TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM

KHOA CƠ SỞ - CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

TÀI LIỆU HỌC TẬP
TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐIỆN – ĐIỆN TỬ

TÊN HỌC PHẦN: **TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐIỆN – ĐIỆN TỬ**

MÃ HỌC PHẦN: **18144**

TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO: **ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**

BIÊN SOẠN: **TS. TẠ QUANG ĐÔNG**

Hải Phòng, tháng 12/2023

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. SỐ PHỨC

1.1. Khái niệm số phức

1.2. Một số phép toán về số phức

1.3. Dãy số phức và chuỗi số phức

1.4. Hàm biến phức

1.5. Tích phân của hàm biến phức liên tục theo một đường cong

1.6. Thặng dư và ứng dụng

Giới thiệu

Số phức là một trong những phát hiện lớn tạo lên bước ngoặt của Toán học. Số phức được dùng để giải quyết nhiều bài toán từ sơ cấp đến cao cấp. Cho đến ngày nay, số phức cùng các vấn đề liên quan đã phát triển mạnh mẽ thành một chuyên ngành trong toán học với tên gọi Giải tích phức.

Lịch sử hình thành và phát triển số phức gắn liền với các tên tuổi nổi tiếng trong toán học như: Bomnelli, Rene Descartes, Euler, De Moivre, Hamilton, Gauss, Cauchy,… Năm 1572, nhà toán học người Italia là Bombelli đã đưa ra định nghĩa đầu tiên về số phức. Sau một khoảng thời gian dài, ký hiệu “i” mới được Euler (1707 – 1783) sử dụng và sau đó Gauss cũng dùng lại ký hiệu này. Dạng lượng giác của số phức do Moivre đưa ra còn dạng đại số cùng với dạng mũ thì do Euler đề xuất.

Lý thuyết số phức là lý thuyết toán học có liên quan đến hầu hết các lĩnh vực trong ngành Điện – Điện tử.

Leonhard Euler sinh ngày 15/4/1707 tại Basel, Thụy Sĩ.

1.1. Khái niệm số phức

1.1.1. Dạng đại số

a) Định nghĩa

- Mỗi biểu thức có dạng $a+bi$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$, được gọi là một số phức.

Đối với số phức $z=a+bi$ thì:

Số a được gọi là phần thực của z, ký hiệu $Re(z)$.

Số b được gọi là phần ảo của z, ký hiệu $Im(z)$.

Dạng $z=a+bi$ được gọi là dạng đại số của số phức z.

Tập hợp các số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.

Ví dụ 1. Chỉ ra phần thực và phần ảo của các số phức: $1+2i$; $-\frac{1}{2}+\sqrt{2}i$; 3; $-4i$.

Lời giải

Số phức	Phần thực	Phần ảo
$1+2i$	1	2
$-\frac{1}{2}+\sqrt{2}i$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
3	3	0
$-4i$	0	-4

- Một số trường hợp đặc biệt

+ Nếu $a=0$ thì số phức $z=bi$ được gọi là số thuần ảo.

+ Nếu $a=0,\ b=1$ thì số phức $z=i$ được gọi là đơn vị ảo.

+ Nếu $b=0$ thì số phức $z=a$ trở thành số thực.

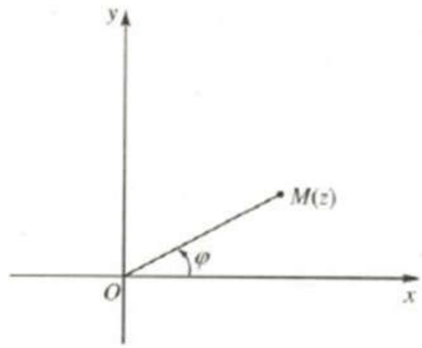
b) Điểm biểu diễn của số phức

Mỗi số phức $z=a+bi$ tương ứng với một cặp số thực (a,b) duy nhất. Khi đó, điểm $M(a,b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy được gọi là điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$.

1.1.2. Dạng lượng giác (dạng cực)

a) Acgumen của số phức khác 0

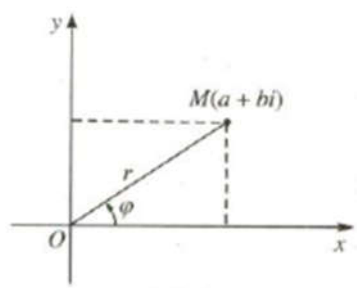
- **Định nghĩa.** Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z. Số đo (tính bằng radian) của mỗi góc lượng giác ứng với tia đầu Ox và tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.



- **Nhận xét.** Các acgumen của số phức z sai khác $k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, hay nói cách khác nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z đều có dạng $\varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Dạng lượng giác của số phức

- **Định nghĩa.** Cho số phức $z = a + bi$ $(z \neq 0)$, ký hiệu $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Khi đó, số phức z viết lại dưới dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Dạng này được gọi là dạng lượng giác của số phức z.



- **Chú ý.** Số phức $z = 0$ có $r = 0$ và φ là một số thực tùy ý. Ta viết: $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

1.1.3. Dạng mũ

- **Công thức Euler.** Với mọi số thực x ta có: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

- **Hệ quả.** Với mọi số thực x thì: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ và $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

- **Dạng mũ của số phức.** Với số phức có dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Sử dụng công thức Euler, số phức z được viết lại dưới dạng: $z = re^{i\varphi}$. Dạng này được gọi là dạng mũ của số phức z.

1.1.4. Số phức bằng nhau

- Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$. Hai số phức z_1, z_2 được gọi là bằng nhau nếu phần thực, phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau, ký hiệu: $z_1 = z_2$.

- Vậy: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$.

- Nhận xét: Hai số phức bằng nhau thì có cùng điểm biểu diễn.

1.2. Một số phép toán về số phức

1.2.1. Phép cộng và phép trừ số phức

a) Phép cộng hai số phức

- **Định nghĩa.** Tổng của hai số phức là số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ là số phức $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Vậy để cộng hai số phức, ta cộng các phần thực với nhau, cộng các phần ảo với nhau.

Ví dụ 2. Tính tổng hai số phức:

i) $z_1 = 3 + 5i$ và $z_2 = -2 + \frac{1}{2}i$.

ii) $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = -3 + 4i$.

Lời giải

i) $z_1 + z_2 = (3-2) + \left(5 + \frac{1}{2}\right)i = 1 + \frac{11}{2}i$.

ii) $z_1 + z_2 = (3-3) + (2+4)i = 6i$.

- Tính chất của phép cộng số phức

+ Tính chất kết hợp: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

+ Tính chất giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

+ Cộng với 0: $z + 0 = 0 + z = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

+ Số đối: Với mỗi số phức $z = a + bi$, ta ký hiệu $-z$ là số phức $-z = -a - bi$. Khi đó: $z + (-z) = (-z) + z = 0$. Số phức $-z$ được gọi là số đối của số phức z.

b) Phép trừ hai số phức

- **Định nghĩa.** Hiệu của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ được tính bằng tổng của z_1 và $-z_2$, hay $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Tức là: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Ví dụ 3. Tính hiệu $z_1 - z_2$ của hai số phức

i) $z_1 = 3 + 5i$ và $z_2 = -2 + \frac{1}{2}i$.

ii) $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = -3 + 4i$.

Lời giải

i) $z_1 - z_2 = (3+2) + \left(5 - \frac{1}{2}\right)i = 5 + \frac{9}{2}i$.

ii) $z_1 + z_2 = (3+3) + (2-4)i = 6 - 2i$.

1.2.2. Phép nhân số phức

a) Phép nhân số phức với dạng đại số

- Định nghĩa. Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ là số phức

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

- Nhận xét. Kết quả tích của hai số phức có được như trên bằng cách nhân "hình thức" các biểu thức của hai số phức đã cho rồi thay $i^2 = -1$.

b) Phép nhân số phức với dạng lượng giác

Tích của hai số phức $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i.\sin\varphi_2)$ là số phức

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right].$$

c) Phép nhân số phức với dạng mũ

Tích của hai số phức $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ là số phức: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.

d) Tính chất của phép nhân số phức

+ $z_1 z_2 = z_2 z_1 \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

+ $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

+ $1.z = z.1 = z \ \forall z \in \mathbb{C}$.

+ $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1.2.3. Số phức liên hợp và môđun của số phức

a) Số phức liên hợp

- Định nghĩa. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức liên hợp của số phức z, ký hiệu là $\overline{z}$, xác định bởi: $\overline{z} = a - bi$.

- Tính chất.

+ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

+ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

+ $\overline{z_1 z_2} = \left(\overline{z_1}\right)\left(\overline{z_2}\right)\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

+ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\left(\overline{z_1}\right)}{\left(\overline{z_2}\right)}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0.$

b) Môđun của số phức

- Định nghĩa. Cho số phức $z = a + bi$. Môđun của số phức z, ký hiệu là $|z|$, xác định bởi

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Tính chất

+ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

+ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_2 \neq 0.$

+ Với mọi số phức $z = a + bi$ thì: $|z|^2 = z.\overline{z} = a^2 + b^2$.

+ $|\overline{z}| = |z|\ \forall z \in \mathbb{C}.$

+ Với số phức dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ và số phức dạng mũ $z = re^{i\varphi}$ thì:

$$|z| = r.$$

1.2.4. Phép chia số phức

a) Phép chia số phức với dạng đại số

- Số nghịch đảo. Cho số phức $z = a + bi \neq 0$. Số phức nghịch đảo của số phức z, ký hiệu là z^{-1}, xác định bởi: $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

- **Phép chia số phức.** Thương $\frac{z_1}{z_2}$ của phép chia số phức z_1 cho số phức $z_2 \neq 0$ là tích của z_1 với số phức nghịc đảo của z_2, hay nói cách khác: $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$.

- **Nhận xét**

+ Với $z_2 \neq 0$ thì $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

+ Với $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i \neq 0$ thì $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}$.

b) Phép chia số phức với dạng lượng giác

Cho hai số phức dạng lượng giác: $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i.\sin\varphi_2)$.

Khi đó: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

c) Phép chia số phức với dạng mũ

Cho hai số phức dạng mũ: $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ và $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

1.2.5. Lũy thừa của một số phức

- Cho số phức dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$. Khi đó, với $n \in \mathbb{Z}^*$, ta có:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i.\sin n\varphi).$$

Công thức trên được gọi là công thức Moivre.

Trường hợp $n = 0,$ ta quy ước: $z^0 = 1$.

- **Ví dụ 4.** Cho các số phức $u = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ v = \sqrt{3} - i$. Tính u^{2023} và v^{1984}.

Lời giải

$$u^{2023} = \left(2\sqrt{2}\right)^{2023}\left(\cos\frac{2023\pi}{4} + i\sin\frac{2023\pi}{4}\right) = 2^{3034}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2^{3034} - 2^{3034}i.$$

Chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác: $v = \sqrt{3} - i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$\Rightarrow v^{1984}=2^{1984}\left[\cos\left(-\frac{1984\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{1984\pi}{6}\right)\right]=2^{1984}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-2^{1983}+2^{1983}\sqrt{3}i.$$

1.2.6. Căn bậc n của một số phức

- **Định nghĩa.** Cho số phức z. Số phức w được gọi là một căn bậc n $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ của z nếu: $w^n=z$.

- **Công thức tính** căn bậc n $(n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$ của số phức

Cho số phức $z=r\left(\cos\varphi+i.\sin\varphi\right)\neq 0$. Khi đó z có đúng n căn bậc n và được tính theo công thức: $w_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+k2\pi}{n}+i.\sin\frac{\varphi+k2\pi}{n}\right)$ với $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$.

- **Nhận xét** về điểm biểu diễn của các số phức căn bậc n của số phức $z\neq 0$ cho trước

+ Với $n=2$, hai căn bậc n của z có điểm biểu diễn nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{r}$ và đối xứng nhau qua gốc O.

+ Với $n\geq 3$, n căn bậc n của z có điểm biểu diễn nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt[n]{r}$ và tạo thành n giác đều.

- **Ví dụ 5.** Cho các số phức $u=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $v=\sqrt{3}-i$.

a) Tính các căn bậc ba của u.

b) Tính các căn bậc ba của v.

Lời giải

a) Ba căn bậc ba của u là

$$w_k=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{3}\right)\right], k\in\{0;1;2\}.$$

b) Chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác: $v=\sqrt{3}-i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Bốn căn bậc bốn của v là

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+k2\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\right)\right], k \in \{0;1;2;3\}.$$

1.2.7. Một số tập con của tập số phức

- Tập hợp các số phức được ký hiệu là $\mathbb{C}$.

- Tập hợp $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là tập số phức mở rộng.

- Tập hợp $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ $(z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0)$ được gọi là một ε - lân cận của z_0.

Mọi tập hợp con của $\mathbb{C}$ chứa một ε - lân cận của z_0 được gọi là một lân cận của z_0.

- Tập hợp $\overset{*}{U}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ $(z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0)$ được gọi là một ε - lân cận thủng của z_0.

- Tập hợp $\overset{*}{U}_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \varepsilon\}$ $(z_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0)$ được gọi là một ε - lân cận thủng của ∞.

- Tập hợp $U_\varepsilon(\infty) = \overset{*}{U}_\varepsilon(\infty) \cup \{\infty\}$ được gọi là một ε - lân cận của ∞.

Mọi tập hợp con của $\overline{\mathbb{C}}$ chứa một ε - lân cận của ∞ được gọi là một lân cận của ∞.

- Tập hợp con của $\mathbb{C}$ mà nó là lân cận của mọi điểm của nó thì được gọi là tập hợp mở trong $\mathbb{C}$.

- Tập hợp con của $\mathbb{C}$ mà phần bù của nó trong $\mathbb{C}$ là tập hợp mở thì nó được gọi là tập hợp đóng trong $\mathbb{C}$.

- Tập hợp con của $\mathbb{C}$ được chứa trong một ε - lân cận của 0 được gọi là tập hợp bị chặn.

1.3. Dãy số phức và chuỗi số phức

1.3.1. Định nghĩa dãy số phức

- Cho K là một tập con vô hạn của tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Khi đó, hàm số

$$\begin{aligned} f : K &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto z_n = f(n) \end{aligned}$$

được gọi là một dãy số phức.

- Dãy số phức này được ký hiệu là $\left(z_n\right)_{n\in K}$. Nếu không có chú thích gì đặc biệt kèm theo, ta xem $K=\mathbb{N}^*$ và dãy số phức khi đó được ký hiệu đơn giản là $\left(z_n\right)$.

1.3.2. Giới hạn của dãy số phức

a) Giới hạn hữu hạn của dãy số phức

- Định nghĩa. Dãy số phức $\left(z_n\right)$ được gọi là có giới hạn là $a\in\mathbb{C}$ nếu:

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ sao cho với $\forall n>n_0$ thì luôn có: $\left|z_n-a\right|<\varepsilon$.

Khi đó ta cũng nói $\left(z_n\right)$ là dãy số phức hội tụ. Ký hiệu: $\lim z_n=a$ hoặc $z_n\to a$.

+ Dãy số phức $\left(z_n\right)$ không hội tụ thì được gọi là dãy số phức phân kỳ.

- Nhận xét

+ Từ định nghĩa, ta cũng suy ra rằng: $\lim z_n=0\Leftrightarrow\lim\left|z_n\right|=0.$

+ Tất cả các tính chất quen thuộc về dãy hội tụ đối với dãy số thực đã biết trước đây vẫn còn đúng đối với dãy số phức hội tụ, ngoại trừ các tính chất liên quan đến thứ tự vì tập số phức không có quan hệ thứ tự.

- Chú ý (chuyển từ giới hạn dãy số phức sang giới hạn dãy số thực và ngược lại).

+ Nếu dãy số phức $\left(z_n\right)$ có biểu diễn theo các dãy số thực của phần thực và phần ảo trong dạng đại số: $z_n=x_n+i.y_n$ thì ta có: $\lim z_n=x+i.y\Leftrightarrow\begin{cases}\lim x_n=x\\ \lim y_n=y\end{cases}$.

