TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
KHOA CƠ SỞ - CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN
——ooOoo——

TÀI LIỆU HỌC TẬP

GIẢI TÍCH

TÊN HỌC PHẦN	:	**GIẢI TÍCH**
MÃ HỌC PHẦN	:	**18142**
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO	:	**ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**

Hải Phòng - 6/2024

Mục lục

Chương 1

HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1.1. Định nghĩa hàm số nhiều biến số

1.1.1. Không gian metric

Kí hiệu $\mathbb{R}^n$ là tập các bộ có thứ tự n số thực $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, mà ta cũng gọi là các điểm. Ta gọi khoảng cách giữa hai điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ của $\mathbb{R}^n$ là biểu thức

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}. \tag{1.1}$$

Dễ thấy, khoảng cách trong $\mathbb{R}^n$ được cho bởi (1.1) có ba tính chất cơ bản sau của metric là

(a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Như vậy, tập $\mathbb{R}^n$ với khoảng cách được cho bởi công thức (1.1) là không gian metric.

Giả sử $x^* \in \mathbb{R}^n$ và $\varepsilon > 0$. Ta gọi ε - lân cận của x^* là tập hợp sau của $\mathbb{R}^n$

$$V_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) < \varepsilon\}.$$

Ta gọi lân cận của x^* là mọi tập của $\mathbb{R}^n$ chứa được một ε - lân cận nào đó của x^*. Lân cận của x^* được kí hiệu là $V(x^*)$. Tập $\overset{0}{V}_\varepsilon(x^*) = V_\varepsilon(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là ε- lân cận thủng của x^*. Tập $\overset{0}{V}(x^*) = V(x^*) \backslash \{x^*\}$ được gọi là lân cận thủng của x^*.

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $x^* \in D$ được gọi là điểm trong của D nếu tồn tại một ε - lân cận của x^* nằm hoàn toàn trong D . Tập D được gọi là mở nếu mọi điểm của D đều là điểm trong của nó.

Điểm $y^* \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm biên của D nếu mọi ε- lân cận của x^* đều vừa chứa điểm thuộc D, vừa chứa điểm không thuộc D. Điểm biên của D có thể thuộc D, cũng có thể không thuộc D. Tập các điểm biên của D được gọi là biên của nó và được kí hiệu là ∂D.

Tập D được gọi là đóng nếu nó chứa tất cả các điểm biên của nó.

Ví dụ ε- lân cận $V_\varepsilon(x^*)$ của x^* là tập mở. Ta gọi $V_\varepsilon(x^*)$ là quả cầu mở tâm x^*, bán kính ε. Biên của quả cầu ấy là tập các điểm $x \in \mathbb{R}^n$ sao cho $d(x, x^*) = \varepsilon$. Tập $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x^*) \leq \varepsilon\}$ là một tập đóng và được gọi là quả cầu đóng tâm x^*, bán kính ε.

Tập D được gọi là bị chặn nếu tồn tại một quả cầu chứa nó.

Tập D được gọi là liên thông nếu có thể nối hai điểm bất kì của D bằng một đường liên tục nằm hoàn toàn trong D. Tập D liên thông được gọi là đơn liên nếu biên của nó gồm một mặt kín, được gọi là đa liên nếu biên của nó gồm nhiều mặt kín rời nhau từng đôi một.

1.1.2. Định nghĩa hàm nhiều biến

$\star$ **Định nghĩa 1.1.** Giả sử $D \subset \mathbb{R}^n$. Ánh xạ

$$\begin{array}{cccc} f : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, ...x_n) & \mapsto & u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array},$$

được gọi là hàm số n biến số. Tập D được gọi là tập xác định, $x_1, x_2, ..., x_n$ được gọi là các biến độc lập, u được gọi là biến phụ thuộc của hàm $f(x, y)$.

Hàm hai biến thường được kí hiệu là $z = f(x, y)$, còn hàm ba biến thường được kí hiệu là $u = f(x, y, z)$.

Về sau ngoài các chữ cái như $x, y, z, ...$ ta còn kí hiệu các điểm của $\mathbb{R}^n$ bằng các chữ cái in hoa như $M, N, P, ...$. Cũng giống như với hàm một biến số, với hàm nhiều biến số ta có quy ước sau: Nếu hàm nhiều biến số được cho bằng biểu thức giải tích $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ và không nói gì thêm về tập xác định của hàm số đó thì ta quy ước tập xác định của nó là tập tất cả các điểm $M \in \mathbb{R}^n$, sao cho $f(M)$ có nghĩa.

$\bullet$**Ví dụ 1.1.** Tập xác định của hàm $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ là tập các điểm $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ thoả mãn

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Đó là hình tròn tâm $O(0, 0)$, bán kính bằng 2.

Sau đây, các khái niệm về sự liên tục của hàm nhiều biến trong mục **1.1.3**, đạo hàm riêng và vi phân trong mục **1.2**, cực trị của hàm nhiều biến trong mục **1.3** được trình bày cho hàm hai biến. Các kết quả nhận được có thể được mở rộng cho hàm số nhiều hơn hai biến số.

1.1.3. Sự liên tục của hàm nhiều biến

$\star$ **Định nghĩa 1.2.** Giả sử hàm $f(x, y)$ xác định trong tập $D \subset \mathbb{R}^2$, điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$. Ta nói hàm f liên tục tại M_0 nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi điểm $M(x, y)$ thỏa mãn các điều kiện $M \in D$, $d(M, M_0) < \delta$, ta đều có

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Theo định nghĩa trên, nếu M_0 là điểm cô lập của D, tức là trong một lân cận nào đó của M_0 chỉ có một điểm duy nhất của D (chính là điểm M_0), thì hàm f liên tục tại M_0. Nếu M_0 là điểm giới hạn của D, tức là trong mọi lân cận thủng của M_0 đều có ít nhất một điểm của D, thì hàm f liên tục tại M_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in D}} f(M) = f(M_0).$$

Hàm f liên tục tại mọi điểm của D được gọi là liên tục trên D.

Hàm f được gọi là liên tục đều trên D nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi cặp điểm $M, N \in D$ thỏa mãn điều kiện $d(M, N) < \delta$, ta đều có

$$|f(M) - f(N)| < \varepsilon.$$

Hàm f liên tục trên tập đóng, bị chặn D (tập compact) có các tính chất tương tự như hàm một biến, đó là f bị chặn trên D, f đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D, f liên tục đều trên D.

Nhận xét 1.1. Các tính chất cơ bản của sự liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của các hàm một biến liên tục vẫn còn đúng với hàm hai biến.

$\bullet$**Ví dụ 1.2.** Khảo sát sự liên tục của hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{khi } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{khi } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

trong đó $\alpha > 1$.

Lời giải. Hàm f liên tục tại mọi $(x,y) \neq (0,0)$ vì khi đó hàm f là tỉ số của hai hàm liên tục mà mẫu số khác 0. Để xét tính liên tục của hàm f tại $(0,0)$, ta tính giới hạn của hàm số ấy tại $(0,0)$. Theo bất đẳng thức Cauchy

$$|xy|^\alpha \leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha,$$

do đó, với $(x,y) \neq (0,0)$, ta có

$$0 \leq f(x,y) \leq \left[\frac{x^2+y^2}{2}\right]^\alpha \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha}.$$

Vì $\alpha - 1 > 0$ nên

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^{\alpha-1}}{2^\alpha} = 0.$$

Theo định lí kẹp về giới hạn của hàm số, ta suy ra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

tức là hàm f liên tục tại $(0,0)$. Vậy hàm f liên tục tại mọi $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1.2. Đạo hàm riêng và vi phân

1.2.1. Định nghĩa đạo hàm riêng

⋆ **Định nghĩa 1.3.** Giả sử hàm $z = f(x,y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0,y_0)$. Với Δx có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ, đặt

$$\Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng $\Delta_x f$ được gọi là số gia riêng của hàm f theo biến x tại M_0. Đạo hàm riêng của hàm f theo biến x tại M_0 là

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x},$$

nếu giới hạn ở vế phải của đẳng thức trên tồn tại. Đạo hàm riêng ấy cũng được kí hiệu bằng một trong các kí hiệu sau

$$f'_x(M_0),\ \frac{\partial z}{\partial x}(M_0),\ z'_x(M_0).$$

Đạo hàm riêng của hàm f theo biến y tại M_0 được định nghĩa tương tự.

Từ định nghĩa 1.3, ta suy ra quy tắc thực hành tính các đạo hàm riêng của hàm hai biến như sau.

Quy tắc thực hành. Nếu tính đạo hàm riêng theo biến nào đó thì ta coi biến còn lại là hằng số.

•**Ví dụ 1.3.** Với $z = \arctan \frac{y}{x}$, ta có

$$z'_x = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(\tfrac{y}{x}\right)'_x = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\tfrac{y}{x^2}\right) = -\tfrac{y}{x^2+y^2},$$

$$z'_y = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(\tfrac{y}{x}\right)'_y = \tfrac{1}{1+(y/x)^2}\tfrac{1}{x} = \tfrac{x}{x^2+y^2}.$$

1.2.2. Vi phân toàn phần

⋆ **Định nghĩa 1.4.** Giả sử hàm $z = f(x, y)$ xác định trong lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$. Với Δx, Δy có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ, đặt

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Đại lượng Δf được gọi là số gia toàn phần của hàm f tại $M_0(x_0, y_0)$. Nếu Δf có dạng

$$\Delta f = a\Delta x + b\Delta y + o(\rho), \tag{1.2}$$

trong đó a, b là các số thực không phụ thuộc vào Δx và Δy, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(\rho)$ là vô cùng bé bậc cao hơn ρ khi ρ dần đến 0, thì hàm f được gọi là khả vi tại M_0 và biểu thức

$$df = a\Delta x + b\Delta y \tag{1.3}$$

được gọi là vi phân toàn phần của hàm f tại M_0.

◊ **Định lí 1.1.** *Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$ thì f có các đạo hàm riêng tại M_0 và vi phân toàn phần của hàm f tại M_0 là*

$$df = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.4}$$

Chứng minh. Áp dụng biểu diễn (1.2) với $\Delta y = 0$, để ý rằng khi đó $\Delta f = \Delta_x f$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2} = |\Delta x|$, ta được

$$\Delta_x f = a\Delta x + o(|\Delta x|).$$

Với $\Delta x \neq 0$, chia hai vế của đẳng thức trên cho Δx, ta được

$$\tfrac{\Delta_x f}{\Delta x} = a + \tfrac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}.$$

Vế phải của đẳng thức cuối cùng dần tới a khi $\Delta x \to 0$ vì $\frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = \pm\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|} \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Suy ra, $\frac{\Delta_x f}{\Delta x}$ có giới hạn bằng a khi $\Delta x \to 0$, tức là f có đạo hàm riêng theo x tại M_0 và $a = f'_x(M_0)$. Tương tự, ta có hàm f có đạo hàm riêng theo y tại M_0 và $b = f'_y(M_0)$. Cuối cùng, thay $a = f'_x(M_0)$ và $b = f'_y(M_0)$ vào (1.3) ta được (1.4). $\square$.

Định lí đảo của Định lí 1.1 không đúng, tức là tính có các đạo hàm riêng của hàm số tại một điểm không kéo theo tính khả vi của hàm số tại điểm ấy. Đây là điểm khác biệt giữa hàm hai biến và hàm một biến. Định lí dưới đây cho ta một điều kiện đủ của hàm khả vi.

$\Diamond$ **Định lí 1.2.** *Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm riêng ấy liên tục tại M_0 thì hàm f khả vi tại M_0.*

Ta thừa nhận Định lí 1.2. Áp dụng định lí này ta thấy hàm $f(x, y) = x$ có các đạo hàm riêng $f'_x = 1$ và $f'_y = 0$ liên tục trên toàn $\mathbb{R}^2$ nên khả vi trên toàn $\mathbb{R}^2$. Theo công thức (1.4), ta có $dx = 1.\Delta x + 0.\Delta y$ hay $\Delta x = dx$. Tương tự, ta có $\Delta y = dy$. Do đó, công thức (1.4) còn có dạng

$$df = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy. \tag{1.5}$$

•**Ví dụ 1.4.** Tìm vi phân toàn phần của hàm $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ta có

$$dz = z'_x dx + z'_y dy,$$

với

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Do đó

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Phần cuối của mục này giới thiệu một ứng dụng của vi phân toàn phần. Giả sử hàm $f(x, y)$ khả vi tại $M_0(x_0, y_0)$. Khi đó, số gia toàn phần Δf có dạng (1.2). Bỏ qua vô cùng bé $o(\rho)$ bậc cao hơn ρ ta được công thức xấp xỉ

$$\Delta f \approx a\Delta x + b\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y,$$

hay

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y. \tag{1.6}$$

Công thức (1.6) cho phép ta tính giá trị gần đúng của hàm f tại điểm đủ gần điểm M_0.

•**Ví dụ 1.5.** Tính gần đúng giá trị biểu thức

$$A = \sqrt{2.98^2 + 4.01^2}.$$

Lời giải. Đặt $z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ thì $a = z(2.98, 4.01)$. Viết a dưới dạng $a = z(3 - 0.02, 4 + 0.01)$, áp dụng công thức (1.6), ta được

$$a \approx z(3, 4) + z'_x(3, 4)(-0.02) + z'_y(3, 4)0.01,$$

trong đó

$$z(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$z'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_x(3, 4) = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5},$$

$$z'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow z'_y(3, 4) = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

Vậy, $a \approx 5 + \frac{3}{5}(-0.02) + \frac{4}{5}0.01 \Rightarrow a \approx 4.996.$

1.2.3. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao

1.2.3.1. Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x và f'_y trên tập mở $D \subset \mathbb{R}^2$. Các đạo hàm riêng này là các hàm hai biến xác định trên D. Nếu các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng này tồn tại thì ta gọi chúng là các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f. Có bốn đạo hàm riêng cấp hai của hàm f như sau

- $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, đạo hàm riêng cấp hai này còn được kí hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ hay f''_{xx} hay f''_{x^2}.
- $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, đạo hàm riêng cấp hai này còn được kí hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ hay f''_{xy}.
- $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, đạo hàm riêng cấp hai này còn được kí hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ hay f''_{yx}.
- $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$, đạo hàm riêng cấp hai này còn được kí hiệu là $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ hay f''_{yy} hay f''_{y^2}.

Các đạo hàm riêng của các đạo hàm riêng cấp hai của hàm f nếu tồn tại được gọi là các đạo hàm riêng cấp ba của hàm f . . . .

•Ví dụ 1.6. Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$, ta có

$$z'_x = 3x^2 - 3 + 2xy^2,\ z'_y = 2x^2y,$$
$$z''_{xx} = 6x + 2y^2,\ z''_{xy} = 4xy,\ z''_{yx} = 4xy,\ z''_{yy} = 2x^2.$$

Các đạo hàm z''_{xy} và z''_{yx} được gọi là các đạo hàm hỗn hợp của hàm z. Trong ví dụ trên ta thấy các đạo hàm hỗn hợp của hàm z bằng nhau. Không phải hàm số nào cũng có tính chất này. Định lí sau cho ta một điều kiện đủ để các đạo hàm hỗn hợp bằng nhau.

◊ **Định lí 1.3.** *(Định lý Schwartz). Nếu hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm hỗn hợp trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$ và các đạo hàm hỗn hợp ấy liên tục tại M_0 thì các đạo hàm hỗn hợp ấy bằng nhau tại M_0.*

Ta thừa nhận không chứng minh Định lí 1.3.

1.2.3.2. Vi phân cấp cao

Ta gọi vi phân toàn phần $df = f'_x dx + f'_y dy$ của hàm $f(x, y)$ tại một điểm là vi phân cấp một của nó tại điểm ấy. Giả sử ta đã định nghĩa vi phân cấp $n \geq 1$ của hàm f tại một điểm. Nếu vi phân cấp n của hàm f xác định trên miền D và khả vi tại điểm M_0 nào đó thì vi phân của vi phân cấp n ấy tại M_0 được gọi là vi phân cấp $(n+1)$ của hàm f tại M_0. Vi phân cấp n nguyên dương của hàm f tại M_0 được kí hiệu là $d^n f(M_0)$.

Giả sử f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp hai trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$, và các đạo hàm riêng cấp hai ấy liên tục tại M_0 (do đó, $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$ theo Định lí Schwartz). Khi đó, f'_x và f'_y khả vi tại M_0 theo Định lí 1.2. Vì x và y là các biến độc lập nên $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$ là các hằng số, do đó, $df = f'_x dx + f'_y dy$ khả vi tại M_0 và vi phân của df tại M_0 thỏa mãn

$$\begin{aligned}
&d(df)(M_0) = \\
&\quad = d(f'_x dx + f'_y dy)(M_0) \\
&\quad = d(f'_x dx)(M_0) + d(f'_y dy)(M_0) \\
&\quad = d(f'_x)(M_0)dx + d(f'_y)(M_0)dy \\
&\quad = (f''_{xx}(M_0)dx + f''_{xy}(M_0)dy)dx + (f''_{yx}(M_0)dx + f''_{yy}(M_0)dy)dy \\
&\quad = f''_{xx}(M_0)dx^2 + f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yx}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2.
\end{aligned}$$

Trong dãy đẳng thức trên, thay biểu thức đầu tiên bằng $d^2 f(M_0)$ theo định nghĩa, và thay $f''_{yx}(M_0) = f''_{xy}(M_0)$ trong biểu thức cuối cùng ta được công thức của vi phân cấp hai của hàm f là

$$d^2 f(M_0) = f''_{xx}(M_0)dx^2 + 2f''_{xy}(M_0)dxdy + f''_{yy}(M_0)dy^2. \tag{1.7}$$

Ta thường dùng kí hiệu tượng trưng để biểu diễn công thức trên như sau

$$d^2f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^2 f(M_0),$$

trong đó $(\frac{\partial}{\partial x})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo x, $(\frac{\partial}{\partial y})^2$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng hai lần theo y, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ chỉ phép lấy đạo hàm riêng một lần theo y, một lần theo x. Tương tự, nếu f là hàm số của hai biến độc lập x và y, có các đạo hàm riêng cấp n trong lân cận của $M_0(x_0, y_0)$, và các đạo hàm riêng cấp n liên tục tại M_0, thì khả vi đến cấp n tại M_0. Trong trường hợp này, ta cũng có công thức lũy thừa tượng trưng sau

$$d^n f(M_0) = (\tfrac{\partial}{\partial x}dx + \tfrac{\partial}{\partial y}dy)^n f(M_0).$$

•**Ví dụ 1.7.** Với hàm $z = x^3 - 3x + x^2y^2$, theo công thức (1.7), ta có

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2.$$

Do đó,

$$d^2z = (6x + 2y^2)dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2.$$

Nói riêng, ta có

$$d^2z(1, 0) = 6dx^2 + 2dy^2.$$

1.2.4. Công thức Taylor đối với hàm nhiều biến

Phần này sẽ phát biểu định lí về công thức Taylor cho hàm số hai biến số và không chứng minh định lí này. Công thức Taylor thường được sử dụng để khảo sát cực trị của hàm số n biến số với $n \geq 1$.

◊ **Định lí 1.4.** *Giả sử hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp $n+1$ liên tục trong ε - lân cận $V_\varepsilon(M_o)$ của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $(x_0 + dx, y_0 + dy) \in V_\varepsilon(M_0)$. Khi đó, $\exists \theta \in (0, 1)$ sao cho*

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = \\ &= df(M_0) + \tfrac{1}{2!}d^2f(M_0) + ... + \tfrac{1}{n!}d^nf(M_0) + \\ &\qquad + \tfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta dx, y_0 + \theta dy).\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.3. Cực trị của hàm nhiều biến

Mục này sẽ trình bày ba loại cực trị của hàm nhiều biến, đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện, cực trị có điều kiện, giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số nhiều biến trên miền đóng, bị chặn. Như đã nói từ trước, ta sẽ xét các khái niệm này đối với hàm số hai biến số.

1.3.1. Cực trị tự do của hàm hai biến

⋆ **Định nghĩa 1.5.** Hàm $f(x,y)$ được gọi là có cực đại tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ nếu tồn tại lân cận $V(M_0(x_0,y_0))$ của điểm $M_0(x_0,y_0)$ sao cho

$$f(M) < f(M_0),\ \forall M \in \overset{0}{V}(M_0).$$

Khi đó, điểm M_0 được gọi là điểm cực đại của hàm f, $f(M_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm f và được kí hiệu là $f_{\text{CĐ}}(M_0)$.

Điểm cực tiểu, giá trị cực tiểu của hàm hai biến được định nghĩa tương tự. Giá trị cực tiểu của hàm f được kí hiệu là $f_{CT}(M_0)$.

Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm hai biến được gọi chung là điểm cực trị. Tương tự như vậy đối với giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm nhiều biến.

Kí hiệu

$$p = z'_x(x,y),\ q = z'_y(x,y),$$
$$A = z''_{xx}(x,y),\ B = z''_{xy}(x,y),\ C = z''_{yy}(x,y).$$

◊ **Định lí 1.5.** *Nếu hàm $f(x,y)$ có cực trị và có các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(x_0,y_0)$ thì*

$$p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0.$$

Chứng minh. Từ giả thiết của Định lí 1.5, suy ra hàm một biến $g(x) = f(x,y_0)$ có cực trị tại x_0. Hàm g có đạo hàm tại x_0 là $g'(x_0) = f'_x(x_0,y_0)$. Theo định lí Fermat, $g'(x_0) = f'_x(x_0,y_0) = 0$ hay $p(M_0) = 0$. Hoàn toàn tương tự, ta có $q(M_0) = 0$. □.

Ta gọi các điểm tới hạn của hàm hai biến là các điểm mà ở đó các đạo hàm riêng của nó tồn tại và triệt tiêu hoặc ở đó có ít nhất một trong hai đạo hàm riêng của hàm số ấy không tồn tại. Từ Định lí 1.5, suy ra nếu một điểm là điểm cực trị của hàm hai biến thì nó là điểm tới hạn. Khẳng định ngược lại không đúng.

Định lí dưới đây cho phép ta kiểm tra một số điểm tới hạn của hàm hai biến có phải là điểm cực trị của hàm số ấy hay không, trong đó có cả các điểm mà ở đó các đạo hàm riêng tồn tại và triệt tiêu được gọi là *các điểm dừng* của hàm số.

◊ **Định lí 1.6.** *Giả sử hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của điểm $M_0(x_0,y_0)$. Giả sử $p(M_0) = 0$, $q(M_0) = 0$. Khi đó, tại điểm M_0*

(i) *Nếu* $B^2 - AC < 0$ *thì* M_0 *là điểm cực trị của hàm* f. *Đó là điểm cực tiểu nếu* $A > 0$, *là điểm cực đại nếu* $A < 0$.

(ii) *Nếu* $B^2 - AC > 0$ *thì* M_0 *không là điểm cực trị của hàm* f.

(iii) *Nếu* $B^2 - AC = 0$ *thì* M_0 *có thể là điểm cực trị của hàm* f, *cũng có thể không là điểm cực trị của hàm* f.

Chứng minh. Giả sử $h^2 + k^2 \neq 0$ và $h^2 + k^2$ đủ nhỏ. Áp dụng công thức (1.8) và sử dụng giả thiết $p(M_0) = 0,\ q(M_0) = 0$, ta được

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\
&= \frac{1}{2}\Big[f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2 + 2f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)hk + \\
&\qquad\qquad + f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2\Big] \\
&= \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)hk + f''_{yy}(x_0, y_0)k^2\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\left[\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2\right],
\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
\alpha &= f''_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{xx}(x_0, y_0), \\
\beta &= f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{xy}(x_0, y_0), \\
\gamma &= f''_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - f''_{yy}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Do các đạo hàm cấp hai của hàm f liên tục tại M_0 nên α, β, γ dần đến 0 khi $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ dần đến 0. Từ đó, ta có

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\left[Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\right] + o(\rho^2), \tag{1.9}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
A &= f''_{xx}(x_0, y_0), \\
B &= f''_{xy}(x_0, y_0), \\
C &= f''_{yy}(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Giả sử $B^2 - AC < 0$. Khi đó, $A \neq 0$. Giả sử $A > 0$. Xét hàm

$$g(u, v) = \tfrac{1}{2}\left[Au^2 + 2Buv + Cv^2\right].$$

Vì g liên tục trên đường tròn $u^2 + v^2 = 1$ nên đạt được giá trị nhỏ nhất tại (u_0, v_0) nào đó trên đường tròn đó. Ta có

$$\begin{aligned} g(u,v) &\geq g(u_0,v_0) = \tfrac{1}{2A}\left[(Au_0)^2 + 2Au_0Bv_0 + ACv_0{}^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2A}\left[(Au_0+Bv_0)^2 - (B^2-AC)v_0{}^2\right] > 0, \forall (u,v) : u^2+v^2 = 1. \end{aligned}$$

Từ (1.9), suy ra

$$\Delta f = \rho^2 \left\{ \tfrac{1}{2}\left[Au^2 + 2Buv + Cv^2\right] + \tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right\},$$

trong đó $u = \dfrac{h}{\rho}, v = \dfrac{k}{\rho}$.

Theo chứng minh trên

$$\Delta f \geq \rho^2 \left\{ g(u_0,v_0) + \tfrac{o(\rho^2)}{\rho^2} \right\} > \tfrac{1}{2}\rho^2 g(u_0,v_0) > 0$$

với mọi ρ đủ nhỏ. Điều này chứng tỏ M_0 là điểm cực tiểu của hàm f. Chứng minh tương tự, ta được nếu $A < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm f.

