng cơ hệ đối với điểm O.

$\sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e}) = \sum\overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{F_k^e}$: tổng momen của các ngoại lực va chạm tác dụng lên cơ hệ đối với điểm O, $\overrightarrow{r_k}$: vectơ định vị của chất điểm M_k đối với điểm O.

$$d\overrightarrow{L_0} = \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{F_k^e})dt = \sum(\overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{F_k^e})dt$$

Tích phân hai vế trong khoảng thời gian va chạm Δt, ta có :

$$\overrightarrow{L_0^{(2)}} - \overrightarrow{L_0^{(1)}} = \sum\int_{t1}^{t2}(\overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{F_k^e})dt = \sum\overrightarrow{r_k}\wedge\int_{t1}^{t2}\overrightarrow{F_k^e}dt = \sum\overrightarrow{r_k}\wedge\overrightarrow{S_k^e} = \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{S_k^e})$$

Do bỏ qua sự dịch chuyển trong va chạm nên $\overrightarrow{r_k} = const$.

$\overrightarrow{S_k^e}$: xung l- ợng của lực va chạm ngoài tác dụng lên chất điểm M_k.

Vậy : $\overrightarrow{L_0^{(2)}} - \overrightarrow{L_0^{(1)}} = \sum\overrightarrow{m_0}(\overrightarrow{S_k^e})$ (4.8)

Từ đó ta có :

$$\overline{L_z^{(2)}} - \overline{L_z^{(1)}} = \sum\overline{m_z}(\overrightarrow{S_k^e}) \quad (4.9)$$

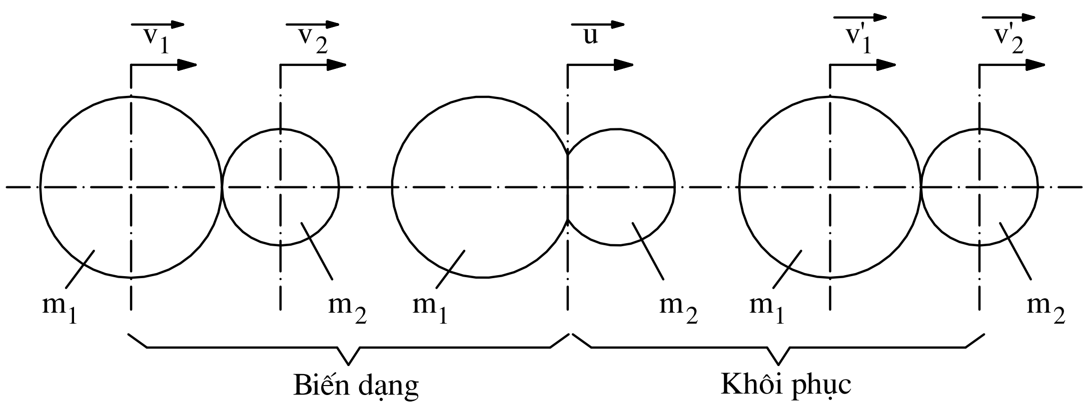
Trong tr- ờng hợp vật rắn quay quanh trục cố định, ta có :

$$J_z\overline{\omega_2} - J_z\overline{\omega_1} = \sum\overline{m_z}(\overrightarrow{S_k^e}) \quad (4.10)$$

4.3.VA CHẠM THẲNG XUYÊN TÂM CỦA HAI VẬT RẮN CHUYỂN ĐỘNG TỊNH TIẾN

4.3.1.Mô hình cơ học

Cho hai quả cầu đồng chất, khối l- ợng m_1, m_2 chuyển động tịnh tiến với vận tốc $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ($v_1 > v_2$) cùng h- ớng theo đ- ờng va chạm, đồng thời cũng là đ- ờng xuyên tâm C_1PC_2. Tìm vận tốc khối tâm hai vật sau va chạm $\overrightarrow{v'_1}, \overrightarrow{v'_2}$ và l- ợng mất động năng ΔT qua va chạm. Cho biết hệ số khôi phục là e.



Các giai đoạn va chạm

+ Giai đoạn biến dạng: xảy ra trong khoảng thời gian từ $t_1 \to t_C$, bắt đầu từ lúc hai vật tiếp xúc nhau, có vận tốc khác nhau $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ và kết thúc khi chúng có vận tốc bằng nhau $\vec{u}$. Gọi xung lực va chạm trong giai đoạn này là $\vec{S_1}$.

+ Giai đoạn khôi phục: xảy ra trong khoảng thời gian từ $\vec{t_C} \to t_2$, bắt đầu từ lúc hai vật có vận tốc bằng nhau $\vec{u}$ và kết thúc khi hai vật rời nhau và có vận tốc $\vec{v'_1}, \vec{v'_2}$. Gọi xung lực va chạm trong giai đoạn này là $\vec{S_2}$.

Do bỏ qua ma sát tại điểm tiếp xúc P nên $\vec{S_1}, \vec{S_2}$ h- ớng theo đ- ờng va chạm C_1PC_2.

4.3.2.Các ph□ơng trình va chạm

Dựa vào định lý động l- ợng trong va chạm, ta viết ph- ơng trình va chạm cho từng vật trong các giai đoạn va chạm.

Trong giai đoạn biến dạng :

+ vật 1 : $m_1u - m_1v_1 = -S_1$

+ vật 2 : $m_2u - m_2v_2 = S_1$

Trong giai đoạn khôi phục :

+ vật 1 : $m_1v'_1 - m_1u = -S_2$

+ vật 2 : $m_2v'_2 - m_2u = S_2$

Định luật Poatxông :

$S_2 = eS_1$

Kết quả :

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} \tag{4.11}$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{4.12}$$

$$\Rightarrow S_2 = eS_1 = e\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \tag{4.13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_1 = v_1 - (1+e)\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2) \\ v'_2 = v_2 - (1+e)\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1) \end{cases} \tag{4.14}$$

4.3.3.Xác định l□ợng mất động năng qua va chạm

Biểu thức động năng hệ hai quả cầu tr- ớc và sau va chạm là :

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2$$

$$=> \Delta T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}m_1(v_1^2 - v'^2_1) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 - v'^2_2) = \frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1 - v_2)^2 \quad (4.15)$$

Công thức (4.15) biểu diễn l- ợng mất động năng qua va chạm.

Đại l- ợng $\eta = \frac{\Delta T}{T_1}$ đ- ợc gọi là hệ số hiệu dụng va chạm.