+ Tương tự: Nếu $z_n=r_n\left(\cos\varphi_n+i.\sin\varphi_n\right)$ thì: $\lim z_n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim r_n=r\\ \lim\varphi_n=\varphi\end{cases}$.

b) Giới hạn vô cực của dãy số phức

- Dãy số phức $\left(z_n\right)$ được gọi là có giới hạn vô cực nếu

$\forall A>0,\exists n_0=n_0(A)\in\mathbb{N}^*$ sao cho với $\forall n>n_0$ thì luôn có: $\left|z_n\right|>A$.

Ký hiệu: $\lim z_n=\infty$ hoặc $z_n\to\infty$.

- Nhận xét. i) $\lim z_n=\infty\Leftrightarrow\lim\left|z_n\right|=+\infty$.

ii) Nếu $\lim z_n=\infty$ và $w_n=\dfrac{1}{z_n}$ có nghĩa với n đủ lớn thì: $\lim w_n=0.$

1.3.3. Định nghĩa chuỗi số phức

- Cho dãy số phức (z_n). Tổng (hình thức) $z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$ được gọi là một chuỗi số phức với số hạng tổng quát là z_n, ký hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Vậy: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$ (1).

- Trong chuỗi số phức (1), ta lập dãy số phức (S_n) với $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n$ (tổng n số hạng đầu tiên), dãy này được gọi là dãy tổng riêng của chuỗi (1).

1.3.4. Sự hội tụ chuỗi số phức

- Định nghĩa

+ Chuỗi số phức $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ được gọi là hội tụ nếu dãy tổng riêng (S_n) của nó hội tụ.

Nếu $\lim S_n = S$ thì giá trị S được gọi là tổng của chuỗi (1) và ta viết: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.

+ Chuỗi số phức $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ được gọi là phân kỳ nếu dãy tổng riêng (S_n) của nó phân kỳ.

+ Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ hội tụ thì ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ hội tụ tuyệt đối.

- Một số kết quả

+ Định lý 1 (điều kiện cần của chuỗi số phức hội tụ). Nếu chuỗi (1) hội tụ thì $\lim |z_n| = 0$.

+ Định lý 2. Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì cũng hội tụ và $\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

1.3.5. Chuỗi lũy thừa của biến phức và một số hàm số phức sơ cấp

a) Định nghĩa

- Cho dãy số phức (a_n) và số phức z_0 cho trước. Chuỗi số phức có dạng $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (2), với biến phức z nhận giá trị tùy ý, được gọi là chuỗi lũy thừa của biến phức z.

Nhận xét. Với mỗi giá trị phức của biến z thì chuỗi (2) trở thành một chuỗi số.

- Tập các giá trị của biến z làm cho chuỗi (2) hội tụ được gọi là tập hội tụ của chuỗi (2).

Ví dụ 6

+ Tập hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ là tập $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right\}$.

+ Tập hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ là tập số phức $\mathbb{C}$.

b) Bán kính hội tụ và công thức tính bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

- Định lý. Đối với chuỗi lũy thừa (2) chỉ có thể xảy ra một trong các trường hợp sau

i. Tồn tại một số r $(0 < r < +\infty)$ sao cho chuỗi (2) hội tụ tuyệt đối với mọi z thuộc r - lân cận của z_0 và phân kỳ với mọi z thuộc r - lân cận thủng của ∞.

ii. Miền hội tụ của chuỗi (2) gồm duy nhất một điểm z_0.

iii. Miền hội tụ của chuỗi (2) là tập số phức $\mathbb{C}$.

- Số r trong trường hợp i trong định lý trên được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa (2). Trong trường hợp ii ta quy ước $r = 0,$ còn trong trường hợp iii ta quy ước $r = +\infty.$

- Tập hợp $U_r\left(z_0\right) = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - z_0\right| < r\right\}$ được gọi là hình tròn hội tụ của chuỗi (2).

- Định lý. Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$. Nếu tồn tại một trong hai giới hạn sau

i. $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$

ii. $\lim \left|\sqrt[n]{\left|a_n\right|}\right| = \rho,$

thì bán kính hội tụ r của chuỗi lũy thừa trên được tính theo công thức

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \quad khi\ 0 < \rho < +\infty \\ 0 \quad khi\ \rho = +\infty \\ +\infty\ khi\ \rho = 0 \end{cases}.$$

c) Một số hàm số phức sơ cấp

- *Hàm* $y = e^z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$. Chuỗi này có bán kính hội tụ là $r = +\infty$. Tổng của chuỗi này được ký hiệu là e^z, tức là: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = e^z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$.

- *Hàm* $y = \sin z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Chuỗi này có bán kính hội tụ là $r = +\infty$. Tổng của chuỗi này được ký hiệu là $\sin z$, tức là: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$.

- *Hàm* $y = \cos z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} z^{2n}}{(2n)!}$. Chuỗi này có bán kính hội tụ là $r = +\infty$. Tổng của chuỗi này được ký hiệu là $\cos z$, tức là: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n} z^{2n}}{(2n)!} = \cos z \ \left(z \in \mathbb{C}\right)$.

- *Hàm* $y = \dfrac{1}{1-z} \ \left(z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right)$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Chuỗi này có bán kính hội tụ là $r = 1$ và tổng của chuỗi này là $\dfrac{1}{1-z}$, tức là: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z} \ \left(z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right)$.

- *Hàm* $y = \ln\left(1+z\right) \ \left(z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right)$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{n}}{n}$. Chuỗi này có bán kính hội tụ là $r = 1$. Tổng của chuỗi này được ký hiệu là $\ln\left(1+z\right)$, tức là: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{n}}{n} = \ln\left(1+z\right) \ \left(z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right)$.

1.4. Hàm biến phức

1.4.1. Định nghĩa hàm biến phức

- Định nghĩa. Cho tập hợp $D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Một hàm biến phức với tập xác định D là một ánh xạ

$$\begin{aligned} f: D &\to \overline{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto w = f(z) \end{aligned}$$

Ta ký hiệu: $w = f(z),\ z \in D$.

- Ví dụ 7. Các hàm cho dưới đây là các hàm biến phức với tập xác định D tương ứng

+ $w = z^2 + iz - 2$ với tập xác định $D = \mathbb{C}$.

+ $w = \dfrac{2z-i}{z-1}$ với tập xác định $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

+ $w = \begin{cases} \dfrac{2z-i}{z-1} & khi\ z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \\ 2 & khi\ z = \infty \\ \infty & khi\ z = 1 \end{cases}$ với tập xác định $D = \overline{\mathbb{C}}$.

- Nhận xét. Nếu đặt $z = x + iy$ và $u = \operatorname{Re} f(z),\ v = \operatorname{Im} f(z)$. Khi đó việc xác định một hàm biến phức $w = f(z)$ với $z \in D \subset C$ tương đương với việc xác định hai hàm hai biến

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D.$$

1.4.2. Sự liên tục của hàm biến phức

- Cho tập hợp $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, điểm $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là một điểm giới hạn của D nếu trong ε - lân cận thủng tùy ý của z_0 chứa ít nhất một điểm của D. Tập con của $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ mà chứa mọi điểm giới hạn của nó thì được gọi là tập đóng trong $\overline{\mathbb{C}}$.

- Cho hàm biến phức $w = f(z)$ xác định trên D và z_0 là một điểm giới hạn của D. Ta nói hàm $w = f(z)$ có giới hạn bằng $a \in \overline{\mathbb{C}}$ khi z dần đến z_0 theo tập D nếu với mọi dãy số phức z_n thỏa mãn $\begin{cases} z_n \in D \cap \overset{*}{U}_{\varepsilon}(z_0) \\ z_n \to z_0 \end{cases}$ thì ta luôn có $\lim z_n = a$. Ký hiệu: $\lim\limits_{z \xrightarrow[D]{} z_0} f(z) = a$.

- Chú ý. Nếu D chứa một lân cận thủng của z_0 và hàm phức $w = f(z)$ thỏa mãn định nghĩa trên thì ta sẽ nói đơn giản là hàm $w = f(z)$ có giới hạn a khi z dần đến z_0 và ký hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$.

- Cho $z_0 \in D$ và z_0 cũng là một điểm giới hạn của D. Khi đó ta nói hàm $w = f(z)$ liên tục tại z_0 nếu: $\lim\limits_{z \xrightarrow[D]{} z_0} f(z) = f(z_0)$.

- Nếu $f(z_0) \in \mathbb{C}$ và $f(z)$ liên tục tại $z = z_0$ thì ta sẽ nói hàm $w = f(z)$ liên tục tại z_0 theo nghĩa $\mathbb{C}$.

- Nếu mọi điểm thuộc D đều là điểm giới hạn của D và hàm $w = f(z)$ liên tục tại mọi điểm của D thì ta nói $w = f(z)$ liên tục trên D.

- Tính chất

+ Nếu $w = f(z)$ liên tục theo nghĩa $\mathbb{C}$ trên tập đóng $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ thì $w = f(z)$ bị chặn trên D, nghĩa là tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(z)| \le M \ \forall z \in D.$

+ Tổng của mọi chuỗi lũy thừa là một hàm liên tục trên hình tròn hội tụ của chúng.

1.4.3. Hàm giải tích phức

- Đạo hàm của hàm biến phức tại một điểm. Cho hàm $w = f(z)$ xác định trong lân cận của điểm $z_0 \in \mathbb{C}$ và $f(z_0) \in \mathbb{C}$, ta nói hàm $w = f(z)$ khả vi theo nghĩa phức tại nếu tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$. Giá trị của giới hạn này được ký hiệu là $f'(z_0)$ và được gọi là giá trị đạo hàm của hàm $w = f(z)$ tại điểm z_0.

- Hàm giải tích tại một điểm. Nếu hàm $w = f(z)$ khả vi theo nghĩa phức tại mọi điểm thuộc một lân cận nào đó của z_0 thì ta nói hàm $w = f(z)$ giải tích tại z_0.

- Hàm giải tích tại vô cực. Ta nói hàm $w = f(z)$ giải tích tại vô cực nếu nó được xác định tại một lân cận V nào đó của vô cực, giá trị $f(\infty) \in \mathbb{C}$ và hàm số

$$g(z) = \begin{cases} f\left(\dfrac{1}{z}\right) \ khi \ z \in V \setminus \{0; \infty\} \\ f(\infty) \ khi \ z = 0 \end{cases}$$ giải tích tại $z = 0$.

- Nhận xét. Do định nghĩa đạo hàm của hàm biến phức giống hệt như trong giải tích thực nên các quy tắc hình thức về đạo hàm và các công thức đạo hàm đối với hàm biến phức giống như các quy tắc đã biết trong giải tích thực.

- Ví dụ 8

$f(z)$	$f'(z)$
e^z	e^z
$\sin z$	$\cos z$
$\cos z$	$-\sin z$
$\ln(1+z)$	$\dfrac{1}{1+z}$
$z^n \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	nz^{n-1}

- Nếu D là một tập mở trong $\mathbb{C}$, ta nói $f(z)$ giải tích trên D nếu $f(z)$ giải tích tại mọi điểm trên D. Từ đây trở đi, khi nói đến các tập mở thì ta luôn hiểu là tập mở trong $\mathbb{C}$.

- Cho D là tập mở chứa lân cận thủng của vô cực, ta nói $f(z)$ giải tích trên tập $D \cup \{\infty\}$ nếu $f(z)$ giải tích trên D và $f(z)$ giải tích tại vô cực.

- Định nghĩa hàm đạo hàm

+ Nếu $f(z)$ giải tích trên tập mở D thì hàm $f'(z)$ $(z \in D)$ được gọi là hàm đạo hàm của $f(z)$ trên D.

+ Hàm đạo hàm của $f'(z)$ được gọi là đạo hàm cấp hai của $f(z)$ và được ký hiệu $f''(z)$.

+ Hàm đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ của $f(z)$ được gọi là đạo hàm cấp n của $f(z)$ và được ký hiệu $f^{(n)}(z)$ $\left(n \in \mathbb{N}, n \geq 4\right)$.

- Định lý

+ Đạo hàm của hàm giải tích trên tập mở D thì cũng là một hàm giải tích trên tập D.

+ Hàm giải tích trên tập mở D thì có đạo hàm mọi cấp trên D và các đạo hàm này đều là hàm giải tích trên D.

- Định lý (về tổng của chuỗi lũy thừa). Tổng của chuỗi lũy thừa là một hàm giải tích trên hình tròn hội tụ của nó. Hơn nữa, trên hình tròn hội tụ, đạo hàm tổng của chuỗi lũy thừa bằng tổng các đạo hàm các số hạng của chuỗi đó.

Tức là: Nếu $s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ thì $s'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$.

- Định lý (về chuỗi Taylor ở lân cận một điểm). Cho D là một tập mở và điểm $z_0\in D$. Khi đó nếu hàm $f(z)$ giải tích trên D thì $f(z)$ khai triển được thành chuỗi lũy thừa của $(z-z_0)$ trong mọi $r-$lân cận của nếu $r-$lân cận này nằm trong D.

Tức là có biểu biễn: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ (1), trong đó $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Chuỗi (1) được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$ ở lân cận z_0.

1.5. Tích phân của hàm biến phức liên tục theo một đường cong

1.5.1. Một số định nghĩa liên quan đến đường cong

- Định nghĩa về tuyến

+ Xét hàm số $z(t):[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ có tính chất: Nếu bất kỳ dãy số thực $(t_n)\subset[\alpha,\beta]$ thỏa mãn $\lim t_n=t_0\in[\alpha,\beta]$ thì đều có $\lim z(t_n)=z(t_0)$. Khi đó hàm số $z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ được gọi là một tuyến trong $\mathbb{C}$. Nói cách khác: Một tuyến trong $\mathbb{C}$ chính là một ánh xạ liên tục từ $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ vào tập số phức $\mathbb{C}$. Các điểm $a=z(\alpha),b=z(\beta)$ được gọi là các điểm mút của tuyến, trong đó a được gọi là điểm đầu, b được gọi là điểm cuối của tuyến.

+ Chú ý. Một tuyến trong $\overline{\mathbb{C}}$ được định nghĩa tương tự.

- Định nghĩa về ảnh và đường cong

+ Tập hợp $L=\{z=z(t),t\in[\alpha,\beta]\}\subset\mathbb{C}$ được gọi là ảnh của tuyến $z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$.

+ Bộ đôi ảnh và tuyến được định nghĩa như trên được gọi là một đường cong trong $\mathbb{C}$ với phương trình $z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$. Chiều chuyển động của $z=z(t)$ khi t tăng từ α đến β trên L được gọi là chiều dương của đường cong. Nếu không có gì đặc biệt thì ta sẽ gọi tắt là "đường cong L" thay cho bộ đôi tuyến và ảnh.

+ Chú ý. Ảnh và đường cong trong $\overline{\mathbb{C}}$ được định nghĩa tương tự.

- Định nghĩa về tuyến trơn và trơn từng khúc

+ Đặt $z(t)=x(t)+i.y(t)$. Tuyến $z=z(t),\ t\in[\alpha,\beta]$ được gọi là tuyến trơn nếu các hàm $x(t),y(t)$ có đạo hàm liên tục với mọi $t\in[\alpha,\beta]$ và $|x'(t)+i.y'(t)|>0\ \forall t\in[\alpha,\beta]$ (tại các điểm mút, đạo hàm được thay bằng đạo hàm một phía).

+ Tuyến $z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$ được gọi là tuyến trơn từng khúc tồn tại các điểm $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_n = \beta$ sao cho mỗi tuyến $z = z(t),\ t \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]\ (k = 1, 2, ..., n)$ là trơn.

- Định nghĩa về đường cong trơn, trơn từng khúc, đường cong đóng

+ Đường cong được gọi là trơn nếu nó có phương trình là một tuyến trơn.