Giả sử $B^2 - AC > 0$. Nếu $A \neq 0$ thì $\dfrac{1}{2}\left[At^2 + 2Bt + C\right]$ là tam thức bậc hai. Nó đổi dấu trên $\mathbb{R}$ vì $B^2 - AC > 0$. Giả sử t_1, t_2 là hai giá trị thỏa mãn

$$\tfrac{1}{2}\left[At_1{}^2 + 2Bt_1 + C\right] < 0,$$
$$\tfrac{1}{2}\left[At_2{}^2 + 2Bt_2 + C\right] > 0.$$

Áp dụng công thức (1.9) với $h = t_1\delta, k = \delta, \delta \neq 0$. Khi đó, $\rho^2 = (t_1{}^2+1)\delta^2$ nên $o(\rho^2) = o(\delta^2)$. Từ đó, ta có

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}\left[At_1{}^2\delta^2 + 2Bt_1\delta^2 + C\delta^2\right] + o(\delta^2)$$

$$= \delta^2 \left\{ \tfrac{1}{2}\left[At_1{}^2 + 2Bt_1 + C\right] + \tfrac{o(\delta^2)}{\delta^2} \right\} < 0$$

với mọi δ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Tương tự, áp dụng công thức (1.9) với $h = t_2\lambda, k = \lambda, \lambda \neq 0$, ta được

$$\Delta f = \lambda^2 \left\{ \tfrac{1}{2}\left[At_1{}^2 + 2Bt_1 + C\right] + \tfrac{o(\lambda^2)}{\lambda^2} \right\} > 0$$

với mọi λ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Ta thấy, Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_0, điều đó chứng tỏ M_0 không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $C \neq 0$ lập luận tương tự ta cũng có kết luận M_0 không là điểm cực trị của hàm f. Nếu $A = C = 0$ thì $B \neq 0$. Đầu tiên áp dụng (1.9) với $h = k = \xi \neq 0$, khi đó $\rho^2 = \xi^2 + \xi^2 = 2\xi^2$. Do đó, $o(\rho^2) = o(\xi^2)$, ta được

$$\Delta f = B\xi^2 + o(\xi^2) = \xi^2 \left[B + \tfrac{o(\xi^2)}{\xi^2}\right],$$

suy ra Δf cùng dấu với B khi ξ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Sau đó, áp dụng (1.9) với $h = \zeta,\ k = -\zeta,\ \zeta \neq 0$, ta được

$$\Delta f = -B\zeta^2 + o(\zeta^2) = \zeta^2 \left[-B + \tfrac{o(\zeta^2)}{\zeta^2} \right].$$

Suy ra, Δf trái dấu với B khi ζ có giá trị tuyệt đối đủ nhỏ. Các lập luận trên chứng tỏ Δf đổi dấu trong mọi lân cận của M_0, điều đó chứng tỏ M_0 không là điểm cực trị của hàm f.
Để kết thúc chứng minh định lí ta đưa ra hai ví dụ về điểm tới hạn mà tại đó $B^2 - AC = 0$. Trong một trường hợp điểm tới hạn là điểm cực trị, trong trường hợp còn lại điểm tới hạn không là điểm cực trị.

- Đầu tiên xét hàm $f(x,y) = x^4 + y^4$. Ta có, $p = f'_x = 4x^3, q = f'_y = 4y^3, A = f''_{xx} = 12x^2, B = f''_{xy} = 0, C = f''_{yy} = 12y^2$.

  Điểm tới hạn của hàm f là nghiệm của hệ

  $$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

  Ta thấy, f có một điểm tới hạn (điểm dừng) duy nhất là $O(0,0)$. Tại điểm dừng đó, $A = 0, B = 0, C = 0 \Rightarrow B^2 - AC = 0$. Để biết $O(0,0)$ có là điểm cực trị không ta lấy h, k thỏa mãn $h^2 + k^2 \neq 0$, $h^2 + k^2$ đủ nhỏ, và xét dấu của $\Delta f = f(h,k) - f(0,0)$. Ta có

  $$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = h^4 + k^4 - 0^4 - 0^4 = h^4 + k^4 > 0,$$

  Suy ra, $O(0,0)$ là điểm cực tiểu của hàm f.

- Tiếp theo, xét hàm $g(x,y) = x^3 + y^3$. Tương tự như đối với hàm f, hàm g cũng có một điểm dừng duy nhất là $O(0,0)$ và tại đó $B^2 - AC = 0$. Với h, k thỏa mãn $k = 0, h \neq 0$, ta có

  $$\Delta g = g(h,0) - g(0,0) = h^3 + 0^3 - 0^3 - 0^3 = h^3.$$

  Ta thấy, Δg đổi dấu dù h có giá trị tuyệt đối nhỏ bao nhiêu chăng nữa, tức là Δg đổi dấu trong mọi lân cận của $O(0,0)$. Điều đó chứng tỏ $O(0,0)$ không là điểm cực trị của hàm g $\square$.

Từ các Định lí 1.5 và Định lí 1.6, ta suy ra thuật toán tìm cực trị của hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp hai liên tục trên tập xác định của hàm số ấy như sau

- *Bước 1.* Tính các đạo hàm riêng cấp một $p = z'_x, q = z'_y$.

- *Bước 2.* Tìm điểm dừng của hàm $z = f(x, y)$ bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$

- *Bước 3.* Tính các đạo hàm riêng cấp hai
$$A = z''_{xx},\ B = z''_{xy},\ C = z''_{yy}.$$

- *Bước 4.* Với mỗi điểm dừng của hàm $z = f(x, y)$, kiểm tra xem trường hợp nào trong các trường hợp (i), (ii), (iii) của Định lí 1.6 xảy ra. Nếu xảy ra trường hợp (i) hoặc (ii) thì đưa ra kết luận tương ứng. Nếu xảy ra trường hợp (iii) thì cần khảo sát thêm về điểm dừng bằng các công cụ khác để biết điểm dừng ấy có phải là điểm cực trị không. Chẳng hạn có thể dựa vào định nghĩa cực trị như trong chứng minh của Định lí 1.6. Chúng tôi không đi sâu vào phân tích các phương pháp khảo sát đối với điểm dừng trong trường hợp này.

Để dễ nhớ Định lí 1.6 chúng tôi đưa ra bảng sau

$B^2 - AC$	A	Kết luận
< 0	> 0	Điểm dừng là điểm cực tiểu
	< 0	Điểm dừng là điểm cực đại
> 0	Bất kì	Điểm dừng không là điểm cực trị
$= 0$	Bất kì	Chưa kết luận được. Điểm dừng có thể là điểm cực trị, có thể không là điểm cực trị

•**Ví dụ 1.8.** Tìm cực trị của hàm số $z = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} z &= 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + x^3y^2, \\ p &= z'_x = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2, \\ q &= z'_y = 2x^3y, \\ A &= z''_{xx} = 36x^2 + 48x - 12 + 6xy^2, \\ B &= z''_{xy} = 6x^2y, \\ C &= z''_{yy} = 2x^3. \end{aligned}$$

Ta tìm các điểm dừng của hàm z bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 + 3x^2y^2 = 0 \\ 2x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ y = 0. \end{cases}$$

Suy ra, hàm z có ba điểm dừng là $M(-2,0)$, $N(-1,0)$, $P(1,0)$. Ta có bảng sau.

Điểm dừng	A	B	C	B^2-AC	Kết luận
$M(-2,0)$	$36>0$	0	-16	$576>0$	M không là điểm cực trị của hàm z
$N(-1,0)$	$-24<0$	0	-2	$-48<0$	N là điểm cực đại của hàm z, $z_{\mathbf{CĐ}}(N)=13$
$P(1,0)$	$72>0$	0	2	$-144<0$	P là điểm cực tiểu của hàm z, $z_{CT}(P)=-19$

1.3.2. Cực trị có điều kiện của hàm hai biến

Bài toán tìm cực trị của hàm số

$$z=f(x,y), \tag{1.10}$$

trong đó các biến số bị ràng buộc bởi hệ thức

$$g(x,y)=0 \tag{1.11}$$

được gọi là bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm hai biến.

◊ **Định lí 1.7.** *Giả sử $M_0(x_0,y_0)$ là điểm cực trị của hàm số* (1.10) *với điều kiện* (1.11). *Giả sử*

(i) Trong lân cận của M_0 các hàm số $f(x,y)$ và $g(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục,

(ii) Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y không đồng thời bằng không tại M_0.

Khi đó, tại điểm M_0

$$\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Ta thừa nhận không chứng minh định lí này.

Hệ thức (1.12) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_0,y_0).

***Chú thích* 1.1.** *Hệ thức* (1.12) *có thể viết lại thành*

$$f'_x(M_0)g'_y(M_0)-f'_y(M_0)g'_x(M_0)=0,$$

hay

$$\frac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)}=\frac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)}. \tag{1.13}$$

Đặt các giá trị chung của các vế ở đẳng thức (1.13) là $-\lambda$, ta được

$$\begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda g'_x(M_0) = 0 \\ f'_y(M_0) + \lambda g'_y(M_0) = 0. \end{cases}$$

Ngược lại, nếu tồn tại λ thỏa mãn hệ trên thì $\frac{f'_x(M_0)}{g'_x(M_0)}$ và $\frac{f'_y(M_0)}{g'_y(M_0)}$ bằng nhau vì đều bằng $-\lambda$, tức là hệ thức (1.13), do đó, (1.12) được thỏa mãn. Vậy, nếu M_0 thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của Định lí 1.7 thì tồn tại λ sao cho tại M_0

$$\begin{cases} f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Hệ (1.14) cùng với điều kiện (1.11) cho phép ta xác định (x_0, y_0, λ). Đặt

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \tag{1.15}$$

thì

$$\begin{aligned} &F'_x = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) \\ &F'_y = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) \\ &F'_\lambda = g(x,y). \end{aligned}$$

Do đó, hệ (1.14) cùng với điều kiện (1.11) có thể viết lại thành

$$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_\lambda = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Hàm $F(x,y,\lambda)$ trong công thức (1.15) được gọi là hàm Lagrange.

Ta gọi điểm tới hạn của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) là điểm thuộc một trong hai loại sau

- *Loại 1*: Gồm các điểm (x,y) thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii) của Định lí 1.7 và hệ (1.16) với λ nào đó.

- *Loại 2*: Gồm các điểm tại đó một trong hai điều kiện (i), (ii) của Định lí 1.7 không thỏa mãn.

Từ Định lí 1.7, các lập luận sau định lí ấy và chú thích 1.1, suy ra, nếu M_0 là điểm cực trị có điều kiện của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) thì M_0 là điểm tới hạn. Khẳng định ngược lại không đúng.

Định lí dưới đây cho phép ta kiểm tra một số điểm tới hạn loại 1 của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11) có phải là điểm cực trị của hàm số ấy không.

◊ **Định lí 1.8.** *Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm tới hạn loại 1 của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11). Giả sử (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của (1.16). Xét vi phân cấp hai*

$$d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = F''_{xx}(M_0)h^2 + 2F''_{xy}(M_0)hk + F''_{yy}(M_0)k^2$$

khi h, k không đồng thời bằng 0 và thỏa mãn

$$g'_x(M_0)h + g'_y(M_0)k = 0.$$

(a) *Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11).*

(b) *Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$ thì M_0 là điểm cực đại của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11).*

(c) *Nếu $d^2F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ thì M_0 có thể là điểm cực trị, cũng có thể không là điểm cực trị của hàm số (1.10) với điều kiện (1.11).*

Ta thừa nhận không chứng minh định lí này. Sau đây, ta xét một ví dụ áp dụng định lí ấy.

•**Ví dụ 1.9.** Tìm cực trị của hàm số $z = 3x+4y$ với điều kiện $x^2+y^2 = 1$.

Bài giải.

Ràng buộc đối với x, y là $g(x, y) = 0$, trong đó $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Dễ thấy, các hàm z và g có các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbb{R}^2$. Hơn nữa, $g'_x = 2x, g'_y = 2y$ không đồng thời bằng không vì $x^2 + y^2 = 1$. Suy ra, hàm z với điều kiện $g(x, y) = 0$ chỉ có các điểm tới hạn loại 1. Hàm Lagrange là

$$F(x, y, \lambda) = 3x + 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta có

$$\begin{aligned} F'_x &= 3 + 2\lambda x, \\ F'_y &= 4 + 2\lambda y, \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Do đó, hệ (1.16) trở thành

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 + 2\lambda x = 0 \\ 4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{5}{2} \\ x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}, \lambda = -\frac{5}{2}. \end{array} \right.$$

Suy ra, bài toán có hai điểm tới hạn là $M(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, tương ứng $\lambda = \frac{5}{2}$, và $N(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, tương ứng $\lambda = -\frac{5}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}&F''_{xx} = 2\lambda, F''_{xy} = 0, F''_{yy} = 2\lambda,\\&g'_x = 2x, g'_y = 2y.\end{aligned}$$

Khi $x = -\frac{3}{5}, y = -\frac{4}{5}, \lambda = \frac{5}{2}$, ta có $F''_{xx} = 5, F''_{xy} = 0, F''_{yy} = 5, g'_x = -\frac{6}{5}, g'_y = -\frac{8}{5}$.
Do đó, ta cần xét

$$d^2F(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{2}) = F''_{xx}h^2 + 2F''_{xy}hk + F''_{yy}k^2 = 5h^2 + 5k^2,$$

khi h, k không đồng thời bằng 0 và bị ràng buộc bởi điều kiện

$$g'_x(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5})h + g'_y(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5})k = -\tfrac{6}{5}h - \tfrac{8}{5}k = 0. \tag{1.17}$$

Từ ràng buộc (1.17) và điều kiện h, k không đồng thời bằng 0. Suy ra, $h = -\dfrac{4}{3}k$ và $k \neq 0$. Do đó, $d^2F(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{2}) = \frac{125}{9}k^2 > 0$.

Theo Định lí 1.8, $M(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm z. Giá trị cực tiểu là

$$z_{CT}(M) = -5.$$

Tính toán tương tự, khi $x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}, \lambda = -\frac{5}{2}$, ta thấy $N(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ là điểm cực đại có điều kiện của hàm z. Giá trị cực đại là

$$z_{\text{CĐ}}(N) = 5.$$

Trên đây, ta đã dựa vào Định lí 1.8 để xét xem điểm $M(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ có là điểm cực trị có điều kiện của hàm z không. Từ đó, ta có kết luận $d^2F(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{2}) > 0$, với mọi h, k không đồng thời bằng 0 và bị ràng buộc bởi điều kiện (1.17) nhanh hơn như sau.

Ta có

$$d^2F(-\tfrac{3}{5}, -\tfrac{4}{5}, \tfrac{5}{2}) = 5h^2 + 5k^2 > 0$$

với mọi h, k không đồng thời bằng 0. Bất đẳng thức trên vẫn đúng khi h, k bị ràng buộc thêm bởi điều kiện (1.17).

1.3.3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm hai biến trên miền đóng, bị chặn

Giả sử hàm f liên tục trên miền D đóng và bị chặn. Theo tính chất của hàm liên tục suy ra f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên miền D. Giả sử giá trị lớn nhất của hàm f đạt được tại $M_0 \in D$. Khi đó, $f(M) \leq f(M_0), \forall M \in D$. Giả sử M_0 là điểm trong của D. Khi đó, tồn tại lân cận $V(M_0)$ nào đó của điểm M_0 sao cho $V(M_0) \subset D$. Nếu $M \in V(M_0)$ thì $M \in D$, do đó $f(M) \leq f(M_0)$. Suy ra, M_0 là điểm cực đại không nghiêm ngặt, do đó là điểm tới hạn của hàm f. Điểm M_0 cũng có thể là điểm biên của miền D.

Từ các lập luận trên, ta suy ra thuật toán tìm giá trị lớn nhất của hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng tại tất cả các điểm trong của miền D đóng và bị chặn như sau.

- *Bước 1.* Tính các đạo hàm riêng cấp một của hàm z là $p = z'_x, q = z'_y$.

- *Bước 2.* Tìm các điểm tới hạn của hàm z là các điểm trong của miền D có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

  và tính giá trị của hàm f tại các điểm ấy.

- *Bước 3.* Tìm giá trị lớn nhất của hàm f trên biên của miền D.

- *Bước 4.* Tìm giá trị lớn nhất trong số các giá trị tìm được ở bước 2 và bước 3. Giá trị lớn nhất ấy chính là giá trị lớn nhất của hàm f trên miền D.

Nếu các điểm tới hạn ở bước 2 không tồn tại thì hàm f đạt giá trị lớn nhất trên biên của miền D, tức là giá trị lớn nhất của hàm f trên biên của D tìm được ở bước 3 cũng chính là giá trị lớn nhất của nó trên toàn miền D.

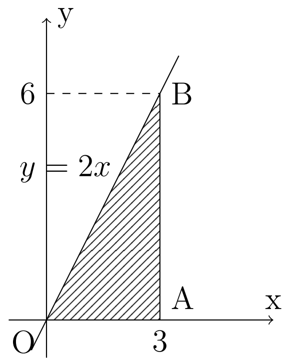
Thuật toán tìm giá trị nhỏ nhất của hàm f trên miền D tương tự thuật toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số ấy trên miền D.

•**Ví dụ 1.10.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$z = 2x^2 + y^2 - x^2y$$

trên miền $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2x$.

Lời giải.



Hình 1.1

- Kí hiệu D là miền $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2x$. Ta có

$$\begin{cases} p = z'_x = 4x - 2xy, \\ q = z'_y = 2y - x^2 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2xy = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy, hàm số có ba điểm tới hạn là $O(0,0),\ M_1(-2,2),\ M_2(2,2)$. Trong ba điểm trên, ta thấy chỉ có điểm $M_2(2,2)$ là điểm trong của D. Ta có

$$z(M_2) = z(2,2) = 4. \tag{1.18}$$

- Xét hàm $z(x,y)$, khi (x,y) là các điểm trên biên của miền D. Đặt $O(0,0);\ A(3,0);\ B(3,6)$. Biên của miền D gồm ba đoạn thẳng là $OA,\ AB,\ BO$.

  – Đoạn OA có phương trình là $y = 0,\ 0 \leq x \leq 3$, và trên OA ta có

$$z = f(x) = 2x^2,\ 0 \leq x \leq 3,$$

$$f'(x) = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0,3).$$

  Ta có

$$f(0) = z(0,0) = 0, \tag{1.19}$$

$$f(3) = z(3,0) = 18. \tag{1.20}$$

– Đoạn AB có phương trình là $x = 3,\ 0 \le y \le 6$, và trên AB ta có

$$z = g(y) = y^2 - 9y + 18,\ 0 \le y \le 6,$$

$$g'(y) = 2y - 9 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9}{2} \in (0, 6).$$

Ta có

$$g(0) = z(3, 0) = 18, \tag{1.21}$$

$$g(\frac{9}{2}) = z(3, \frac{9}{2}) = -\frac{9}{4}, \tag{1.22}$$

$$g(6) = z(3, 6) = 0. \tag{1.23}$$

– Đoạn OB có phương trình là $y = 2x,\ 0 \le x \le 3$, và trên OB ta có

$$z = h(x) = 6x^2 - 2x^3,\ 0 \le x \le 3,$$

$$h'(x) = 12x - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin (0, 3) \\ x = 2 \in (0, 3), \end{array}\right.$$

Ta có

$$h(0) = z(0, 0) = 0, \tag{1.24}$$

$$h(2) = z(2, 4) = 8, \tag{1.25}$$

$$h(3) = z(3, 6) = 0. \tag{1.26}$$

So sánh các giá trị tại (1.18) - (1.26), ta thu được kết quả sau đây

$$\max_{M \in D} z(M) = z(3, 0) = 18,\ \ \min_{M \in D} z(M) = z(3, \tfrac{9}{2}) = -\frac{9}{4}.$$

•**Ví dụ 1.11.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ trên miền $x^2 + y^2 \le 25$.

Lời giải.

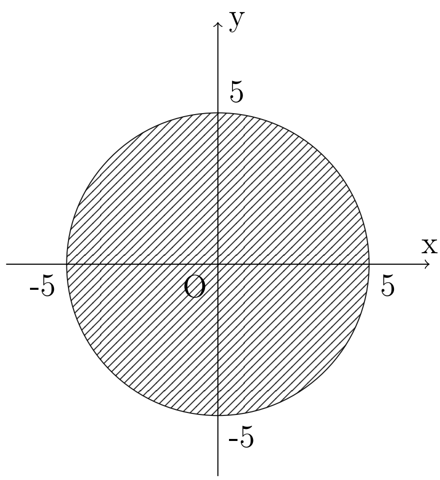
Kí hiệu D là miền $x^2 + y^2 \le 25$. Đó là hình tròn đóng tâm $O(0, 0)$ bán kính bằng 5.

Ta có

$$\begin{cases} p = z'_x & = 2x - 12 \\ q = z'_y & = 2y + 16 \end{cases}.$$

Do đó,

$$\left\{\begin{array}{l} p = 0 \\ q = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - 12 = 0 \\ 2y + 16 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = -8 \end{array}\right..$$



Hình 1.2

Vì $6^2 + (-8)^2 = 100 > 25$ nên điểm $(6, -8)$ không phải là điểm trong của miền D. Suy ra, trong D hàm z không có điểm tới hạn nên nó đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên của D.

Xét hàm $z(x, y)$ khi (x, y) là điểm trên biên của miền D.

Khi đó, $x^2 + y^2 = 25$ hay $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$.

Suy ra

$$z = 25 - 60\cos t + 80\sin t,\ z = 25 + 100(-\tfrac{3}{5}\cos t + \tfrac{4}{5}\sin t).$$

Đặt $\cos\alpha = -\frac{3}{5},\ \sin\alpha = \frac{4}{5}$, ta có

$$z = 25 + 100(\cos\alpha\cos t + \sin\alpha\sin t),\ z = 25 + 100\cos(t - \alpha).$$

Từ đó, suy ra

$$-75 \le z \le 125.$$

Dấu bằng thứ nhất xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\cos(t-\alpha) = -1 \\
&\Leftrightarrow t - \alpha = \pi + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow t = \alpha + \pi + k2\pi \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = 5\cos t = -5\cos\alpha = -5(-\frac{3}{5}) = 3 \\ y = 5\sin t = -5\sin\alpha = -5(\frac{4}{5}) = -4 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng thứ hai xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
&\cos(t-\alpha)=1\\
&\Leftrightarrow t-\alpha=k2\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\\
&\Leftrightarrow t=\alpha+k2\pi\\
&\Rightarrow \begin{cases} x=5\cos t=5\cos\alpha=5(-\frac{3}{5})=-3\\ y=5\sin t=5\sin\alpha=5(\frac{4}{5})=4\end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy,
$\max\limits_{M\in D} z(M)=\max\limits_{M\in\partial D} z(M)=125$, giá trị lớn nhất đạt được tại $(-3,4)$,
$\min\limits_{M\in D} z(M)=\min\limits_{M\in\partial D} z(M)=-75$, giá trị nhỏ nhất đạt được tại $(3,-4)$.

Bài tập chương 1

Bài 1.1. Tính đạo hàm riêng của các hàm số sau
a) $z = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$,
b) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
c) $z = y^2 \sin \frac{x}{y}$,
d) $z = x^{y^3}, x > 0$,
e) $z = \arctan \frac{y}{x}$,
f) $z = \arcsin(x - 2y)$,
g) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$,
h) $z = \arctan \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$,
i) $u = x^{y^z}; x, y > 0$,
j) $u = e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$,
k) $u = e^{xyz} \sin \frac{y}{z}$.
Bài 1.2. Chứng minh rằng hàm số $z = y\ln(x^2 - y^2)$ thoả mãn phương trình $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{z}{y^2}$.
Bài 1.3. Tìm vi phân toàn phần của các hàm số
a) $z = \sin(x^2 + y^2)$,
b) $z = e^x(\cos y + x \sin y)$,
c) $z = \ln \tan \frac{y}{x}$,
d) $z = \arctan \frac{x+y}{x-y}$,
e) $u = x^{y^2 z}, x > 0$.
Bài 1.4. Tính gần đúng
a) $\sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2}$,
b) $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$.
Bài 1.5. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm số sau
a) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$,
b) $z = x^2 \ln(x + y)$,
c) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$,
d) $z = \arctan \frac{y}{x}$.
Bài 1.6. Tìm hàm $f(x, y)$ thoả mãn
a) $f''_{xy} = 0$,
b) $f''_{xx} = 0$,
c) $f''_{xx} = 12x^2y + 2,\ f'_y = x^4 - 30xy^5,\ f(0, 0) = 1,\ f(1, 1) = -2$,
d) $f'_x = x^2 - 2xy^2 + 3,\ f'_y = y^2 - 2x^2y + 3$.
Bài 1.7. Tìm hàm $u(x, y, z)$ thoả mãn $u'''_{xyz} = 0$.
Bài 1.8. Chứng minh rằng

a) Hàm số $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ thoả mãn phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,
b) Hàm số $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ thoả mãn phương trình $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

Bài 1.9. Tìm cực trị của các hàm số sau
a) $z = x^2 + y^2 + x^3 + xy^2$;
b) $z = y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 9x + 3$;
c) $z = x^3 - 3y + y^2 - 3x + 3$;
d) $z = 2x^3 + 6xy^2 + 3x^2 - 3y^2$;
e) $z = -x^3 + 3x^2 - 12xy^2 - 12y^2$;
f) $z = x^3 + y^2 + 2xy + 1$;
g) $z = x^2 + 8y^2 - 2xy^2 + 10$;
h) $z = x + y - xe^y$;
i) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

Bài 1.10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm z trên miền D tương ứng với
a) $z = x^2 - y^2$, D là miền tròn $x^2 + y^2 \leq 4$;
b) $z = x^2 + xy^2 + 1$, D là miền tròn giới hạn bởi $x^2 + 2x + y^2 = 8$;
c) $z = x^2y(4 - x - y)$, D là hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0$ và $x + y = 6$;
d) $z = x^2 + 3y^2 + x - y$, D là hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1, y = 1$ và $x + y = 1$;
e) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, D là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 1, y = 0$ và $y = 2$;
f) $z = x^3 - 6x^2 + xy^2$, D là hình vuông giới hạn bởi các đường $x = 0, x = 4, y = 0$ và $y = 4$;
g) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, D là miền xác định bởi $0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$;
h) $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$, D là miền tròn $x^2 + y^2 \leq 1$;
i) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, D là hình chữ nhật giới hạn bởi $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = 0$ và $y = \dfrac{\pi}{2}$;
j) $z = 2^{x+1} + 2^{y+1} - 2^{x+y}$, D là hình tam giác giới hạn bởi các đường thẳng $x = 0, y = 0$ và $x + y = 4$.

Bài 1.11. Tìm cực trị của
a) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ với điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$, $a > 0$,
b) $z = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

Đáp số bài tập chương 1

Bài 1.1.

a) $z'_x = \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$, $z'_y = \dfrac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$;

b) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$;

c) $z'_x = y\cos\frac{x}{y}$, $z'_y = 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y}$;

d) $z'_x = y^3x^{y^3-1}$, $z'_y = x^{y^3}\ln x.3y^2$;

e) $z'_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2+y^2}$;

f) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}$, $z'_y = -\frac{2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}$;

g) $z'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$;

h) $z'_x = \frac{y^2}{x\sqrt{x^4-y^4}}$, $z'_y = -\frac{y}{\sqrt{x^4-y^4}}$;

i) $u'_x = y^zx^{y^z-1}$, $u'_y = x^{y^z}\ln x.zy^{z-1}$, $u'_z = x^{y^z}\ln x.y^z\ln y$;

j) $u'_x = \frac{-2xu}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_y = \frac{-2yu}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $u'_z = \frac{-2zu}{(x^2+y^2+z^2)^2}$;

k) $u'_x = yze^{xyz}\sin\frac{y}{z}$, $u'_y = xze^{xyz}\sin\frac{y}{z} + e^{xyz}.\frac{1}{z}\cos\frac{y}{z}$, $u'_z = xye^{xyz}\sin\frac{y}{z} - e^{xyz}.\frac{y}{z^2}\cos\frac{y}{z}$.