Xét tr- ờng hợp riêng, khi $v_2 = 0$ (vật rắn thứ hai đứng yên). Khi đó biểu thức (3.12) có dạng :

$$\Delta T = \frac{1-e^2}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_1^{\,2}, \quad T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$$=> \eta = \frac{\Delta T}{T_1} = (1-e^2)\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

Trên cơ sở công thức (3.13) rút ra một số kết luận ứng dụng quan trọng nh- sau :

+ Khi m_1 (khối l- ợng vật va chạm) >> m_2 (khối l- ợng vật bị va chạm)

$\frac{m_2}{m_1+m_2}$ << 1 => ΔT nhỏ.

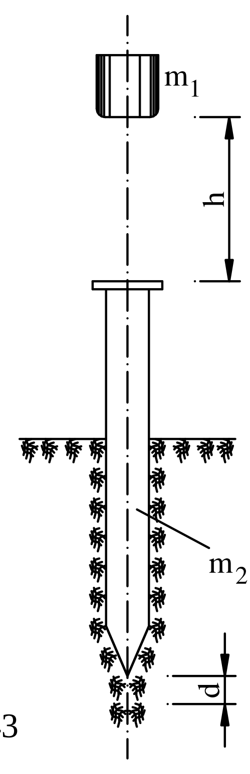
Vậy khi đóng cọc, đóng đinh, ... khối l- ợng búa phải lớn hơn khối l- ợng của cọc, của đinh nhiều lần để giảm năng l- ợng bị tiêu hao vào biến dạng.

+ Khi m_1 (khối l- ợng vật va chạm) << m_2 (khối l- ợng vật bị va chạm)

$\frac{m_2}{m_1+m_2} \approx 1$ => ΔT lớn.

Nh- vậy khi rèn, cắt thì khối l- ợng đe phải lớn hơn khối l- ợng búa nhiều lần để tăng năng l- ợng tiêu hao sử dụng vào biến dạng.

4.3.4.Ví dụ



Để gia cố nền móng, ng- ời ta dùng búa đóng cọc xuống nền đất. Búa có khối l- ợng m_1, rơi không vận tốc đầu từ độ cao h so với đầu cọc, cọc có khối l- ợng m_2. Sau mỗi lần va đập, cọc đi xuống một đoạn d. Tìm lực cản trung bình của đất lên cọc. Giả thiết va chạm của búa và cọc là va chạm mềm.

Bài giải

Do va chạm là mềm nên chỉ có giai đoạn biến dạng và hệ số khôi phục e = 0. □p dụng định luật bảo toàn cơ năng, tìm đ- ợc vận tốc của búa tr- ớc khi va chạm :

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = m_1gh => v_1 = \sqrt{2gh}$$

Vận tốc của cọc $v_2 = 0$

Kết thúc quá trình va chạm, vận tốc chung của búa và cọc là u :

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

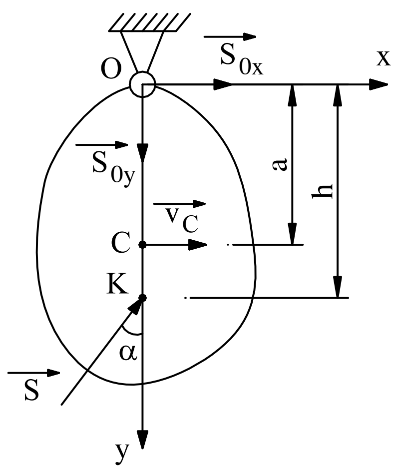
Sau khi búa và cọc nhận đ- ợc vận tốc u thì cùng lún xuống một đoạn d rồi dừng lại. □p dụng định lý biến thiên động năng dạng hữu hạn

$$0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 = -F_{tb}d$$

$$=> F_{tb} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2d} = g\,\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)}\frac{h}{d}$$

4.4.VA CHẠM CỦA VẬT QUAY QUANH MỘT TRỤC CỐ ĐỊNH

4.4.1.Đặt bài toán



Xét một tấm phẳng, khối l- ợng M có khối tâm C nằm trong mặt phẳng đối xứng Oxy và quay quanh Oz cố định vuông góc với mặt phẳng xy. Xung lực va chạm $\vec{S}$ tác dụng nằm trong mặt phẳng đối xứng tại điểm K và nghiêng góc với trục OC một góc α. Giả thiết ban đầu OC = a nằm trên đ- ờng thẳng đứng và vận tốc góc của tấm phẳng là ω_0.

Xác định vận tốc góc ω của tấm sau va đập và xung lực của phản lực ở tại trục quay Oz.

□p dụng định lý biến thiên động l- ợng ta có :

$$M\overrightarrow{v_C} - M\overrightarrow{u_C} = \vec{S} + \overrightarrow{S_0} \tag{4.16}$$

Trong đó, M là khối l- ợng của tấm, $\overrightarrow{u_C}, \overrightarrow{v_C}$ là vận tốc khối tâm C của tấm tr- ớc và sau va chạm.

$\overrightarrow{S_0}$: xung l- ợng va chạm của phản lực tại O.

Chiếu đẳng thức (9.16) lên hai trục Ox và Oy, ta có :

$$Mv_C - Mu_C = S\sin\alpha + S_{0x} \tag{4.17}$$

$$0 = -S\cos\alpha + S_{0y} \tag{4.18}$$

□p dụng định lý biến thiên momen động l- ợng ta có :

$$J_{0z}\omega - J_{0z}\omega_0 = \overline{m}_{0z}(\vec{S}) \tag{4.19}$$

$$=> J_{0z}(\omega - \omega_0) = S\sin\alpha.h \tag{4.20}$$

Với $u_C = a\omega_0$ và $v_C = a\omega$. Thay vào (4.17)

$$=> Ma(\omega - \omega_0) = S\sin\alpha + S_{0x} \tag{4.21}$$

Từ ph- ơng trình (4.18) => $S_{0y} = S\cos\alpha$

Từ ph- ơng trình (4.19) và (4.20) :

=> $S_{0x} = S\sin\alpha(\frac{Mah}{J_{0z}} - 1)$

Từ ph- ơng trình (4.21) ta có :

$$\omega = \omega_0 + \frac{h}{J_{0z}} S\sin\alpha \tag{4.22}$$

Nh- vậy, d- ới tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ thì tại trục quay Oz xuất hiện hai thành phần của xung lực phản lực động $\overrightarrow{S_0}$ là $\overrightarrow{S_{0x}}$ và $\overrightarrow{S_{0y}}$. Hai thành phần xung lực này có tác dụng phá hoại rất lớn đối với ổ trục.