+ Đường cong được gọi là trơn từng khúc nếu nó có phương trình là một tuyến trơn từng khúc.

+ Đường cong $\{L, z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ được gọi là đường cong đóng nếu $z(\alpha) = z(\beta)$.

+ Đường cong $\{L, z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ được gọi là đường cong Jordan nếu ánh xạ xác định ở tuyến của đường cong là một đơn ánh. Nếu không nói gì thêm thì khi nói đến đường cong L, ta hiểu đường cong L là đường cong Jordan.

1.5.2. Tích phân của hàm biến phức theo một đường cong phẳng

- Định nghĩa. Cho $\alpha, \beta\ (\alpha \le \beta)$ là hai số thực hữu hạn và $\{L, z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}$ là đường cong trơn từng khúc. Hàm $f(z)$ là hàm biến phức liên tục trên L và nhận giá trị trong $\mathbb{C}$.

Giả sử phương trình đường cong L có biểu diễn: $z(t) = x(t) + i.y(t)$ và hàm biến phức $f(z)$ có dạng: $f(z) = u(z) + i.v(z)$.

Tích phân của $f(z)$ theo đường cong L, được ký hiệu bởi $\int\limits_L f(z)dz$, nếu tồn tại thì nó là một số phức xác định bởi việc nhân hình thức như sau

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta \left[u\left(x(t) + i.y(t)\right) + i.v\left(x(t) + i.y(t)\right)\right]\left(x'(t) + i.y'(t)\right)dt$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[u\left(x(t) + iy(t)\right)x'(t) - v\left(x(t) + iy(t)\right)y'(t)\right]dt + i\int\limits_\alpha^\beta \left[u\left(x(t) + iy(t)\right)y'(t) + v\left(x(t) + iy(t)\right)x'(t)\right]dt.$$

Nếu một trong các tích phân thực trên mà không tồn tại thì ta quy ước $\int\limits_L f(z)dz$ không tồn tại. Ngược lại, nó biểu diễn một số phức.

- Nhận xét. Tích phân $\int\limits_L f(z)dz$ được định nghĩa như trên thì có các tính chất giống tích phân đường loại 2 trong mặt phẳng.

1.5.3. Công thức Newton – Leibnitz

- Định nghĩa về nguyên hàm của hàm giải tích

Cho miền D trong $\mathbb{C}$ và $f(z)$ là hàm giải tích trên D. Hàm $F(z)$ giải tích trên D được gọi là một nguyên hàm của $f(z)$ trên D nếu $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$.

- Nhận xét. Mọi hàm giải tích trên miền đơn liên D đều có nguyên hàm trên D. Hơn nữa, hai nguyên hàm bất kỳ của cùng một hàm giải tích thì chỉ sai khác nhau một hằng số.

- Công thức Newton – Leibnitz. Nếu L là một đường cong trơn từng khúc nằm trong miền D và $f(z)$ có một nguyên hàm là $F(z)$ trên D thì

$\int\limits_L f(z)dz = F(z)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ với a, b lần lượt là điểm đầu và điểm cuối của L.

Công thức trên được gọi là ***công thức Newton – Leibnitz***.

1.5.4. Định lý Cauchy và công thức tích phân Cauchy

Chúng ta công nhận hai định lý sau đây

a) Định lý Cauchy

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trên miền D và L là một đường cong đóng, trơn từng khúc, nằm trọn trong D sao cho L không bao quanh một điểm z nào mà tại đó tính giải tích của $f(z)$ bị vi phạm, thì: $\int\limits_L f(z)dz = 0$.

b) Công thức tích phân Cauchy

- Nếu $f(z)$ giải tích trên miền đơn liên D và L là một đường cong đóng Jordan trơn từng khúc nằm trọn trong D. Chiều dương trên L là chiều dương quy ước với miền D' được giới hạn bởi L. Khi đó với mọi điểm $a \in D'$ thì: $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)dz}{z-a}$.

Công thức trên được gọi là công thức tích phân Cauchy.

- Ví dụ 9. Cho L là đường cong đóng Jordan trơn từng khúc, chiều dương trên L là chiều dương quy ước với miền D được giới hạn bởi L. Khi đó, tính tích phân: $I = \int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}$, với

i) $\pm 3i$ nằm bên ngoài D.

ii) $3i$ nằm bên trong D, $-3i$ nằm bên ngoài D.

iii) $-3i$ nằm bên trong D, $3i$ nằm bên ngoài D.

iv) Cả $\pm 3i$ đều nằm bên trong D.

Lời giải

i) $I=\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=0$ theo định lý Cauchy.

ii) $I=\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=\int\limits_L \frac{\left(\frac{1}{z+3i}\right)}{z-3i}dz$.

Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho hàm $f(z)=\frac{1}{z+3i}$, ta có

$$f(3i)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-3i}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}\Rightarrow I=\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=2\pi i.f(3i)=2\pi i.\frac{1}{6i}=\frac{\pi}{3}.$$

iii) $I=\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=\int\limits_L \frac{\left(\frac{1}{z-3i}\right)}{z+3i}dz$.

Áp dụng công thức tích phân Cauchy cho hàm $f(z)=\frac{1}{z-3i}$, ta có

$$f(-3i)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z+3i}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}\Rightarrow I=\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=2\pi i.f(-3i)=2\pi i.\frac{1}{-6i}=-\frac{\pi}{3}.$$

iv) Xét đường tròn C_1 bao quanh điểm $3i$ và đường tròn C_2 bao quanh điểm $-3i$ với bán kính đủ bé để hai đường tròn này nằm bên trong đường cong L, chiều dương trên C_1 và C_2 đều là chiều xuôi kim đồng hồ. Đặt $K=C_1\cup C_2\cup L$, khi đó chiều trên K là chiều dương.

Áp dụng định lý Cauchy, ta có

$$\int\limits_K \frac{dz}{z^2+9}=0\Leftrightarrow \int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}+\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z^2+9}+\int\limits_{C_2} \frac{dz}{z^2+9}=0\Leftrightarrow \int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}+J_1+J_2=0.$$

Theo ii) và iii) thì: $J_1=-\frac{\pi}{3}$; $J_2=\frac{\pi}{3}$. Do đó

$$\int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}+J_1+J_2=0\Leftrightarrow \int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=0\Leftrightarrow \int\limits_L \frac{dz}{z^2+9}=0.$$

- **Ví dụ 10.** Tính tích phân $I = \int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} \left(a \in \mathbb{R}, a > 1\right)$.

Lời giải

Xét đường cong $L : |z-a| = a$. Khi đó, bên trong L chỉ có duy nhất điểm $z = 1$.

Ta phân tích: $I = \int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} = \int\limits_{|z-a|=a} \frac{\overline{\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}}}{z-1} dz$.

Áp dụng công thức tích phân Cauchy với hàm $f\left(z\right) = \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}$ ta có

$$f\left(1\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=a} \frac{f\left(z\right)}{z-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=a} \frac{\overline{\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}}}{z-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz.$$

Do đó: $I = \int\limits_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1} = 2\pi i . f\left(1\right) = 2\pi i . \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$.

1.6. Thặng dư và ứng dụng

1.6.1. Điểm bất thường cô lập của hàm giải tích

a) Định nghĩa điểm bất thường cô lập

Điểm $a \in \overline{\mathbb{C}}$ được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm biến phức $f\left(z\right)$ nếu $f\left(z\right)$ không giải tích tại a nhưng $f\left(z\right)$ giải tích trong một lân cận thủng của a.

b) Phân loại điểm bất thường cô lập

Tùy thuộc vào dáng điệu của $f\left(z\right)$ khi z dần tới điểm bất thường cô lập $z = a$ mà ta chia các điểm bất thường cô lập làm ba loại

i) Điểm khử được. Điểm bất thường cô lập $z = a$ được gọi là điểm khử được nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{z \to a} f\left(z\right) = b \in \mathbb{C}$.

ii) Cực điểm. Điểm bất thường cô lập $z = a$ được gọi là cực điểm nếu $\lim\limits_{z \to a} f\left(z\right) = \infty$.

iii) Điểm bất thường cốt yếu. Điểm bất thường cô lập $z = a$ nếu không phải là điểm khử được hay cực điểm thì được gọi là điểm bất thường cốt yếu.

Ví dụ 11

+ Hàm $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ nhận $z=0$ làm điểm bất thường cô lập. Hơn nữa, do $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$ nên $z=0$ là điểm khử được.

+ Hàm $f(z)=\dfrac{z^2+4}{z-i}$ nhận $z=i$ làm điểm bất thường cô lập. Hơn nữa, do $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z^2+4}{z-i}=\infty$ nên $z=i$ là cực điểm.

+ Hàm $f(z)=e^{\frac{1}{z-2023}}$ nhận $z=2023$ làm điểm bất thường cô lập. Mặt khác, do $\lim\limits_{z\to 2023} e^{\frac{1}{z-2023}}$ nên $z=2023$ là điểm bất thường cốt yếu.

1.6.2. Không điểm của hàm giải tích

- Cho hàm $f(z)$ giải tích trên miền D. Điểm $z=z_0\in D$ được gọi là không điểm của hàm $f(z)$ nếu $f(z_0)=0$.

- **Ví dụ 12.** Hàm $f(z)=\dfrac{(z^2+4)(z-1)}{z-2}$ có các không điểm là: $z=1, z=\pm 2i$, có một cực điểm là $z=2$.

- **Nhận xét.** Không điểm của hàm giải tích $f(z)$ khác hàm đồng nhất bằng 0 ở tính cô lập, tức là nếu $z=z_0$ là không điểm của hàm $f(z)$ thì tồn tại một lân cận thủng của $z=z_0$ mà $f(z)\neq 0$ với mọi z trong lân cận thủng đó. Trong khi hàm đồng nhất bằng 0 thì không có tính chất này. Điều này được thể hiện mạnh hơn ở định lý sau đây.

- **Định lý.** Nếu $z=z_0$ là không điểm của hàm $f(z)$ thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $f(z)=(z-z_0)^n g(z)$ với $g(z)$ là hàm giải tích trong một lân cận nào đó của $z=z_0$ và $g(z)\neq 0$ trong lân cận đó.

Chứng minh

Vì hàm $f(z)$ giải tích ở lân cận điểm $z=z_0$ nên $f(z)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận $z=z_0$: $f(z)=f(z_0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)(z-z_0)^n}{n!}$.

Do hàm $f(z)$ không là hàm đồng nhất bằng 0 nên tồn tại số nguyên dương n bé nhất sao cho $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Từ đó ta có: $f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{k-n}}{k!}$.

Đặt $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{k-n}}{k!} \Rightarrow g(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^{k-n}}{k!}$.

Rõ ràng hàm $g(z)$ làm hàm giải tích vì là tổng của một chuỗi lũy thừa ở lân cận của điểm $z = z_0$, đồng thời $\lim_{z \to z_0} g(z) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = g(z_0) \neq 0$. Vậy khi z đủ gần z_0 ta có $g(z) \neq 0$, từ đó dẫn đến $f(z) = (z - z_0)^n g(z) \neq 0$. Từ đó suy ra: $f(z) \neq 0$ trong một lân cận thủng nào đó của z_0.

- Định nghĩa

+ Số n nói trong định lý ở trên được gọi là số bội (hay cấp) của không điểm z_0 của hàm $f(z)$.

+ Ta nói z_0 là một cực điểm cấp n của hàm $f(z)$ nếu $f(z)$ biểu diễn được dưới dạng $f(z) = \frac{1}{g(z)}$, trong đó z_0 là không điểm cấp n của hàm $g(z)$.

Nếu $n = 1$, ta nói z_0 là cực điểm đơn của $f(z)$.

- Ví dụ 13

+ Hàm $f(z) = \frac{z - 2}{(z - i)^3 (z + 1)}$ nhận $z = -1$ làm cực điểm đơn, $z = i$ làm cực điểm cấp 3.

+ Hàm $f(z) = \frac{i}{\sin z}$ nhận $z = 0$ làm cực điểm đơn.

1.6.3. Thặng dư

a) Định nghĩa

- Thặng dư tại điểm bất thường cô lập hữu hạn

Cho $z = a \in \mathbb{C}$ là điểm bất thường cô lập của hàm biến phức $f(z)$, giải tích trong $\varepsilon-$ lân cận thủng V của $z = a$. Ta xét C_r là đường tròn tâm a, bán kính r đủ nhỏ sao cho C_r nằm trọn trong lân cận thủng V, chiều dương trên C_r là chiều ngược kim đồng hồ. Khi đó, giá trị biểu thức $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} f(z)dz$ được gọi là thặng dư của $f(z)$ tại $z=a$ và được ký hiệu là $\underset{a}{res} f(z)$. Như vậy: $\underset{a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} f(z)dz$.

- Thặng dư tại vô cực

Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong lân cận thủng của vô cực. Ta xét C_r^- là đường tròn tâm tại $z=0$ và có bán kính r đủ lớn sao cho C_r^- được chứa trọn trong lân cận thủng của vô cực (mà tại đó hàm $f(z)$ giải tích), chiều dương trên C_r^- là chiều thuận kim đồng hồ. Khi đó giá trị biểu thức $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r^-} f(z)dz$ được gọi là thặng dư của $f(z)$ tại vô cực và được ký hiệu $\underset{\infty}{res} f(z)$. Như vậy: $\underset{\infty}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r^-} f(z)dz$.

b) Định lý

Giả sử $f(z)$ là hàm giải tích trong miền đơn liên *D* trừ ra một số điểm bất thường cô lập của $f(z)$, *L* là đường cong đóng Jordan nằm trọn trong *D* và không đi qua bất cứ điểm bất thường cô lập nào của $f(z)$. Đường cong *L* giới hạn miền D', chiều dương trên *L* là chiều dương quy ước với miền D', trong D' chỉ có một số hữu hạn điểm bất thường cô lập của $f(z)$ là: $a_1, a_2, ..., a_n$. Khi đó: $\int\limits_L f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{a_k}{res} f(z)$.

Ý nghĩa của định lý này thể hiện ở chỗ: Ta có thể quy việc tính tích phân của hàm biến phức $f(z)$ theo đường cong *L* về việc tính các thặng dư của $f(z)$ tại các điểm bất thường cô lập của nó.

1.6.4. Chuỗi Laurent

- Định lý (công nhận, không chứng minh)

Hàm $f(z)$ giải tích trong vành trong mở $G = \{0 \le r < |z-a| < R\}$ thì biểu diễn được trong vành tròn này như là tổng của chuỗi hội tụ: $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n$ (1), trong đó các hệ số c_n được tính theo công thức: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ ($n \in \mathbb{Z}$) (2).

($r < \rho < R$, chiều dương trên đường tròn $|z-a| = \rho$ là chiều ngược chiều kim đồng hồ)

Nhận xét. Giá trị của c_n không phụ thuộc vào ρ bất kỳ thỏa mãn $r < \rho < R$.

- Định nghĩa

Chuỗi (1) được gọi là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ trong vành tròn mở G.

Trong đó:

+ $f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (z-a)^n$ được gọi là phần chính của chuỗi.

+ $f_+(z) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} c_n (z-a)^n$ được gọi là phần đều của chuỗi.

- Tính chất

+ Nếu $z = a \in \mathbb{C}$ là điểm bất thường cô lập của $f(z)$ thì: $\underset{a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz = c_{-1}$.

+ Nếu điểm bất thường cô lập a của $f(z)$ là điểm khử được thì: $\underset{a}{res} f(z) = 0$.

+ Nếu a là cực điểm cấp n của $f(z)$ khi và chỉ khi chuỗi Laurent của $f(z)$ có dạng

$$\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-a)^k, \; c_{-n} \neq 0.$$

+ Nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ thì: $\underset{a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz = c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$.