Bài 1.2. Độc giả tự chứng minh

Bài 1.3.

a) $2\cos(x^2+y^2)(xdx+ydy)$;

b) $e^x\left[(x\cos y - \sin y)dy + (\sin y + \cos y + x\sin y)dx\right]$;

c) $\frac{2(xdy-ydx)}{x^2\sin(2y/x)}$;

d) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$;

e) $y^2zx^{y^2z-1}dx + x^{y^2z}\ln x2yzdy + x^{y^2z}\ln xy^2dz$.

Bài 1.4. a) 1.013; b) 0.005.

Bài 1.5.

a) $z''_{xx} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{xy} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z''_{yy} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

b) $z''_{xx} = 2\ln(x+y) + \frac{2x}{x+y} + \frac{x^2+2xy}{(x+y)^2}$, $z''_{xy} = \frac{2x}{x+y} - \frac{x^2}{(x+y)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{x^2}{(x+y)^2}$;

c) $z''_{xx} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{xy} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $z''_{yy} = \frac{x^3+(x^2-y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$;

d) $z''_{xx} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{xy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

Bài 1.6.

a) $f(x,y) = F(x) + G(y)$, $F(x)$ là hàm khả vi, $G(y)$ là hàm bất kì;

b) $f(x,y) = xF(y) + G(y)$, F và G là 2 hàm bất kì;

c) $f(x,y) = x^4y - 5xy^6 + x^2 + 1$;

d) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3} - x^2y^2 + 3(x+y) + C$.

Bài 1.7.

$u(x, y, z) = G(y, z) + H(x, z) + F(x, y)$, F có đạo hàm riêng cấp 2 F''_{xy}, H có đạo hàm theo x, G là hàm bất kì.

Bài 1.8. Độc giả tự chứng minh

Bài 1.9.

a) $z_{\text{CT}} = 0$ tại $(0, 0)$;

b) $z_{\text{CĐ}} = \dfrac{39}{4}$ tại $(\dfrac{3}{2}, 0)$;

c) $z_{\text{CT}} = -\dfrac{5}{4}$ tại $(1, \dfrac{3}{2})$;

d) $z_{\text{CĐ}} = 1$ tại $(-1, 0)$;

e) $z_{\text{CĐ}} = 4$ tại $(2, 0)$;

f) $z_{\text{CT}} = \dfrac{23}{27}$ tại $(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3})$;

g) $z_{\text{CT}} = 10$ tại $(0, 0)$;

h) Không có cực trị;

i) $z_{\text{CT}} = -\dfrac{9}{8}$ tại $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right), \left(\dfrac{1}{2}, -1\right), \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right), \left(-\dfrac{1}{2}, -1\right)$ và $z_{\text{CĐ}} = 0$ tại $(0, 0)$.

Bài 1.10.

a) Giá trị lớn nhất là 4 tại $(2, 0)$ và $(-2, 0)$, giá trị nhỏ nhất là -4 tại $(0, 2)$ và $(0, -2)$;

b) Giá trị lớn nhất là 17 tại $(-4, 0)$, giá trị nhỏ nhất là -11 tại $(-2, 2\sqrt{2})$ và $(-2, -2\sqrt{2})$;

c) Giá trị lớn nhất là 4 tại $(2, 1)$, giá trị nhỏ nhất là -64 tại $(4, 2)$;

d) Giá trị lớn nhất là 4 tại $(1, 1)$, giá trị nhỏ nhất là 1 tại $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$;

e) Giá trị lớn nhất là 17 tại $(1, 2)$, giá trị nhỏ nhất là -3 tại $(1, 0)$;

f) Giá trị lớn nhất là 32 tại $(4, 4)$, giá trị nhỏ nhất là -32 tại $(4, 0)$;

g) Giá trị lớn nhất là 13 tại $(2, -1)$, giá trị nhỏ nhất là -1 tại $(0, -1)$ và $(1, 1)$;

h) Giá trị lớn nhất là $\dfrac{3}{e}$ tại $(0, 1)$ và $(0, -1)$, giá trị nhỏ nhất là 0 tại $(0, 0)$;

i) Giá trị lớn nhất là $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ tại $(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3})$, giá trị nhỏ nhất là 0 tại $(0, 0)$;

j) Giá trị lớn nhất là 18 tại $(4, 0)$ và $(0, 4)$, giá trị nhỏ nhất là 0 tại $(2, 2)$.

Bài 1.11.

a) $z_{CT} = -\dfrac{\sqrt{2}}{a}$ tại $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $z_{\text{CĐ}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$ tại $(a\sqrt{2},\ a\sqrt{2})$;

b) $z_{\text{CĐ}} = \frac{1}{4}$ tại $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$.

Chương 2

TÍCH PHÂN BỘI, TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

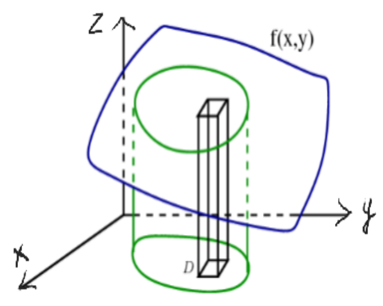
2.1. Tích phân kép

2.1.1. Định nghĩa tích phân kép

2.1.1.1. Bài toán tính thể tích vật thể hình trụ

Cho $z = f(x, y)$ là một hàm số xác định, liên tục, không âm trong một miền D đóng, bị chặn, có biên L trong mặt phẳng Oxy. Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi miền D, mặt $z = f(x, y)$ và mặt trụ có đường sinh song song với Oz tựa trên L.

Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ. Gọi tên và cả diện tích của các mảnh đó là ΔS_1, ΔS_2, $\ldots$, ΔS_n. Lấy mỗi mảnh nhỏ đó làm đáy, dựng vật thể hình trụ mà mặt xung quanh có đường sinh song song với Oz và trên giới hạn bởi mặt cong $z = f(x, y)$. Vậy, vật thể hình trụ đã được chia thành n vật thể hình trụ nhỏ. Trong mỗi mảnh ΔS_i, $(i = 1, \ldots, n)$, ta lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$.



Hình 2.1

Tích $f(x_i, y_i).\Delta S_i$ là thể tích hình trụ thẳng có đáy là ΔS_i và chiều cao là $f(x_i, y_i)$, nó khác rất ít thể tích ΔV_i của vật thể hình trụ nhỏ thứ i nếu mảnh ΔS_i có đường kính d_i[1] khá nhỏ, vì hàm số $f(x, y)$ liên tục. Vậy, có thể xem thể tích V của vật thể hình trụ xấp xỉ bằng $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$.

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i.$$

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh ΔS_i có đường kính càng nhỏ. Do đó, thể tích V của vật thể hình trụ đã cho bằng giới hạn (nếu có) của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho đường kính lớn nhất trong các đường kính d_i của các mảnh ΔS_i dần tới 0, giới hạn đó không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ cũng như cách chọn điểm M_i trong ΔS_i.

$$V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i.$$

2.1.1.2. Tính khối lượng của bản phẳng không đồng chất

Cho một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy. Lấy một mảnh tùy ý của bản ấy có diện tích ΔS và giả sử khối lượng của mảnh ấy là Δm. Giới hạn nếu có của tỉ số $\dfrac{\Delta m}{\Delta S}$ khi $\Delta S \to 0$ sao cho mảnh ấy thu về một điểm P được gọi là khối lượng riêng của bản tại P và được kí hiệu là $\rho(P)$. Nếu bản đồng chất thì ρ không đổi. Nếu bản không đồng chất thì ρ là một hàm số của P.

Bây giờ, giả sử khối lượng riêng của bản là một hàm số liên tục $\rho(P) = \rho(x, y)$. Hãy tính khối lượng của bản. Chia miền D thành n miền nhỏ $\Delta \mathrm{S}_1$, $\Delta \mathrm{S}_2$, ... , $\Delta \mathrm{S}_n$ có đường kính tương ứng là d_i và chọn trong mỗi mảnh $\Delta \mathrm{S}_i$ một điểm tùy ý $\mathrm{P}_i(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)$. Khối lượng của bản được tính xấp xỉ bằng tổng

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(P_i)\Delta S_i.$$

Giới hạn nếu có của tổng trên khi $n \to \infty$ sao cho $d = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i \to 0$ được gọi là khối lượng của bản

$$m = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(P_i).\Delta S_i.$$

[1]Đường kính d_i của một miền S_i là khoảng cách lớn nhất giữa các điểm trên biên của miền ấy.

2.1.1.3. Định nghĩa tích phân kép

Nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau của khoa học kĩ thuật đưa đến việc tìm giới hạn của tổng có dạng trên. Ta đưa ra định nghĩa sau đây.

⋆ **Định nghĩa 2.1.** Cho hàm $z = f(x, y)$ xác định trong một miền đóng, bị chặn D. Chia miền D một cách tùy ý thành n mảnh nhỏ, gọi tên và diện tích của các mảnh đó là ΔS_1, ΔS_2, ... , ΔS_n. Trong mỗi mảnh ΔS_i, lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i)$. Tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$ được gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x, y)$ trong miền D.

Nếu khi $n\to \infty$ sao cho $d \to 0$ mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền D và cách lấy điểm M_i trong mỗi mảnh ΔS_i , thì giới hạn đó được gọi là tích phân kép của hàm số $f(x, y)$ trong miền D và được kí hiệu là $\iint\limits_D f(x, y)dS$. Vậy

$$\iint\limits_D f(x, y)dS = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i. \tag{2.1}$$

Hàm hai biến số $f(x, y)$ được gọi là hàm dưới dấu tích phân, D là miền lấy tích phân, dS là yếu tố diện tích, x, y là biến tích phân. Nếu tồn tại tích phân (2.1) thì hàm $f(x, y)$ được gọi là khả tích trong miền D.

Người ta chứng minh được rằng nếu $f(x, y)$ liên tục trong miền D thì $\iint\limits_D f(x, y)dS$ tồn tại, tức là $f(x, y)$ khả tích trong miền D.

∗ **Chú ý:** Vì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền D thành các mảnh nhỏ như đã nêu trong định nghĩa nên ta có thể chia miền D bằng hai họ đường thẳng song song với các trục tọa độ. Do đó, $dS = dx.dy$ và $\iint\limits_D f(x, y)dS = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

2.1.1.4. Các tính chất của tích phân kép

Giả sử $f(x, y), g(x, y)$ là các hàm số khả tích trên một miền D. Ta có

a. $\iint\limits_D [f(x, y) + g(x, y)]\, dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy + \iint\limits_D g(x, y)dxdy$.

b. $\iint\limits_D kf(x, y)dxdy = k \iint\limits_D f(x, y)dxdy$, với k là hằng số bất kì.

c. Nếu có thể chia miền D thành hai miền D_1, D_2 sao cho diện tích của miền $D_1 \cap D_2$ bằng 0 thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

d. Nếu $f(x,y) \le g(x,y),\ \forall (x,y) \in D$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

e. Nếu $m \le f(x,y) \le M,\ \forall (x,y) \in D$, với m và M là các hằng số thì

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS, \text{ S là diện tích của miền D.}$$

f. Nếu $f(x,y)$ liên tục trong miền đóng, bị chặn, liên thông D thì trong D có ít nhất một điểm $(\overline{x}, \overline{y})$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y})S, \text{ S là diện tích của miền D.}$$

2.1.2. Cách tính tích phân kép trong hệ tọa độ Đề-các

2.1.2.1. Miền D là hình chữ nhật

Giả sử phải tính tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó D là hình chữ nhật $a \le x \le b$; $c \le y \le d$ và hàm $f(x,y)$ liên tục trong D. Ta có định lí sau đây.

◊ **Định lí 2.1.** *(Định lý Fubini).*

Giả sử $f(x,y)$ là hàm số khả tích trong hình chữ nhật $D = [a,b]\times[c,d]$. Khi đó,

a. Nếu $\forall x \in [a,b]$, hàm số $y \mapsto f(x,y)$ khả tích trên $[c,d]$ thì hàm số $x \mapsto I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên $[a,b]$ và

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_c^d f(x,y)dy\Big)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{2.2}$$

b. Nếu $\forall y \in [c, d]$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên $[a, b]$ thì hàm số $y \mapsto J(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ khả tích trên $[c, d]$ và

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d J(y)dy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_a^b f(x, y)dx\Big)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx. \tag{2.3}$$

Ta thừa nhận không chứng minh định lí này.

$\triangledown$ ***Hệ quả* 2.1.** *Nếu $f(x, y)$ liên tục trên $D = [a, b] \times [c, d]$ thì*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx. \tag{2.4}$$

Như vậy, việc tính tích phân kép trên được đưa về việc tính hai tích phân đơn liên tiếp, khi tính tích phân đơn thứ nhất $\int\limits_c^d f(x, y)dy$ ta coi x là hằng số (hoặc khi tính tích phân đơn $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ ta coi y là hằng số).

$*$ **Chú ý:** Nếu $f(x, y) = f_1(x).f_2(y)$ thì

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b f_1(x)dx. \int\limits_c^d f_2(y)dy. \tag{2.5}$$

•**Ví dụ 2.1.** Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$, trong đó D là miền xác định bởi $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$.

Lời giải. Vì $x^2 + y^2$ liên tục trên D nên

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x^2 + y^2)dy = \int\limits_0^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3})\Big|_0^1 dx$$

$$= \int\limits_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})dx = \Big(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\Big)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

•**Ví dụ 2.2.** Tính $I = \iint\limits_D x^2 ydxdy$, trong đó D là miền xác định bởi $-1 \le x \le 2$; $0 \le y \le 1$.

Lời giải. Theo công thức (2.5), ta có

$$I = \int\limits_{-1}^2 x^2 dx. \int\limits_0^1 ydy = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 . \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

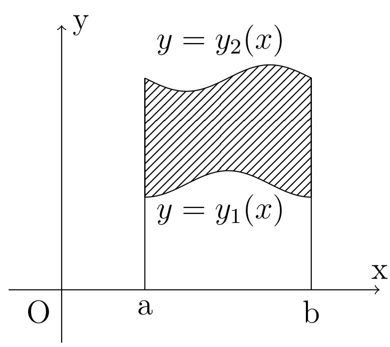
2.1.2.2. Miền D là miền bất kì

◊ **Định lí 2.2.** *Giả sử* $D = \{(x, y) : a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, $y_1(x)$ *và* $y_2(x)$ *là những hàm số liên tục trên* $[a, b]$, $y_1(x) \le y_2(x)$ *với* $\forall x \in [a, b]$ *(xem Hình 2.2 ở dưới). Giả sử* $f(x, y)$ *là hàm số khả tích trên* D. *Nếu* $\forall x \in [a, b]$, *hàm số* $y \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên đoạn* $[y_1(x), y_2(x)]$ *thì hàm số*

$$x \mapsto I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy,$$

khả tích trên $[a, b]$ *và*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy. \qquad (2.6)$$



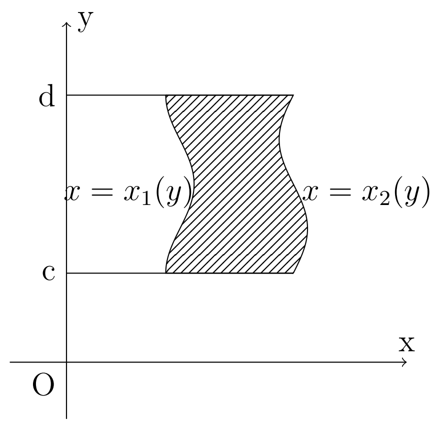
Hình 2.2

◊ **Định lí 2.3.** *Giả sử* $D = \{(x, y) : c \le y \le d;\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, $x_1(y)$ *và* $x_2(y)$ *là hai hàm số liên tục trên* $[c, d]$, $x_1(y) \le x_2(y)$ *với* $\forall y \in [c, d]$ *(xem Hình 2.3 ở dưới). Giả sử* $f(x, y)$ *là hàm số khả tích trên* D. *Nếu* $\forall y \in [c, d]$, *hàm số* $x \mapsto f(x, y)$ *khả tích trên đoạn* $[x_1(y), x_2(y)]$ *thì hàm số*

$$y \mapsto J(y) = \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx,$$

khả tích trên $[c, d]$ *và*

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d J(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx. \qquad (2.7)$$



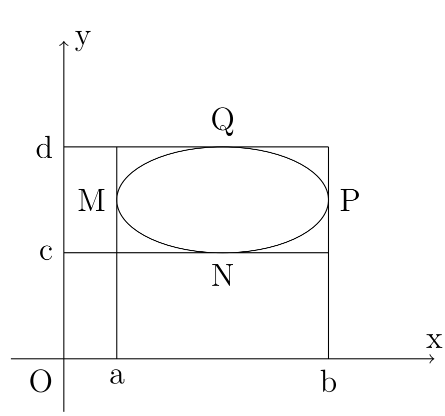
Hình 2.3

▽ ***Hệ quả* 2.2.**

- Giả sử $D = \{(x, y) : a \le x \le b;\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\};\ y_1(x)$ và $y_2(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a, b]$. Nếu f là một hàm số liên tục trên D thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

- Giả sử $D = \{(x, y) : c \le y \le d;\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, $x_1(y)$ và $x_2(y)$ là hai hàm số liên tục trên $[c, d]$. Nếu f là một hàm số liên tục trên D thì
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

$*$ **Chú ý:** Giả sử mỗi đường thẳng song song với Ox và Oy đều cắt biên của miền D nhiều nhất tại hai điểm. Dựng hình chữ nhật $a \le x \le b$; $c \le y \le d$ mà các cạnh của nó tiếp xúc với biên của D tại các điểm M, N, P, Q. Các điểm M, P chia biên của D thành hai cung $\widehat{MNP}$ và cung $\widehat{MQP}$ có các phương trình theo thứ tự là $y = y_1(x), y = y_2(x)$. Các điểm N, Q chia biên của miền D thành hai cung $\widehat{NMQ}$ và cung $\widehat{NPQ}$ có các phương trình theo thứ tự là $x = x_1(y), x = x_2(y)$ (xem Hình 2.4).



Hình 2.4

Nếu $f(x,y)$ liên tục trên D, ta có thể tính $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ theo công thức (2.6) hoặc (2.7). Khi đó, ta có

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{2.8}$$

Đó là công thức đổi thứ tự lấy tích phân.

•**Ví dụ 2.3.** Xác định các cận tích phân trong tích phân kép

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

trong đó D là miền $\{y \geq 0;\ y \leq x^2;\ x + y \leq 2;\ x \geq 0\}$.

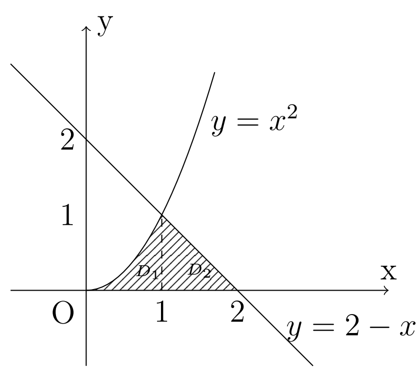
Lời giải. (Xem Hình 2.5)

Miền D được xác định bởi

$$0 \leq y \leq 1;\ \sqrt{y} \leq x \leq 2 - y.$$

Do đó,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx.$$



Hình 2.5

Để đổi thứ tự tích phân ta chia D thành hai miền D_1 và D_2 bởi đường $x = 1$, trong đó D_1 được xác định

$$0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x^2,$$

D_2 được xác định

$$1 \leq x \leq 2;\ 0 \leq y \leq 2 - x.$$

Do đó,

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Rõ ràng, cách tính thứ nhất đơn giản hơn.

Qua ví dụ trên ta thấy khi tính tích phân kép cần chọn thứ tự tích phân sao cho cách tính đơn giản hơn.

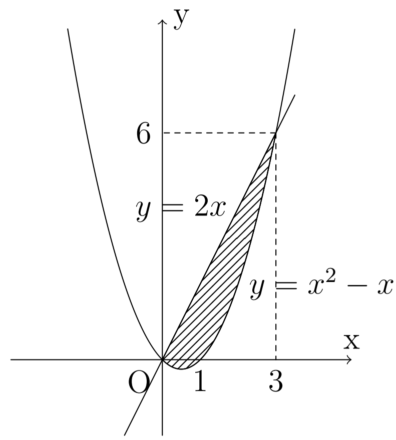
•**Ví dụ 2.4.** Tính $I = \iint\limits_D (x^2 - 2xy + 4y)\, dxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$; $y = 2x$.

Lời giải. (Xem Hình 2.6)
Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức

$$0 \leq x \leq 3;\ x^2 - x \leq y \leq 2x.$$

Do đó,

$$I = \int_0^3 dx \int_{x^2-x}^{2x} \left(x^2 - 2xy + 4y\right) dy$$
$$= \int_0^3 \left(x^2y - xy^2 + 2y^2\right)\Big|_{x^2-x}^{2x} dx$$
$$= \int_0^3 (x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 6x^2)dx$$
$$= \left(\frac{x^6}{6} - x^5 + x^4 + 2x^3\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2}.$$



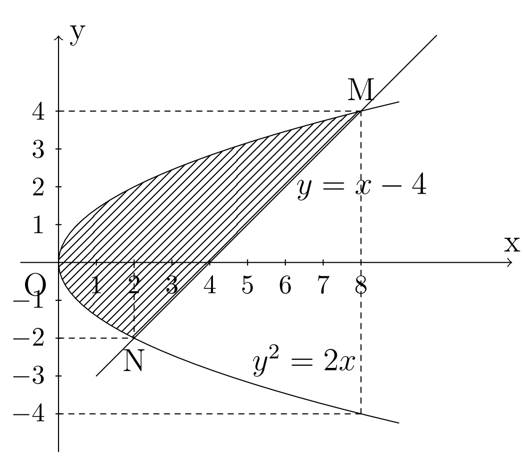
Hình 2.6

•**Ví dụ 2.5.** Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền giới hạn bởi các đường $y = x - 4$, $y^2 = 2x$.

Lời giải. (Xem Hình 2.7)

Trước hết, ta tìm giao điểm của hai đường

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ y^2 = 2x \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 & = 2x \\ y & = x - 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right. .$$



Hình 2.7

Vậy hai đường cắt nhau tại hai điểm $M(8,4)$ và $N(2,-2)$.
Miền D được xác định bởi các bất đẳng thức sau

$$-2 \le y \le 4;\ \frac{y^2}{2} \le x \le y+4.$$

Do đó,

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{y^2/2}^{y+4} xy dx = \int_{-2}^{4} \frac{yx^2}{2}\bigg|_{y^2/2}^{y+4} dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} (y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4})dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24}\right)\bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

2.1.3. Đổi biến số sang hệ tọa độ cực

2.1.3.1. Công thức đổi biến số trong tích phân kép

Trong nhiều trường hợp tính tích phân kép $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong tọa độ Đề-các không thuận lợi. Khi đó, ta có thể dùng phương pháp đổi biến sau đây.
Xét tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$, trong đó $f(x,y)$ là hàm số liên tục trên D.
Thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}. \tag{2.9}$$

Giả sử

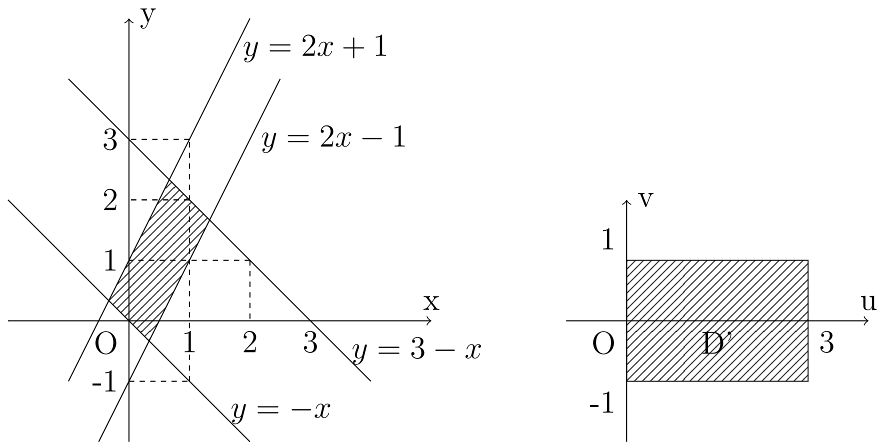
- $x(u,v), y(u,v)$ là những hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong một miền đóng D' của mặt phẳng $O'uv$.
- Các công thức (2.9) xác định một song ánh từ miền D' lên miền D của mặt phẳng Oxy.
- Định thức Jacobi $J = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \ne 0$ trong miền D'.

Khi đó, ta có công thức

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|J|\,dudv. \tag{2.10}$$

Công thức (2.10) được gọi là công thức đổi biến trong tích phân kép.
$*$ **Chú ý:** Khi đổi biến người ta thường chọn phép biến đổi sao cho đường biên của miền D' trong hệ tọa độ mới có phương trình đơn giản để cho việc xác định cận của u và v đơn giản hơn.