Điều kiện không xuất hiện phản lực va đập ở trục quay $(S_{0x} = S_{0y} = 0)$

$$S_{0y} = S\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{4.23}$$

$$S_{0x} = S\sin\alpha(\frac{Mah}{J_{0z}} - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{Mah}{J_{0z}} - 1 \;\Rightarrow\; h = \frac{J_{0z}}{Ma} \tag{4.24}$$

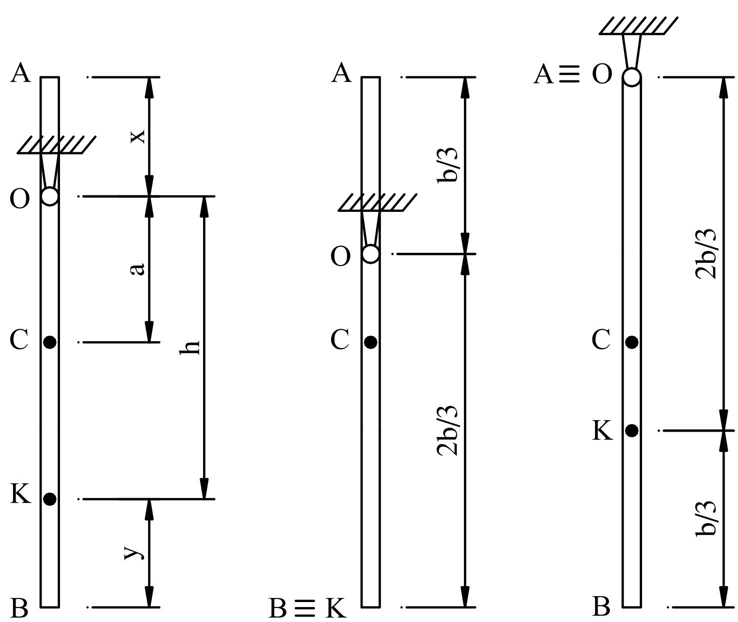
Vậy, điều kiện để không xuất hiện xung phản lực va đập ở trục quay khi vật rắn chịu tác dụng của xung lực va chạm $\vec{S}$ là : xung lực va chạm $\vec{S}$ phải vuông góc với đ- ờng OC và điểm K cách O một đoạn $h = OK = \frac{J_{0z}}{Ma}$

Định nghĩa tâm va chạm : Điểm K trên đ- ờng OC mà $OK = \frac{J_{0z}}{Ma}$ đ- ợc gọi là tâm va chạm của vật rắn quay.

4.4.2.Ví dụ

Xác định tâm va chạm của một thanh AB = b, quay trong mặt phẳng thẳng đứng quanh điểm O cố định.

Bài giải



hình a hình b hình c

Giả sử điểm O cách đầu A một đoạn OA = x. Gọi K là tâm va chạm, cách đầu B một đoạn KB = y. Đặt OK = h và OC = a.

Theo biểu thức :

$$OK = h = \frac{J_{0z}}{Ma} \quad \text{(a)}$$

Ta biết : $J_{0z} = J_{Cz} + Ma^2$

=> $h = \frac{J_{Cz} + Ma^2}{Ma} = \frac{J_{Cz}}{Ma} + a$

Thay : $h = a + \frac{b}{2} - y$; $a = \frac{b}{2} - x$; $J_{Cz} = \frac{Mb^2}{12}$

Thay vào biểu thức (a) và biến đổi ta có :

$$12\left(\frac{1}{2} - y\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) = b^2 \quad \text{(b)}$$

Từ (b) ta thấy khi cho biết x thì xác định đ- ợc y và ng- ợc lại. Hai thông số này có thể hoán vị đ- ợc cho nhau. Điều này có nghĩa là tâm va chạm và trục quay có thể thay đổi vị trí cho nhau.

+ Nếu giả sử cho $y = 0$ thì $x = \frac{b}{3}$, tức là khi tâm va chạm K nằm tại một đầu B của thanh thì trục quay O ở cách đầu kia một đoạn bằng $\frac{b}{3}$. Với b là chiều dài thanh (hình b).

Điều này đ- ợc xác nhận trong các tr- ờng hợp : khi cầm búa, cầm rìu, cầm cuốc để chỗ tay cầm không bị đau (không xuất hiện xung phản lực) thì điểm cầm của tay (trục quay O) phải cách đầu kia một đoạn bằng $\frac{1}{3}$ chiều dài cán búa.

+ Nếu cho $x = 0$ thì $y = \frac{b}{3}$, nghĩa là trục quay O nằm tại một đầu thanh thì tâm va chạm K nằm cách trục quay O một đoạn $OK = \frac{2}{3}b$. Tr- ờng hợp này thấy rõ trong máy nghiền bủa để nghiền vật liệu. Muốn trục quay của búa không xuất hiện xung phản lực, cần phải cho vật liệu nghiền va chạm với búa tại điểm cách trục quay bằng $\frac{2}{3}$ chiều dài cán búa (hình c).

Chương 5

DAO ĐỘNG TUYẾN TÍNH HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Dao động là một quá trình thay đổi theo thời gian mà có một đặc điểm nào đó lặp lại ít nhất một lần.

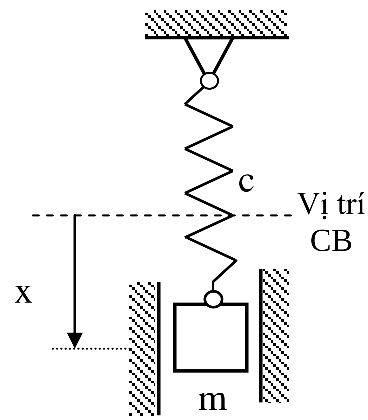
Dao động là một hiện tượng phổ biến trong thiên nhiên cũng như trong kỹ thuật và sản xuất. Nghiên cứu lý thuyết dao động cho phép vận dụng giải quyết các bài toán dao động thực tế, lý thuyết dao động đã trở thành một yêu cầu của cán bộ kỹ thuật, đặc biệt là các ngành cơ khí, chế tạo máy, xây lắp máy, giao thông vận tải, xây dựng, cầu đường, thuỷ lợi, kiến trúc, ...

Trong phạm vi bài giảng, thông qua nghiên cứu dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do, chúng ta sẽ tiếp cận các khái niệm cơ bản ban đầu của môn học quan trọng này.