+ Đặc biệt, nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ và $f(z)$ có biểu diễn dạng $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, trong đó $g(z), h(z)$ đều giải tích tại a, $h(z)$ nhận a là không điểm cấp 1. Khi đó

$$\underset{a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz = c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{\lim\limits_{z \to a} g(z)}{\lim\limits_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z-a}} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

+ Nếu a là cực điểm cấp n của $f(z)$ thì

$$\underset{a}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(z)\,dz = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\left[(z-a)^n f(z)\right]^{(n-1)}.$$

- Định nghĩa. Giả sử vô cực là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$. Chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận thủng của vô cực được thiết lập như sau

+ Thực hiện phép đổi biến $z = \frac{1}{w}$.

+ Khai triển hàm $f\left(\frac{1}{w}\right)$ thành chuỗi Laurent trong lân cận thủng của điểm $w = 0$.

+ Thực hiện phép đổi biến $w = \frac{1}{z}$.

- Tính chất

+ Giả sử $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n.z^n$ là chuỗi Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận thủng của vô cực. Khi đó: $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1}$.

+ Thặng dư của hàm $f(z)$ có thể khác 0 ngay cả khi vô cực là điểm bất thường cô lập khử được của $f(z)$. Điều này khác với trường hợp điểm bất thường cô lập khử được của hàm $f(z)$ là hữu hạn.

Ví dụ 14. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ nhận $z = \infty$ làm điểm bất thường khử được nhưng $\underset{\infty}{res}\, f(z) = -1$.

+ Nếu $f(z)$ là hàm giải tích trên $\mathbb{C}$ trừ ra một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ thì: $\underset{\infty}{res}\, f(z) + \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}\, f(z) = 0.$

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1. Thực hiện phép tính, chỉ rõ phần thực và phần ảo của kết quả

a) $A=(3-2i)(1+3i)^2$.

b) $B=\dfrac{(3+4i)(2-i)}{2+3i}$.

Bài 2. Cho hai số phức $z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ và $z_2=\dfrac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

a) Biểu diễn hai số phức trên dưới dạng đại số, dạng lượng giác và dạng mũ.

b) Đặt $a=\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}$, $b=a.z_1$, $c=a.(z_2)^2$. Chứng minh rằng: a,b,c là ba nghiệm của phương trình $z^3-z_1=0$.

Bài 3. Cho ba số phức $z_1=\sqrt{6}-i\sqrt{2},\ z_2=-2-2i,\ z_3=\dfrac{z_1}{z_2}.$

a) Viết z_1,z_2,z_3 dưới dạng lượng giác.

b) Từ đó hãy tính $\cos\dfrac{7\pi}{12},\ \sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Bài 4. Thực hiện phép tính

a) $A=(1-i)^4\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

b) $B=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).i^5.\left(1+i\sqrt{3}\right)^7$.

c) $C=\dfrac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$.

d) $D=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

e) $E=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

Bài 5. Tính các căn bậc ba của số phức

a) $z=3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

b) $z=\sqrt{3}-i$.

Bài 6. Cho số phức $z=-\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Tìm các giá trị nguyên dương n để

a) z^n là số thực.

b) z^n là số ảo.

Bài 7. Chứng minh rằng

a) $1+\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2+...+\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{34}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

b) $\left(\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}\right)^n=\dfrac{1+i\tan nx}{1-i\tan nx}$ với n là số nguyên dương.

Bài 8. Khai triển thành chuỗi Taylor các hàm giải tích sau trong lân cận các điểm z_0 tương ứng. Tính đạo hàm cấp 2023 của các hàm đó tại z_0.

a) $f(z)=\dfrac{1984}{z-2}$ với $z_0=1$.

b) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ với $z_0=3$.

c) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ với $z_0=1$.

Bài 9. Tính tích phân

a) $\int\limits_L (z+i)dz$ với L là đường cong có phương trình $z=t-1+i.t,\ t\in[-1;2]$.

b) $\int\limits_L \left(z^2-z+i\right)dz$ với L là đường cong có phương trình $z=2t+i.(1-t),\ t\in[0;3]$.

Bài 10. Khai triển các hàm biến phức sau thành chuỗi Laurent tại lân cận thủng của các điểm bất thường z_0 được chỉ ra. Xác định phần chính và phần đều của chuỗi Laurent đó

a) $f(z)=\dfrac{z-i}{(z-2)^{2023}(z+1)}$ với $z_0=2$.

b) $f(z)=\dfrac{2z^2+3z-2i}{(z-i)^{1984}(z+2)}$ với $z_0=i$.

Bài 11. Tính các tích phân sau bằng cách áp dụng định lý Cauchy

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-4|=3}\frac{z^2-z+i}{z(z-2)}dz$.

b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2-z+i}{z(z-2)}dz$.

c) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=6}\frac{z^2-z+i}{z(z-2)}dz$.

Bài 12. Sử dụng thặng dư để tính các tích phân sau

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$.

b) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{(z+2)dz}{(z^2-4z+3)(z^2-1)}$.

Bài 13. Tính thặng dư của các hàm biến phức tại các cực điểm của nó

a) $f(z)=\dfrac{z^2-z+i}{z(z-2i)}$.

b) $g(z)=\dfrac{z-i}{z^2(z+3i)}$.

c) $h(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+2i)^2}$.

Bài 14. Tính thặng dư tại vô cực của các hàm biến phức ở **Bài 13.**

Bài 15. Tính thặng dư tại các điểm bất thường của các hàm được cho dưới đây bằng cách khai triển các hàm đó thành chuỗi Laurent tại lân cận thủng của điểm bất thường được chỉ ra

a) $f(z)=\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ tại $z=2$.

b) $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z^2+1\right)^2}$ tại $z=i$ và tại $z=\infty$.

c) $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z-1\right)^3}$ tại $z=\infty$.

CHƯƠNG 2. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

Giới thiệu

Biến đổi Laplace là một biến đổi tích phân quan trọng, dùng để giải một số phương trình vi phân, vi tích phân,… thường gặp trong ngành Điện – Điện tử. Biến đổi Laplace cho phép chuyển từ phép tính vi tích phân trên hàm (hàm gốc) sang các phép tính đại số trên ảnh (hàm ảnh).

Tên của phép biến đổi này được đặt theo tên của nhà toán học và thiên văn học nổi tiếng người Pháp là Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Laplace đề cập đến vấn đề này đầu tiên vào năm 1782, tuy nhiên tính hiệu quả của phương pháp này hầu như không được công nhận.

Khoảng 100 năm sau đó, kỹ sư điện người Anh là Oliver Heaviside (1850 – 1925) đã nghiên cứu những kỹ thuật thực tế để nâng tầm để phép biến đổi Laplace rất hiệu quả như ngày nay. Do đó, biến đổi Laplace đôi khi còn được gọi là phép tính Heaviside.

Pierre-Simon Laplace

Chân dung sau khi ông mất do Bà Feytaud vẽ, 1842

2.1. Định nghĩa phép biến đổi Laplace

2.1.1. Tích phân suy rộng của hàm phức với cận dương vô hạn

- Định nghĩa. Cho hàm phức biến thực $w = f(t) = u(t) + i.v(t)$ với $t \in (a;b)$ và $u(t),\ v(t)$ là các hàm nhận giá trị thực. Hàm $w = f(t)$ được gọi là khả tích trên $[p;q] \subset (a;b)$ nếu các hàm $u(t),\ v(t)$ khả tích trên $[p;q]$. Khi đó, tích phân sau được gọi là tích phân suy rộng của hàm $w = f(t)$ với cận dương vô hạn và giá trị của tích phân được gán bởi giá trị của giới hạn tương ứng

$$I = \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b u(t)dt + i.\lim_{b\to+\infty} \int_a^b v(t)dt.$$

- Định nghĩa. Với giả thiết ở định nghĩa trên thì tích phân suy rộng $I = \int_a^{+\infty} f(t)dt$ được gọi là hội tụ. Ngược lại nếu một trong hai tích phân $\int_a^b u(t)dt$, $\int_a^b v(t)dt$ phân kỳ thì tích phân suy rộng $I = \int_a^{+\infty} f(t)dt$ được gọi là phân kỳ.

- Định lý. Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ hội tụ thì tích phân $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ cũng hội tụ và ta nói $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ hội tụ tuyệt đối. Khi đó: $\left|\int_a^{+\infty} f(t)dt\right| \le \int_a^{+\infty} |f(t)|dt$.

- Tính chất. Các công thức, quy tắc vi phân và tích phân với hàm phức biến thực hoàn toàn giống như đối với hàm thực biến thực.

2.1.2. Định nghĩa biến đổi Laplace

a) Định nghĩa lớp hàm gốc

- Xét lớp G các hàm phức biến thực $w = f(t)$ thỏa mãn các điều kiện:

+ $f(t) = 0,\ \forall t < 0$.

+ $f(t)$ liên tục từng khúc trên miền $t \ge 0$. Tức là trên miền này, $f(t)$ có không quá đếm được các điểm gián đoạn loại 1, đồng thời trên mỗi khoảng hữu hạn $(a;b) \subset (0;+\infty)$ thì số các điểm như vậy là hữu hạn.

+ $f(t)$ không tăng nhanh hơn hàm mũ khi $t \to +\infty$, tức là tồn tại các số dương α và M (phụ thuộc vào f) sao cho: $|f(t)| \le M.e^{\alpha t}$, $\forall t > 0$ (1).

Số $\alpha_0 = inf\{\alpha\}$ (với α là các giá trị thỏa mãn điều kiện (1) ở trên) được gọi là chỉ số tăng của $f(t)$. Lớp G được gọi là lớp hàm gốc, mỗi hàm số thuộc G được gọi là một hàm gốc.

- **Chú ý.** Nhắc lại định nghĩa inf đối với tập con của tập số thực.

Cho A là tập con của tập số thực.

+ *Định nghĩa cận dưới của* A. Số m được gọi là cận dưới của tập A nếu với $\forall x \in A$ thì $x \ge m$.

+ *Định nghĩa cận dưới đúng của* A. Giả sử α là một cận dưới của A. Khi đó α được gọi là cận dưới đúng của A, ký hiệu $inf(A)$, nếu với mọi cận dưới m của A thì $\alpha \ge m$.

b) Định nghĩa biến đổi Laplace của hàm gốc

- Cho $f(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng α_0. Hàm phức biến phức $F(p)$ xác định bởi công thức: $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t)dt$ trên miền $\mathrm{Re}(p) > \alpha_0$, được gọi là biến đổi Laplace của $f(t)$, ký hiệu: $F(p) = L(f)(p)$ hoặc $F(p) = L(f(t))(p)$.

- Hàm $F(p)$ được gọi là hàm ảnh của hàm gốc $f(t)$.

2.1.3. Biến đổi Laplace của một số hàm đơn giản

a) Ví dụ 1. Biến đổi Laplace của hàm đơn vị Heaviside

Xét hàm số đơn vị Heaviside: $I(t) = \begin{cases} 0 & khi\ t < 0 \\ 1 & khi\ t \ge 0 \end{cases}$. Tính biến đổi Laplace của $I(t)$.

Lời giải

$$L(I(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.I(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \ (\mathrm{Re}\, p > 0).$$

b) Ví dụ 2. Biến đổi Laplace của hàm mũ.

Xét hàm mũ $f(t) = e^{\alpha t}$ $(\alpha \in \mathbb{C})$. Tính biến đổi Laplace của $f(t)$.

Lời giải

$$L\left(e^{\alpha t}\right)(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt}.e^{\alpha t}dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt=\left.\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{-(p-\alpha)}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{p-\alpha}\ (\mathrm{Re}(p-\alpha)>0).$$

2.2. Tính chất của biến đổi Laplace

2.2.1. Tính chất tuyến tính

- Phát biểu. Nếu α,β là các hằng số phức; $f(t),g(t)$ là các hàm gốc thì:

$$L(\alpha f(t)+\beta g(t))(p)=\alpha L(f(t))(p)+\beta L(g(t))(p).$$

- Chứng minh. Tính chất tuyến tính được suy từ định nghĩa của biến đổi Laplace và tính chất tuyến tính của tích phân suy rộng.

- Ví dụ 3. Tính biến đổi Laplace của các hàm sau

a) $f(t)=\cos\alpha t,\ \alpha\in\mathbb{C}$.

b) $f(t)=\sin\alpha t,\ \alpha\in\mathbb{C}$.

c) $f(t)=\cosh\alpha t$ với $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.

d) $f(t)=\sinh\alpha t$ với $\sinh t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$.

Lời giải

Từ công thức Euler ta có: $\cos\alpha t=\dfrac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}$ và $\sin\alpha t=\dfrac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}$.

a) $L(\cos\alpha t)(p)=L\left(\dfrac{e^{i\alpha t}+e^{-i\alpha t}}{2}\right)(p)=\dfrac{1}{2}L\left(e^{i\alpha t}\right)(p)+\dfrac{1}{2}L\left(e^{-i\alpha t}\right)(p)$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+i\alpha}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\alpha}+\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{p}{p^2+\alpha^2}\ \left(\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\alpha|\right).$$

b) $L(\sin\alpha t)(p)=L\left(\dfrac{e^{i\alpha t}-e^{-i\alpha t}}{2i}\right)(p)=\dfrac{1}{2i}L\left(e^{i\alpha t}\right)(p)-\dfrac{1}{2i}L\left(e^{-i\alpha t}\right)(p)$

$$=\frac{1}{2i}\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{2i}\frac{1}{p+i\alpha}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\alpha}-\frac{1}{p+i\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\ \left(\alpha\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,p>|\mathrm{Im}\,\alpha|\right).$$

c) $L(\cosh \alpha t)(p) = L\left(\dfrac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\right)(p) = \dfrac{1}{2}L\left(e^{\alpha t}\right)(p) + \dfrac{1}{2}L\left(e^{-\alpha t}\right)(p)$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{p+\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{p}{p^2-\alpha^2} \quad \left(\alpha \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\alpha|\right).$$

d) $L(\sinh \alpha t)(p) = L\left(\dfrac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{2}\right)(p) = \dfrac{1}{2}L\left(e^{\alpha t}\right)(p) - \dfrac{1}{2}L\left(e^{-\alpha t}\right)(p)$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p+\alpha}\right) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \quad \left(\alpha \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re}\alpha|\right).$$

2.2.2. Tính chất đồng dạng

- Phát biểu. Nếu $f(t)$ là hàm gốc và hằng số thực $c > 0$. Đồng thời $L(f(t))(p) = F(p)$ thì

$$L(f(ct))(p) = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right).$$

- Chứng minh. Thật vậy, ta có $VT = L(f(ct))(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}.f(ct)\,dt$.

Đặt $ct = u \Rightarrow t = \dfrac{u}{c} \Rightarrow dt = \dfrac{1}{c}du$ ta được

$$VT = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{pu}{c}}.f(u)\frac{1}{c}du = \frac{1}{c}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{p}{c}.u}.f(u)\,du = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right) = VP \text{ (đpcm).}$$

2.2.3. Tính chất trễ

a) Định lý trễ thứ nhất

- Phát biểu. Cho $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và hằng số thực $c > 0$.

Đặt $f_c(t) = \begin{cases} 0 & khi\ t < c \\ f(t-c) & khi\ t \ge c \end{cases}$. Khi đó: Nếu $L(f(t))(p) = F(p)$ thì

$$L(f_c(t))(p) = e^{-pc}.F(p) \quad (\operatorname{Re} p > \alpha_0).$$

- Chứng minh

$$VT = L(f_c(t))(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}.f_c(t)\,dt = \int\limits_c^{+\infty} e^{-pt}.f(t-c)\,dt \quad (1).$$

Đặt $t-c=u$. Tích phân (1) trở thành

$$L(f_c(t))(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-p(u+c)}.f(u)du=e^{-pc}\int\limits_0^{+\infty} e^{-pu}.f(u)du=e^{-pc}F(p)=VP.$$

- Ví dụ 4. Tìm biến đổi Laplace của hàm: $g(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<1\\ 1 & khi\ 1\le t<2\\ 0 & khi\ t\ge 2\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $I(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<1\\ 1 & khi\ t\ge 1\end{cases}$; $J(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<2\\ 1 & khi\ t\ge 2\end{cases}$ thì $g(t)=I(t)-J(t)$.