•Ví dụ 2.6. Tính $I = \iint\limits_D (x+y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường sau $y = -x;\ \ y = -x + 3;\ y = 2x - 1;\ y = 2x + 1.$



Hình 2.8

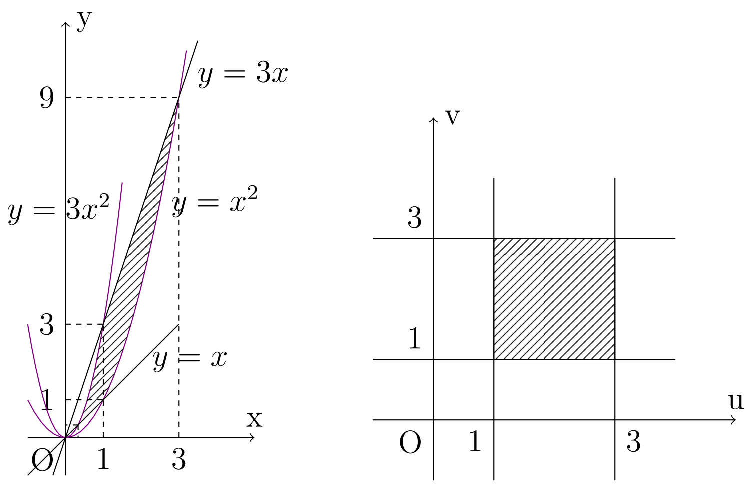
Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = x + y \\ v = -2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{3} - \dfrac{v}{3} \\ \\ y = \dfrac{2u}{3} + \dfrac{v}{3}. \end{cases}$

Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{-1}{3} \\ \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{3} \neq 0$. Công thức trên xác định một song ánh biến miền D thành hình chữ nhật D' giới hạn bởi các đường $u = 0,\ u = 3,\ v = -1,\ v = 1$ (Xem Hình 2.8).
Do $J = \dfrac{1}{3} \neq 0$, nên áp dụng công thức (2.10), ta được

$$J = \frac{1}{3}\iint\limits_{D'} ududv = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 udu \int\limits_{-1}^1 dv = \frac{1}{3}\,\frac{u^2}{2}\bigg|_0^3\, v\big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}.\frac{9}{2}.2 = 3.$$

•Ví dụ 2.7. Tính $I = \iint\limits_D xydxdy$, trong đó D là miền xác định bởi

$$x \leq y \leq 3x;\ \ x^2 \leq y \leq 3x^2.$$



Hình 2.9

Lời giải. Thực hiện phép đổi biến $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = \dfrac{y}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{v} \\ y = \dfrac{u^2}{v} \end{cases}$.

Định thức Jacobi $J = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & -\dfrac{u}{v^2} \\ \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \end{vmatrix} = \dfrac{u^2}{v^3}$.

Công thức trên xác định một song ánh biến miền D thành hình vuông D' giới hạn bởi các đường $u = 1,\ u = 3,\ v = 1,\ v = 3$ (Xem Hình 2.9).
Do $J = \dfrac{u^2}{v^3} \neq 0$ trong miền D' nên áp dụng (2.10), ta được

$$J = \iint\limits_{D'} \frac{u}{v}.\frac{u^2}{v}.\frac{u^2}{v^3}dudv = \iint\limits_{D'} \frac{u^5}{v^5}dudv = \int\limits_1^3 u^5du \int\limits_1^3 \frac{1}{v^5}dv$$

$$= \frac{u^6}{6}\Bigg|_1^3 \frac{v^{-4}}{-4}\Bigg|_1^3 = \frac{7280}{243}.$$

2.1.3.2. Tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực

Công thức liên hệ giữa tọa độ Đề-các (x, y) và tọa độ cực (r, φ) của cùng một điểm là

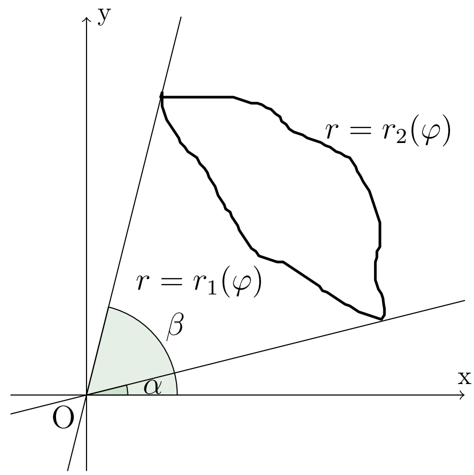
$$\begin{cases} x = & rcos\varphi \\ y = & rsin\varphi \end{cases}. \tag{2.11}$$

Nếu $r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ thì công thức trên xác định một song ánh giữa mặt phẳng Oxy, trừ gốc O, và tập hợp trên của mặt phẳng $O'r\varphi$. Riêng tại gốc tọa độ có $r = 0$ và φ tùy ý.

Xem công thức (2.11) như một phép biến đổi biến số,
ta có

$$J = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \neq 0$$

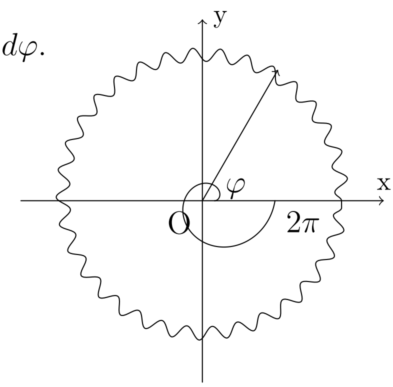
trừ tại gốc O.



Hình 2.10

Do đó, từ công thức (2.10), ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi. \tag{2.12}$$



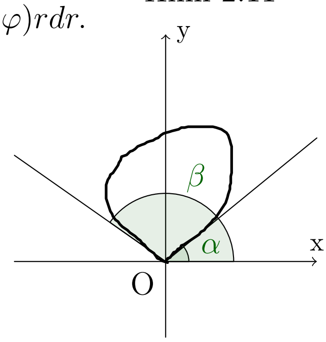
Hình 2.11

Công thức trên vẫn đúng khi miền D chứa gốc O.

Nếu miền D là miền giới hạn bởi các đường cong $r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)$ và các tia cực $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (Xem Hình 2.10), thì ta có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{2.13}$$

Đó là công thức tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực.



Hình 2.12

***Chú thích* 2.1.**

- Nếu miền D chứa gốc tọa độ O và mọi tia xuất phát từ O đều cắt biên của miền D tại một điểm có bán kính cực $r = r(\varphi)$ thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{2.14}$$

Đặc biệt, khi D là hình tròn tâm O bán kính R thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{2.15}$$

- Nếu miền D có biên đi qua O và có tại đó hai tiếp tuyến xác định bởi $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ và biên của D có phương trình $r = r(\varphi)$ (Xem Hình 2.12), thì

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr. \tag{2.16}$$

$*$ **Chú ý:** Người ta thường tính tích phân kép trong hệ tọa độ cực khi biên hay một phần của biên của D là cung tròn.

•**Ví dụ 2.8.** Tính $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$, với

a) D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

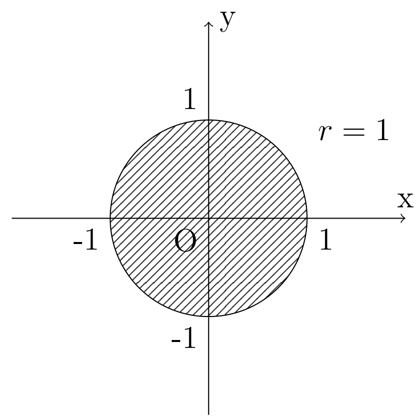
b) D là một phần tư hình tròn $x^2 + y^2 \le 1$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Lời giải.

a) (Xem Hình 2.13)

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$. Khi đó, phương trình đường tròn trong tọa độ cực là $r = 1$. Vậy,

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}rdr$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{1/2}d(1 - r^2)$$
$$= -\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} .\frac{2}{3}.\left(1 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

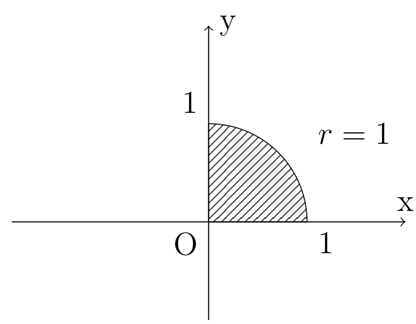


Hình 2.13

b) (Xem Hình 2.14)

Chuyển sang tọa độ cực, ta có

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}.rdr = \frac{\pi}{6}.$$



Hình 2.14

•Ví dụ 2.9. Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

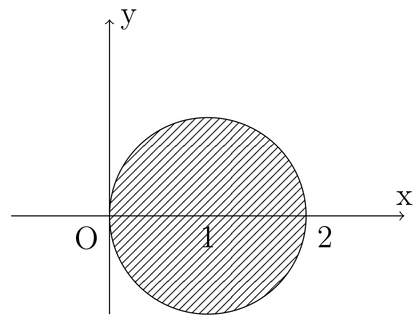
Lời giải. (Xem Hình 2.15)

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Khi đó, phương trình đường tròn trên trong tọa độ cực là
$r = 2cos\varphi$.

Miền D' được xác định bởi

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\ 0 \le r \le 2cos\varphi.$$



Hình 2.15

Do đó,

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{4 - r^2}} dr = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \left(\sqrt{4 - r^2}\right)^{-1/2} d(4 - r^2)$$

$$= -\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 - r^2)^{1/2}\Big|_0^{2cos\varphi} d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\varphi - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2|\sin\varphi| d\varphi$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2d\varphi - 4\int\limits_0^{\pi/2} sin\varphi d\varphi = 2\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi - 4.$$

•Ví dụ 2.10. Tính $I = \iint\limits_D xdxdy$, D là miền thỏa mãn

$$x^2 + y^2 \le 2y,\ y \le x.$$

Lời giải. (Xem Hình 2.16)
Chuyển sang tọa độ cực, đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$

Khi đó, phương trình đường tròn trong tọa độ cực là

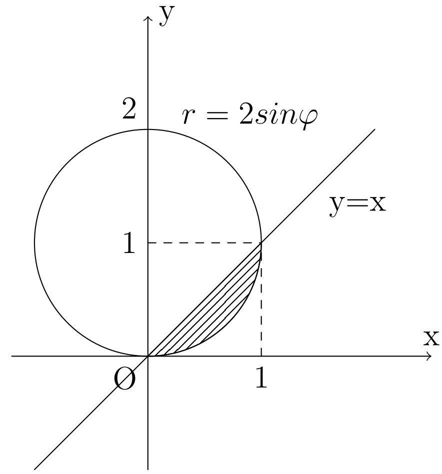
$$r = 2sin\varphi.$$

Miền D' được xác định bởi

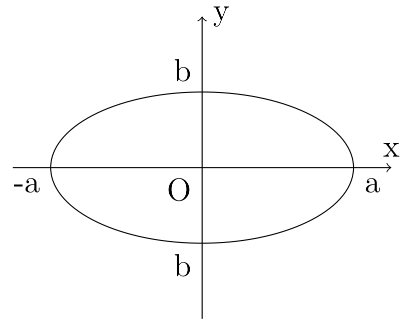
$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4};\ 0 \le r \le 2\sin\varphi.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} r^2 \cos\varphi dr \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos\varphi \cdot \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\sin\varphi} d\varphi \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \cos\varphi . \sin^3\varphi d\varphi \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/4} \sin^3\varphi d(\sin\varphi) \\
&= \frac{8}{3}.\left.\frac{\sin^4\varphi}{4}\right|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$



Hình 2.16



Hình 2.17

∗ **Chú ý:**

- Nếu D là miền giới hạn bởi đường elip

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0,$$

  thì thực hiện phép đổi biến sang hệ tọa độ cực suy rộng bằng cách đặt

  $$\begin{cases} x = & ar\cos\varphi \\ y = & br\sin\varphi \end{cases}.$$

  Khi đó, $J = abr$ và miền D' được xác định bởi

  $$0 \le \varphi < 2\pi; \; 0 \le r \le 1.$$

- Nếu D là miền giới hạn bởi đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ thì thực hiện phép đổi biến

  $$\begin{cases} x = a + r\cos\varphi \\ y = b + r\sin\varphi \end{cases}.$$

  Khi đó, $J = r$ và miền D' được xác định bởi

  $$0 \le \varphi < 2\pi; \;\; 0 \le r \le R.$$

2.1.4. Ứng dụng của tích phân kép

2.1.4.1. Ứng dụng hình học của tích phân kép

a. Tính diện tích hình phẳng
Diện tích S của hình phẳng D được cho bởi công thức

$$S = \iint\limits_D dxdy. \tag{2.17}$$

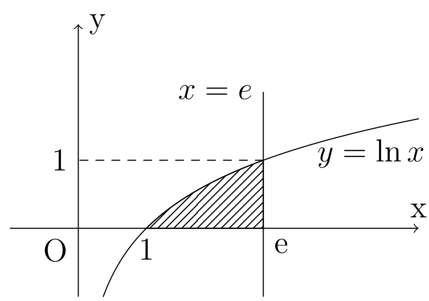
•**Ví dụ 2.11.** Tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \ln x$; $y = 0$; $x = e$.

Lời giải. (Xem Hình 2.18)
Miền D được xác định bởi

$$1 \le x \le e;\ 0 \le y \le \ln x.$$

Vậy,

$$\begin{aligned} S &= \iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^e dx \int\limits_0^{\ln x} dy \\ &= \int\limits_1^e y\Big|_0^{\ln x} dx = \int\limits_1^e \ln x dx \\ &= \ln x.x\Big|_1^e - \int\limits_1^e x.\frac{dx}{x} \\ &= \ln x.x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx = 1. \end{aligned}$$



Hình 2.18

•**Ví dụ 2.12.** Tính diện tích hình phẳng D xác định bởi

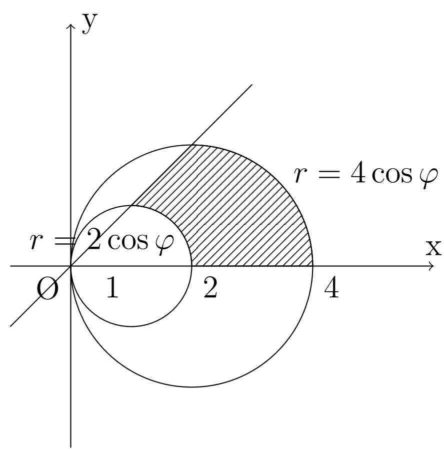
$$2x \le x^2 + y^2 \le 4x;\ 0 \le y \le x.$$

Lời giải. (Xem Hình 2.19)

Miền D nằm ngoài đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$, nằm trong đường tròn $x^2 + y^2 = 4x$, phía trên đường thẳng $y = 0$, phía dưới đường thẳng $y = x$.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi \\ y = & r\sin\varphi \end{cases}.$$



Hình 2.19

Khi đó, phương trình hai đường tròn $x^2+y^2=2x$ và $x^2+y^2=4x$ trong tọa độ cực lần lượt là $r=2\cos\varphi$ và $r=4\cos\varphi$.

Miền D' được xác định bởi

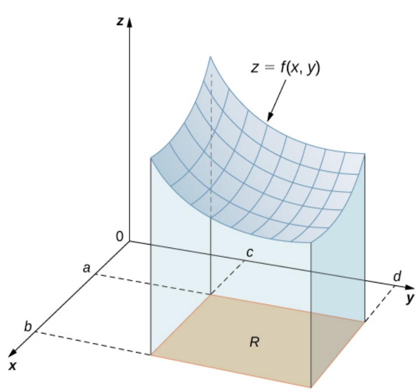
$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\ \ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi.$$

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}rdr=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\,\frac{r^2}{2}\Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}=6\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi d\varphi$$
$$=3\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=3\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=3(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}).$$

b. Tính diện tích mặt cong

Giả sử (S) là một mặt cong có phương trình là $z=f(x,y)$, gọi D là hình chiếu của mặt cong đã cho lên mặt phẳng Oxy, hàm $f(x,y)$ cùng các đạo hàm riêng cấp một của nó liên tục trên miền D. Kí hiệu $p=f'_x(x,y);\ q=f'_y(x,y)$. Khi đó, diện tích của mặt (S) được tính theo công thức

$$S=\iint\limits_D\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy. \tag{2.18}$$



Hình 2.20

•Ví dụ 2.13. Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2+y^2+z^2=4$ nằm bên trong mặt trụ

$$x^2+y^2=2y.$$

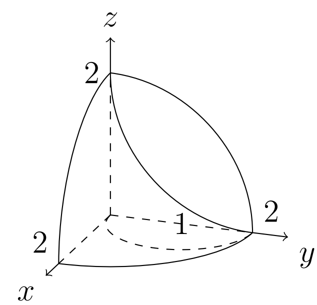
Lời giải. (Xem Hình 2.21)

Do tính đối xứng nên chỉ cần xét phần mặt nằm trong góc phần tám thứ nhất.

Khi đó, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Suy ra

$$p = z'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

$$q = z'_y = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$



Hình 2.21

Do đó

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Vậy,

$$S = 4 \iint\limits_D \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

với D là nửa hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2y$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x = & r\cos\varphi \\ y = & r\sin\varphi \end{cases}$.

Miền D' được xác định $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$; $0 \leq r \leq 2\sin\varphi$.

Do đó

$$S = 4 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \frac{2rdr}{\sqrt{4 - r^2}} = -4 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \left(\sqrt{4 - r^2}\right)^{-1/2} d(4 - r^2)$$

$$= -8 \int\limits_0^{\pi/2} \left(\sqrt{4 - r^2}\right)\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi - 16 \int\limits_0^{\pi/2} (\cos\varphi - 1) d\varphi$$

$$= -16\,(\sin\varphi - \varphi)\big|_0^{\pi/2} = 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

•**Ví dụ 2.14.** Tính diện tích của phần mặt parabôlôit $z = x^2 + y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

Lời giải. (Xem Hình 2.22)

Ta có

$$p = z'_x = 2x,\ q = z'_y = 2y \Rightarrow 1 + p^2 + q^2 = 1 + 4(x^2 + y^2).$$

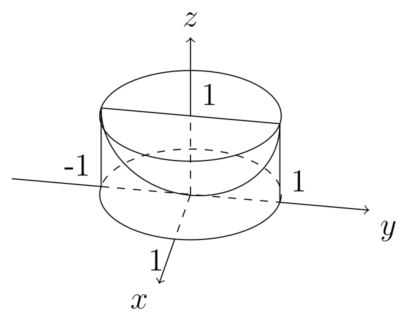
Vậy

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dxdy,$$

trong đó D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=1$ trong mặt phẳng Oxy.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt

$$\begin{cases} x = & r\cos\varphi \\ y = & r\sin\varphi \end{cases}$$



Hình 2.22

Miền D' được xác định

$$0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le r \le 1.$$

Do đó

$$S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+4r^2}rdr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8}\int\limits_0^1 \sqrt{1+4r^2}d(1+4r^2)$$
$$= \frac{1}{8}\ \varphi\Big|_0^{2\pi}\ \frac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

2.1.4.2. Ứng dụng cơ học của tích phân kép

a. Tính khối lượng của một bản phẳng không đồng chất

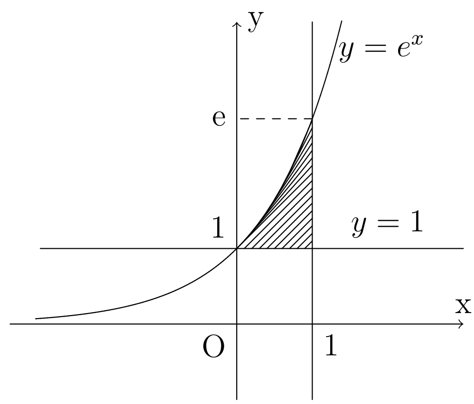
Cho một bản phẳng chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$, trong đó $\rho(x,y)$ là hàm liên tục trên D. Khi đó, khối lượng m của bản phẳng được tính theo công thức

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy. \tag{2.19}$$

•**Ví dụ 2.15.** Tìm khối lượng của một bản phẳng chiếm miền D giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=1, x=1$, biết rằng khối lượng riêng tại mỗi điểm là $\rho(x,y)=\dfrac{1}{y}$.

Lời giải. (Xem Hình 2.23) Theo (2.19), ta có

$$m = \iint\limits_D \frac{1}{y}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^{e^x} \frac{dy}{y} = \int\limits_0^1 \ln|y|\big|_1^{e^x}\,dx = \int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$



Hình 2.23

b. Momen quán tính của bản phẳng.

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm $M(x,y)$ là $\rho(x,y)$, trong đó $\rho(x,y)$ là một hàm liên tục trên D. Khi đó, momen quán tính của bản phẳng đã cho đối với trục Ox, Oy và gốc tọa độ lần lượt là

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy. \tag{2.20}$$

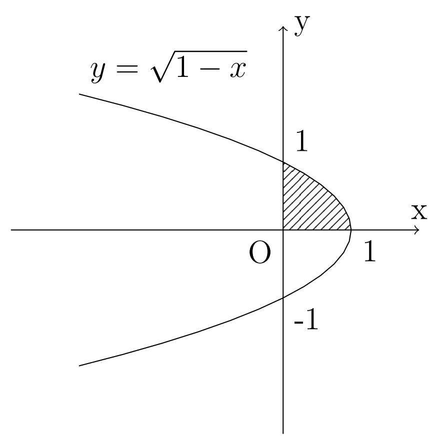
•**Ví dụ 2.16.** Tìm momen quán tính của một bản phẳng D xác định bởi $0 \le x \le 1-y^2;\ y \ge 0$ đối với trục Oy nếu khối lượng riêng của bản tại mỗi điểm là $\rho(x,y) = y$.

Lời giải. (Xem Hình 2.24) Ta có

$$I_y = \iint_D x^2ydxdy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} x^2ydy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2y^2\Big|_0^{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{24}.$$



Hình 2.24

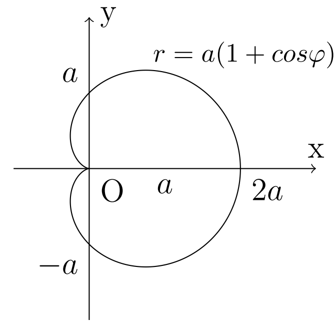
•Ví dụ 2.17. Tìm momen quán tính đối với trục Ox của bản phẳng D giới hạn bởi đường $r = a(1 + \cos\varphi), a > 0$, biết rằng $\rho(x, y) \equiv 1$.

Lời giải. (Xem Hình 2.25)

Ta có $I_x = \iint\limits_D y^2 dxdy$.

Chuyển sang tọa độ cực, đặt

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}.$$



Hình 2.25

Khi đó

$$I_x = \iint\limits_{D'} r^2 \sin^2\varphi r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} \sin^2\varphi r^3 dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cdot \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{a(1+\cos\varphi)} d\varphi = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi(1 + \cos\varphi)^4 d\varphi = \frac{21}{32}\pi a^4.$$

c. Trọng tâm của bản phẳng

Cho một bản phẳng không đồng chất chiếm một miền D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng tại mỗi điểm $M(x, y) \in D$ là $\rho = \rho(x, y)$, trong đó $\rho(x, y)$ là một hàm liên tục trên D. Khi đó, tọa độ trọng tâm G của bản phẳng được xác định bởi công thức

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy}, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x, y)dxdy}. \tag{2.21}$$

Nếu bản phẳng đồng chất thì ρ không đổi, do đó

$$x_G = \frac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy, \quad y_G = \frac{1}{S}\iint\limits_D ydxdy, \tag{2.22}$$

trong đó S là diện tích của miền D.

•Ví dụ 2.18. Xác định tọa độ trong tâm G của bản phẳng đồng chất D xác định bởi

$$x^2 + y^2 \le 1;\ y \ge 0.$$

Lời giải. (Xem Hình 2.26)

Do miền D nhận Oy làm trục đối xứng nên $x_G = 0$.

Ta có, $y_G = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D ydxdy$ với $S = \dfrac{\pi}{2}$ (diện tích nửa hình tròn bán kính bằng 1).

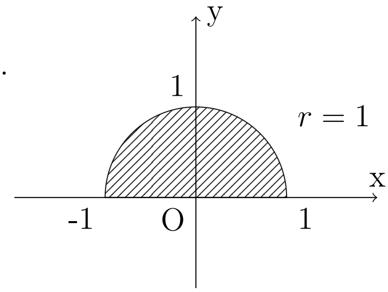
Do đó

$$y_G = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} ydy$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{1} (1-x^2)dx = \frac{4}{3\pi}.$$

Vậy, $G(0, \dfrac{4}{3\pi})$.



Hình 2.26

•Ví dụ 2.19. Xác định tọa độ trọng tâm G của bản phẳng đồng chất D giới hạn bởi các đường $y^2 = 2x$; $x = 2$.

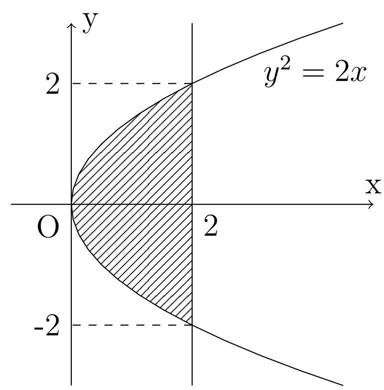
Lời giải. (Xem Hình 2.27)

Do miền D nhận Ox làm trục đối xứng nên $y_G = 0$.

Có $x_G = \dfrac{1}{S}\iint\limits_D xdxdy$, với

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} dx$$

$$= \int\limits_{-2}^{2} x\Big|_{y^2/2}^{2} dy = \int\limits_{-2}^{2} (2 - \frac{y^2}{2})dy = \frac{16}{3}.$$



Hình 2.27

$$I = \iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} xdx = \int\limits_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2/2}^{2} dx = \int\limits_{-2}^{2} (2 - \frac{y^4}{8})dy = \frac{32}{5}.$$

Suy ra, $x_G = \dfrac{I}{S} = \dfrac{6}{5}$. Vậy $G(\dfrac{6}{5}, 0)$.

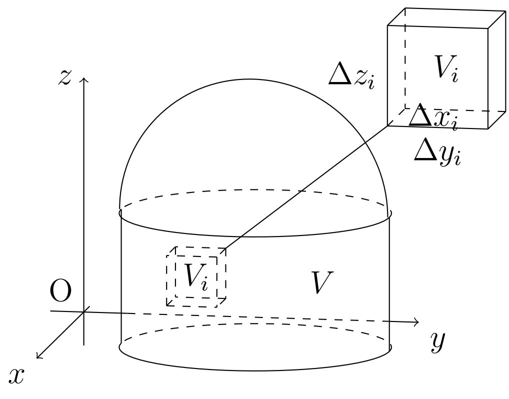
2.2. Tích phân bội ba

2.2.1. Định nghĩa tích phân bội ba

$\star$ **Định nghĩa 2.2.** Cho hàm số $f(x, y, z)$ xác định trong miền đóng, bị chặn V của không gian $Oxyz$, chia V một cách tùy ý thành n miền nhỏ, gọi tên và thể tích của các miền nhỏ là $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, ...\Delta V_n$. Trong mỗi miền ΔV_i lấy một điểm tùy ý $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Tổng $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i$ được gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x, y, z)$ trong miền V.

Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max d_i \to 0$ (d_i là đường kính của miền nhỏ ΔV_i) mà I_n dần tới một giới hạn xác định I, không phụ thuộc vào cách chia miền V và cách chọn điểm M_i trong miền ΔV_i thì giới hạn đó được gọi là tích phân bội ba của hàm số $f(x, y, z)$ trong miền V và được kí hiệu là $\iiint\limits_V f(x, y, z)dV$.