5.1 Dao động tự do không cản

5.1.1 Các thí dụ về thiết lập phương trình vi phân dao động

Thí dụ 1: Dao động của một vật nặng treo vào lò xo.



Xét vật nặng có khối lượng m treo vào lò xo có hệ số cứng c. Bỏ qua khối lượng của lò xo.

Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \Pi = \frac{1}{2}cx^2$$

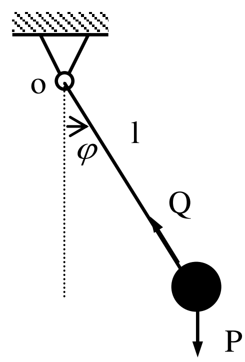
Thế vào phương trình Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Ta nhận được phương trình dao động của hệ

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Thí dụ 2: Dao động của con lắc toán học



Động năng và thế năng của hệ có dạng

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Pi = -mgy = -mgl\cos\varphi$$

Thê vào phương trình Lagrange loại hai ta có phương trình sau

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Trường hợp con lắc dao động nhỏ, ta có $\sin\varphi \approx \varphi$. Khi đó phương trình dao động nhỏ của con lắc toán học có dạng.

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$

5.1.2 Tính toán dao động tự do không cản

Nếu sử dụng ký hiệu $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ (1.1)

Thì phương trình dao động tự do không cản có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (1.2)$$

Nghiệm của phương trình (2.1) có dạng

$$q = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t \quad (1.3)$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý. Các hằng số này được xác định từ điều kiện đầu

$$t = 0; \quad q(0) = q_0; \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$$

Để xác định các hằng số C_1, C_2 ta đạo hàm (1.3) theo thời gian

$$\dot{q} = -C_1\omega_0 \sin\omega_0 t + C_2\omega_0 \cos\omega_0 t \quad (1.4)$$

Thế các điều kiện đầu vào (1.3) và (1.4) ta được

$$C_1 = q_0, \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} \quad (1.5)$$

Chú ý nghiệm (1.3) cũng có thể viết dưới dạng

$$q = A\sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (1.6)$$

Trong đó A và α là các hằng số tùy ý. Do hệ thức

$$\sin(\omega_0 t + \alpha) = \sin\omega_0 t\cos\alpha + \sin\alpha\cos\omega_0 t$$

Nên từ (1.3) (1.5) và (1.6) dễ dàng tính được

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0^2}{\omega_0}\right)}, \qquad tg\alpha = \frac{C_1}{C_2} = \omega_0\frac{q_0}{\dot{q}_0} \quad (1.7)$$

Biểu thức (1.6) ta thấy dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do được mô tả bởi hàm điều hòa. Vì vậy dao động tự do không cản còn được gọi là dao động điều hòa.

* *Nhận xét, dao động tự do không cản của hệ một bậc tự do là dao động điều hòa có các tính chất sau:*

- Tần số riêng và chu kỳ dao động không phụ thuộc vào các điều kiện đầu mà chỉ phụ thuộc vào các tham số của hệ.
- Biên độ dao động là hằng số. Biên độ dao động và pha ban đầu của dao động tự do không cản phụ thuộc vào các điều kiện đầu và các tham số của hệ.

Việc xác định tần số dao động riêng (1.1) là nhiệm vụ quan trọng nhất của bài toán dao động tự do.

5.2 Dao động tự do có cản

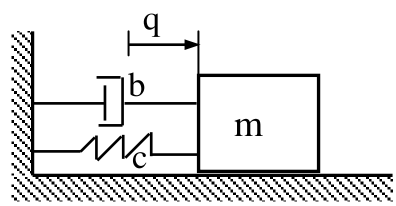
Quan sát hệ dao động, ta thấy dao động tự do nói chung tắt dần theo thời gian đó là ảnh hưởng của lực cản. Hai loại lực cản phổ biến nhất là lực ma sát nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc và lực ma sát khô.

- ***Tính toán dao động tự do có ma sát nhớt***

Xét dao động của hệ như hình vẽ. Do có thêm lực cản nhớt tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, nên phương trình vi phân dao động của hệ là.

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0 \qquad (2.1)$$

Nếu ta đưa vào các ký hiệu



$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}; \qquad 2\delta = \frac{b}{m} \qquad (2.2)$$

Phương trình (2.1) có dạng

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (2.3)$$

Phương trình đặc trưng của (2.3) là

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (2.4)$$

Tùy theo quan hệ giữa δ và ω_0, có thể xảy ra các trường hợp sau

$\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ): $\qquad \lambda_{1,2} = -\delta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\delta \geq \omega_0$ (lực cản lớn): $\qquad \lambda_{1,2} = -\delta \mp \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

a) Trường hợp thứ nhất $\delta < \omega_0$ (lực cản nhỏ)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t) \qquad (2.5)$$

Trong đó $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (2.6)$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu

$t=0$: $\qquad q(0)=q_0 \qquad \dot{q}(0) = \dot{q}_0$

Từ các điều kiện đầu dễ dàng xác định được

$$C_1 = q_0; \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + \delta q_0}{\omega} \qquad (2.7)$$

Để biến đổi biểu thức (2.5) ta đưa vào các hằng số A và β xác định theo biểu thức sau

$$C_1 = A\sin\beta \qquad C_2 = A\cos\beta$$

Từ đó suy ra $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ $\quad\quad tg\beta = \dfrac{C_1}{C_2}$

Biểu thức nghiệm (2.5) bây giờ có thể viết dưới dạng

$$q = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) \tag{2.8}$$

Từ biểu thức nghiệm (2.8) ta thấy: Khi lực cản đủ nhỏ, hệ thực hiện dao động tắt dần. Độ lệch $Ae^{-\delta t}$ giảm theo luật số mũ, tiệm cận tới không. Dao động được mô tả bởi phương trình (2.8) là dao động họ hình sin.