Suy ra: $L(g(t))(p)=L(I(t))(p)-L(J(t))(p)=\dfrac{e^{-p}}{p}-\dfrac{e^{-2p}}{p}=\dfrac{e^{-p}(1-e^{-p})}{p}$.

b) Định lý trễ thứ hai

- Phát biểu. Cho $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và hằng số $c\in\mathbb{C}$.

Khi đó: Nếu $L(f(t))(p)=F(p)$ thì $L\left(e^{ct}.f(t)\right)(p)=F(p-c)$ $\left(\operatorname{Re}p>\alpha_0+\operatorname{Re}c\right)$.

- Chứng minh

$$VT=L\left(e^{ct}.f(t)\right)(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}.e^{ct}.f(t)dt=\int\limits_c^{+\infty} e^{-(p-c)t}.f(t)dt=F(p-c)=VP.$$

Ví dụ 5. Cho $c,\ \alpha$ là các số phức. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau

a) $f(t)=e^{ct}\cos(\alpha t)$.

b) $f(t)=e^{ct}\sin(\alpha t)$.

c) $f(t)=e^{ct}t^n$.

Lời giải

a) Do $L(\cos(\alpha t))(p)=\dfrac{p}{p^2+\alpha^2}\Rightarrow L\left(e^{ct}\cos(\alpha t)\right)(p)=\dfrac{p-c}{(p-c)^2+\alpha^2}$.

b) Do $L(\sin(\alpha t))(p)=\dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\Rightarrow L\left(e^{ct}\sin(\alpha t)\right)(p)=\dfrac{\alpha}{(p-c)^2+\alpha^2}$.

c) Do $L\left(t^{n}\right)(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow L\left(e^{ct}t^{n}\right)(p)=\dfrac{n!}{(p-c)^{n+1}}$.

2.2.4. Đạo hàm của phép biến đổi Laplace

- Phát biểu. Nếu $f(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì biến đổi Laplace $F(p)=L(f)(p)$ là hàm giải tích trên miền $\operatorname{Re}(p)>\alpha_0$. Đồng thời, trong miền này ta có thể áp dụng công thức đạo hàm dưới dấu tích phân như sau

$$F'(p)=\int_0^{+\infty}\left(e^{-pt}.f(t)\right)'_p dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}.(-tf(t))dt=L(-tf(t))(p).$$

- Hệ quả. Nếu $L(f(t))(p)=F(p)$ thì

$+\ L(tf(t))(p)=-F'(p)$.

$+\ L\left(t^{n}f(t)\right)(p)=(-1)^{n}F^{(n)}(p),\ n\in\mathbb{N}^{*}$.

- Ví dụ 6. Áp dụng công thức ở hệ quả với các hàm lũy thừa ta được

i) Với $f(t)=I(t)\Rightarrow L(t)(p)=-\left(\dfrac{1}{p}\right)'=\dfrac{1}{p^{2}}\ (\operatorname{Re}p>0)$.

ii) Với $f(t)=t\Rightarrow L\left(t^{2}\right)(p)=L(t.t)(p)=-\left(\dfrac{1}{p^{2}}\right)'=\dfrac{2}{p^{3}}\ (\operatorname{Re}p>0)$.

iii) Tổng quát: $L\left(t^{n}\right)(p)=\dfrac{n!}{p^{n+1}}\ (\operatorname{Re}p>0)$.

2.2.5. Biến đổi Laplace của đạo hàm

- Phát biểu. Giả sử $f(t)$ là hàm gốc, $f'(t)$ tồn tại trên $(0;+\infty)$ và cũng là hàm gốc, đồng thời tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{t\to 0^{+}}f(t)=f(0+)$. Khi đó

Nếu $L(f(t))(p)=F(p)$ thì $L(f'(t))(p)=pF(p)-f(0+)$.

- Chứng minh. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$VT = L\left(f'(t)\right)\left(p\right) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}.f'(t)dt = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to 0^+}} \int_a^b e^{-pt}d\left(f(t)\right) = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to 0^+}} \left\{ e^{-pt}.f(t)\Big|_a^b + p\int_a^b e^{-pt}f(t)d(t) \right\}$$

$$= -f(0+) + p\int_0^{+\infty} e^{-pt}.f(t)dt = pF(p) - f(0+) = VP.$$

- Hệ quả. Giả sử $f\left(t\right)$ là hàm gốc, tồn tại các đạo hàm $f^{(k)}\left(t\right)$ $(k = 1,2,3,...,n)$ trên $\left(0;+\infty\right)$ và cũng là các hàm gốc, đồng thời tồn tại các giới hạn $\lim\limits_{t\to 0^+} f^{(k)}\left(t\right) = f^{(k)}(0+)$ $(k = 1,2,3,...,n-1)$. Khi đó: Nếu $L\left(f(t)\right)\left(p\right) = F\left(p\right)$ thì

$$L\left(f^{(n)}(t)\right)\left(p\right) = p^n F(p) - \left[p^{n-1}f(0+) + p^{n-2}f'(0+) + ... + f^{(n-1)}(0+)\right].$$

Ví dụ 7. Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$ với điều kiện ban đầu $y(0) = y'(0) = 0.$

Lời giải

Gọi nghiệm cần tìm là $y = y(t)$ và đặt $Y(p) = L\left(y(t)\right)(p)$.

Lấy biến đổi Laplace 2 vế của phương trình đã cho và sử dụng kết quả

$$L\left(y'(t)\right)\left(p\right) = pY\left(p\right) - y(0) = pY(p);\ L\left(y''(t)\right)\left(p\right) = p^2Y\left(p\right) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p).$$

Ta có: $L\left(y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\right)(p) = L\left(e^{3t}\right)(p) \Leftrightarrow p^2Y\left(p\right) - 3pY\left(p\right) + 2Y\left(p\right) = \dfrac{1}{p-3}$

$$\Leftrightarrow \left(p^2 - 3p + 2\right)Y\left(p\right) = \frac{1}{p-3} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{2}.\frac{1}{p-3} + \frac{1}{2}.\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} \Leftrightarrow L\left(y(t)\right)(p) = L\left(\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - e^{2t}\right)(p)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^t - e^{2t}.$$

2.2.6. Biến đổi Laplace của tích phân

- Phát biểu. Giả sử $f\left(t\right)$ liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ và là hàm gốc, $L\left(f(t)\right)(p) = F(p)$. Khi đó hàm $g\left(t\right) = \int_0^t f(u)du$ cũng là hàm gốc và $L\left(g(t)\right)(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

- Chứng minh. Rõ ràng $g(t)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ nên điều kiện i) trong định nghĩa của hàm gốc được thỏa mãn. Giả sử α_0 là chỉ số tăng của $f(t)$, khi đó với bất kỳ $\alpha > \alpha_0$ ta có

$$\left|g(t)\right| = \int_0^t |f(u)|du \le M.\int_0^t e^{\alpha u}du = \frac{M}{\alpha}e^{\alpha u}\Big|_0^t < M_0.e^{\alpha t}.$$

Vậy điều kiện ii) trong định nghĩa của hàm gốc cũng được thỏa mãn và chỉ số tăng của $g(t)$ cũng là α_0. Đặt $L\big(g(t)\big)(p) = G(p)$. Vì $g(0) = 0$ nên

$$F(p) = L\big(f(t)\big)(p) = L\big(g'(t)\big)(p) = pG(p) - g(0) = pG(p) \Rightarrow G(p) = \frac{F(p)}{p} \text{ (đpcm).}$$

2.2.7. Tích phân của biến đổi Laplace

- Phát biểu. Giả sử $f(t)$ là hàm gốc và $\dfrac{f(t)}{t}$ cũng là hàm gốc và $L\big(f(t)\big)(p) = F(p)$. Khi đó: $L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)(p) = \displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)du$ trong đó $\displaystyle\int_p^{+\infty} F(u)du = \lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty}\int_p^z F(u)du$.

- Chứng minh. Đặt $\dfrac{f(t)}{t} = g(t),\ L\big(g(t)\big)(p) = G(p)$.

Suy ra $G'(p) = L\big(-tg(t)\big)(p) = -L\big(f(t)\big)(p)$. Vậy $G(p)$ là một nguyên hàm của $-F(p)$. Do $g(t)$ là hàm gốc, giả sử chỉ số tăng là β, nên với $\operatorname{Re} z - \beta - 1 > 0$, ta có

$$\left|G(z)\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} z).t}.\left|g(t)\right|dt \le M.\int_0^{+\infty} e^{(-\operatorname{Re} z+\beta+1).t}dt = M.\frac{e^{(-\operatorname{Re} z+\beta+1).t}}{-\operatorname{Re} z+\beta+1}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{M}{\operatorname{Re} z-\beta-1}.$$

Do đó $\displaystyle\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} G(z) = 0$. Suy ra $-G(p) = -G(p) + \displaystyle\lim_{\operatorname{Re} z\to+\infty} G(z) = \int_p^{+\infty} -F(u)du$

$$\Rightarrow G(p) = \int_p^{+\infty} F(u)du \Rightarrow L\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} F(u)du \text{ (đpcm).}$$

- Ví dụ 8. Biết rằng $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ là hàm gốc. Tính biến đổi Laplace của $f(t)$.

Lời giải

Ta có: $L(\sin t)(p)=\dfrac{1}{p^2+1}\Rightarrow L\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)(p)=\int\limits_p^{+\infty}\dfrac{1}{u^2+1}du=\dfrac{\pi}{2}-\arctan p$.

2.2.8. Tích chập và biến đổi Laplace của tích chập

- Định nghĩa tích chập

Giả sử $f(t),g(t)$ là các hàm gốc với các chỉ số tăng tương ứng là α_0,β_0. Xem $f(t),g(t)$ triệt tiêu trên $(0;+\infty)$. Đặt: $(f*g)(t)=\int\limits_0^t f(u).g(t-u)du$.

Hàm $(f*g)(t)$ được gọi là tích chập của các hàm $f(t),g(t)$.

- Tính chất

+ Nếu $f(t),g(t)$ là các hàm gốc với các chỉ số tăng tương ứng là α_0,β_0 thì tích chập $(f*g)(t)$ cũng là hàm gốc với chỉ số tăng $\gamma_0\le\max\{\alpha_0,\beta_0\}$.

Chứng minh

Với $t>0,\varepsilon>0$, ta có

$$|(f*g)(t)|=\left|\int\limits_0^t f(u).g(t-u)du\right|\le\int\limits_0^t|f(u).g(t-u)|du\le M.\int\limits_0^t e^{(\alpha_0+\varepsilon)u}.e^{(\beta_0+\varepsilon)(t-u)}du$$

$$=M.e^{(\beta_0+\varepsilon)t}.\int\limits_0^t e^{(\alpha_0-\beta_0)u}du\le\begin{cases}M_1.e^{(\alpha_0+\varepsilon)t} & khi\ \alpha_0\ge\beta_0\\ M_2.e^{(\beta_0+\varepsilon)t} & khi\ \alpha_0<\beta_0\end{cases}.$$

Bất đẳng thức sau cùng có được bằng cách tính toán trực tiếp tích phân ở vế trái. Từ đó suy ra $(f*g)(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng $\gamma_0\le\max\{\alpha_0,\beta_0\}$ (đpcm).

+ Giả sử biến đổi Laplace của $f(t),g(t)$ lần lượt là $F(p),G(p)$ thì

$$L\big((f*g)(t)\big)(p)=L\big(t(t)\big)(p).L\big(g(t)\big)(p)=F(p).G(p).$$

Hay nói cách khác là: Biến đổi Laplace của tích chập có tính chất giao hoán (trong khi biến đổi Laplace của tích thông thường không có tính chất giao hoán).

Chứng minh

$$VT=L\big((f*g)(t)\big)(p)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f(u).g(t-u)du\right)dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-pt}\left(\int\limits_0^{+\infty}f(u).g(t-u)du\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(u)du. \int_u^{+\infty} e^{-pt}.g(t-u)dt = \int_0^{+\infty} f(u)du. \int_0^{+\infty} e^{-p(u+v)}.g(v)dv$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u)du. \int_0^{+\infty} e^{-pv}.g(v)dv = F(p).G(p).\ \text{(đpcm).}$$

2.3. Bảng biến đổi Laplace cơ bản và một số ví dụ minh họa

2.3.1. Bảng biến đổi Laplace cơ bản

Thống kê lại các kết quả tính toán ở các ví dụ trên, ta được bảng Laplace cơ bản sau

+ $L\big(I(t)\big)(p) = \dfrac{1}{p}$

+ $L\left(e^{\alpha t}\right)(p) = \dfrac{1}{p-\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

+ $L\left(t^n\right)(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}} \ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

+ $L\left(\cos \alpha t\right)(p) = \dfrac{p}{p^2+\alpha^2}$

+ $L\left(\sin \alpha t\right)(p) = \dfrac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$

+ $L\left(\sinh \alpha t\right)(p) = \dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

+ $L\left(\cosh \alpha t\right)(p) = \dfrac{p}{p^2-\alpha^2}$

+ $L\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)(p) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan p$

+ $L\big(Si(t)\big)(p) = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan p\right)$ với $Si(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$.

Dùng các công thức trong bảng biến đổi Laplace cơ bản cùng với các tính chất của biến đổi Laplace có thể tính được biến đổi Laplace của các hàm khác thường gặp trong các bài toán về kỹ thuật điện.

2.3.2. Một số ví dụ minh họa

a) Ví dụ 9. Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc $f(t) = t^2 \sin t$.

Lời giải

Ta có $L(\sin t)(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow L\left(t^2.\sin t\right)(p) = (-1)^2\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)'' = \dfrac{6p^2-2}{(p^2+1)^3}$.

b) Ví dụ 10. Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc $f(t) = \dfrac{e^{2t}-e^t}{t}$.

Lời giải

Phân tích $f(t) = \dfrac{e^{2t}-e^t}{t} = e^t.\dfrac{e^t-1}{t}$.

Ta có: $L\left(e^t-1\right)(p) = L\left(e^t\right)(p) - L\left(I(t)\right)(p) = \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p(p-1)}$

$$\Rightarrow L\left(\frac{e^t-1}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} \frac{du}{u(u-1)} = \ln\frac{p}{p-1} \quad (\operatorname{Re} p > 1).$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{e^{2t}-e^t}{t}\right)(p) = L\left(e^t.\frac{e^t-1}{t}\right)(p) = \ln\frac{p-1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p > 2).$$

c) Ví dụ 11. Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc $f(t) = \dfrac{\cos 6t - \cos 4t}{t}$.

Lời giải

Ta có: $L(\cos 6t - \cos 4t)(p) = \dfrac{p}{p^2+36} - \dfrac{p}{p^2+16}$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty}\left(\frac{u}{u^2+36} - \frac{u}{u^2+16}\right)du = \frac{1}{2}\ln\frac{u^2+36}{u^2+16}\Bigg|_p^{+\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+36}{p^2+16}.$$

2.4. Biến đổi Laplace ngược

2.4.1. Định nghĩa

- Hàm $f(t)$ được gọi là biến đổi Laplace ngược của hàm $F(p)$ và được ký hiệu

$$f = L^{-1}(F) \text{ hoặc } f(t) = L^{-1}\left(F(p)\right)(t).$$

Nói chung khi hàm $F(p)$ đã cho thì hàm $f(t)$ (nếu tồn tại) thì được xác định một cách không duy nhất, bởi vì việc thay đổi giá trị của hàm số $f(t)$ tại một số hữu hạn điểm không ảnh hưởng đến giá trị tích phân $F(p)=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt$.