Hình 2.28

Vậy,

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i).\Delta V_i.$$

Nếu tích phân trên tồn tại ta nói rằng hàm số $f(x, y, z)$ khả tích trong miền V.

Tích phân bội ba cũng có các tính chất tương tự như tích phân kép.

∗ **Chú ý:** Vì tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền V thành các miền nhỏ ta có thể chia miền V bởi ba họ mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, do đó $dV = dxdydz$ và có thể viết

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

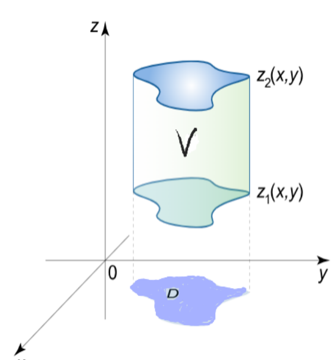
2.2.2. Cách tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ Đề-các

Tương tự tích phân kép, ta có thể đưa việc tính tích phân bội ba về việc tính ba tích phân đơn liên tiếp.

Giả sử phải tính

$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz,$$

trong đó $f(x, y, z)$ liên tục trong miền V. Nếu miền V được giới hạn phía dưới bởi



Hình 2.29

mặt $z = z_1(x, y)$ và giới hạn phía trên bởi mặt $z = z_2(x, y)$, trong đó $z_1(x, y), z_2(x, y)$ là những hàm số liên tục trong miền D, D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy, thì

$$I = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{2.23}$$

Nếu miền D được giới hạn bởi các đường $y = y_1(x);\ y = y_2(x)$, trong đó $y_1(x), y_2(x)$ là những hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$, $y_1(x) \le y_2(x)\ \forall x \in [a, b]$; $[a, b]$ là hình chiếu của D lên Ox thì

$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{2.24}$$

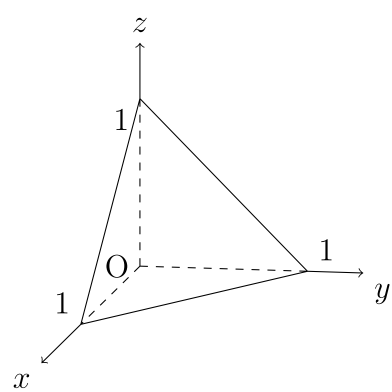
•**Ví dụ 2.20.** Tính $I = \iiint\limits_V (1 - x - y)dxdydz$, trong đó V là miền xác định bởi

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, x + y + z \le 1.$$

Lời giải. Dựng miền V, ta thấy miền V được xác định bởi các bất đẳng thức kép sau $0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1 - x;\ 0 \le z \le 1 - x - y.$

Áp dụng công thức (2.24), ta có

$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (1 - x - y)dz \\
&= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y).\ z\Big|_0^{1-x-y} dy \\
&= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)^2 dy \\
&= -\frac{1}{3} \int\limits_0^1 (1 - x - y)^3\Big|_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{3} \int\limits_0^1 (1 - x)^3 dx = -\frac{1}{12}(1 - x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$



Hình 2.30

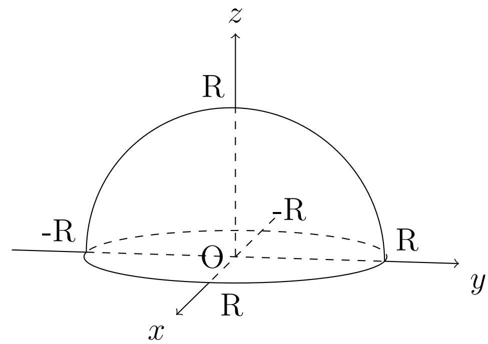
•**Ví dụ 2.21.** Tính $I = \iiint\limits_V xzdxdydz$, trong đó V là miền giới hạn bởi các mặt

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{và} \quad z = 0, z \ge 0.$$

Lời giải.

Dựng miền V, gọi D là hình chiếu của miền V lên mặt phẳng Oxy, đó là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = R^2$.

Theo công thức (2.23), ta có



Hình 2.31

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} xzdz \\ &= \iint\limits_D x\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_D x\left(R^2 - x^2 - y^2\right) dxdy. \end{aligned}$$

Chuyển sang tọa độ cực, đặt $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}$. Ta có

$$\begin{aligned} I =& \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 - r^2\right) r^2 \cos\varphi dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \left(R^2 r^2 - r^4\right) dr \\ =& \frac{1}{2}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{R^2 r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^R = 0. \end{aligned}$$

$*$ **Chú ý:** Cũng như tích phân kép ta có thể thay đổi thứ tự tích phân khi tính tích phân bội ba.

2.2.3. Phương pháp đổi biến số trong tích phân bội ba

2.2.3.1. Công thức đổi biến số trong tích phân bội ba

Xét tích phân $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, trong đó hàm số $f(x,y,z)$ liên tục trong V.
Ta thực hiện phép đổi biến số

$$\begin{cases} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w) \end{cases}. \tag{2.25}$$

Giả sử rằng

a. $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$ là những hàm số liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đóng V' của không gian $O'uvw$.

b. Các công thức (2.25) xác định một song ánh từ miền V' lên miền V của không gian $Oxyz$.

c. Định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \text{ trong miền } V'.$$

Khi đó, ta có công thức

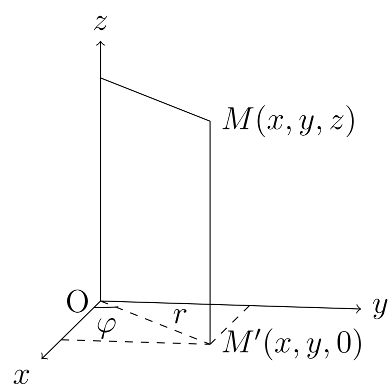
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J|dudvdw. \quad (2.26)$$

2.2.3.2. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ

Tọa độ trụ của một điểm $M(x, y, z)$ trong không gian $Oxyz$ là ba số (r, φ, z), trong đó (r, φ) là tọa độ cực của điểm $M'(x, y)$, hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy. Với mọi điểm của không gian không thuộc Oz, ta có $r > 0;\ 0 \leq \varphi < 2\pi;\ -\infty < z < +\infty$.

Ta có các công thức liên hệ giữa các tọa độ Đề-các và tọa độ trụ của điểm M sau đây.

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases}. \quad (2.27)$$



Hình 2.32

Nếu $r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$ thì công thức (2.27) xác định một song ánh giữa không gian $Oxyz$, trừ trục Oz, và tập hợp trên của không gian $O'r\varphi z$. Riêng các điểm trên trục Oz có z xác định, $r = 0$ và φ tùy ý. Định thức Jacobi của phép biến đổi (2.27) là

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Nhận thấy, $J \neq 0$ với $r \neq 0$. Do đó, từ công thức (2.26), ta có

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz. \qquad (2.28)$$

Đó là công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ trụ.

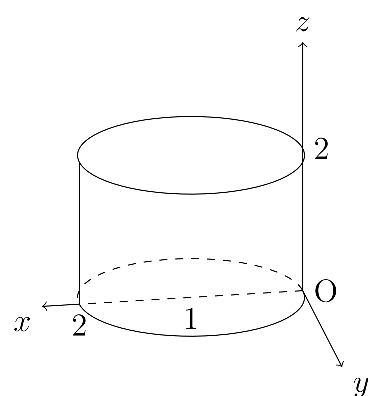
Công thức trên vẫn đúng khi miền V chứa những điểm trên trục Oz.

•Ví dụ 2.22. Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\, zdxdydz$, trong đó V là miền hình trụ giới hạn bởi các mặt $x^2+y^2 = 2x;\ z = 0;\ z = 2$.

Lời giải.

Chuyển sang tọa độ trụ, đặt

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases}$$



Hình 2.33

Ta có

$$I = \iiint\limits_{V'} r^3 zdrd\varphi dz = \iint\limits_{D'} r^3 drd\varphi \int\limits_0^2 zdz,$$

với D' là miền tròn giới hạn bởi đường

$r = 2\cos\varphi(-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2),\ r = 0,\ \varphi = -\pi/2,\ \varphi = \pi/2.$

Do đó

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 dr \int\limits_0^2 zdz = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^3 \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 dr = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$= 8\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \ 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = 3\pi.$$

•Ví dụ 2.23. Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, V là miền giới hạn bởi các mặt

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \text{ và } z = a \ (a > 0).$$

Lời giải. Chuyển sang tọa độ trụ, đặt $\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases}$.

Ta có

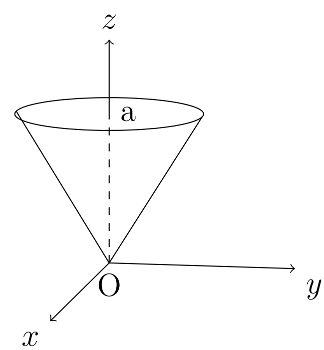
$$I = \iiint\limits_{V'} \left(r^2+z^2\right) rdrd\varphi dz = \iint\limits_{D'} drd\varphi \int\limits_r^a \left(r^2+z^2\right) rdz,$$

trong đó D' là miền giới hạn bởi

$$r = a,\ r = 0,\ \varphi = 0,\ \varphi = 2\pi.$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a dr \int\limits_r^a \left(r^3 + z^2 r\right) dz \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r^3 z + \frac{z^3}{3} r\right)\Bigg|_r^a dr \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(r^3 a + \frac{a^3}{3} r - \frac{4}{3} r^4\right) dr \\ &= \varphi|_0^{2\pi} \Big(\frac{r^4}{4} a + \frac{a^3}{3}\frac{r^2}{2} - \frac{4}{3}\frac{r^5}{5}\Big)\Big|_0^a \\ &= \frac{3\pi a^5}{10}. \end{aligned}$$



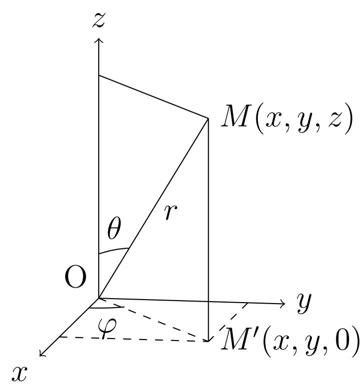
Hình 2.34

2.2.3.3. Tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu

Tọa độ cầu của một điểm $M(x,y,z)$ trong không gian $Oxyz$ là bộ ba (r,θ,φ), trong đó $r = OM$, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$, M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$.

Với mọi điểm $M(x,y,z)$ không thuộc Oz, ta có

$$0 < r < +\infty,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$



Hình 2.35

Giữa tọa độ đề các (x, y, z) và tọa độ cầu (r, θ, φ) của cùng một điểm M có mối liên hệ

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}. \tag{2.29}$$

Nếu $r > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ thì các công thức trên xác định một song ánh giữa không gian $Oxyz$, trừ trục Oz, và tập hợp trên của không gian $O'r\theta\varphi$. Riêng điểm gốc tọa độ, ta có $r = 0$, θ và φ tùy ý, còn những điểm trên Oz có r xác định, $\theta = 0$ hoặc $\theta = \pi$, φ tùy ý. Định thức Jacobi là

$$J = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

Rõ ràng, $J \ne 0$ với $r \ne 0$ và $\sin\theta \ne 0$. Từ công thức (2.26), ta có

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi. \tag{2.30}$$

Đó là công thức tính tích phân bội ba trong hệ tọa độ cầu.

Công thức vẫn đúng khi miền V chứa những điểm trên trục Oz.

•Ví dụ 2.24. Tính $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, với V là miền xác định bởi

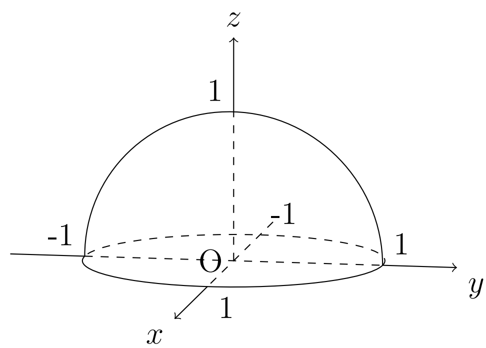
$$x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0.$$

Lời giải. Chuyển sang tọa độ cầu, đặt

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}.$$

Khi đó, V' được xác định bởi

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\ ;\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$



Hình 2.36

Ta có

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^{1} r\cos\theta . r\sin\theta . r^2 \sin\theta dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{1} r^4 dr = \ \varphi|_0^{2\pi} . \left.\frac{\sin^3\theta}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} . \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^{1} = \frac{2\pi}{15}.$$

•**Ví dụ 2.25.** Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\, dxdydz$, với V là miền giới hạn bởi hai mặt cầu sau đây

$$x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2+z^2 = 4.$$

Lời giải. Chuyển sang tọa độ cầu, ta có

$$I = \iiint\limits_{V'} r^2\sin^2\theta . r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Miền V' được xác định bởi $1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Vậy

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_1^{2} r^4 dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \left(\cos^2\theta - 1\right) d\cos\theta \int\limits_1^{2} r^4 dr$$

$$= \varphi|_0^{2\pi} . \left.\left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right)\right|_0^{\pi} . \left.\frac{r^5}{5}\right|_1^{2} = \frac{248\pi}{15}.$$

∗ **Chú ý:** Nếu V là miền Elipxôit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ \ a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ thì chuyển sang tọa độ cầu suy rộng bằng cách đặt

$$\begin{cases} x &= ar\sin\theta\cos\varphi \\ y &= br\sin\theta\sin\varphi \\ z &= cr\cos\theta \end{cases}.$$

Khi đó, $|J| = abcr^2\sin\theta$ và miền V' được xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 1$.

Nếu V là miền $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,\ R > 0$, thì chuyển sang tọa độ cầu suy rộng bằng cách đặt

$$\begin{cases} x &= a + r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= b + r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= c + r\cos\theta \end{cases}.$$

Khi đó, $|J| = r^2\sin\theta$ cận của $r,\ \theta$ và φ phải được xác định theo hệ trục mới gốc là $I(a,b,c)$ và miền V' được xác định $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le R$.

•**Ví dụ 2.26.** Tính $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, với V là miền

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{3a^2} \le 1,\ a > 0.$$

Lời giải. Chuyển sang tọa độ cầu suy rộng, đặt $\begin{cases} x &= ar\sin\theta\cos\varphi \\ y &= ar\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \sqrt{3}ar\cos\theta \end{cases}.$

Khi đó, $|J| = \sqrt{3}a^3r^2\sin\theta$, miền V' được xác định như sau

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Vậy,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 r^2a^2\left(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta\right)\sqrt{3}a^3r^2\sin\theta dr \\ &= a^5\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi}\left(1 + 2\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta \int\limits_0^1 r^4 dr \\ &= a^5\sqrt{3}\ \varphi\Big|_0^{2\pi}\left(-\cos\theta - \frac{2\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}\ \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}\pi a^5}{3}. \end{aligned}$$

2.2.4. Ứng dụng tích phân bội ba

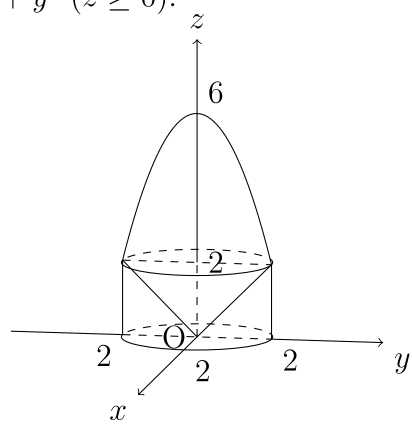
2.2.4.1. Tính thể tích của vật thể

Thể tích của vật thể chiếm miền V trong không gian $Oxyz$ là

$$V = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V dxdydz \tag{2.31}$$

•**Ví dụ 2.27.** Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt

$$z = 6 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2 \ (z \geq 0).$$



Hình 2.37

Lời giải. Ta có $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Xét hệ $\begin{cases} z &= 6 - x^2 - y^2 \\ z^2 &= x^2 + y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 6 - z = z^2 \Rightarrow z = 2(\text{do } z \geq 0)$.

Vậy phương trình của hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy của giao tuyến giữa hai mặt trên là $x^2 + y^2 = 4$.

Chuyển sang tọa độ trụ, đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$.

Khi đó, phương trình các mặt lần lượt là $z = 6 - r^2$, $z = r$ và miền V' được xác định $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$, $r \leq z \leq 6 - r^2$. Vậy,

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_r^{6-r^2} rdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rz\Big|_r^{6-r^2} dr$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r\left(6 - r^2 - r\right) dr = \varphi\big|_0^{2\pi} \left(3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

2.2.4.2. Tính khối lượng của vật thể và tọa độ trọng tâm của vật thể

Cho một vật thể V trong không gian $Oxyz$. Ta cũng kí hiệu V là thể tích của vật thể V. Giả sử khối lượng riêng của vật thể tại $M(x, y, z)$ là $\rho(x, y, z)$. Khi đó,

- Khối lượng của vật thể được cho bởi công thức

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz. \quad (2.32)$$

- Tọa độ trọng tâm G của vật thể được cho bởi công thức

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)dxdydz \\ y_G &= \dfrac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)dxdydz \\ z_G &= \dfrac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)dxdydz \end{cases}. \quad (2.33)$$

- Nếu vật thể đồng chất thì ρ không đổi, do đó

$$\begin{cases} x_G &= \dfrac{1}{V}\iiint\limits_V xdxdydz \\ y_G &= \dfrac{1}{V}\iiint\limits_V ydxdydz \\ z_G &= \dfrac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz \end{cases}. \quad (2.34)$$

•**Ví dụ 2.28.** Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất xác định bởi $x^2 + y^2 \le 2z$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$.

Lời giải. (xem Hình 2.38)

Xét hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 1$ (do $z \ge 0$).

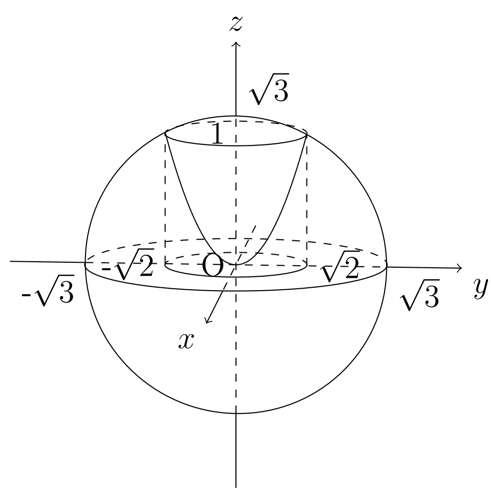
Vậy, giao tuyến của hai mặt là đường tròn $\begin{cases} x^2 + y^2 &= 2 \\ z &= 1 \end{cases}$

Do tính đối xứng nên

$x_G = y_G = 0.$

Ta có, $z_G = \dfrac{1}{V}\iiint\limits_V zdxdydz.$

Chuyển sang tọa độ trụ, đặt



Hình 2.38

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= z \end{cases}$$

Khi đó, phương trình các mặt lần lượt là $z = \dfrac{r^2}{2}$, $z = \sqrt{3-r^2}$, và miền V' được xác định bởi $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le r \le \sqrt{2}$; $\dfrac{r^2}{2} \le z \le \sqrt{3-r^2}$. Ta có

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} rz|_{r^2/2}^{\sqrt{3-r^2}} dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{3-r^2} - \frac{r^2}{2}\right) dr = \frac{\pi\left(6\sqrt{3}-5\right)}{3}.$$

Bây giờ, ta tính $I = \iiint\limits_V z dxdydz$. Chuyển sang tọa độ trụ, ta có

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} rzdz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \frac{z^2}{2}\Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\left(3 - r^2 - \frac{r^4}{4}\right) dr = \frac{5\pi}{3}.$$

Suy ra, $z_G = \dfrac{I}{V} = \dfrac{5}{6\sqrt{3}-5}$. Vậy, $G\left(0, 0, \dfrac{5}{6\sqrt{3}-5}\right)$.

2.3. Tích phân đường loại hai

2.3.1. Định nghĩa tích phân đường loại hai

2.3.1.1. Công của một lực biến đổi

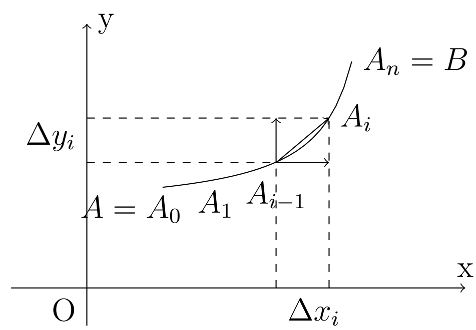
Cho một chất điểm M di chuyển theo một cung phẳng L từ A đến B dưới tác dụng của một lực $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(M)$ biến thiên liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$. Hãy tính công W của lực ấy.
Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi $\Delta x_i, \Delta y_i$ là các thành phần của véctơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Nếu cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ khá nhỏ thì có thể xem như lực $\overrightarrow{F}$ không đổi trên cung đó và bằng $\overrightarrow{F}(M_i)$, với $M_i(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm nào đó trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Xem cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ xấp xỉ như dây cung $A_{i-1}A_i$, khi đó, công ΔW_i của lực $\overrightarrow{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A_{i-1} đến A_i trên L có thể được xấp xỉ như sau: $\Delta W_i \simeq \overrightarrow{F}(M_i).\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$. Nếu hai thành phần của lực $\overrightarrow{F}(M)$ là $P(M)$ và $Q(M)$ thì $\Delta W_i \simeq P(\xi_i, \eta_i).\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i).\Delta y_i$. Nếu mọi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều khá nhỏ, ta có

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]. \tag{2.35}$$

Phép tính gần đúng này càng chính xác nếu n càng lớn và các cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ đều càng nhỏ. Do đó, công W của lực $\overrightarrow{F}$ làm cho chất điểm di chuyển từ A đến B trên đường L là giới hạn, nếu có, của tổng ở vế phải của (2.35) khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta s_i \to 0, \Delta s_i$ là chiều dài cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$.

2.3.1.2. Định nghĩa tích phân đường loại hai

Cho hai hàm số $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành n cung nhỏ bởi các điểm $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Gọi hình chiếu của véc tơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy là $\Delta x_i, \Delta y_i, \mathrm{M}_i\,(\xi_i, \eta_i)$ là một điểm tùy ý trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$. Nếu khi $n \to \infty$ sao cho $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta x_i \to 0$, $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta y_i \to 0$, tổng $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$ dần tới một giới hạn xác định, không phụ thuộc cách chia cung $\overset{\frown}{AB}$ và cách chọn điểm M_i trên cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ thì giới hạn đó được gọi là tích phân đường loại hai của các hàm số $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ và được kí hiệu là



Hình 2.39

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{2.36}$$

Người ta chứng minh được rằng, nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn[2] và các các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại hai (2.36) tồn tại.

$*$ **Chú ý:** Trong tích phân đường loại hai, chiều trên đường lấy tích phân đóng vai trò quan trọng. Nếu ta đổi chiều trên đường lấy tích phân thì

[2]Đường cong có phương trình tham số $\begin{cases} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{cases}$, xác định trên (α, β) được gọi là trơn nếu $x(t)$ và $y(t)$ có đạo hàm và các đạo hàm đó không đồng thời bằng không với mọi $t \in (\alpha, \beta)$.

hình chiếu của véctơ $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lên hai trục Ox, Oy đổi dấu, do đó

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Nếu đường lấy tích phân là một đường kín L, ta quy ước chọn chiều dương trên L là chiều sao cho một người đi dọc L theo chiều ấy sẽ thấy miền giới hạn bởi L gần mình nhất ở về bên trái. Ta thường kí hiệu tích phân đường dọc theo đường cong kín L theo chiều dương là

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

2.3.1.3. Tính chất

Tích phân đường loại hai có các tính chất như tích phân xác định.

2.3.2. Cách tính tích phân đường loại hai

Ta giả thiết rằng cung $\overset{\frown}{AB}$ là một cung trơn, các hàm $P(x,y),\ Q(x,y)$ liên tục dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được xác định bởi phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$, các mút A, B ứng với các giá trị t_1, t_2 của tham số. Khi đó, ta có công thức

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} \big[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big]dt. \tag{2.37}$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ được cho bởi phương trình $y = y(x)$, a là hoành độ của A, b là hoành độ của B, ta có

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\big]dx. \tag{2.38}$$

•**Ví dụ 2.29.** Tính $I = \int\limits_{L} ydx - xdy$ với

a) L là nửa đường tròn tâm O bán kính R nằm trong nửa mặt phẳng trên từ $A(R,0)$ đến $B(-R,0)$.

b) L là đường ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ đi theo chiều dương.

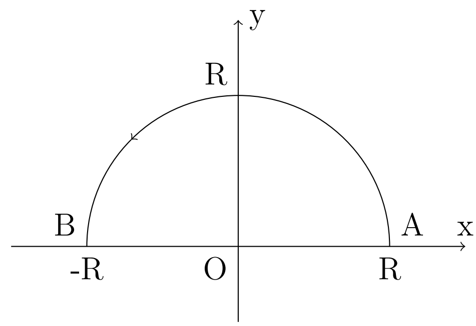
Lời giải. a) (Xem Hình 2.40)

Phương trình tham số của đường tròn tâm O, bán kính R là

$$\begin{cases} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{cases}.$$

Theo công thức (2.37), ta có

$$I = \int_0^\pi [R\sin t(-R\sin t) - R\cos t.R\cos t]\,dt$$
$$= -R^2\int_0^\pi (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -\pi R^2$$



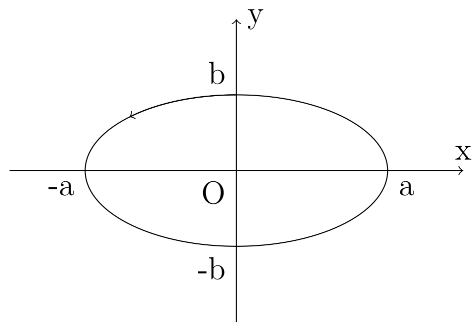
Hình 2.40

b) (Xem Hình 2.41)

Phương trình tham số của elip là

$$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}, \quad (0 \le t < 2\pi)$$

Chiều tăng của t ứng với chiều dương của L, ta có



Hình 2.41

$$I = \int_0^{2\pi} [b\sin t(-a\sin t) - a\cos t.b\cos t]\,dt$$
$$= -ab\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt$$
$$= -ab\int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

•**Ví dụ 2.30.** Tính $I = \int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, trong đó

a) L là đường gấp khúc ABO với $A(1,0), B(0,1)$ và $O(0,0)$.

b) L là đường $x + y^2 = 1$ nối từ điểm $A(0,-1)$ đến $B(0,1)$.