Để đặc trưng cho độ tắt dần của dao động tự do có cản nhớt, ta đưa vào khái niệm độ tắt lôga. Độ tắt lôga Λ được xác định bởi hệ thức

$$\Lambda = \ln\frac{q(t)}{q(t+T)} = \delta T$$

Độ tắt lôga đặc trưng cho độ giảm "biên độ" dao động tắt dần. Trong thực tế ta thường xác định tỷ số hai biên độ dao động sau k chu kỳ

$$\frac{q(t)}{q(t+kT)} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+kT)}} = e^{\delta kT}$$

Từ đó ta suy ra

$$\Lambda = \delta T = \frac{1}{k}\ln\frac{q(t)}{q(t+kT)} \tag{*}$$

b) Trường hợp thứ hai $\delta > \omega_0$ (lực cản lớn)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.3) có dạng

$$q = Ae^{-\delta t} sh(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\,t + \beta) \tag{2.9}$$

c. Trường hợp thứ ba $\delta = \omega_0$ (lực cản tới hạn)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2.3) có dạng

$$q = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2) \tag{2.10}$$

Chuyển động của hệ là tắt dần, không dao động. Trong một số tài liệu người ta còn sử dụng khái niệm độ cản Lehr(Ký hiệu D) được xác định bởi hệ thức

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}}$$

Phương trình vi phân dao động tự do có cản nhớt (2.3) có thể viết dưới dạng

$$\ddot{q} + 2D\omega_0\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Do hệ thức $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - D^2}$ chuyển động của hệ được phân thành ba trường hợp sau:

D<1($\delta < \omega_0$): độ cản nhỏ

D =1($\delta = \omega_0$): độ cản tới hạn

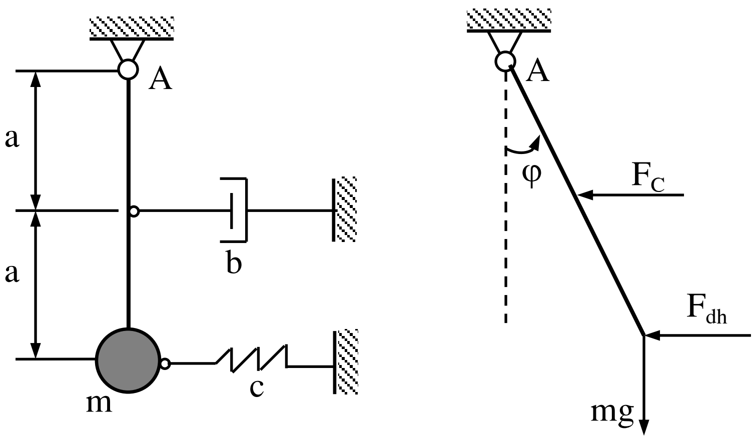
D>1($\delta > \omega_0$): độ cản lớn

Căn cứ vào độ cản Lehr ta có kết luận: Khi D<1 chuyển động của hệ là dao động tắt dần, khi $D \geq 1$ chuyển động của hệ tắt dần, không dao động.

Ta có hệ thức liên hệ giữa độ tắt lôga và độ cản Lehr

$$\Lambda = \delta T = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \qquad (**)$$

Thí dụ 3: Gắn một khối lượng m vào đầu thanh. Gắn vào thanh các phần tử cản và đàn hồi như hình vẽ. Bỏ qua khối lượng của thanh.



- Phải chọn độ lớn của hệ số cản b như thế nào để hệ có khả năng dao động nhỏ?
- Xác định độ cản Lehr D cần thiết để sau mười dao động. biên độ giảm còn 1/10 biên độ của chu kỳ đầu, sau đó xác định chu kỳ dao động.

Lời giải

Áp dụng định lý biến thiên moomen động lượng đối với trục đi qua A và do φ nhỏ xấp xỉ sinφ ≈ φ, cosφ ≈ 1, ta thu được phương trình vi phân dao động của hệ.

$$\ddot{\varphi} + \frac{b}{4m}\dot{\varphi} + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}\right)\varphi = 0$$

$$\rightarrow \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

Trong đó $$2\delta = \frac{b}{4m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} + \frac{g}{2a}$$

Để hệ có khả năng dao động nhỏ thì $\delta < \omega_0$. Từ đó suy ra

$$\frac{b}{8m} < \sqrt{\frac{c}{m} + \frac{g}{2a}} \quad \rightarrow \quad b < 8\sqrt{cm + \frac{gm^2}{2a}}$$

Từ các công thức (*) và (**) ta có

$$10\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \ln\frac{q_n}{q_{n+10}} = \ln 10 \quad \rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{20\pi}{\ln 10}\right)^2 + 1}} = 0{,}037$$

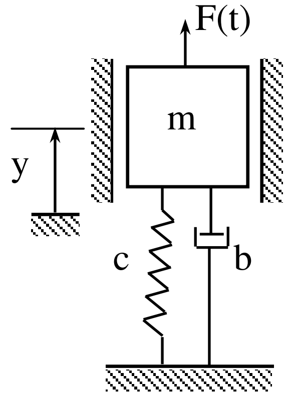
Chu kỳ dao động tự do

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2am}{2ac+gm}}$$

5.3 Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hòa

5.3.1 Các dạng kích động và phương trình vi phân dao động

a) Kích động lực



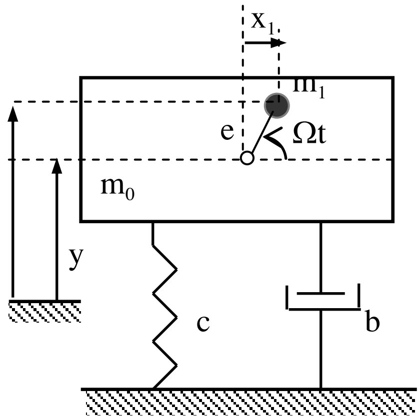
Trên hình vẽ là mô hình dao động khối lượng – lò xo chịu kích động lực. Giả sử $F(t) = \hat{F}\sin\Omega t$, trong đó $\hat{F}$ là giá trị cực đại của hàm F(t). Đối với mô hình này ta có

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2; \quad \pi = \frac{1}{2}cy^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2; \quad Q^* = F(t)$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange II

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{y}} + Q^*$$

Ta được $\quad m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{F}\sin\Omega t \qquad (3.1)$



Chia hai vế (3.1) cho m và đưa vào ký hiệu $\hat{y} = \frac{\hat{F}}{c}$, biến đổi (3.1) về dạng

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{y}\sin\Omega t \qquad (3.1a)$$

b) Kích động bởi khối lượng lệch tâm

Mô hình như hình vẽ. Rô to có khối lượng lệch tâm m_1, quay đều với vận tốc góc Ω.