Để khắc phục điều này, ta có định lý sau

Định lý. Cho hàm $F(p)$ thỏa mãn các điều kiện sau

i) $F(p)$ là hàm giải tích trong miền $\operatorname{Re} p > \alpha_0 \ge 0$.

ii) Khi $|p| \to +\infty$ trong miền $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, hàm $F(p)$ tiến về 0 đều theo $\arg p \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Với mọi $x > \alpha_0$ tồn tại số $M > 0$ không phụ thuộc vào x sao cho

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(x+iy)|dy \le M.$$

Khi đó hàm $F(p)$ là biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ cho bởi công thức

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt}.F(p)dp;\ x > \alpha_0.$$

Định lý. Hai hàm gốc phân biệt liên tục trên $[0;+\infty)$ thì có các biến đổi Laplace phân biệt.

Như vậy, nếu ta chỉ xét các hàm gốc liên tục thì biến đổi Laplace ngược là duy nhất. Do đó trong các vấn đề như dùng biến đổi Laplace và Laplace ngược để giải phương trình vi phân (với điều kiện đầu cho trước, đồng thời phương trình vi phân thỏa mãn điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm) các nghiệm tìm được là duy nhất bởi vì chúng đều là các hàm có đạo hàm (và do đó chúng liên tục).

Định lý. Giả sử $F(p)$ là hàm giải tích trong lân cận thủng của vô cực và khai triển Laurent của $F(p)$ trong lân cận thủng của vô cực có dạng: $F(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{p^n}$.

Khi đó, thu hẹp của $F(p)$ trên miền $\operatorname{Re} p > 0$ là biến đổi Laplace của hàm

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\frac{t^n}{n!}\ \ (t>0)$$

Ví dụ 12. Ta định nghĩa hàm $\arctan z$ trong miền phức $|z|<1$ bởi công thức

$$\arctan z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$

Khi đó trong miền phức $|p| > 1$ ta có: $\arctan \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)p^{2n-1}}$. Từ đó suy ra $\arctan \frac{1}{p}$ trên miền $\operatorname{Re} p > 0,\ |p| > 1$ là biến đổi Laplace của hàm gốc sau

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!(2n+1)} = \frac{\sin t}{t} \ (t > 0).$$

2.4.2. Một số tính chất của biến đổi Laplace ngược

- Tính chất 1. Biến đổi Laplace ngược có tính chất tuyến tính: Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$ và $L^{-1}\left(G(p)\right)(t) = g(t)$. Khi đó với $a, b \in \mathbb{C}$ ta có

$$L^{-1}\left(aF(p) + bG(p)\right)(t) = aL^{-1}\left(F(p)\right)(t) + bL^{-1}\left(F(p)\right)(t) = af(t) + bg(t).$$

- Tính chất 2. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, ta có: $L^{-1}\left(F^{(n)}(p)\right)(t) = (-1)^n f(t)$.

- Tính chất 3. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, khi đó với mọi số thực dương *c*, ta có

$$L^{-1}\left(F\left(\frac{p}{c}\right)\right)(t) = cf(ct).$$

- Tính chất 4. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, khi đó với mọi số thực *c*, ta có

$$L^{-1}\left(e^{-pc}F(p)\right)(t) = f_c(t) = \begin{cases} 0 & khi\ t < c \\ f(t-c) & khi\ t \geq c \end{cases}.$$

- Tính chất 5. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, ta có: $L^{-1}\left(F(p-c)\right)(t) = e^{ct} f(t)$.

- Tính chất 6. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, ta có: $L^{-1}\left(pF(p) - f(0+)\right)(t) = f'(t)$.

- Tính chất 7. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$, ta có: $L^{-1}\left(\frac{F(p)}{p}\right)(t) = \int_0^t f(u)du$.

- Tính chất 8. Giả sử $L^{-1}\left(F(p)\right)(t) = f(t)$ và $L^{-1}\left(G(p)\right)(t) = g(t)$, khi đó ta có

$$L^{-1}\left(F(p).G(p)\right)(t) = \left(f * g\right)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

2.4.3. Bảng biến đổi Laplace ngược cơ bản

+ $L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)(t)=I(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<0\\ 1 & khi\ t\ge 0\end{cases}$

+ $L^{-1}\left(\frac{1}{p-\alpha}\right)(t)=e^{\alpha t}\quad (\alpha\in\mathbb{C})$

+ $L^{-1}\left(\frac{1}{p^{n+1}}\right)(t)=\frac{t^n}{n!}\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$

+ $L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)(t)=\cos\alpha t\quad (\alpha\in\mathbb{C})$

+ $L^{-1}\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)(t)=\sin\alpha t\quad (\alpha\in\mathbb{C})$

+ $L^{-1}\left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)(t)=\sinh\alpha t\quad (\alpha\in\mathbb{C})$

+ $L^{-1}\left(\frac{p}{p^2-\alpha^2}\right)(t)=\cosh\alpha t\quad (\alpha\in\mathbb{C})$.

2.4.4. Một số ví dụ

Ví dụ 13. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh $F\left(p\right)=\frac{3p+7}{p^2-2p-3}$.

Lời giải

Ta có phân tích: $F\left(p\right)=\frac{3p+7}{p^2-2p-3}=\frac{3p+7}{\left(p+1\right)\left(p-3\right)}=\frac{-1}{p+1}+\frac{4}{p-3}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=L^{-1}\left(\frac{-1}{p+1}+\frac{4}{p-3}\right)(t)=L^{-1}\left(\frac{-1}{p+1}\right)(t)+L^{-1}\left(\frac{4}{p-3}\right)(t)=-e^{-t}+4e^{3t}.$$

Ví dụ 14. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh $F\left(p\right)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

Lời giải

Ta có phân tích: $F\left(p\right)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}=\dfrac{1}{p^2+1}-\dfrac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\dfrac{1}{p^2+1}-\dfrac{2p}{2p\left(p^2+1\right)^2}$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}-\frac{2p}{2p\left(p^2+1\right)^2}\right)(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)(t)+\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{-2p}{p\left(p^2+1\right)^2}\right)(t).$$

Ta có: $L^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)(t)=\sin t\Rightarrow L^{-1}\left(\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)'\right)(t)=-t\sin t\Rightarrow L^{-1}\left(\dfrac{-2p}{\left(p^2+1\right)^2}\right)(t)=-t\sin t$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{-2p}{p\left(p^2+1\right)^2}\right)(t)=\int_0^t(-u)\sin u du=\int_0^t u d\cos u=u\cos u\Big|_0^t-\int_0^t\cos u du=t\cos t-\sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=\sin t+\frac{1}{2}\left(t\cos t-\sin t\right)=\frac{\sin t+t\cos t}{2}.$$

Ví dụ 15. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh $F\left(p\right)=\dfrac{2p+2}{\left(p^2+2p+2\right)^2}$.

Lời giải

Ta có phân tích: $F\left(p\right)=\dfrac{2(p+1)}{\left(\left(p+1\right)^2+1\right)^2}=-\left(\dfrac{1}{\left(p+1\right)^2+1}\right)'$.

Ta có

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)(t)=\sin t\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right)(t)=e^{-t}\sin t\Rightarrow L^{-1}\left(\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right)'\right)(t)=-te^{-t}\sin t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(F(p)\right)(t)=-L^{-1}\left(\frac{1}{\left(p+1\right)^2+1}\right)'=te^{-t}\sin t.$$

2.5. Một số ứng dụng của biến đổi Laplace

2.5.1. Sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân

Bài toán. Sử dụng biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân

i) $y'+py=f(t)$ với điều kiện đầu $y\left(t_0\right)=y_0$

ii) $y'' + py' + qy = f(t)$ với điều kiện đầu $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$.

Phương pháp giải

- Gọi nghiệm cần tìm là $y(t)$, đặt $L(y(t))(p) = Y(p)$.

- Áp dụng biến đổi Laplace vào 2 vế của các phương trình đã cho và sử dụng điều kiện đầu, rồi rút $Y(p)$ theo ẩn p dưới dạng: $Y(p) = \dfrac{H(p)}{K(p)}$.

- Từ đó suy ra: $y(t) = L^{-1}\left(\dfrac{H(p)}{K(p)}\right)(t)$.

Ví dụ 16. Giải các phương trình vi phân sau với điều kiện đầu tương ứng

a) $y' + 4y = e^{-t}$ với điều kiện đầu $y(0) = 1$

b) $y'' - 4y' + 3y = t\sin t$ với điều kiện đầu $y'(0) = 0,\ y(0) = 1$.

Lời giải

a) Gọi nghiệm cần tìm là $y(t)$, đặt $L(y(t))(p) = Y(p)$.

Áp dụng biến đổi Laplace vào 2 vế của các phương trình đã cho, ta có

$$L(y' + 4y)(p) = L\left(e^{-t}\right)(p) \Leftrightarrow L(y'(t))(p) + 4L(y(t))(p) = L\left(e^{-t}\right)(p) \text{ (1)}$$

Mặt khác: $L(y'(t))(p) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$; $L(y(t))(p) = Y(p)$;

$$L\left(e^{-t}\right)(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow pY(p) - 1 + 4Y(p) = \dfrac{1}{p+1} \Leftrightarrow (p+4)Y(p) = 1 + \dfrac{1}{p+1}$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p+4} + \frac{1}{(p+1)(p+4)} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{1}{p+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{p+4} = \frac{2}{3}\frac{1}{p+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{p+1}.$$

Do đó: $y(t) = L^{-1}(Y(p))(t) = \dfrac{2}{3}e^{-4t} + \dfrac{1}{3}e^{-t}$.

b) Gọi nghiệm cần tìm là $y(t)$, đặt $L(y(t))(p) = Y(p)$.

Áp dụng biến đổi Laplace vào 2 vế của các phương trình đã cho, ta có:

$$L(y''(t) - 4y'(t) + 3y(t))(p) = L(t\sin t)(p)$$
$$\Leftrightarrow L(y''(t))(p) - 4L(y'(t))(p) + 3L(y(t))(p) = L(t\sin t)(p) \text{ (2)}.$$

Mặt khác: $L\left(y''(t)\right)(p) = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p$;

$L\left(y'(t)\right)(p) = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$; $L\left(y(t)\right)(p) = Y(p)$;

$$L\left(t\sin t\right)(p) = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow p^2Y(p) - p - 4\left(pY(p) - 1\right) + 3Y(p) = \dfrac{2p}{\left(p^2+1\right)^2}$

$$\Leftrightarrow \left(p^2 - 4p + 3\right)Y(p) - p + 4 = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2\left(p^2-4p+3\right)} + \frac{p-4}{p^2-4p+3}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{2p}{\left(p^2+1\right)^2(p-3)(p-1)} + \frac{p-4}{(p-3)(p-1)}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{-47}{100(p-3)} + \frac{8+11p}{50\left(p^2+1\right)} + \frac{5}{4(p-1)} + \frac{p-2}{5\left(p^2+1\right)^2}.$$

Do đó: $y(t) = L^{-1}\left(Y(p)\right)(t) = \left(\dfrac{t}{10} - \dfrac{1}{25}\right)\sin t - \dfrac{47}{100}e^{3t} + \left(\dfrac{t}{5} + \dfrac{11}{50}\right)\cos t + \dfrac{5}{4}e^t$.

Ví dụ 17. Một mạch điện gồm một cuộn cảm với hệ số tự cảm là λ (λ là hằng số dương) và một điện trở R (R là hằng số dương) mắc nối tiếp với nguồn $E = E_0.\sin\omega t$. Tìm biểu thức của dòng $I(t)$ nếu biết $I(0) = 0$.

Lời giải

Tổng độ sụt thế trên các phần tử của mạch bằng sức điện động của nguồn nên ta có phương trình vi phân

$$\lambda\frac{dI}{dt} + R.I = E_0.\sin\omega t$$

Giả sử $L\left(I(t)\right)(p) = F(p)$. Tác động biến đổi Laplace lên cả hai vế của phương trình vi phân và kết hợp với điều kiện đầu $I(0) = 0$ ta có

$$\lambda pF(p) + RF(p) = E_0.\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Leftrightarrow F(p) = \frac{E_0\omega}{(\lambda p + R)(p^2+\omega^2)}$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \frac{E_0\lambda\omega}{(\lambda\omega)^2 + R^2}.\frac{1}{p + \frac{R}{\lambda}} + \frac{E_0\omega(R - \lambda p)}{(\lambda\omega)^2 + R^2}.\frac{1}{p^2+\omega^2}.$$

Lấy Laplace ngược, ta được kết quả

$$I(t) = L^{-1}(F(p))(t) = \frac{E_0\lambda\omega}{(\lambda\omega)^2 + R^2} e^{-\frac{Rt}{\lambda}} + \frac{E_0 R}{(\lambda\omega)^2 + R^2} \sin\omega t - \frac{E_0\lambda\omega}{(\lambda\omega)^2 + R^2}\cos\omega t.$$

2.5.2. Sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi tích phân

Phương pháp giải. Các bước giải giống như sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân, tuy nhiên có một số chú ý

Nếu $F(p) = L(y(t))(p)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y(t) = y(0+)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} y^{(k)}(t) = y^{(k)}(0+)$, $k = 1,...,n-1$ thì:

a. $L(y'(t))(p) = pF(p) - y(0+)$

b. $L(y^{(n)}(t))(p) = p^n F(p) - p^{n-1}y(0+) - p^{n-2}y'(0+) - ... - y^{(n-1)}(0+)$

c. $L\left(\int_0^t f(s)ds\right)(p) = \dfrac{F(p)}{p}$

d. $L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right)(p) = \int_p^{+\infty} F(p)dp$.

Ví dụ 18. Xét mạch điện gồm cuộn cảm với hệ số tự cảm λ (λ là hằng số dương) và tụ điện với điện dung C (C là hằng số dương) mắc nối tiếp với nguồn có sức điện động E (E là hằng số dương). Tìm biểu thức của dòng $I(t)$ nếu biết $I(0) = 0$.

Lời giải

Các định luật trong mạch điện cho ta phương trình vi tích phân sau đối với dòng $I(t)$

$$\lambda\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau = E$$

Giả sử $L(I(t))(p) = F(p)$. Tác động biến đổi Laplace lên cả hai vế của phương trình vi tích phân và kết hợp với điều kiện đầu $I(0) = 0$ ta có

$$\lambda pF(p) + \frac{F(p)}{cp} = \frac{E}{p} \Leftrightarrow F(p) = \frac{EC}{\lambda Cp^2 + 1} \Leftrightarrow F(p) = E\sqrt{\frac{C}{\lambda}}.\frac{\frac{1}{\sqrt{\lambda C}}}{p^2 + \frac{1}{\lambda C}}.$$

Lấy Laplace ngược, ta được kết quả: $I(t) = L^{-1}(F(p))(t) = E\sqrt{\dfrac{C}{\lambda}}.\sin\dfrac{t}{\sqrt{\lambda C}}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1. Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc sau

a) $f\left(t\right)=3e^{2t}-4e^{5t}+5\sin 2t-7\sin t$.

b) $f\left(t\right)=2e^{3t}-\dfrac{3}{e^{2t}}+\sin 2t-\cos 3t+1$.

c) $f(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<0\vee t>\pi\\ \sin t & khi\ 0<t<\pi\end{cases}$ *(Hàm xung)*.

d) $f(t)=t^2e^{2t}\cos t$.

e) $f(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\cos 2u-\cos 4u}{u}du$.

f) $f(t)=\begin{cases}0 & khi\ t<0\\ A & khi\ 0\le t<T\\ 2A & khi\ T\le t\le 2T\\ 0 & khi\ t>T\end{cases}$.

g) $f(t)=t^2\cos^2 2t$.

Bài 2. Chứng minh rằng: $L(t*\sin t)(p)=L(t-\sin t)(p)$.