Lời giải. a) (Xem Hình 2.42)

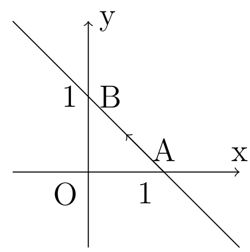
Chia L thành 2 đường là AB có phương trình $x + y = 1$, và BO có phương trình $x = 0$.

• Tính $I_1 = \int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$.

Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow y' = -1$. Vậy

$$I_1 = \int\limits_1^0 \left[x^2 - 2x(1-x) + \left((1-x)^2 - 2x(1-x)\right)(-1)\right] dx$$

$$= -\int\limits_0^1 (2x-1)dx = -\left(x^2 - x\right)\Big|_0^1 = 0.$$



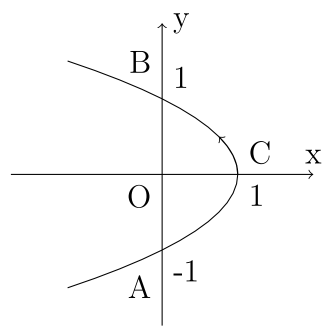
Hình 2.42

• Tính $I_2 = \int\limits_{BO} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$.

Từ $x = 0 \Rightarrow dx = 0$, suy ra

$$I_2 = \int\limits_1^0 y^2 dy = -\int\limits_0^1 y^2 dy$$

$$= -\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$



Hình 2.43

• Vậy, $I = I_1 + I_2 = -\dfrac{1}{3}$.

b) (Xem Hình 2.43)

Từ $x + y^2 = 1$ suy ra $x = 1 - y^2$

Do đó $x' = -2y$.

Vậy

$$I = \int\limits_{-1}^1 \left[\left((1-y^2)^2 - 2y(1-y^2)\right)\cdot(-2y) + \left(y^2 - 2y(1-y^2)\right)\right] dy$$

$$= \int\limits_{-1}^1 (-2y^5 - 4y^4 + 6y^3 + 5y^2 - 4y)dy = \frac{26}{15}.$$

Trong ví dụ này, nếu muốn tính I bằng cách đưa về tích phân xác định theo x thì phải chia cung $\overset{\frown}{AB}$ thành hai cung $\overset{\frown}{AC}$ và $\overset{\frown}{CB}$. Ở đây, phương trình cung $\overset{\frown}{AC}$ là $y = -\sqrt{1-x}$, còn phương trình cung $\overset{\frown}{CB}$ là $y = \sqrt{1-x}$.

2.3.3. Công thức Green

Công thức Green cho chúng ta mối liên hệ giữa tích phân đường loại hai dọc theo một đường kín L lấy theo chiều dương và tích phân kép trong miền D giới hạn bởi đường L.

◊ **Định lí 2.4.** *Nếu các hàm $P(x,y), Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền D thì ta có công thức*

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy, \tag{2.39}$$

trong đó L là biên của miền D, tích phân dọc theo L lấy theo chiều dương.

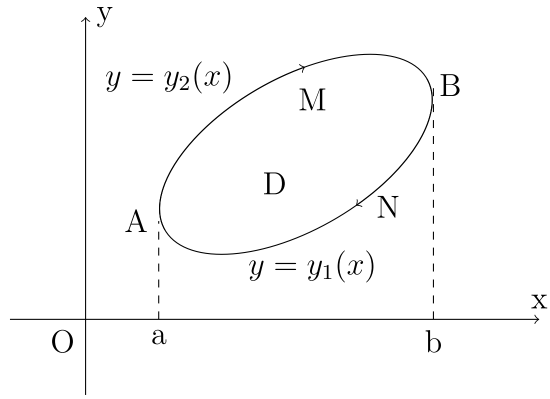
Công thức (2.39) được gọi là công thức Green.

Chứng minh.

a) (Xem Hình 2.44) Trước hết, giả sử rằng D là miền đơn liên và mọi đường thẳng song song với các trục tọa độ cắt L nhiều nhất tại hai điểm. Vậy miền D được xác định bởi

$$a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x).$$

Theo công thức tính tích phân kép, ta có



Hình 2.44

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$= \int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx.$$

Theo công thức tính tích phân đường, ta có

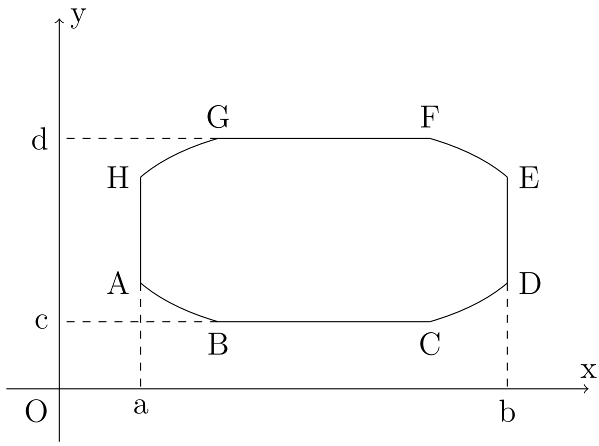
$$\int\limits_a^b P(x, y_2(x))dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} P(x,y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x, y_1(x))dx = \int\limits_{\overset{\frown}{ANB}} P(x,y)dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{BNA}} P(x,y)dx.$$

Do đó,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{\overset{\frown}{AMBNA}} P(x,y)dx = -\oint\limits_L P(x,y)dx.$$

Tương tự, ta có
$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy.$$
Từ hai kết quả trên, ta thu được
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy.$$



Hình 2.45

b) (Xem Hình 2.45) Bây giờ, xét miền đơn liên D có biên là đường L gồm hai cung $\overset{\frown}{ABCD}$ và $\overset{\frown}{EFGH}$ có phương trình lần lượt là $y = y_1(x)$ và $y = y_2(x)$, $a \le x \le b$, và hai đoạn thẳng AH và ED song song với Oy. Cũng có thể xem đường biên L gồm hai cung $\overset{\frown}{GHAB}$ và $\overset{\frown}{CDEF}$ có phương trình lần lượt là $x = x_1(y)$ và $x = x_2(y)$, $c \le y \le d$, và hai đoạn thẳng BC và FG song song với trục Ox. Tương tự như trên, ta có
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int\limits_{\overset{\frown}{HGFE}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{DCBA}} P(x,y)dx.$$
Do $\int\limits_{\overset{\frown}{AH}} P(x,y)dx = 0$, $\int\limits_{\overset{\frown}{ED}} P(x,y)dx = 0$ vì các đường AH và ED có phương trình lần lượt là $x = a$, $x = b \Rightarrow dx = 0$, nên ta có
$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy &= \int\limits_{\overset{\frown}{HGFE}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{ED}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{DCBA}} Pdx + \int\limits_{\overset{\frown}{AH}} Pdx \\ &= -\oint\limits_L P(x,y)dx.\end{aligned}$$

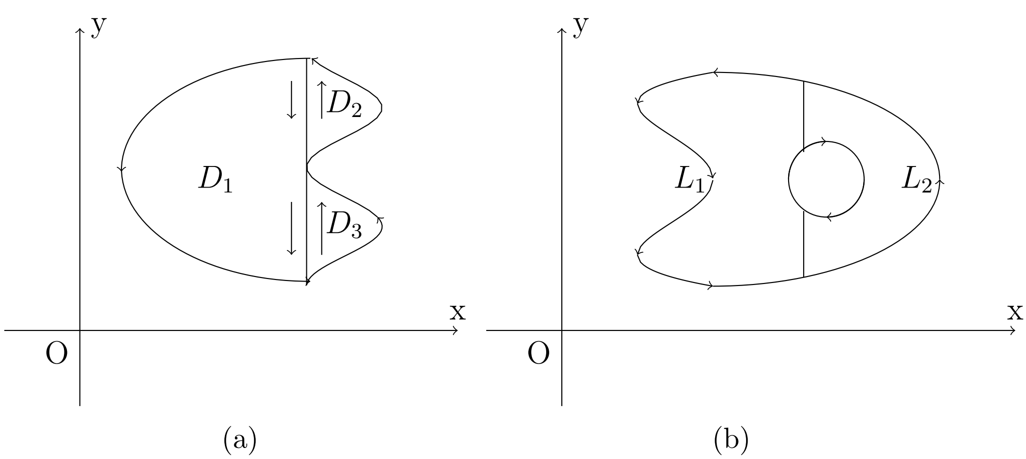
Mặt khác, cũng tương tự như trên, ta có

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \iint\limits_{\overset{\frown}{CDEF}} Q(x,y)dy + \iint\limits_{\overset{\frown}{GHAB}} Q(x,y)dy.$$

Do $\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Q(x,y)dy = 0$, $\int\limits_{\overset{\frown}{FG}} Q(x,y)dy = 0$, vì các đường BC và FG có phương trình lần lượt là $y = c$, $y = d \Rightarrow dy = 0$, nên ta có

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy &= \int\limits_{\overset{\frown}{CDEF}} Qdx + \int\limits_{\overset{\frown}{FG}} Qdx + \int\limits_{\overset{\frown}{GHAB}} Qdx + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Qdx \\ &= \oint\limits_L Q(x,y)dx.\end{aligned}$$

Suy ra, công thức (2.39) được chứng minh.



Hình 2.46

c) Nếu miền D là miền đơn liên tổng quát hơn trong đó có những đường song song với trục Ox hoặc Oy cắt biên của miền D quá 2 điểm thì ta chia miền D thành một số hữu hạn miền nhỏ mà biên của chúng có tính chất nêu ở đầu chứng minh này. Ví dụ Hình 2.46a có thể được chia thành 3 miền D_1, D_2, D_3. Áp dụng công thức (2.39) cho cả 3 miền trên rồi cộng lại, ta được

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy,$$

vì tổng các tích phân đường của $Pdx + Qdy$ trên cùng một cung đường cong hai lần theo hai hướng ngược nhau bằng 0.

d) Giả sử miền D là miền đa liên. Chẳng hạn biên của nó gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau. Chia miền D thành hai miền đơn liên như trên Hình 2.46b. Áp dụng công thức (2.39) cho cả hai miền trên rồi cộng lại, ta được

$$\iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

Vì tổng các tích phân đường của $Pdx + Qdy$ trên cùng một cung đường cong hai lần theo hai hướng ngược nhau bằng 0. Vì L gồm hai đường kín L_1, L_2 rời nhau nên chiều dương trên L phải chọn theo quy ước đã nêu ở trên, chiều dương trên L_1 là ngược chiều kim đồng hồ, chiều dương trên L_2 là thuận chiều kim đồng hồ. Định lí được chứng minh hoàn toàn.

•Ví dụ 2.31. Tính

$$I = \oint\limits_{L} (x\sin x + y^2)dx + (x + 2xy + \ln(1 + y^2))dy,$$

với L là đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$.

Lời giải. (Xem Hình 2.47)

Ta có

$P = x\sin x + y^2 \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y,$

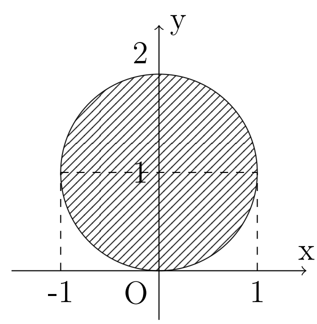
$Q = x + 2xy + \ln(1 + y^2) \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 2y.$

Áp dụng công thức Green, ta có

$$I = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{D} dxdy = S,$$

trong đó S là diện tích miền D. Do D là hình tròn có bán kính bằng 1 nên

$$I = S = \pi.$$



Hình 2.47

•Ví dụ 2.32. Tính

$$I = \int\limits_{ABC} (xy + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$

trong đó ABC là đường gấp khúc $A(0,0), B(-2,2), C(-4,0)$.

Lời giải. (Xem Hình 2.48)
Đường ABC chưa phải là đường kín nhưng nếu ta bổ sung thêm đường CA thì sẽ được một đường kín, khi đó

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{ABC} (xy+y^2)dx + (x+y)^2 dy \\ &= \int\limits_{ABCA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2 dy - \int\limits_{CA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2 dy \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

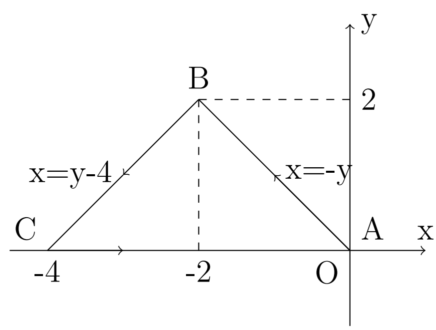
Đoạn CA có phương trình $y = 0 \Rightarrow dy = 0dx$, do đó $I_2 = 0$. Vậy

$$I = I_1 = \int\limits_{ABCA} (xy+y^2)dx + (x+y)^2 dy.$$

Áp dụng công thức Green với

$$P = xy + y^2 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = x + 2y,$$

$$Q = (x+y)^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x+y).$$



Hình 2.48

Do đó,

$$I = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D x dxdy,$$

với D là miền tam giác ABC.

Miền D được xác định bởi $0 \le y \le 2,\ y - 4 \le x \le -y$. Vậy

$$I = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{y-4}^{-y} x dx = \int\limits_0^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y-4}^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^2 (8y - 16)dy = \frac{1}{2}\left.(4y^2 - 16y)\right|_0^2 = -8.$$

▽ ***Hệ quả 2.3. (Hệ quả của công thức Green.)***

Nếu đường kín L là biên của miền D thì diện tích S của miền D được cho bởi công thức

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx \tag{2.40}$$

Chứng minh. Thật vậy, áp dụng công thức Green với $P = -y,\ Q = x$, ta có

$$\oint\limits_L xdy - ydx = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2S.$$

Suy ra,

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx.$$

•Ví dụ 2.33. Tính diện tích của miền giới hạn bởi elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$.

Lời giải.

Phương trình tham số của elip là $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leq t < 2\pi$. Chiều tăng của t ứng với chiều dương của elip.

Áp dụng công thức (2.40), ta được

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t.b\cos t - b\sin t.(-a\sin t)]dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

2.3.4. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc đường lấy tích phân

Qua các ví dụ trên ta thấy rằng tích phân đường $\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ không những phụ thuộc vào 2 đầu mút A, B mà còn phụ thuộc vào đường $\widehat{AB}$. Bây giờ, ta xét xem với điều kiện nào thì tích phân đường đó chỉ phụ thuộc vào hai mút A, B mà không phụ thuộc vào đường lấy tích phân. Ta có định lí sau đây.

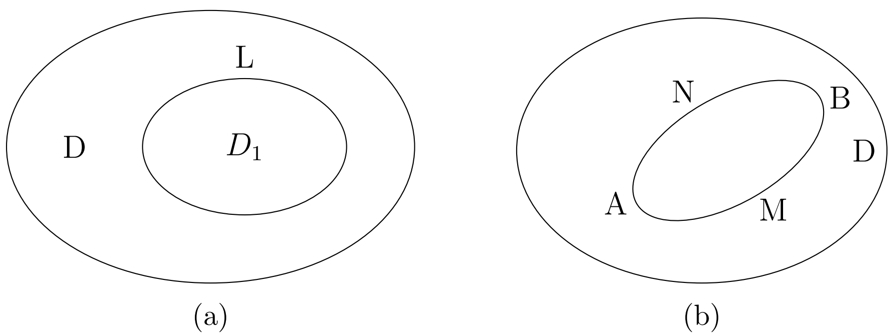
$\Diamond$ **Định lí 2.5.** *Giả sử hai hàm $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D nào đó. Khi đó, bốn mệnh đề sau đây là tương đương với nhau.*

1. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}, \forall (x,y) \in D;$

2. $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ dọc theo mọi đường kín L nằm trong D;

3. $\int\limits_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy$, trong đó $\widehat{AB}$ là một cung bất kì nằm trong D, chỉ phụ thuộc hai mút A, B mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B;

4. Biểu thức $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x, y)$ nào đó trong miền D.



Hình 2.49

Chứng minh.
Ta sẽ chứng minh định lí theo sơ đồ sau 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 4) ⇒ 1).
(a) 1) ⇒ 2) (xem Hình 2.49a) Giả sử L là một đường kín bất kì nằm trong D. Gọi D_1 là miền giới hạn bởi L. Áp dụng công thức Green, ta có

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Vậy, theo giả thiết 1), ta thu được

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \ \forall (x, y) \in D_1 \subset D.$$

(b) 2) ⇒ 3) Giả sử $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ANB}$ là hai đường bất kì nối A với B (hai đường này đều nằm trong D) (xem Hình 2.49b).

Theo giả thiết 2), ta có

$$\int\limits_{\widehat{AMBNA}} Pdx + Qdy = 0 \Leftrightarrow \int\limits_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\widehat{BNA}} Pdx + Qdy = 0.$$

Suy ra,

$$\int\limits_{\widehat{AMB}} Pdx + Qdy = - \int\limits_{\widehat{BNA}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\widehat{ANB}} Pdx + Qdy.$$

Vậy, $\int\limits_{\overparen{AB}} Pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc vào hai mút $A,\ B$ mà không phụ thuộc đường đi từ A đến B.

(c) 3) $\Rightarrow$ 4) Giả sử $A(x_0, y_0)$ là một điểm cố định trong D, $M(x,y)$ là điểm chạy trong D. Xét hàm số

$$u(x,y) = \int\limits_{\overparen{AM}} Pdx + Qdy. \tag{2.41}$$

Hàm số trên hoàn toàn xác định vì tích phân ở vế phải không phụ thuộc đường lấy tích phân. Lấy điểm $M_1(x+h, y) \in D$, với h có giá trị tuyệt đối khá nhỏ, ta có

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\int\limits_{\overparen{AM_1}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\overparen{AM}} Pdx + Qdy\Big].\end{aligned}$$

Chọn $\overparen{AM_1}$ gồm cung $\overparen{AM}$ và đoạn thẳng MM_1 song song với trục Ox (xem Hình 2.50a), ta được

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{MM_1} Pdx + Qdy = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y)d\xi.$$

Theo định lí về giá trị trung bình đối với tích phân xác định, ta có

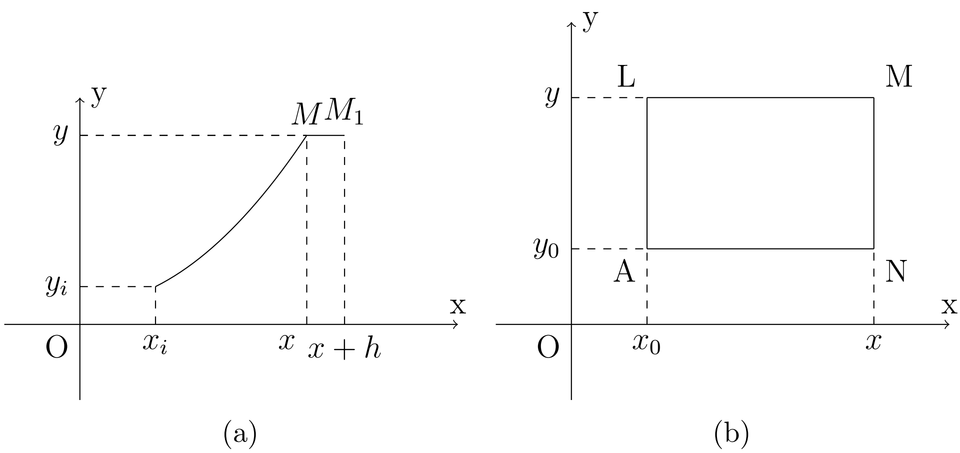
$$\int\limits_{x}^{x+h} P(\xi,y)d\xi = P(\bar{x}, y)h, \text{với } \bar{x} = x + \theta h, \quad 0 < \theta < 1.$$

Khi $h \to 0$ thì $\bar{x} \to x$, do đó $P(\bar{x}, y) \to P(x,y)$. Vậy $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} P(\bar{x}, y) = P(x,y)$.

Tương tự như vậy, ta có thể chứng minh được rằng

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Do đó, $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x,y)$ cho bởi công thức (3.19).



Hình 2.50

(d) 4) $\Rightarrow$ 1) Giả sử $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$ nào đó. Khi đó

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$
$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Các hàm số trên liên tục trên D, nên theo định lí Schwarz, ta có $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in D$. Định lí được chứng minh hoàn toàn.

$\bigtriangledown$ ***Hệ quả* 2.4.** *Nếu $Pdx+Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm số $u(x, y)$ thì*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A), \qquad (2.42)$$

dọc theo mọi đường cong $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong miền D.

$\bigtriangledown$ ***Hệ quả* 2.5.** *Nếu D là toàn bộ $\mathbb{R}^2$ thì $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x, y)$ cho bởi công thức*

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} P(x, y)dy + C, \qquad (2.43)$$

hoặc

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} P(x_0, y)dy + C, \qquad (2.44)$$

với $M_0(x_0, y_0)$ là điểm tùy chọn trong D.

Thật vậy, vì tích phân $u(x,y) = \int\limits_{\overset{\frown}{AM}} Pdx + Qdy + C$ không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nên nếu chọn $\overset{\frown}{AM}$ là đường gấp khúc ANM (xem Hình 2.50b) thì ta được công thức (2.43), còn nếu chọn đường lấy tích phân là đường gấp khúc ALM (xem Hình 2.50b) thì ta được công thức (2.44).

•Ví dụ 2.34. Chứng minh rằng biểu thức

$$e^{x-y}(1+x+y)dx + e^{x-y}(1-x-y)dy,$$

là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm hàm $u(x,y)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= e^{x-y}(1+x+y) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -e^{x-y}(x+y) \\ Q &= e^{x-y}(1-x-y) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{x-y}(x+y). \end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Do đó, $Pdx + Qdy$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó xác định trên toàn $\mathbb{R}^2$. Áp dụng công thức (2.43) với $x_0 = y_0 = 0$, ta được

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_0^x e^x(1+x)dx + \int_0^y e^{x-y}(1-x-y)dy + C \\ &= e^x\,(1+x)\big|_0^x - \int_0^x e^x dx - e^{x-y}\,(1-x-y)\big|_0^y - \int_0^y e^{x-y}dy + C \\ &= e^x\,(1+x)\big|_0^x - e^x\big|_0^x - e^{x-y}\,(1-x-y)\big|_0^y + e^{x-y}\Big|_0^y + C \\ &= e^{x-y}(x+y) + C. \end{aligned}$$

Bài tập chương 2

Bài 2.1. Đổi thứ tự tích phân trong các tích phân sau

a) $\int\limits_{-2}^{2} dx. \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$;

b) $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{0}^{2y} f(x,y)dx$;

c) $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$.

Bài 2.2. Tính các tích phân kép sau

a) $I = \iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^3}$, D là miền giới hạn bởi $x \geq 1$, $y \geq 1$, $x+y \leq 3$;

b) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ và $x = y^2$;

c) $I = \iint\limits_D x^2(y-x)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $y = x^2$ và $3x + y = 4$;

d) $I = \iint\limits_D |x+y|\, dxdy$, D là miền được xác định bởi $|x| \leq 1$ và $|y| \leq 1$;

e) $I = \iint\limits_D (x-y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $y = 2 - x^2$ và $y = 2x - 1$;

f) $I = \iint\limits_D e^x dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x = 0, y = 2, y = e^x$;

g) $I = \iint\limits_D (x+y)^3(x-y)^2 dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x + y = 1, x - y = 1, x + y = 3, x - y = -1$;

h) $I = \iint\limits_D (x-y)dxdy$, D là miền giới hạn bởi

$y = x + 1, y = x - 3, y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}, y = -\frac{1}{3}x + 5$;

i) $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường $x^2 + y^2 - x = 0$;

j) $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, D là miền được giới hạn bởi các đường tròn $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 4a^2, a > 0$;

k) $I = \iint\limits_D (x + 2y + 1)dxdy$, D là giao của hai hình tròn $x^2 + y^2 \leq 2y$ và $x^2 + y^2 \leq 2x$;

l) $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy$, D là miền xác định bởi $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$, $y \geq 0$;

m) $I = \iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$, D là miền $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$;

n) $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D là miền giới hạn bởi đường

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$;
o) $I = \iint\limits_D xydxdy$, D là miền $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ và $y \geq 0$.

Bài 2.3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau
a) $x = 4y - y^2, x + y = 6$;
b) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$;
c) $y = 2^x$, $y = -\frac{x}{2}, y = 4$;
d) $xy = 1, xy = 8$, $y^2 = x$, $y^2 = 8x$.

Bài 2.4.
a) Tính diện tích của phần mặt nón $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, nằm ở trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$;
b) Tính diện tích của phần mặt $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}(a > 0, b > 0)$ nằm ở trong mặt trụ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
c) Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm trong mặt trụ $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $(a > 0)$;
d) Tính diện tích của phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nằm trong mặt trụ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 2.5. Xác định trọng tâm của các bản phẳng đồng chất giới hạn bởi các đường
a) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$;
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ và nằm trong miền $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} \geq 1$;
c) $y^2 = x$, $x^2 = y$;
d) $y = \sqrt{2x - x^2}, y = 0$ và nằm trong nửa mặt phẳng trên trục Ox;
e) $r = a(1 + \cos\varphi), (a > 0)$.

Bài 2.6. Tính các tích phân bội ba sau
a) $I = \iiint\limits_V zdxdydz$, V là miền xác định bởi $0 \leq x \leq \frac{1}{4}, x \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
b) $I = \iiint\limits_V (1 - x - y - z)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1$;
c) $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, a > 0, b > 0, c > 0$;
d) $I = \iiint\limits_V |xyz|dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq a$;
e) $I = \iiint\limits_V ydxdydz$, V là miền giới hạn bởi các mặt $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = h(h > 0)$;

f) $I = \iiint\limits_V (xy + yz + zx)dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, R > 0$.
g) $I = \iiint\limits_V z^2 dxdydz$, V là miền xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, R > 0$;
h) $I = \iiint\limits_V x^2y^2z^2 dxdydz$, V là miền xác định bởi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1, a > 0, b > 0, c > 0$;
i) $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$, V là hình trụ $x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le 1$;

Bài 2.7. Tính các tích phân đường
a) $\int\limits_{ABC} (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$, ABC là đường gấp khúc $A(0,0), B(2,2), C(4,0)$;
b) $\int\limits_L ydx - (y + x^2)dy$, L là cung parabol $y = 2x - x^2$ nằm ở trên trục Ox theo chiều kim đồng hồ;
c) $\int\limits_{\widehat{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$, $\widehat{\mathrm{AB}}$ là cung $x^2 + y^2 = 2x$, $x \ge 1, A(1,1), B(1,-1)$.