$$T = \frac{1}{2}m_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

Do $\quad x_1 = e\cos\Omega t; \quad \dot{x}_1 = -e\Omega\sin\Omega t$

$$y_1 = y + e\sin\Omega t; \quad \dot{y}_1 = \dot{y} + e\Omega\cos\Omega t$$

Nên $\quad v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \dot{y}^2 + 2\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + e^2\Omega^2$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + m_1\dot{y}e\Omega\cos\Omega t + \frac{1}{2}m_1 e^2\Omega^2 \qquad \text{trong đó} \qquad m = m_0 + m_1$$

Các biểu thức thế năng và hàm hao tán

$$\Pi = \frac{1}{2}cy^2; \quad \Phi = \frac{1}{2}b\dot{y}^2$$

Thế các biêu thức vào phương trình Lagrange loại 2, ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = m_1 e\Omega^2\sin\Omega t \qquad (3.2)$$

Biến đổi phương trình trên ta có

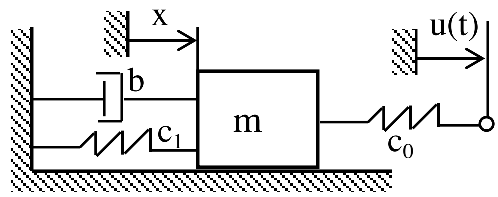
$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \Omega^2 \hat{y}\sin\Omega t \qquad (3.2a)$$

Trong đó $\hat{y} = \dfrac{m_1}{m_0 + m_1} e$

c) Kích động bằng lực đàn hồi

Trên hình vẽ là mô hình hệ chịu kích động lực đàn hồi tuyến tính. Bỏ qua ma sát trượt động(μ=0). Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng



$m\ddot{x} + b\dot{x} + c_1 x + c_0\left[x - u(t)\right] = 0$

Do $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$ nên ta có

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c_0 \hat{u}\sin\Omega t \qquad (3.3)$$

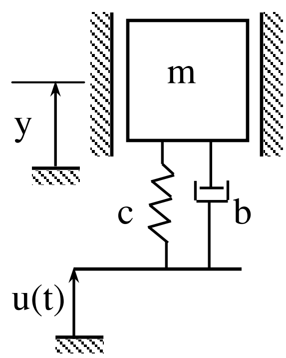
Trong đó c = c_1+c_0

Nếu ta sử dụng ký hiệu $\hat{x} = \dfrac{c_0}{c_1 + c_0}\hat{u}$ thì phương trình (3.3) biến đổi được về dạng

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{x}\sin\Omega t \qquad (33a)$$

d) Kích động động học

Trên hình vẽ là mô hình chịu kích động động học. Giả sử điểm chân của bộ lò xo và cản nhớt chuyển động theo qui luật điều hòa $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng



$$m\ddot{y} + b(\dot{y} - \dot{u}) + c(y - u) = 0$$

Thế $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$; $\dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$ vào phương trình trên ta được

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy = \hat{u}(c\sin\Omega t + b\Omega\cos\Omega t) \qquad (3.4)$$

Chia hai vế (3.4) cho m ta được

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0 \hat{y}(\omega_0 \sin\Omega t + 2\delta\frac{\Omega}{\omega_0}\cos\Omega t) \qquad (3.4a)$$

Trong đó $\hat{y} = \hat{u}$

e) Kích động bằng lực cản nhớt

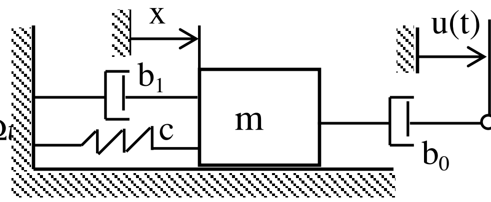
Hình vẽ dưới là mô hình hệ chịu kích động bằng lực cản nhớt. Mặt trượt nhẵn tuyệt đối(μ = 0). Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$m\ddot{x} + b_1\dot{x} + cx + b_0\left[\dot{x} - \dot{u}(t)\right] = 0$$

Cho biết $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t;\quad \dot{u}(t) = \hat{u}\Omega\cos\Omega t$ khi đó phương trình trên có dạng

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b_0\hat{u}\Omega\cos\Omega t \tag{3.5}$$

với $b = b_0 + b_1$



Chia hai vế (3.5) cho m ta được

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2\delta\Omega\hat{x}\cos\Omega t \tag{3.5a}$$

Trong đó $\hat{x} = \dfrac{b_0}{b}\hat{u}$

Qua các thí dụ trên ta thấy: Phương trình vi phân dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do chịu kích động điều hòa có dạng

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = H_1\sin\Omega t + H_2\cos\Omega t \tag{3.5b}$$

Hoặc

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1\sin\Omega t + h_2\cos\Omega t \tag{3.5c}$$

Chú ý, nếu ta sử dụng độ cản Lehr D thì phương trình (3.1a) có dạng như sau

$$\ddot{y} + 2D\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2\hat{y}\sin\Omega t \tag{3.5d}$$

Trong đó $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m} \qquad D = \dfrac{\delta}{\omega_0} = \dfrac{b}{2\sqrt{cm}}$

5.3.2 Tính toán dao động cưỡng bức không cản

Phương trình vi phân dao động cưỡng bức không cản của hệ một bậc tự do có dạng

$$m\ddot{q} + cq = H\sin\Omega t \tag{3.6}$$

Ta đưa vào các ký hiệu $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m};\quad h = \dfrac{H}{m}$ thì phương trình (3.6) có dạng

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = h\sin\Omega t \tag{3.7}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này bao gồm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất và một nghiệm riêng của phương trình có vế phải. Để giải phương trình vi phân (3.7) ta xét hai trường hợp.

$\Omega \neq \omega_0$ (xa cộng hưởng) và $\Omega \approx \omega_0$ (gần cộng hưởng).