Bài 3. Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm ảnh sau

a) $F\left(p\right)=\dfrac{p^3-2p^2+p+1}{(p^2+1)(p-1)(p-2)}$.

b) $F\left(p\right)=\dfrac{4p}{(p^2+4)^2}$.

c) $F\left(p\right)=\dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$.

d) $F\left(p\right)=\dfrac{6(p^4-6p^2+1)}{(p^2+1)^4}$.

Bài 4. Sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một sau

$$y'-3y=e^{3t}.$$

Bài 5. Sử dụng biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính cấp hai sau

a) $y''+6y'+8y=\sin^2 t,\ \ y(0)=y'(0)=0$.

b) $y''-y'-6y=e^{2t},\ \ y(0)=y'(0)=0$.

Bài 6. Sử dụng biến đổi Laplace để giải các phương trình vi tích phân sau

a) $y'(t)+2y(t)+\int\limits_0^t y(s)ds=\sin t,\ y(0)=0$.

b) $y'(t)+4y(t)+4\int\limits_0^t y(s)ds=\sin 2t,\ y(0)=0$.

c) $y'(t)+6y(t)+9\int\limits_0^t y(s)ds=e^{-4t},\ y(0)=0$

d) $\int\limits_0^t y(s)\sin(t-s)ds=t\sin t$.

e) $y''(t)+y(t)=\sin t+\int\limits_0^t y(s)\sin(t-s)ds,\ y(0)=0$ và $y'(0)=1$.

CHƯƠNG 3. CHUỖI FOURIER

Giới thiệu

Chuỗi hàm xuất hiện từ thế kỷ 14 ở Ấn Độ bởi nhà toán học Madhava (1350 – 1425). Ông đã tìm được cách biểu diễn một số hàm số lượng giác thành các chuỗi vô hạn và đánh giá sai số. Các thuật ngữ "hội tụ" và "phân kỳ" được Gregory đề cập vào năm 1668. Lý thuyết chuỗi sau đó phát triển mạnh mẽ với sự đóng góp đáng kể của các nhà toán học vĩ đại như Carl Friedrich Gauss, Cauchy, Abel, Dirichlet, Raabe, Weierstrass,…

Nghiên cứu chuỗi lượng giác như một vấn đề phát sinh từ vật lý được thực hiện bởi Gauss, Abel, Cauchy. Bên cạnh đó, anh em nhà Bernoulli, Euler và trước đó là Viète đã quan tâm nghiên cứu các chuỗi khai triển theo sin, cosin. Năm 1807, Fourier (1768 – 1830) đã đưa ra phương pháp biểu diễn hàm số liên tục bằng chuỗi lượng giác và sử dụng vào giải phương trình truyền nhiệt trong vật thể rắn, từ đó dần hình thành lên lý thuyết chuỗi Fourier. Lý thuyết còn có sự đóng góp không nhỏ của các nhà toán học khác như: Euler, Cauchy, Poisson, Dirichlet, Heine, Lipschitz,…để hoàn thiện như ngày hôm nay. Có thể nói rằng hầu hết các thiết bị điện tử liên quan đến hình ảnh và âm thanh mà chúng ta dùng ngày hôm nay đều liên quan đến ứng dụng của lý thuyết chuỗi Fourier.

Jean Baptiste Joseph Fourier

3.1. Chuỗi số

3.1.1. Đại cương về chuỗi số

a) Định nghĩa chuỗi số

Cho dãy số (u_n). Biểu thức $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ được gọi là chuỗi số và ký hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Các số $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ được gọi là các số hạng của chuỗi số, số hạng u_n được gọi là số hạng tổng quát.

Đặt: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Khi đó S_n được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi số.

Ví dụ: Biểu thức $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là một chuỗi số, có tên là chuỗi điều hòa.

b) Tính hội tụ của chuỗi số

Cho chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, xét tổng riêng S_n.

+ Nếu $\lim S_n = S$ (S hữu hạn) thì ta nói rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng là S.

Khi đó, ta đặt $R_n = S - S_n$, được gọi là phần dư thứ n của chuỗi số, thì ta có kết quả: Nếu chuỗi số hội tụ thì $\lim R_n = 0$.

+ Nếu $\lim S_n = \infty$ hoặc không tồn tại $\lim S_n$ thì ta nói rằng chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

- Ví dụ 1

+ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right) + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3.\left(\frac{1}{2}\right).\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Do $\lim S_n = \lim\left[3 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 3$ nên ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3$.

+ Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}.3^n$

$$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{2}.3 + \frac{1}{2}.3^2 + ... + \frac{1}{2}.3^n = \frac{1}{2}.3.\frac{1-3^n}{1-3} = -\frac{3}{4}\left(1-3^n\right).$$

Do $\lim S_n = \lim\left[-\frac{3}{4}\left(1-3^n\right)\right] = +\infty$ nên ta nói chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} 3.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ phân kỳ.

+ Tổng quát: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a.q^n$ sẽ:

i) Hội tụ nếu $|q| < 1$ và có tổng bằng $\frac{aq}{1-q}$.

ii) Phân kỳ nếu $|q| \geq 1$.

c) Điều kiện cần để một chuỗi số hội tụ

- Định lý. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim u_n = 0$.

- Chứng minh

Do chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ nên $\lim S_n = S$ (hữu hạn) $\Rightarrow \lim S_{n-1} = S$.

Mặt khác ta có $u_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim u_n = \lim\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$.

- Nhận xét

+ Điều kiện ở định lý chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ, tức là nếu một chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ thỏa mãn $\lim u_n = 0$ thì chưa chắc chuỗi số đó đã hội tụ.

Ví dụ 2. Xét chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, khi đó $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ nhưng chuỗi này phân kỳ.

+ Nếu một chuỗi số không thỏa mãn điều kiện cần ở trên thì chắc chắn chuỗi đó phân kỳ, tức là nếu một chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà không thỏa mãn điều kiện $\lim u_n = 0$ thì chuỗi số đó phân kỳ.

d) Một số tính chất của chuỗi số hội tụ

- Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ và có tổng bằng S thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a.u_n$ (a là hằng số) cũng hội tụ và có tổng bằng $a.S$.

- Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ và có tổng lần lượt là S_1 và S_2 thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n + v_n\right)$ cũng hội tụ và có tổng bằng $S_1 + S_2$.

- Tính hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi số không thay đổi khi bớt đi một số hữu hạn số hạng đầu tiên.

3.1.2. Chuỗi số dương

a) Định nghĩa

- Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- Ví dụ 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n+2}$ là hai chuỗi số dương.

- Nhận xét. Với chuỗi số dương thì dãy tổng riêng $\left(S_n\right)$ là dãy số tăng. Do đó:

i) Nếu dãy $\left(S_n\right)$ bị chặn trên thì tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim S_n = S$ và chuỗi số hội tụ.

ii) Nếu dãy $\left(S_n\right)$ bị không bị chặn trên thì $\lim S_n = +\infty$ và chuỗi số phân kỳ.

b) Một số quy tắc so sánh đối với chuỗi số dương

- Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Giả sử $u_n \le v_n \ \forall n \ge n_0 \in \mathbb{N}$. Khi đó:

+ Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

+ Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

- Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim \frac{u_n}{v_n} = k > 0$ thì hai chuỗi số đã cho có cùng tính hội tụ hoặc phân kỳ.

c) Một số quy tắc khảo sát tính hội tụ của chuỗi số dương

- **Quy tắc D'Alembert.** Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$ thì:

+ Nếu $k < 1$ thì chuỗi số đã cho hội tụ.

+ Nếu $k > 1$ thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

- **Quy tắc Cauchy.** Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Giả sử $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$ thì:

+ Nếu $k < 1$ thì chuỗi số đã cho hội tụ.

+ Nếu $k > 1$ thì chuỗi số đã cho phân kỳ.

3.1.3. Chuỗi số có số hạng với dấu bất kỳ

a) Chuỗi số hội tụ tuyệt đối

- **Định lý.** Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ.

- **Định nghĩa.** Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ trong định lý trên được gọi là chuỗi số hội tụ tuyệt đối.

- **Chú ý.** Điều kiện "chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ hội tụ" chỉ là điều kiện đủ chứ không phải điều kiện cần, tức là tồn tại những chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ trong khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ phân kỳ.

b) Chuỗi số đan dấu

- **Định nghĩa.** Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Các chuỗi có dạng $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ hoặc $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ được gọi là chuỗi số đan dấu.

- Ví dụ 4. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...$ là một chuỗi đan dấu.

- Chú ý. Ta chỉ cần xét trường hợp chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ với số hạng $u_1>0$.

- Quy tắc Leibnitz với chuỗi đan dấu. Cho chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ với số hạng tổng quát $u_n>0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Nếu $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ hội tụ và có tổng $S<u_1$.

3.2. Chuỗi hàm số

3.2.1. Dãy hàm số

a) Dãy hàm số và một số khái niệm liên quan

- Cho $f_1,f_2,...,f_n,...$ là các hàm số cùng xác định trên một tập $D\subset\mathbb{R}$. Khi đó ta thu được một dãy hàm số và ký hiệu là (f_n).

- Ví dụ 5. Cho dãy hàm số $(f_n): f_n(x)=\sin nx,\ x\in\mathbb{R}$. Khi đó dãy hàm số có dạng liệt kê là:

$(f_n): f_1(x)=\sin x, f_2(x)=\sin 2x, f_3(x)=\sin 3x,..., f_n(x)=\sin nx,...\ x\in\mathbb{R}$.

- Chú ý. Với mỗi giá trị $x=x_0\in D$ dãy hàm số (f_n) trở thành dãy số $(f_n(x_0))$.

- Điểm hội tụ và tập hội tụ. Điểm $x=x_0\in D$ được gọi là điểm hội tụ của dãy hàm số (f_n) nếu dãy số $(f_n(x_0))$ hội tụ. Tập hợp các điểm hội tụ được gọi là tập hợp hội tụ (gọi tắt là tập hội tụ) của dãy hàm số.

b) Sự hội tụ và hội tụ đều của dãy hàm số

- Định nghĩa dãy hàm số hội tụ. Dãy hàm số (f_n) được gọi là hội tụ đến hàm số f trên tập $D\subset\mathbb{R}$ nếu tại $\forall x\in D$, với mọi số $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại số $n_0\in\mathbb{N}$ (số n_0 phụ thuộc vào x và ε) sao cho $\forall n\ge n_0:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

- Định nghĩa dãy hàm số hội tụ đều. Dãy hàm số (f_n) được gọi là hội tụ đều đến hàm số f trên tập $D\subset\mathbb{R}$ nếu tại $\forall x\in D$, với mọi số $\varepsilon>0$ cho trước, tồn tại số $n_0\in\mathbb{N}$ (số n_0 chỉ phụ thuộc vào ε mà không phụ thuộc vào x) sao cho $\forall n\ge n_0:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\ \forall x\in D$.

3.2.2. Chuỗi hàm số

- **Định nghĩa.** Cho dãy hàm số (u_n) xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$. Tổng hình thức dạng

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

được gọi là một chuỗi hàm số và được ký hiệu là $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Vậy: $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

- **Tổng riêng thứ n.** Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$, khi đó S_n được gọi là hàm tổng riêng thứ n, dãy (S_n) được gọi là dãy hàm tổng riêng của chuỗi hàm số trên.

- **Ví dụ 6.** Cho chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx$, khi đó tổng riêng thứ n của chuỗi hàm là:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin(n-1)x.\sin nx}{\sin \frac{x}{2}}.$$

3.2.3. Sự hội tụ của chuỗi hàm số

Xét chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ (1).

- Nếu dãy tổng riêng (S_n) hội tụ (hay phân kỳ) tại điểm $x_0 \in D$ thì ta nói chuỗi (1) hội tụ (hay phân kỳ) tại x_0 và x_0 là một điểm hội tụ (hay điểm phân kỳ) của chuỗi (1). Tập hợp các điểm hội tụ của chuỗi được gọi là tập hợp hội tụ (gọi tắt là tập hội tụ) của nó.

- Nếu tại điểm $x_0 \in D$ mà chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x_0)|$ hội tụ thì ta nói chuỗi (1) hội tụ tuyệt đối tại x_0.

- **Chú ý.** Định nghĩa về sự hội tụ và hội tụ đều của chuỗi hàm số (1) được quy về việc xét tính sự hội tụ và hội tụ đều của dãy hàm tổng riêng của chuỗi hàm số (1).

- **Ví dụ 7.** Tìm tập hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Lời giải

Ta có: $S_n(x) = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} + ... + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$

$$\Rightarrow S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x = 0 \\ x^2.\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)\left(1-\dfrac{1}{(1+x^2)^n}\right) & \text{khi } x \neq 0 \end{cases}.$$

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & khi\ x = 0 \\ 1+x^2 & khi\ x \neq 0 \end{cases}$. Do đó tập hội tụ của chuỗi đã cho là $\mathbb{R}$.

- **Ví dụ 8.** Tìm tập hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Lời giải

Chuỗi hàm số trên có tập hội tụ là $\left[-1;1\right)$. Chứng minh xin dành cho bạn đọc.

3.2.4. Chuỗi lũy thừa

a) Định nghĩa. Chuỗi hàm số có dạng $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ (với x_0 là hằng số cho trước) được gọi là chuỗi lũy thừa tại x_0 (hoặc tâm x_0).

Nhận xét

- Đặt $y = x - x_0$, chuỗi lũy thừa trong định nghĩa trở thành chuỗi lũy thừa dạng $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$. Do đó ta chỉ cần xét chuỗi lũy thừa tâm là $x_0 = 0$ dạng: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (1).

- Tập hội tụ của chuỗi (1) luôn khác rỗng do nó ít nhất chứa điểm $x = 0$.

b) Bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa

- **Định lý Abel.** Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| < |x_0|$.

- **Hệ quả.** Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hội tụ tại $x = x_0$ thì nó phân kỳ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > |x_0|$.

- **Nhận xét.** Như vậy, kết hợp với nhận xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ luôn hội tụ tại $x = 0$ thì từ định lý Abel ta suy ra rằng: Luôn tồn tại số R $(0 \le R < +\infty)$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ thỏa mãn:

+ Hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R; R)$.

+ Phân kỳ trong các khoảng $(-\infty; -R)$ và $(R; +\infty)$.

+ Tại các điểm $x = \pm R$, chuỗi lũy thừa có thể hội tụ hoặc phân kỳ.

- **Định nghĩa.** Số R trong nhận xét trên được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa. Khoảng $(-R; R)$ được gọi là khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa. Muốn tìm tập hội tụ của chuỗi lũy thừa, ta khảo sát tính hội tụ tại $x = \pm R$ rồi bổ sung vào khoảng hội tụ.

- **Quy tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa**

+ **Định lý.** Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Nếu $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$ (hoặc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$) thì bán kính hội tụ R được tính theo công thức: $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & khi\ 0 < \rho < +\infty \\ 0 & khi\ \rho = +\infty \\ +\infty & khi\ \rho = 0 \end{cases}$.

+ **Ví dụ 9.** Tìm tập hội tụ của chuỗi lũy thừa: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Lời giải

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow$ Khoảng hội tụ là $(-1; 1)$.

Xét tại $x = 1$ thì chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, đây là chuỗi điều hòa và nó phân kỳ.

Xét tại $x=-1$ thì chuỗi lũy thừa trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, đây là chuỗi đan dấu và nó thỏa mãn điều kiện Leibnitz nên chuỗi hội tụ.

Vậy tập hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ là $[-1;1)$.

c) Một số tính chất của chuỗi lũy thừa

- Tổng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ là hàm số liên tục trong khoảng hội tụ của nó.

- Có thể lấy tích phân từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ trên mọi đoạn $[a;b]$ nằm trong khoảng hội tụ của chuỗi.

Tức là: $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \left(a_n x^n \right) dx$.

- Có thể lấy đạo hàm (vô số lần) từng số hạng của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ tại mọi điểm nằm trong khoảng hội tụ của chuỗi.