Bài 2.8. Tính $\int\limits_{\widehat{AB}} (xy - 1)dx + x^2 ydy$, $A(1,0), B(0,2)$ theo đường
a) $2x + y = 2$;
b) $4x + y^2 = 4$;
c) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ theo chiều dương.

Bài 2.9. Tính các tích phân đường
a) $\oint\limits_L xy\left[-(x + \dfrac{y}{2})dx + (\dfrac{x}{2} + y)dy\right]$, L là biên của tam giác $ABC, A(-1,0), B(1,-2), C(1,2)$;
b) $\int\limits_{OAB} 2(x^2 + y^2)dx + (4y + 3)xdy$, OAB là đường gấp khúc $O(0,0), A(1,1), B(0,2)$;
c) $\oint\limits_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, L là đường $x^2 + y^2 = ax (a > 0)$;
d) $\oint\limits_L x^3(y + \dfrac{x}{4})dy - y^3(x + \dfrac{y}{4})dx$, L là đường $x^2 + y^2 = 2x$.

Bài 2.10. Tích phân đường $\int\limits_L (1 - \dfrac{y^2}{x^2}\cos\dfrac{y}{x})dx + (\sin\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cos\dfrac{y}{x})dy$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân ấy từ $A(1,\pi)$ đến $B(2,\pi)$ theo một cung không cắt Oy.

Bài 2.11. Tích phân đường $\int\limits_L \dfrac{x^2 + y^2}{xy}\left(\dfrac{3x^2 - y^2}{x}dx + \dfrac{3y^2 - x^2}{y}dy\right)$ có phụ thuộc vào đường lấy tích phân không? Tính tích phân ấy theo cung $L = \widehat{AB}$ xác định bởi x = t + cos^{2}t, y = 1 + sin^{2}t,$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Bài 2.12. Chứng minh rằng các biểu thức $Pdx + Qdy$ sau đây là vi

phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u:
a) $(x^2-2xy^2+3)dx+(y^2-2x^2y+3)dy$;
b) $(2x-3xy^2+2y)dx+(2x-3x^2y+2y)dy$;
c) $\left[e^{x+y}+\cos(x-y)\right]dx+\left[e^{x+y}-\cos(x-y)+2\right]dy$;
d) $e^x\left[e^y(x-y+2)+y\right]dx+e^x\left[e^y(x-y)+1\right]dy$;
e) $\dfrac{xdx}{x^2+y^2}+\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}ydy$.

Bài 2.13. Tìm m để biểu thức $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{(x^2+y^2)^m}$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u trong trường hợp đó.

Bài 2.14. Tìm a,b để biểu thức $\dfrac{(ax^2+2xy+y^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$ là vi phân toàn phần của một hàm số $u(x,y)$ nào đó. Tìm u trong trường hợp đó.

Bài 2.15. Tìm α,β để tích phân đường $\int\limits_L \dfrac{y(1-x^2+\alpha y^2)dx+x(1-y^2+\beta x^2)dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ không phụ thuộc đường lấy tích phân. Tính tích phân ấy từ điểm $A(0,0)$ đến điểm $B(a,b)$ ứng với các giá trị α,β đã tìm được.

Bài 2.16. Tính $\oint_L \dfrac{xdx+ydy}{(x^2+y^2+1)^2}$, L là đường elip $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$.

Đáp số bài tập chương 2

Bài 2.1.
a) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$;
b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_1^3 f(x,y)dy+\int\limits_2^6 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy$;
c) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} dy \int\limits_1^2 f(x,y)dx+\int\limits_{\sqrt{3}}^2 dy \int\limits_{2-\sqrt{4-y^2}}^2 f(x,y)dx$.

Bài 2.2.

a) $\dfrac{1}{36}$; b) $-\dfrac{1}{504}$; c) $\dfrac{36875}{42}$;

d) $\frac{8}{3}$;

e) $\frac{64}{15}$;

f) $\frac{1}{2}$;

g) $\frac{20}{3}$ (Đổi biến $x+y=u; x-y=v$);

h) $\frac{38}{3}$;

i) $\frac{11\pi}{32}$;

j) $\frac{14\pi a^3}{3}$;

k) $\frac{5}{2}(\frac{\pi}{2}-1)$;

l) $\frac{8}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$;

m) $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$;

n) $\frac{2}{3}\pi ab$;

o) $\frac{4}{3}$.

Bài 2.3.

a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{192}{5}$; c) $\frac{97}{4}-\frac{7}{2\ln 2}$; d) 7ln2.

Bài 2.4.

a) $\pi\sqrt{2}$;

b) $\frac{\pi ab}{6}(5\sqrt{5}-1)$;

c) $8a^2(\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2})$;

d) $36(\pi-2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2})$.

Bài 2.5.

a) $(\frac{2}{5},0)$;

b) $(\frac{10}{3(\pi-2)},\frac{2}{\pi-2})$;

c) $(\frac{9}{20},\frac{9}{20})$;

d) $(1,\frac{4}{3\pi})$;

e) $(\frac{5a}{6},0)$.

Bài 2.6.

a) $\frac{43}{3072}$; b) $\frac{1}{4!}$; c) $\frac{abc}{60}(a^2+b^2+c^2)$; d) $\frac{a^4}{2}$; e) $\frac{\pi h^4}{4}$; f) 0;

g) $\frac{4\pi R^5}{15}$; h) $\frac{4\pi(abc)^3}{945}$; i) $\pi(3\sqrt{10}-8-\sqrt{2}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3})$.

Bài 2.7.

a) $\frac{-32}{3}$; b) 4; c) $-(\pi+2)$.

Bài 2.8.

a) 1; b) $\frac{17}{15}$; c) $\frac{4}{3}$.

Bài 2.9.

a) 4; b) 3; c) $-\frac{\pi a^3}{8}$; d) $\frac{5\pi}{2}$.

Bài 2.10.

Không nếu đường lấy tích phân L không cắt Oy; $1+\pi$.

Bài 2.11.

Không nếu đường lấy tích phân L không cắt các trục tọa độ; $\dfrac{(\pi^2+16)^2}{16\pi}-4$.

Bài 2.12.

a) $\dfrac{1}{3}x^3 - x^2y^2 + 3x + \dfrac{1}{3}y^3 + 3y + C$;

b) $x^2 + y^2 - \dfrac{3}{2}x^2y^2 + 2xy + C$;

c) $e^{x+y} + \sin(x-y) + 2y + C$;

d) $e^x\left[y + e^y(x-y+1)\right] + C$;

e) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \dfrac{y^2}{2} + C$.

Bài 2.13.

$m=1$; $u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\dfrac{y}{x} + C$.

Bài 2.14.

$a=b=-1$; $u = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} + C$.

Bài 2.15.

$\alpha=\beta=1,\ I = \dfrac{ab}{1+a^2+b^2}$.

Bài 2.16.

0; biểu thức dưới dấu tích phân là $d\Big(\dfrac{-1}{2(x^2+y^2+1)}\Big)$.

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Phương trình vi phân là phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

trong đó x là biến độc lập, $y = y(x)$ là hàm phải tìm, $y', y'', ..., y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

Cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình gọi là cấp của phương trình vi phân. Ví dụ $y' + 2xy - y = s$inx là phương trình vi phân cấp một; $y'' + 4y = e^x$ là phương trình vi phân cấp hai.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm số thỏa mãn phương trình, tức là mọi hàm số sao cho khi thế nó vào phương trình ta được một đồng nhất thức. Ví dụ các hàm số $y = C_1\text{cos}2x + C_2 \sin 2x$ trong đó C_1, C_2 là các hằng số tùy ý đều là nghiệm của phương trình $y'' + 4y = 0$. Cho C_1, C_2 những giá trị khác nhau ta được những nghiệm khác nhau của phương trình. Vì vậy phương trình trên có vô số nghiệm.

Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các nghiệm của nó. Về mặt hình học, nghiệm của phương trình vi phân xác định một đường gọi là đường tích phân của phương trình. Giải phương trình vi phân là tìm tất cả các đường tích phân của nó, các đường ấy được xác định bởi phương trình $y = f(x)$ hoặc phương trình $\Phi(x, y) = 0$ hoặc phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$.

Trong bài giảng này ta chỉ xét phương trình vi phân cấp một và cấp hai.

3.1. Phương trình vi phân cấp một

3.1.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp một

3.1.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một tổng quát có dạng

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3.1}$$

hay

$$y' = f(x, y), \tag{3.2}$$

trong đó y là hàm phải tìm, y' là đạo hàm cấp một, x là biến độc lập. Biến độc lập và hàm phải tìm có thể không có mặt nhưng bắt buộc phải có mặt đạo hàm cấp một y'.

3.1.1.2. Định lí (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

♢ **Định lí 3.1.** *Cho phương trình vi phân cấp một $y' = f(x, y)$. Giả sử $f(x, y)$ liên tục trong miền D nào đó của mặt phẳng Oxy và $(x_0, y_0) \in D$. Khi đó, trong một lân cận nào đó của điểm $x = x_0$ tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (3.2), nghiệm đó lấy giá trị y_0 khi $x = x_0$.*

Nếu $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trong miền D thì nghiệm đó là duy nhất.

Điều kiện $y|_{x=x_0} = y_0$ hay $y(x_0) = y_0$ được gọi là điều kiện đầu. Bài toán tìm nghiệm của phương trình (3.2) thoả mãn điều kiện đầu được gọi là bài toán Cauchy.

3.1.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp một là hàm số $y = \varphi(x, C)$, trong đó C là hằng số tùy ý thỏa mãn phương trình vi phân.

- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C = C_0$ sao cho y $= \varphi(x, C_0)$ thoả mãn điều kiện đầu $y|_{x=x_0} = y_0$ gọi là nghiệm riêng.

- Khi nghiệm tổng quát được cho dưới dạng ẩn thì được gọi là tích phân tổng quát, kí hiệu là $\phi(x,\ y,\ C) = 0$. Cho C một giá trị cụ thể $C = C_0$ sao cho $\phi(x,\ y,\ C_0) = 0$ thoả mãn điều kiện đầu $y|_{x=x_0} = y_0$ thì $\phi(x,\ y,\ C_0) = 0$ được gọi là tích phân riêng.

3.1.2. Phương trình vi phân tách biến (Phương trình vi phân có biến phân li)

3.1.2.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một tách biến có dạng

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0, \tag{3.3}$$

trong đó $f_1(x)$ là hàm số của biến độc lập x, $f_2(y)$ là hàm số của biến độc lập y.

3.1.2.2. Cách giải

Lấy tích phân hai vế của phương trình được nghiệm tổng quát cho dưới dạng tích phân tổng quát

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = C.$$

•**Ví dụ 3.1.** Giải phương trình vi phân $\dfrac{x}{x^2+2}dx + \dfrac{2y}{1+y^2}dy = 0.$

Lời giải.

Lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int \frac{x}{x^2+2}dx + \int \frac{2y}{1+y^2}dy = \ln|C| \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \ln(1+y^2) = \ln|C|.$$

Suy ra

$$\ln(1+y^2)\sqrt{x^2+2} = \ln|C| \Rightarrow (1+y^2)\sqrt{x^2+2} = C.$$

Vậy

$$y = \pm\sqrt{\frac{C}{\sqrt{x^2+2}} - 1},\ \text{với } C \text{ là hằng số và } C > \sqrt{2}.$$

3.1.2.3. Phương trình vi phân cấp một có thể đưa được về dạng tách biến

Xét phương trình vi phân cấp một có dạng

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{3.4}$$

Để đưa phương trình (3.4) về dạng phương trình tách biến và tìm nghiệm của nó, ta xét các trường hợp sau đây.

- Nếu $N_1(y).M_2(x) \neq 0$, chia cả 2 vế của (3.4) cho $N_1(y).M_2(x)$, ta được
$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$
Lấy tích phân 2 vế, ta được
$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

- Giải phương trình $N_1(y).M_2(x) = 0 \leftrightarrow N_1(y) = 0$ hoặc $M_2(x) = 0$.

  Nếu coi x là biến chỉ đối số, y là biến chỉ hàm số thì ta chỉ cần giải phương trình $N_1(y) = 0$.

  Giả sử $y = y_0$ là nghiệm, thay trực tiếp vào (3.4) thì đó cũng là nghiệm.

  Nếu coi y là biến chỉ đối số, x là biến chỉ hàm số thì ta chỉ cần giải phương trình $M_2(x) = 0$.

  Giả sử $x = x_0$ là nghiệm, thay trực tiếp vào (3.4) thì đó cũng là nghiệm.

•**Ví dụ 3.2.** Tìm tích phân tổng quát của phương trình

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0.$$

Lời giải. Chia cả 2 vế của phương trình cho $(1+x^2)(1+y^2)$, ta được

$$\frac{x}{1 + x^2}dx + \frac{y}{1 + y^2}dy = 0.$$

Suy ra,

$$\int \frac{x}{1 + x^2}dx + \int \frac{ydy}{1 + y^2} = \ln|C|$$

hay

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|C|\,.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $(1+x^2)(1+y^2) = C^2$, với C là hằng số khác không.

•**Ví dụ 3.3.** Tìm nghiệm của bài toán sau

$$\begin{cases} (1+e^{2x})y^2dy = e^x dx \\ y\big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Chia cả 2 vế cho $1+e^{2x}$, ta có

$$y^2dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \Rightarrow \int y^2dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$\Rightarrow \frac{y^3}{3} = \arctan e^x + C.$$

Với $y\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = -\frac{\pi}{4}$ hay $\frac{y^3}{3} = \arctan e^x - \frac{\pi}{4}$.

Vậy, nghiệm riêng của phương trình là $y = \sqrt[3]{3\arctan e^x - \frac{3\pi}{4}}$.

3.1.3. Phương trình đẳng cấp cấp một (Phương trình vi phân thuần nhất cấp một)

3.1.3.1. Định nghĩa

Phương trình đẳng cấp cấp một có dạng

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.5}$$

3.1.3.2. Cách giải

Đặt $u = \frac{y}{x}$ hay $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$. Thay vào phương trình (3.5), ta có

$$u' \cdot x + u = \phi(u) \text{ hay } u' \cdot x = \phi(u) - u.$$

- Nếu $\phi(u) - u \neq 0$ thì phương trình đưa được về dạng có biến số phân li

$$\frac{du}{\phi(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Suy ra

$$\ln|x| = \int \frac{du}{\phi(u) - u} = \Phi(u) + \ln|C|.$$

Từ đó, ta có tích phân $x = Ce^{\Phi(y/x)}$, với C là hằng số khác không.

- Nếu $\phi(u) - u \equiv 0$ thì $\phi(u) \equiv u$. Khi đó, phương trình trở thành $y' = \dfrac{y}{x}$ và có nghiệm là $y = Cx$ với C là hằng số bất kì.
- Nếu $\phi(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì $y = u_0 x$ là nghiệm.

•**Ví dụ 3.4.** Tìm tích phân tổng quát của phương trình $y' = \dfrac{y}{x} + e^{y/x}$.

Lời giải. Đặt $\dfrac{y}{x} = u$ ta có $y = ux$ và $y' = u'x + u$.
Thay vào phương trình đã cho, ta được $u'x + u = u + e^u$

$$\Rightarrow u'x = e^u \quad \text{hay} \quad e^{-u}du = \frac{dx}{x} \quad \text{hay} \quad \int e^{-u}du = \ln|Cx|$$

$$\Rightarrow -e^{-u} = \ln|Cx|.$$

Thay $u = \dfrac{y}{x}$, ta thu được tích phân tổng quát của phương trình là $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|Cx| = 0$, với C là hằng số khác không.

•**Ví dụ 3.5.** Tìm tích phân riêng của phương trình $xy' - y = \dfrac{x}{\arctan\dfrac{y}{x}}$, thỏa mãn điều kiện $y(1) = 1$.

Lời giải. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}.$$

Đặt $\dfrac{y}{x} = u$, ta có $y = ux$ và $y' = xu' + u$. Thay vào phương trình, ta được

$$u'x + u - u = \frac{1}{\arctan u}.$$

Hay

$$\frac{dx}{x} = \arctan u du \Rightarrow \ln|Cx| = \int \arctan u du.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\ln|Cx| = u\cdot\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)\\ &\Rightarrow \ln\left[(1+u^2)C^2x^2\right] = 2u\arctan u\\ &\Rightarrow \ln\left[C^2(x^2+y^2)\right] = 2\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Với điều kiện đầu $y\big|_{x=1} = 1$, ta có

$$2\arctan 1 = \ln 2C^2 \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \ln 2C^2 \Rightarrow C^2 = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Vậy, tích phân riêng của phương trình là $2\dfrac{y}{x}\arctan\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + \ln\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

3.1.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

3.1.4.1. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất

a. Định nghĩa. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một thuần nhất có dạng

$$y' + p(x)y = 0, \tag{3.6}$$

trong đó $p(x)$ là hàm số liên tục.

b. Cách giải

- Nếu $y \neq 0$ phương trình tương đương với $\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx$ là phương trình có biến số phân li. Suy ra, $\ln|y| = -\displaystyle\int p(x)dx + \ln|C|$ với $C \neq 0$. Do đó, $y = Ce^{-\int p(x)dx}$.
- Nếu $y = 0$ bằng cách thế trực tiếp vào phương trình thì $y = 0$ cũng là nghiệm.

Tóm lại, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

với C tuỳ ý.

3.1.4.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất

a. Định nghĩa. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một không thuần nhất có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{3.7}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm số liên tục.

b. Cách giải

- *Bước 1:* Giải phương trình thuần nhất tương ứng $y' + p(x)y = 0$, ta được nghiệm tổng quát là
$$y = C.e^{-\int p(x)dx} \tag{*}$$
với C là hằng số.

- *Bước 2:* Coi C là hàm số của x. Tìm $C(x)$?
Ta có,
$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$
Thay y, y' vào phương trình (3.7), ta được
$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$
hay $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + K$, với K là hằng số bất kì.

- *Bước 3:* Thay $C(x)$ vừa tìm được vào (*), ta được nghiệm tổng quát của phương trình (3.7) là
$$y = K.e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \tag{**}$$

$*$ **Chú ý:** Trong công thức (**), số hạng thứ nhất của vế phải $\overline{y} = Ke^{-\int p(x)dx}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng, còn số hạng thứ hai $Y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)}dx$ là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất bằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất cộng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

•**Ví dụ 3.6.** Giải phương trình vi phân
$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Lời giải.

- *Bước 1:* Phương trình thuần nhất tương ứng $y' + 2xy = 0$ hay $dy = -2xydx$ có nghiệm tổng quát là
$$y = Ce^{-\int 2xdx} = Ce^{-x^2}.$$

- *Bước 2:* Coi $C = C(x)$, ta có

$$y' = C' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot C \cdot e^{-x^2}.$$

Thay y, y' vào phương trình đã cho, ta được

$$C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} + 2xCe^{-x^2} = xe^{-x^2}$$
$$\Rightarrow C'e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$
$$\Rightarrow dC(x) = xdx \text{ hay } C(x) = \frac{x^2}{2} + K.$$

- *Bước 3:* Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = K.e^{-x^2} + \frac{x^2}{2}e^{-x^2}$$

với K là hằng số tùy ý.

•**Ví dụ 3.7.** Chứng tỏ rằng phương trình $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 3$ có một nghiệm riêng là một tam thức bậc hai. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Lời giải.

• Đặt $y = ax^2 + bx + c$. Ta cần tìm a, b, c để tam thức này là nghiệm của phương trình đã cho. Ta có, $y' = 2ax + b$. Thay vào phương trình, ta được

$$x(x^2+1)(2ax+b) - (2x^2+3)(ax^2+bx+c) = 3$$
$$\Leftrightarrow -bx^3 - (2c+a)x^2 - abx - 3c = 3.$$

Đồng nhất các hệ số, ta thu được $b = 0, c = -1, a = 2$. Vậy, $y = 2x^2 - 1$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

• Bây giờ, ta tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng $x(x^2+1)y' - (2x^2+3)y = 0$.

Chia cả 2 vế của phương trình trên cho $x(x^2+1)$ với điều kiện $x \neq 0$, ta thu được

$$y' - \frac{2x^2+3}{x(x^2+1)}y = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{2x^2+3}{x(x^2+1)}dx$$

Lại có

$$\int \frac{2x^2+3}{x(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = 3\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|C|$$
$$= \ln\frac{|Cx|^3}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là

$$y = \frac{Cx^3}{\sqrt{x^2+1}}$$

với C là hằng số bất kì.

• Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là

$$y = \frac{Cx^3}{\sqrt{x^2+1}} + 2x^2 - 1.$$

•**Ví dụ 3.8.** Giải phương trình $e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0$.

Lời giải. Nếu xem y là hàm phải tìm của biến số x và viết phương trình dưới dạng $(xe^y - 1)y' + e^y = 0$ thì phương trình không thuộc dạng đang xét. Nếu xem x là hàm số phải tìm của y ta được phương trình $x' + x = \dfrac{1}{e^y}$, trong đó $x' = \dfrac{dx}{dy}$. Đó là phương trình tuyến tính cấp một đối với hàm số $x(y)$. Giải phương trình thuần nhất tương ứng $\dfrac{dx}{dy} + x = 0$ hay $\dfrac{dx}{x} = -dy$, ta được $x = Ce^{-y}$.

Coi $C = C(y)$, khi đó $x' = C'e^{-y} - Ce^{-y}$, thay vào phương trình không thuần nhất, ta được

$$C'e^{-y} = e^{-y} \Rightarrow C' = 1 \Rightarrow C = y + K.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là $x = (y+K)e^{-y}$, với K là hằng số bất kì.

3.1.5. Phương trình Bernoulli

3.1.5.1. Định nghĩa

Phương trình Bernoulli có dạng sau đây

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \tag{3.8}$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục và $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.1.5.2. Cách giải

- Nếu $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (3.8) là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất hoặc thuần nhất.

- Nếu $\alpha \neq 0$ và $\alpha \neq 1$ thì ta giải phương trình (3.8) như sau.

  +) Dễ thấy $y = 0$ là nghiệm của phương trình (3.8) khi $a > 0$; và $y = 0$ không thuộc tập xác định của phương trình (3.8) khi $a < 0$.

  +) Với $y \neq 0$, chia cả hai vế cuả (3.8) cho y^α, ta được

  $$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{3.9}$$

  Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, thay vào (3.9), ta được

  $$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x). \tag{3.10}$$

  Đây là phương trình tuyến tính cấp một đối với hàm $z(x)$. Giải phương trình (3.10), tìm được nghiệm tổng quát $z = z(x, C)$. Sau đó, thay trở lại biến cũ $z = y^{1-\alpha}$ để tìm nghiệm tổng quát $y = y(x, C)$.

•**Ví dụ 3.9.** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^4$.

Lời giải.

+) Hàm $y = 0$ là nghiệm của phương trình (thử trực tiếp).

+) Với $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y^4, ta được

$$y^{-4}y' + \frac{1}{x}y^{-3} = x^2.$$

Đặt $z = y^{-3}$, ta có $z' = -3y^{-4}y'$, thay vào phương trình trên, ta thu được

$$z' - \frac{3}{x}z = -3x^2 \tag{*}$$

Đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp một đối với hàm z.

- Giải phương trình thuần nhất $z' - \dfrac{3}{x}z = 0 \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = 3\dfrac{dx}{x}$ hay $\ln\left|\dfrac{z}{C}\right| = 3\ln|x| \Rightarrow z = Cx^3$, với C là hằng số bất kì.

- Coi $C = C(x)$, ta có $z' = C'x^3 + 3x^2C$. Thay z, z' vào phương trình (*), ta được

  $$C'x^3 + 3x^2C - 3x^2C = -3x^2 \Rightarrow \frac{dC}{dx} = -\frac{3}{x} \Rightarrow C = -3\ln|x| + K,$$

  với K là hằng số bất kì.

  Do đó, nghiệm của phương trình (*) là $z = Kx^3 - 3x^3\ln|x|$.

  Thay $z = y^{-3}$, ta được nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{K - 3\ln|x|}}$, với K là hằng số bất kì.

3.1.6. Phương trình vi phân toàn phần

3.1.6.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân toàn phần có dạng sau

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{3.11}$$

trong đó $P(x,y), Q(x,y)$ là các hàm số liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền đơn liên D thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{3.12}$$

3.1.6.2. Cách giải

Từ điều kiện (3.12), suy ra vế trái phương trình (3.11) là vi phân toàn phần của hàm $u(x,y)$ nào đó, tức là $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, với $u(x,y)$ được xác định bằng một trong hai công thức sau

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy,$$

hoặc

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

trong đó $(x_0, y_0) \in D$.

Vậy tích phân tổng quát của phương trình vi phân toàn phần (3.11) là

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C,$$

hoặc

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$

•**Ví dụ 3.10.** Giải phương trình vi phân sau

$$(4xy^2 + y)dx + (4x^2y + x)dy = 0.$$

Lời giải. Ta có

$$P(x,y) = 4xy^2 + y \Rightarrow P'_y = 8xy + 1;$$
$$Q(x,y) = 4x^2y + x \Rightarrow Q'_x = 8xy + 1.$$

Các hàm $P, Q, P'_y,\ Q'_x$ liên tục và $Q'_x = P'_y$, nên phương trình đã cho là phương trình vi phân toàn phần. Chọn $x_0 = y_0 = 0$, ta được

$$u(x,y) = \int_0^x (4xy^2 + y)dx + \int_0^y 0dy = 2x^2y^2 + xy.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $2x^2y^2 + xy = C$, với C là hằng số bất kì.