- Khi $\Omega \neq \omega_0$ ta tìm nghiệm riêng của (3.7) dưới dạng

$$q^* = A\sin\Omega t \tag{3.8}$$

Thế (3.8) vào phương trình (3.7), so sánh với các hệ số của $\sin\Omega t$, ta có

$$A = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2} \text{ với } \Omega \neq \omega_0$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.7) có dạng

$$q(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{3.9}$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện đầu. Giả sử t = 0; $q(0)=q_0$; $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$.Thế các điều kiện này vào biểu thức (3.9) và đạo hàm của nó, ta có

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = \frac{\dot{q}_0}{\omega_0} - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Vậy nghiệm (3.9) có dạng

$$q(t) = q_0 \cos\omega_0 t + \frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{h\Omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \Omega^2)}\sin\omega_0 t + \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t \tag{3.10}$$

Nếu bỏ qua các thành phần dao động tự do trong (3.10) ta có biểu thức xác định trạng thái bình ổn của dao động cưỡng bức.

$$q^*(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t = \frac{H}{c(1-\eta^2)}\sin\Omega t \tag{3.11}$$

Từ biểu thức nghiệm (3.10). Khi $q_0 = \dot{q}_0 = 0$; biểu thức nghiệm (3.10) có dạng

$$q(t) = \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\sin\Omega t - \frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) \tag{3.12}$$

Ta xét trường hợp khi tần số Ω của lực kích động rất gần với tần số dao động tự do ω_0. Ta đưa vào ký hiệu $\Omega - \omega_0 = 2\varepsilon$

Trong đó ε là một đại lượng vô cùng bé. Bỏ qua các số hạng bé cỡ ε trong biểu thức q ta có

$$\begin{aligned} q &\approx \frac{h}{\omega_0^2 - \Omega^2}(\sin\Omega t - \sin\omega_0 t) = \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t\sin\frac{\Omega - \omega_0}{2}t \\ &= \frac{2h}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\varepsilon t\cos\frac{\Omega + \omega_0}{2}t \approx -\frac{h\sin\varepsilon t}{2\Omega\varepsilon}\cos\Omega t \end{aligned} \tag{3.13}$$

Do ε là một vô cùng bé nên hàm sinεt biến thiên chậm, còn chu kỳ của nó 2π/ε rất lớn. Trong trường hợp này có thể xem biểu thức (3.13) là qui luật dao động với chu kỳ 2π/Ω và biên độ biến đổi (h/2Ωε)sinεt. Hiện tượng dao động này gọi là hiện tượng phách.

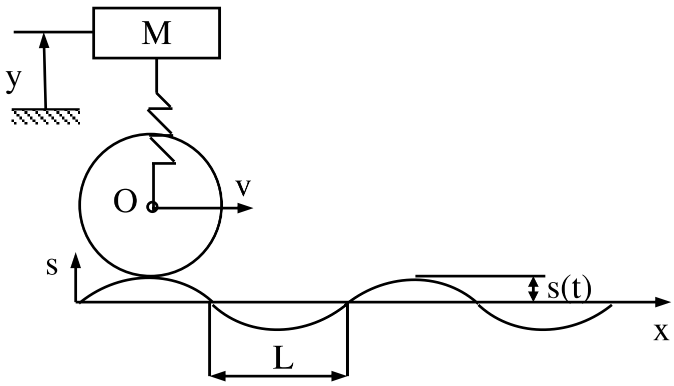
- Xét trường hợp $\Omega \to \omega_0$($\varepsilon \to 0$). Khi đó, ta có thể thay sinεt bằng εt trong biểu thức (3.13) và ta có hệ thức

$$q = -\frac{ht}{2\omega_0}\cos\omega_0 t \tag{3.14}$$

Nhận xét: - Trường hợp xa cộng hưởng $\Omega \neq \omega_0$

- Trường hợp gần cộng hưởng $\Omega \approx \omega_0$. Trong trường hợp này khi $\Omega = \omega_0 + 2\varepsilon$ ta có hiện tượng phách, khi $\Omega = \omega_0$ ta có hiện tượng cộng hưởng.

Thí dụ 4: Bánh xe O lăn không trượt trên mặt đường gồ ghề lượn song. Vận tốc tâm O của bánh xe luôn không đổi là v = 60 km/h. Mặt đường lượn sóng có phương trình là $s = \hat{s}\sin(\frac{\pi x}{L})$ với $\hat{s} = 2$ cm, L= 100 cm. Xác định biên độ dao động cưỡng bức thẳng đứng của vật thể M có khối lượng m, nối với trục bánh xe bằng lò xo có độ cứng c. Biết rằng biến dạng tĩnh của lò xo dưới tác dụng của vật thể là δ_0 = 10 cm.



Lời giải

Từ điều kiện cân bằng tĩnh $c\delta_0 = mg$ ta suy ra $c = \dfrac{mg}{\delta_0}$

Phương trình vi phân chuyển động của vật M có dạng

$$m\ddot{y} + c(y - s) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 \hat{s}\sin\frac{\pi x}{L}$$

Với $\quad \omega_0^2 = \dfrac{c}{m} = \dfrac{mg}{m\delta_0} = \dfrac{g}{\delta_0} = 98{,}1 \ \ 1/\mathrm{s}^2$

$$\frac{\pi x}{L} = \frac{\pi v t}{L} = \Omega t, \text{ với } \Omega = \frac{\pi v}{L} = \frac{16{,}6\pi}{1} = 16{,}6\pi$$

Khi đó nghiệm riêng của phương trình trên là

$$y = A\sin\Omega t, \text{ với } A = \frac{\omega_0^2 \hat{s}}{\left|\omega_0^2 - \Omega^2\right|} = \frac{\hat{s}}{\left|1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_0}\right)^2\right|} = \frac{2}{\left|1 - \dfrac{(16{,}6\pi)^2}{98{,}1}\right|} = 0{,}075 \text{ cm}$$

5.3.3 Tính toán dao động cưỡng bức có ma sát nhớt

Các phương trình vi phân dao động tuyến tính chịu kích động điều hòa của hệ một bậc tự do có ma sát nhớt có thể viết dưới dạng như sau

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = h_1 \sin\Omega t + h_2 \cos\Omega t \tag{3.15}$$

Ta tìm nghiệm riêng của phương trình này dưới dạng

$$q^*(t) = M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \tag{3.16}$$

Thế (3.16) vào phương trình (3.15) rồi so sánh các hệ số của sinΩt và cosΩt, ta rút ra hệ hai phương trình đại số tuyến tính để xác định M và N.

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)M - 2\delta\Omega N = h_1$$
$$2\delta\Omega M + (\omega_0^2 - \Omega^2)N = h_2$$

Giải rat a được

$$M = \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)h_1 + 2\delta\Omega h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$$
$$N = \frac{-2\delta\Omega h_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)h_2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2} \tag{3.17}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3.15) là tổng của nghiệm riêng (3.16) và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất.

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \beta) + M\sin\Omega t + N\cos\Omega t \tag{3.18}$$

Số hạng thứ nhất của biểu thức nghiệm (3.18) biểu diễn thành phần dao động tự do tắt dần. Hai số hạng sau có tần số Ω của ngoại lực biểu diễn thành phần dao động cưỡng bức của hệ.