$*$ **Chú ý:** Nếu $P(x,y), Q(x,y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một của chúng trong một miền D nào đó mà $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$ trong D thì $Pdx + Qdy = 0$ không phải là phương trình vi phân toàn phần. Tuy nhiên, trong một số trường hợp người ta có thể chọn được hàm $h(x,y)$ để phương trình

$$h(x,y)\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = 0, \tag{3.13}$$

là phương trình vi phân toàn phần. Hàm $h(x,y)$ gọi là thừa số tích phân. Nói chung, không có phương pháp tổng quát để tìm thừa số tích phân. Ta xét hai trường hợp đặc biệt sau đây.

a. Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \phi(x)$ tức là không phụ thuộc vào y thì chọn $h(x,y) = h(x) = e^{\int \phi(x)dx}$.
Thật vậy, đặt $R(x,y) = h(x,y)P(x,y);\ S(x,y) = h(x,y)Q(x,y)$.
Ta có, $R = Pe^{\int \phi(x)dx} \Rightarrow R'_y = P'_y e^{\int \phi(x)dx}$.

$$S = Qe^{\int \phi(x)dx}$$

$$\Rightarrow S'_x = Q'_x e^{\int \phi(x)dx} + Q\phi(x)e^{\int \phi(x)dx} = \left[Q'_x + Q\phi(x)\right]e^{\int \phi(x)dx}.$$

Mà $\dfrac{P'_y - Q'_x}{Q} = \phi(x) \Rightarrow P'_y = Q'_x + Q\phi(x) \Rightarrow S'_x = P'_y \cdot e^{\int \phi(x)dx}$.

Vậy $R'_y = S'_x$ nên (3.13) là phương trình vi phân toàn phần.

b. Nếu $\dfrac{P'_y - Q'_x}{P} = \phi(y)$, tức là không phụ thuộc vào x, thì chọn $h(x,y) = h(y) = e^{-\int \phi(y)dy}$ (phần này chứng minh tương tự như trong trường hợp trên).

•**Ví dụ 3.11.** Giải phương trình vi phân $(2y+xy^3)dx+(x+x^2y^2)dy=0$.

Lời giải. Ta có

$$P(x,y)=2y+xy^3 \Rightarrow P'_y=2+3xy^2;$$
$$Q(x,y)=x+x^2y^2 \Rightarrow Q'_x=1+2xy^2.$$

Suy ra, $P'_y-Q'_x=1+xy^2=\dfrac{x+x^2y^2}{x}=\dfrac{Q}{x}$. Vậy, thừa số tích phân

$$h(x)=e^{\int \frac{dx}{x}}=e^{\ln|x|}=x.$$

Nhân hai vế của phương trình đã cho với x, ta được phương trình vi phân toàn phần là

$$x(2y+xy^3)dx+x(x+x^2y^2)dy=0.$$

Chọn $x_0=y_0=0$, ta có

$$u(x,y)=\int_0^x(2xy+x^2y^3)dx+\int_0^y 0dy=2y\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^x+y^3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x=yx^2+\frac{x^3y^3}{3}.$$

Vậy tích phân tổng quát của phương trình là $yx^2+\dfrac{x^3y^3}{3}=C$ hay $3yx^2+x^3y^3=K$, với K là hằng số bất kì.

•**Ví dụ 3.12.** Giải phương trình vi phân

$$(x^2+y^2)dx+(2xy+y^2x+\frac{x^3}{3})dy=0.$$

Lời giải. Đặt

$$P=x^2+y^2 \Rightarrow P'_y=2y;$$
$$Q=2xy+y^2x+\frac{x^3}{3} \Rightarrow Q'_x=2y+y^2+x^2.$$

Ta có $\dfrac{P'_y-Q'_x}{P}=-1$, nên thừa số tích phân $h(y)=e^{\int dy}=e^y$.

Nhân hai vế của phương trình với e^y, ta được phương trình vi phân toàn phần là

$$e^y(x^2+y^2)dx+e^y(2xy+y^2x+\frac{x^3}{3})dy=0.$$

Chọn $x_0=y_0=0$, ta có

$$u(x,y)=\int\limits_0^x(e^yx^2+y^2e^y)dx+\int\limits_0^y 0dy=e^y\frac{x^3}{3}+e^yy^2x.$$

Vậy, tích phân tổng quát của phương trình là $e^y\dfrac{x^3}{3}+e^yy^2x=C$ hay $e^y(x^3+3xy^2)=K$, với K là hằng số bất kì.

3.2. Phương trình vi phân cấp hai

3.2.1. Đại cương về phương trình vi phân cấp hai

3.2.1.1. Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp hai tổng quát có dạng

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.14}$$

hoặc

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{3.15}$$

trong đó, y là hàm cần tìm, x là biến độc lập và y', y'' lần lượt là đạo hàm cấp một và cấp hai của hàm cần tìm. Biến độc lập, hàm cần tìm và đạo hàm cấp một có thể không có mặt một cách tường minh nhưng bắt buộc phải có mặt đạo hàm cấp hai.

•**Ví dụ 3.13.** Các phương trình $y'' = 0$, $y''y + (y')^2 = 0$, $x^2y'' + xy' + y = 0$ là các phương trình vi phân cấp hai.

3.2.1.2. Định lí (Sự tồn tại và duy nhất nghiệm)

◊ **Định lí 3.2.** *Cho phương trình vi phân cấp hai* $y'' = f(x, y, y')$. *Nếu* $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')$ *và* $\dfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')$ *liên tục trong một miền* D *nào đó trong* $\mathbb{R}^3$ *và nếu* (x_0, y_0, y'_0) *là một điểm thuộc* D *thì trong lân cận nào đó của điểm* $x = x_0$ *tồn tại một nghiệm duy nhất* $y = y(x)$ *của phương trình* (3.15) *thỏa mãn các điều kiện*

$$y|_{x=x_0} = y_0 \ \ , y'|_{x=x_0} = y'_0. \tag{3.16}$$

Bài toán tìm nghiệm của phương trình (3.15) thỏa mãn các điều kiện đầu (3.16) được gọi là bài toán Cauchy.

3.2.1.3. Nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, tích phân tổng quát, tích phân riêng

- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai là hàm số $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, thỏa mãn phương trình vi phân cấp hai với mỗi cặp hằng số (C_1, C_2), và ngược lại, mỗi nghiệm của phương trình vi phân cấp hai đều có dạng $y = \varphi(x, C_1, C_2)$.

- Nghiệm nhận được từ nghiệm tổng quát bằng cách cho $C_1 = C_1^0,\ C_2 = C_2^0$ sao cho hàm số $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ thỏa mãn $y|_{x=x_0} = y_0,\ y'|_{x=x_0} = y'_0$ gọi là nghiệm riêng.

- Hệ thức $\phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của phương trình (3.15) dưới dạng ẩn gọi là tích phân tổng quát.

- Khi cho C_1, C_2 các giá trị cụ thể $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0$, từ tích phân tổng quát ta nhận được hệ thức $\phi(x, y, C_1^0, C_2^0) = 0$ gọi là tích phân riêng.

3.2.2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số có vế phải đặc biệt

3.2.2.1. Phương trình thuần nhất

a. Dạng phương trình

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{3.17}$$

trong đó p, q là các hằng số thực.

b. Cách giải

Ta tìm nghiệm riêng của (3.17) dưới dạng $y = e^{kx}$, trong đó k là hằng số. Ta có, $y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx}$.

Thay y, y', y'' vào (3.17), ta được $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Suy ra,

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{3.18}$$

Phương trình (3.18) được gọi là phương trình đặc trưng của (3.17).

Giải phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$.

- Nếu phương trình (3.18) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.17) là $\overline{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, với C_1, C_2 là các hằng số bất kì

- Nếu phương trình (3.18) có nghiệm kép $k_1 = k_2 = k$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.17) là $\overline{y} = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx} = (C_1 + C_2x)e^{kx}$, với C_1, C_2 là các hằng số bất kì.

- Nếu phương trình (3.18) có nghiệm phức $k = \alpha \pm i\beta$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (3.17) là $\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, với C_1, C_2 là các hằng số bất kì.

•**Ví dụ 3.14.** Giải các phương trình vi phân sau

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

b) $y'' - 2y' + 3y = 0$;

c) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Lời giải.

a) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2,\ k_2 = 3$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, ($C_1, C_2$ là các hằng số).

b) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 2k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = 1 \pm i\sqrt{2}$.

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = e^x(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x)$.

c) Phương trình đặc trưng là $k^2 - 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = 2$ (Bội 2).

Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

3.2.2.2. Phương trình không thuần nhất

a. Dạng phương trình

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{3.19}$$

trong đó p, q là các hằng số, $f(x) \neq 0$.

Trước khi trình bày cách giải phương trình (3.19), ta phát biểu định lí sau đây.

◊ **Định lí 3.3.** *(Cấu trúc nghiệm). Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất* (3.19) *bằng tổng của một nghiệm riêng của nó và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng* (3.17). *Ta có công thức sau*

$$y = \overline{y} + Y,$$

trong đó y, Y *lần lượt là nghiệm tổng quát và nghiệm riêng của phương trình vi phân không thuần nhất* (3.19), $\overline{y}$ *là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất tương ứng* (3.17).

b. Cách giải

Ta đã biết cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng (3.17) từ mục trên. Vấn đề còn lại là tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất (3.19).

Dưới đây, ta trình bày cách tìm nghiệm riêng ấy với hai dạng của vế phải $f(x)$.

*** Trường hợp 1**. Với $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, trong đó α là hằng số, $P_n(x)$ là đa thức bậc n của x.

- Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.18) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.19) dưới dạng $Y = e^{\alpha x} Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (3.18) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.19) dưới dạng $Y = xe^{\alpha x} Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

- Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (3.18) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.19) dưới dạng $Y = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$, trong đó $Q_n(x)$ là đa thức cùng bậc n với $P_n(x)$.

*** Trường hợp 2**. Với $f(x) = e^{\alpha x} \left[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x\right]$, trong đó α, β là các hằng số thực; $P_n(x)$, $Q_m(x)$ lần lượt là các đa thức bậc n, m.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.18) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.19) dưới dạng $Y = e^{\alpha x} \left[R_l(x) \cos \beta x + H_l(x) \sin \beta x\right]$, trong đó $R_l(x)$, $H_l(x)$ là các đa thức bậc l với $l = \max(n, m)$.

- Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (3.18) thì ta tìm nghiệm riêng của (3.19) dưới dạng $Y = xe^{\alpha x} \left[R_l(x) \cos \beta x + H_l(x) \sin \beta x\right]$, trong đó $R_l(x)$, $H_l(x)$ là các đa thức bậc l với $l = \max(n, m)$.

Ngoài ra, để tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân (3.19), ta cũng có thể sử dụng định lý sau.

$\lozenge$ **Định lí 3.4.** *(Nguyên lý chồng nghiệm). Nếu $Y_i(x)$, $i = 1, 2$, là các nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính*

$$y'' + py' + qy = f_i(x),$$

thì $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x)$ là một nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

•**Ví dụ 3.15.** Giải các phương trình vi phân sau

a) $y'' - 4y' + 3y = e^{4x}$;

b) $y'' + 4y' - 5y = e^{x}(x+1)$;

c) $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

Lời giải.

a) • *Bước 1.* Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' - 4y' + 3y = 0$ có phương trình đặc trưng là

$$k^2 - 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = 3 \end{array} \right.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^{x} + C_2e^{3x}$.

• *Bước 2.* Ta thấy, vế phải của phương trình đã cho là $f(x) = e^{4x} = e^{4x}.1$ có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha = 4,\ P_n(x) = 1,\ n = 0$. Do $\alpha = 4$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho dưới dạng

$$Y = A.e^{4x} \Rightarrow Y^{'} = 4A.e^{4x},\ Y^{''} = 16.A.e^{4x}.$$

Thay $Y,\ \mathrm{Y}^{'},\ \mathrm{Y}^{''}$ vào phương trình đã cho, ta được

$$16Ae^{4x} - 4.4Ae^{4x} + 3Ae^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow 3A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Vậy nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho là $Y = \dfrac{1}{3}e^{4x}$.

• *Bước 3.* Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{3}e^{4x}.$$

b) • *Bước 1.* Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + 4y' - 5y = 0$ có phương trình đặc trưng là

$$k^2 + 4k - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = 1 \\ k_2 = -5 \end{array} \right.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^{x} + C_2e^{-5x}$.

• *Bước 2.* Vế phải của phương trình là $f(x) = e^{x}(x+1)$ có dạng $e^{\alpha x}.P_n(x)$ với $\alpha = 1,\ P_n(x) = x + 1,\ n = 1$. Suy ra, $\alpha = 1$ là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng. Do đó, ta tìm một nghiệm riêng của phương trình vi phân đã cho dưới dạng

$$\begin{aligned} &Y = xe^x(Ax+B) = e^x(Ax^2+Bx);\\ \Rightarrow &Y' = e^x\left[Ax^2+(B+2A)x+B\right];\\ \Rightarrow &Y'' = e^x\left[Ax^2+(B+4A)x+2A+2B\right]. \end{aligned}$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình đầu và rút gọn, ta thu được

$$12Ax+2A+6B = x+1,\ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} 12A = 1 \\ 2A+6B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{12} \\ \\ B = \dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Vậy, nghiệm riêng cần tìm là $Y = e^x\left(\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{5x}{36}\right)$.

• *Bước 3*. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^x + C_2e^{-5x} + e^x\left(\frac{x^2}{12}+\frac{5x}{36}\right).$$

c) • *Bước 1*. Phương trình thuần nhất tương ứng $y''-6y'+9y=0$ có phương trình đặc trưng

$$k^2-6k+9=0 \Leftrightarrow k_1=k_2=3.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$.

• *Bước 2*. Vế phải của phương trình đã cho là $f(x)=e^{3x}=e^{3x}.1$ có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$ với $\alpha=3,\ P_n(x)=1,\ n=0$. Ta có, vì $\alpha=3$ là một nghiệm kép của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình đầu dưới dạng

$$\begin{aligned} &Y = x^2e^{3x}A = Ax^2e^{3x};\\ \Rightarrow &Y' = (2Ax+3Ax^2)e^{3x};\\ \Rightarrow &Y'' = (2A+12Ax+9Ax^2)e^{3x}. \end{aligned}$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình đã cho, ta được

$$(2A+12Ax+9Ax^2)-6(2Ax+3Ax^2)+9Ax^2 = 1, \forall x$$

$$\Leftrightarrow 2A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Suy ra, nghiệm riêng của phương trình là $Y = \dfrac{x^2}{2}e^{3x}$.

• *Bước 3.* Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{x^2}{2}e^{3x}.$$

•**Ví dụ 3.16.** Giải các phương trình vi phân sau

a) $y'' + y = \cos 2x$;

b) $y'' + y = \cos x$;

c) $y'' + y = \cos 2x + \cos x$.

Lời giải.

a) • *Bước 1.* Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng là $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$.

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2$sinx.

• *Bước 2.* Vế phải của phương trình là $f(x) = \cos 2x = e^{0x}(1.\cos 2x + 0.\sin 2x)$, suy ra $\alpha = 0,\ \beta = 2$. Vì $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i2$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$\begin{aligned} &Y = A\cos 2x + B\sin 2x;\\ \Rightarrow\ &Y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;\\ \Rightarrow\ &Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x.\end{aligned}$$

Thay $Y,\ \mathrm{Y}',\ \mathrm{Y}''$ vào phương trình đã cho và rút gọn, ta thu được

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \cos 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ -3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{3} \\ B = 0. \end{cases}$$

Do đó, nghiệm riêng của phương trình là $Y = -\dfrac{1}{3}\cos 2x$.

• *Bước 3.* Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x.$$

b) • *Bước 1.* Phương trình thuần nhất tương ứng $y'' + y = 0$ có phương trình đặc trưng là $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$.

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là $\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

• *Bước 2.* Vế phải của phương trình là $f(x) = \cos x = e^{0x}(1.cosx + 0.sinx)$, có dạng $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$ với $\alpha = 0, \beta = 1, P_n(x) = 1, Q_m(x) = 0, n = 0, m = -\infty$.

Vì $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng và $\max(n, m) = 0$, nên ta tìm một nghiệm riêng của phương trình dưới dạng

$$\begin{aligned} &Y = x(A\cos x + B\sin x);\\ \Rightarrow\ &Y' = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x;\\ \Rightarrow\ &Y'' = (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x. \end{aligned}$$

Thay Y, Y', Y'' vào phương trình và rút gọn, ta thu được

$$2B\cos x - (-2A\sin x) = \cos x,\ \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 0 \\ 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Do đó, nghiệm riêng của phương trình là $Y = \dfrac{x}{2}\sin x$.

• *Bước 3.* Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x.$$

c)

+) Vế phải của phương trình là tổng của hai hàm $f_1(x) = \cos 2x$, $f_2(x) = \cos x$. Theo nguyên lý chồng chất nghiệm, tổng nghiệm riêng của phương trình trong ý (a) với một nghiệm riêng của phương trình trong ý (b) là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

+) Do đó, $Y = -\dfrac{1}{3}\cos 2x + \dfrac{x}{2}\sin x$ là một nghiệm riêng của phương trình đã cho.

+) Vậy, nghiệm tổng quát của phương trình là

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin x.$$

Bài tập chương 3

Bài 3.1. Giải các phương trình vi phân có biến số phân li sau
a) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.
b) $(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$.
c) $2x\sqrt{y^2-y+1}dx - (1+x^2)dy = 0$.
d) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0,\ \ y\big|_{x=0} = 1$.
e) $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx,\ y\big|_{x=0} = 0$.
f) $xy^2y' = x+1$.
g) $(y^2+xy^2)y' = 1$.
h) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.
i) $(1+e^x)yy' = e^x; y(0) = 1$.
Bài 3.2. Giải các phương trình vi phân đẳng cấp một sau
a) $y' = \dfrac{2xy+y^2}{x^2}$.
b) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.
c) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$.
d) $(3x^2+y^2)y + (y^2-x^2)xy' = 0$.
e) $2x^2dy = (x^2+y^2)dx$.
f) $xy' = y\left(1+\ln\dfrac{y}{x}\right)$; $y(1) = e^{-\frac{1}{2}}$.
g) $(x-y)dx + xdy = 0$.
h) $xy' = y(\ln y - \ln x)$.
i) $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$.
Bài 3.3. Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp một sau
a) $y' - \dfrac{2x-1}{x^2-x}y = 1$.
b) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
c) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.
d) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3.\ \ y\big|_{x=0} = \dfrac{1}{2}$.
e) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.
f) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 3x$.
g) $y' + 2xy = e^{-x^2}$.
h) $y' + 2xy = 2x^2e^{-x^2}$.
i) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$.
j) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2\cos x$.
Bài 3.4. Giải các phương trình vi phân Bernoulli sau đây
a) $x(1+x^2)y' - 4x^2y = 2(1+x^2)^2\sqrt{y}$.

b) $y' - 2y\cot x = \sqrt{y}\sin 4x$.
c) $y' + \mathrm{xy} = \mathrm{x}^3 y^3$.
d) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}.\sqrt{y}\ , \quad y|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$.
e) $y' - 2xy = 2x^3y^2$.
f) $x^2y^2y' + xy^3 = 1$.
g) $y' + 2xy = y^2e^{x^2}$.
h) $y' - y\cos x = y^2 cosx$.
i) $y' - \dfrac{2}{3x}y = \dfrac{x^2}{3y^2}$.
j) $xy' + y = y^2\ln x$.

Bài 3.5. Giải các phương trình vi phân toàn phần
a) $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$.
b) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$.
c) $(2x + y)e^y dx + (x^2 + xy + x)e^y dy = 0$.
d) $\left(1 + \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\right)dx + \left(1 + \dfrac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\right)dy = 0$.
e) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.
f) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$.
g) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.
h) $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$.

Bài 3.6. Giải các phương trình vi phân sau
a) $y'' + 9y = 6e^{3x}$.
b) $y'' - 3y' = 2 - 6x$.
c) $y'' - 2y' + 2y = x(e^x + 1)$.
d) $y'' - 4y = (2 - 4x)e^{2x}$.
e) $y'' - 2y' - 3y = (4x - 5)e^x$.
f) $y'' - 2y' = 3x - 4$.
g) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.
h) $y'' + y' - 6y = x^2e^{-2x}$.
i) $y'' - 3y' + 2y = (7 - 3x)e^{3x}$.
j) $y'' + 5y' = x^2 + x + 3$.

Bài 3.7. Giải các phương trình vi phân sau
a) $y'' + 4y = 3\sin 2x$.
b) $y'' + 2y' - 3y = -\sin x$.
c) $y'' + y = x\cos x$.
d) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.
e) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$.
f) $y'' + y = x\sin 2x$.
g) $y'' + y' - 2y = -3\sin x + \cos x$.
h) $y'' - 3y' = e^{2x}(\sin 3x + \cos 3x)$.
i) $y'' - 2y' + 5y = e^x(\sin 2x - \cos 2x)$.

Đáp số bài tập chương 3

Bài 3.1.
a) $\ln|xy| + x - y = C,\ C \in \mathbb{R}$, hoặc $x = 0$ hoặc $y = 0$.
b) $\dfrac{x+y}{xy} + \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| = C,\ C \in \mathbb{R}$, hoặc $y = 0$.
c) $1 + x^2 = C\left(y - \dfrac{1}{2} + \sqrt{y^2 - y + 1}\right),\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$.
d) $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{2} + 1$.
e) $y^3 = 3\arctan e^x - \dfrac{3\pi}{4}$.
f) $y = \sqrt[3]{3x + 3\ln|x| + K},\ K \in \mathbb{R}$.
g) $y = \sqrt[3]{\ln\left|(1+x)^3\right| + K},\ K \in \mathbb{R}$.
h) $x = 0$ hoặc $\ln|x| - \sqrt{y^2+1} = C,\ C \in \mathbb{R}$.
i) $y = \sqrt{1 + \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^2}$.

Bài 3.2.
a) $x(x+y) = Cy,\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$, hoặc $y = -x$ hoặc $y = 0$.
b) $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0,\ C \in \mathbb{R},\ C > 0$, hoặc $x = 0$.
c) $y = \pm x\sqrt{1 + Cx^2},\ C \in \mathbb{R}$.
d) $x(x^2+y^2) - Cy = 0,\ C \in \mathbb{R},\ C \neq 0$, hoặc $y = 0$.
e) $x = 0; y = x; x = K.e^{\frac{2x}{x-y}},\ K \in \mathbb{R},\ K \neq 0$.
f) $y = xe^{\frac{-x}{2}}$.
g) $y = x(C - \ln|x|),\ C \in \mathbb{R}$, hoặc $x = 0$.
h) $y = xe^{1+Cx},\ C \in \mathbb{R}$.
i) $y^2 = x^2(\ln x^2 - C),\ C \in \mathbb{R}$, hoặc $x = 0$.

Bài 3.3.
a) $y = \left(\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + K\right)(x^2 - x)$.
b) $y = e^{-x^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + K\right)$.
c) $y = (1+x^2)(x+K)$.
d) $y = (x+1)^2\left(\dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{1}{2}\right)$.
e) $y = (x^2+K)e^{-x^2}$.
f) $y = (1+x^2)\left[\dfrac{3}{2}\ln(1+x^2) + K\right]$.

g) $y = (x+K)e^{-x^2}$.

h) $y = e^{-x^2}\left(\dfrac{2x^3}{3} + K\right)$.

i) $y = \dfrac{K - e^{-x^2}}{2x^2}$.

j) $y = Kx^2 + x^2\sin x$.

Bài 3.4.

a) $y = (\ln|x| + K)^2(1+x^2)^2$ hoặc $y = 0$.

b) $y = (\sin 3x/3 + \sin x + K)^2 \sin^2 x$ hoặc $y = 0$.

c) $y^2(x^2 + 1 + Ke^{x^2}) = 1$ hoặc $y = 0$.

d) $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

e) $y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}$ hoặc $y = 0$.

f) $y = \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{C + \dfrac{3}{2}x^2}$.

g) $y = \dfrac{e^{-x^2}}{C - x}$ hoặc $y = 0$.

h) $y = \dfrac{1}{Ce^{-\sin x} - 1}$ hoặc $y = 0$.

i) $y^3 = x^3 + Cx^2$.

j) $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}$ hoặc $y = 0$.

Bài 3.5.

a) $\dfrac{x^2}{2} + x + xy - \dfrac{y^3}{3} + 3y = C$.

b) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$.

c) $(x^2 + xy)e^y = C$.

d) $x + y + \ln(x^2 + y^2 + 1) = C$.

e) $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

f) $x^3e^y - y = C$.

g) $x^3 + 2xy - 3y = C$.

h) $x^3y - 2x^2y^2 + 3y^4 = C$.

Bài 3.6.

a) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{3}e^{3x}$.

b) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$.

c) $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + xe^x + \dfrac{1}{2}(x+1)$.

d) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - e^{2x}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{4}\right)$.

e) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + e^x(-x + \dfrac{5}{4})$.

f) $y = C_1 + C_2e^{2x} - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{4}x$.

g) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \dfrac{x^3}{6}e^{2x}$.

h) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{3x}{8} + \dfrac{13}{32}\right)$.

i) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} - e^{3x}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{23}{4}\right)$.

j) $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + \dfrac{1}{15}x^3 + \dfrac{3}{50}x^2 + \dfrac{72}{125}x$.

Bài 3.7.

a) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{3}{4}x\cos 2x$.

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + \dfrac{1}{5}\sin x + \dfrac{1}{10}\cos x$.

c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \dfrac{1}{4}x\cos x + \dfrac{1}{4}x^2 \sin x$.

d) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$.

e) $y = e^{x}\left(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x\right) + \dfrac{e^{-x}}{41}(5\cos x - 4\sin x)$.

f) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{4}{9}\cos 2x - \dfrac{x}{3}\sin 2x$.

g) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + \sin x$.

h) $y = C_1 e^{3x} + C_2 - e^{2x}\left(\dfrac{4}{65}\sin 3x + \dfrac{7}{65}\cos 3x\right)$.

i) $y = e^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \dfrac{xe^{x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Văn Minh, Nguyễn Thị Hằng, Phạm Thu Hoài (2012), *Bài giảng giải tích*, tài liệu lưu hành nội bộ, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam.

[2] Phạm Văn Minh (chủ biên), Nguyễn Thị Hằng, Phạm Thị Thu Hoài, Nguyễn Lê Hương (2018), *Giải Tích*, NXB Hàng Hải, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam.

[3] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2021), *Toán cao cấp*, tập 3, NXB Giáo dục.

[4] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2017), *Bài tập toán cao cấp*, tập 3, NXB Giáo dục.

[5] Lê Ngọc Lăng (chủ biên), Nguyễn Chí Bảo, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Phú Trường (1997), *Ôn thi học kỳ và thi vào giai đoạn 2*, tập 1, NXB Giáo dục.

[6] Lê Ngọc Lăng (chủ biên), Nguyễn Chí Bảo, Trần Xuân Hiển, Nguyễn Phú Trường (1997), *Ôn thi học kỳ và thi vào giai đoạn 2*, tập 2, NXB Giáo dục.