Thành phần dao động cưỡng bức (3.16) có thể biểu diễn dưới dạng

$$q^*(t) = \hat{q}\sin(\Omega t + \varphi) \tag{3.19}$$

Trong đó $\hat{q} = \sqrt{M^2 + N^2} = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \dfrac{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}{\omega_0^2\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$ (3.20)

$$tg\varphi = \frac{N}{M}$$

Ở đây, ta dùng ký hiệu $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$, $\mathrm{D} = \dfrac{\delta}{\omega_0}$. So sánh phương trình vi phân (3.15) với các phương trình vi phân (3.5b), (3.5c) và (3.5d) ta rút ra các hệ thức sau:

- Trường hợp kích động lực hoặc kích động qua lò xo

$$\hat{q} = V_1(\eta, \mathrm{D})\hat{y}; \qquad \mathrm{V}_1 = \left[(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

- Trường hợp kích động động học

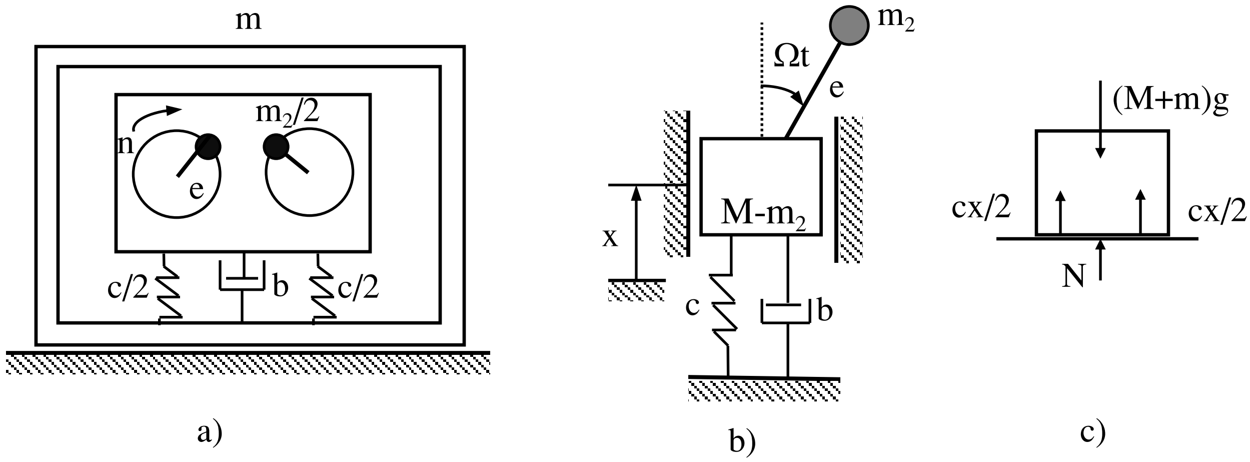
$$\hat{q} = V_2(\eta, \mathrm{D})\hat{y}; \qquad \mathrm{V}_2 = \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}\,V_1$$

- Trường hợp kích động bởi khối lượng lệch tâm

$$\hat{q} = V_3(\eta, D)\hat{y}; \qquad \mathrm{V}_3 = \eta^2 V_1$$

Các hàm V_1, V_2, V_3 được gọi là các hàm khuếch đại(hay các hệ số động lực).

Thí dụ 5: Bộ phận làm việc của máy đầm đất có khối lượng M tựa trên các lò xo như hình vẽ. Khối lượng vỏ máy là m. Ở bộ phận làm việc có hai khối lượng lệch tâm(mỗi khối lượng là $m_2/2$) quay với số vòng quay là n. Hãy chọn các tham số của máy sao cho máy làm việc ở vùng cộng hưởng và trong quá trình làm việc vỏ máy không nẩy lên khỏi đất.



Lời giải: Mô hình cơ học của bộ phận làm việc của máy như hình b. Bộ phận này dao động quanh vị trí cân bằng tĩnh. Tọa độ của m_2 là

$$x_2 = x + e\cos\Omega t$$

Phương trình vi phân chuyển động của mô hình máy làm đất là

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \Omega^2 m_2 e\cos\Omega t$$

$$\to \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \Omega^2 x_0 \cos\Omega t \quad \text{với} \quad x_0 = \frac{m_2 e}{M}$$

Nghiệm của phương trình này theo (3.19) có dạng

$$x = x_0 V_3 \cos(\Omega t - \varphi)$$

Với $$V_3 = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Khi cản nhỏ, hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi $\eta \approx 1$

$$\Omega \approx \omega_0 \to \frac{\pi n}{30} \approx \sqrt{\frac{c}{M}} \to c \approx \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 M$$

Khi cộng hưởng $V_3 \approx \dfrac{1}{2D}$

Để đơn giản bỏ lực cản. Khi đó phản lực pháp tuyến của nền tác dụng lên vỏ máy hình c.

$$N = (M+m)g - cx$$

Do $V_3 \approx \dfrac{1}{2D}$ nên ta có

$$N_{\min} = (M+m)g - cx_{\max} = (M+m)g - \frac{cx_0}{2D}$$

Điều kiện để vỏ máy không nẩy khỏi nền

$$N_{\min} \geq 0 \rightarrow (M+m)g \geq \frac{cx_0}{2D} \rightarrow D \geq \frac{cx_0}{2(M+m)g}$$

5.3.4 Một vài nhận xét về tính chất dao động cưỡng bức khi có ma sát

Qua các tính toán trên ta có một số nhận xét về tính chất của dao động tuyến tính có cản nhớt chịu kích động điều hòa ở trạng thái bình ổn như sau:

- Dao động cưỡng bức khi có cản xảy ra với tần số của lực kích động.
- Biên độ dao động cưỡng bức không phụ thuộc vào các điều kiện đầu và thời gian. Do đó dao động cưỡng bức không tắt dần vì lực cản.
- Khi $\Omega = \omega_0$ biên độ dao động cưỡng bức tuy khá lớn, nhưng vẫn là đại lượng hữu hạn. Nó chưa phải là giá trị lớn nhất trong các giá trị của biên độ.
- Trong dao động cưỡng bức có cản nhớt luôn xảy ra sự lệch pha giữa pha dao động và pha của lực kích động.
- Ở xa vùng cộng hưởng, biên độ dao động cưỡng bức với lực cản nhỏ không khác mấy so với biên độ dao động cưỡng bức không cản. Ở vùng gần cộng hưởng lực cản có một vai trò rất quan trọng.