Tức là: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ có khoảng hội tụ là $(-R;R)$ thì:

+ $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} \ \forall x \in (-R;R)$.

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)'' = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \ \forall x \in (-R;R)$

…

Và các chuỗi ở vế phải cũng có khoảng hội tụ là $(-R;R)$.

3.3. Chuỗi Fourier

3.3.1. Chuỗi lượng giác

- **Định nghĩa.** Chuỗi hàm số có dạng $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ (1), trong đó $a_0,a_n,b_n\ \left(n=1;2;...\right)$ là những hằng số, được gọi là chuỗi lượng giác.

- **Nhận xét.** Nếu chuỗi lượng giác (1) hội tụ về hàm $f\left(x\right)$ thì $f\left(x+2\pi\right)=f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm $f\left(x\right)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π. Vì vậy ta chỉ cần khảo sát chuỗi (1) trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$.

3.3.2. Hệ số Fourier và chuỗi Fourier

- Giả sử hàm số $f\left(x\right)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, khả tích trên $\left[-\pi;\pi\right]$, có thể khai triển được trên đoạn $\left[-\pi;\pi\right]$ thành chuỗi lượng giác dạng

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\ (2).$$

- Cách tính các hệ số

+ Tính a_0: Lấy tích phân của (2) ta được

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right)dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)dx=\pi a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nxdx\right)\ (3)$$

Dễ dàng tính được: $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$; $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Do đó (3) trở thành $\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\pi a_0\Leftrightarrow a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx$ (4).

+ Tính $a_n\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$: Nhân hai vế của (2) với $\cos kx,\ k\in\mathbb{N}^*$, ta được

$$f\left(x\right)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx\right).$$

Lấy tích phân 2 vế:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos kxdx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\cos kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\cos kxdx\right) \ (5),$$

với $k = 1;2;3;...$

Dễ dàng chứng minh được rằng: với mọi $n,k \in \mathbb{Z}$, ta có

i) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0$ (6)

ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx.\cos kxdx = 0$ (7)

iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx.\sin kxdx = \begin{cases} 0 \ khi \ k \neq n \\ \pi \ khi \ k = n \neq 0 \end{cases}$ (8)

iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx.\cos kxdx = \begin{cases} 0 \ khi \ k \neq n \\ \pi \ khi \ k = n \neq 0 \end{cases}$ (9).

Sử dụng các công thức (6), (7), (9) ở trên, khi đó, (5) trở thành

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2}dx = a_k\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2kx}{4k}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_k.$$

Suy ra $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx,\ k = 1;2;3;...$ (10).

+ Tính b_n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$: Nhân hai vế của (2) với $\sin kx,\ k \in \mathbb{N}^*$, ta được

$$f(x)\sin kx = \frac{a_0}{2}\sin kx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nx\sin kx + b_n \sin nx\sin kx\right).$$

Lấy tích phân 2 vế

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin kxdx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\sin kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\sin kxdx\right) \ (11), \text{ với}$$

$k = 1;2;3;...$

Sử dụng các công thức (6), (7), (8), khi đó, (11) trở thành

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2} dx = b_k \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2kx}{4k} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi b_k .$$

Suy ra $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k = 1;2;3;...$ (12).

- Định nghĩa

+ Các hệ số $a_0, a_n, b_n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định theo các công thức (4), (10), (12) được gọi là các hệ số Fourier của hàm số $f(x)$.

+ Chuỗi lượng giác (2) với các hệ số Fourier xác định bởi (4), (10), (12) được gọi là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$.

- Một số trường hợp đặc biệt

+ Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ

$$\Rightarrow \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \ k = 0;1;2;3;... \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0, \quad k = 1;2;3;... \end{cases} \qquad (13).$$

Khi đó chuỗi Fourier của $f(x)$ là: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ với các hệ số $a_k,\ k \in \mathbb{N}$ xác định ở (13).

+ Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $f(x)\cos kx$ là hàm lẻ, $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn

$$\Rightarrow \begin{cases} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \quad k = 0;1;2;3;... \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1;2;3;... \end{cases} \qquad (14).$$

Khi đó chuỗi Fourier của $f(x)$ là: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$ với các hệ số $b_k,\ k \in \mathbb{N}^*$ xác định ở (14).

3.3.3. Khai triển một hàm tuần hoàn thành chuỗi Fourier

Như trên đã khẳng định, mọi hàm $f(x)$ khả tích trên đoạn $[-\pi,\pi]$ đều có chuỗi Fourier tương ứng. Tuy nhiên chuỗi Fourier thu được trong trường hợp này có thể không hội tụ và nếu chuỗi hội tụ thì chưa chắc tổng của chuỗi đã bằng $f(x)$. Ta có một số kết quả cơ bản sau (không chứng minh).

a) Khai triển một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π thành chuỗi Fourier

Ta thừa nhận hai định lý sau đây

- Định lý. Nếu hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π, khả vi thì chuỗi Fourier của nó hội tụ và có tổng bằng $f(x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Kết quả của định lý trên còn đúng trong trường hợp tổng quát hơn như sau

- Định lý. Nếu hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 2π và thỏa mãn một trong hai điều kiện sau đây trên đoạn $[-\pi,\pi]$

+ $f(x)$ liên tục từng khúc và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục từng khúc.

+ $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn.

Khi đó chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ tại mọi điểm và có tổng $S(x)$ bằng:

+ $S(x)=f(x)$ tại những điểm mà $f(x)$ liên tục.

+ $S(x)=\dfrac{f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)}{2}$ tại các điểm $x=x_0$ mà $f(x)$ gián đoạn, với

$$f\left(x_0^+\right)=\lim_{x\to(x_0)^+}f(x);\ f\left(x_0^-\right)=\lim_{x\to(x_0)^-}f(x).$$

Các điều kiện nêu trong định lý trên được gọi là ***điều kiện Dirichlet***.

- Ví dụ 10. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và

$$f(x)=x\ \forall x\in(-\pi;\pi).$$

Từ đó, tính các tổng của chuỗi số: $S=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+...$

Lời giải

Hàm số đã cho thỏa mãn điều kiện Dirichlet nên có thể khai triển được thành chuỗi Fourier. Do $f(x)$ là hàm lẻ nên

+ $a_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

+ $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\dfrac{-\cos nx}{n}\right)$

$= \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \displaystyle\int_0^{\pi}\dfrac{\cos nx}{n}dx\right] = \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{-\pi\cos n\pi}{n} + 0\right] = -\dfrac{2}{n}\cos n\pi = (-1)^{n+1}.\dfrac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Vậy tại các điểm mà hàm số liên tục ($x \neq (2n+1)\pi, \ \forall n \in \mathbb{N}$) ta có

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Tại các điểm gián đoạn của hàm số thì

Với $x = \pi$: $S(\pi) = \dfrac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \dfrac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$.

Tương tự tại các điểm gián đoạn khác, ta đều có với $x = (2n+1)\pi, \ \forall n \in \mathbb{N}$: $S(x) = 0$.

Muốn tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$, ta biểu diễn chuỗi

$f(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n} = 2\left(\dfrac{\sin x}{1} - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)$ rồi thay $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta được

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \dfrac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} + \dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} - \ldots\right)$ và để ý rằng: $\sin\dfrac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & khi \ n = 2k \\ (-1)^k & khi \ n = 2k+1 \end{cases}$

Suy ra: $\dfrac{\pi}{2} = 2\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \ldots\right) \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} = 2S \Rightarrow S = \dfrac{\pi}{4}$.

- Ví dụ 11. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ khi \ -\pi \le x < 0 \\ 1 \ khi \ 0 \le x < \pi \end{cases} \text{ (hàm sóng vuông).}$$

Từ đó, tính tổng chuỗi số $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$

Lời giải

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} 1.dx\right) = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} 1.\cos nxdx\right) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0.\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} 1.\sin nxdx\right) = \frac{1}{\pi}.\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Mặt khác ta có: $\cos n\pi = \begin{cases} 1 & khi\ n = 2k \\ -1 & khi\ n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow 1-\cos n\pi = \begin{cases} 0 & khi\ n = 2k \\ 2 & khi\ n = 2k+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow b_n = \begin{cases} 0 & khi\ n = 2k \\ \dfrac{2}{n\pi} & khi\ n = 2k+1 \end{cases}.$$

Vậy tại các điểm mà hàm số liên tục ($x \neq n\pi,\ \forall n \in \mathbb{N}$) ta có

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Tại các điểm gián đoạn của hàm số thì

Với $x = 0$: $S(0) = \dfrac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự tại các điểm gián đoạn khác, ta đều có với $x = n\pi,\ \forall n \in \mathbb{N}$: $S(x) = \dfrac{1}{2}$.

Muốn tính tổng $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots$, ta biểu diễn chuỗi

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

rồi thay $x = \dfrac{\pi}{2}$ ta được: $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} + \dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2} + \dfrac{\sin\frac{5\pi}{2}}{3} + \ldots\right)$

và để ý rằng: $\sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$.

Suy ra: $1=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...\right)\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}S\Rightarrow S=\frac{\pi}{4}$.

b) Khai triển một hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$ thành chuỗi Fourier

- Nếu hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên đoạn $[-l,l]$. Việc khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier được thực hiện như sau

+ Đặt $t=\frac{\pi}{l}x$.

+ Khi đó: $f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t)$ và nhận xét $g(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 2π và thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên đoạn $[-\pi;\pi]$.

+ Thực hiện khai triển Fourier của hàm $g(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π trên đoạn $[-\pi;\pi]$

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Với các hệ số Fourier được tính theo các công thức sau

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos ntdt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin ntdt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

- Ví dụ 12. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T=2$, với

$$f(x)=x^2\ \forall x\in[-1;1].$$

Lời giải

Nhận xét hàm $f(x)$ là hàm chẵn, do đó $b_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $l=1$. Vậy các hệ số còn lại tính như sau

$$a_0=\int_{-l}^{l}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}.$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx = \int_0^1 2x^2 d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{2x^2 \sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}.4xdx \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 xd\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{4}{n\pi}\left(\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\bigg|_0^1\right) = \frac{4\cos n\pi}{(n\pi)^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Nhận xét rằng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\cos n\pi = (-1)^n$. Do đó: $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy ta có khai triển

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

Hay $f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}\cos n\pi x = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\cos \pi x}{1^2} + \frac{\cos 2\pi x}{2^2} - \frac{\cos 3\pi x}{3^2} + ...\right)$.

c) Khai triển hàm số bất kỳ thành chuỗi Fourier

- Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn điều kiện Dirichlet trên đoạn $[a,b]$. Muốn khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta thực hiện như sau

+ Xây dựng một hàm $g(x)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T \geq b-a$ thỏa mãn

$$g(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b].$$

+ Thực hiện khai triển Fourier hàm $g(x)$.

Khi đó tổng của chuỗi Fourier thu được bằng $f(x)$ tại mọi điểm (không phải là điểm gián đoạn của $f(x)$) trên đoạn $[a,b]$.

- Nhận xét

+ Căn cứ vào cách xây dựng như trên thì có thể có nhiều hàm $g(x)$. Với mỗi hàm $g(x)$ đó lại có một chuỗi Fourier tương ứng. Như vậy sẽ có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm $f(x)$.

+ Nếu $f(x)$ làm hàm chẵn thì chuỗi Fourier thu được chỉ gồm hàm cos.

+ Nếu $f(x)$ làm hàm lẻ thì chuỗi Fourier thu được chỉ gồm hàm sin.

d) Khai triển Fourier trên đoạn $[0;\pi]$

Để tìm khai triển Fourier của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;\pi]$, ta xây dựng hàm $g(x)$ như mục c trên đây đã đề cập. Nói chung là có nhiều cách xây dựng hàm $g(x)$ như vậy. Tuy nhiên ta thường dùng hai cách sau đây

i) Xây dựng hàm $g(x)$ là hàm chẵn: $g(x)=\begin{cases} f(x) & khi\ x\in[0;\pi] \\ f(-x) & khi\ x\in[-\pi;0] \end{cases}$.

ii) Xây dựng hàm $g(x)$ là hàm lẻ: $g(x)=\begin{cases} f(x) & khi\ x\in[0;\pi] \\ -f(-x) & khi\ x\in[-\pi;0] \end{cases}$.

3.3.4. Đẳng thức Parseval

Giả sử hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tuần hoàn chu kỳ 2π và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Đồng thời chuỗi Fourier của $f(x)$ là $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ trừ tại các điểm gián đoạn loại 1 của nó.

Khi đó ta có công thức: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)$.

Đẳng thức này được gọi là đẳng thức Parseval.

3.3.5. Dạng phức của chuỗi Fourier

- Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tuần hoàn chu kỳ 2π và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Đồng thời chuỗi Fourier của $f(x)$ là: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ trừ tại các điểm gián đoạn loại 1 của nó.

Đặt: + $u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

+ $\alpha_0=\frac{a_0}{2}$

+ $\alpha_n=\begin{cases} \frac{a_n-i.b_n}{2} & khi\ n\geq 1 \\ \frac{a_{-n}-i.b_{-n}}{2} & khi\ n\leq -1 \end{cases}$

Ta có: $u_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$.

Hay $u_n\left(x\right)=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)=$

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{a_n+ib_n}{2}e^{inx}.$$

Vậy khai triển có thể được viết gọn lại dưới dạng: $f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n e^{inx}$.

Dạng này được gọi là dạng phức của chuỗi Fourier của hàm $f\left(x\right)$.

Với các hệ số α_n được tính theo công thức: $\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Khẳng định này dễ dàng suy ra từ phép đặt ở trên.

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2}{n^2+3}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^n$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}\left(4^n+1\right)}$.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n\left(4n^2+1\right)}}$.

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n\left(n^7+3n\right)}}$.

Bài 2. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau và tính tổng của chuỗi nếu nó hội tụ

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}$.

Bài 3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$.

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+2}$.

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^n$.

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^n \sin\frac{\pi}{3^n}$.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n\sqrt{n+5}} \left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^n$.

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+1}{n-2}\right)^n (x-2)^n$.

Bài 4. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và

a) $f(x) = 2x \;\; \forall x \in [-\pi;\pi]$.

b) $f(x) = \begin{cases} \pi + x \; khi \; -\pi \le x < 0 \\ \pi - x \; khi \; 0 \le x \le \pi \end{cases}$.

c) $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \;\; khi \; -\pi < x < 0 \\ 0 \quad khi \; x = 0 \\ \frac{\pi}{4} \quad khi \; 0 < x < \pi \end{cases}$.

d) $f(x) = \begin{cases} 0 \;\; khi \; -\pi \le x < 0 \\ x \; khi \; 0 \le x < \pi \end{cases}$.

e) $f(x) = |x| \;\; \forall x \in [-\pi, \pi]$.

Bài 5. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ là hàm chẵn, tuần hoàn chu kỳ 2π và

$$f(x) = \pi - x \;\; \forall x \in [0;\pi].$$

Từ đó, tính tổng chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

Bài 6. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và

$$f(x) = x \ \forall x \in [0; 2\pi].$$

Bài 7. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 6$ và

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ \ khi \ -3 \le x \le 0 \\ \dfrac{x}{3} \ \ khi \ 0 < x \le 3 \end{cases}.$$

Bài 8. Khai triển hàm số $f(x) = \dfrac{x}{2}$ (với $0 < x < 2$) thành chuỗi Fourier theo

a) Các hàm số cos.

b) Các hàm số sin.

Bài 9. Khai triển thành chuỗi Fourier dạng phức của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2\pi$ và $f(x) = e^{2x} \ \forall x \in (-\pi, \pi)$.

Bài 10. Khai triển thành chuỗi Fourier dạng lượng giác và dạng phức của hàm $f(x)$ tuần hoàn chu kỳ $T = 2$ và $f(x) = x \ \forall x \in (0; 2)$. Sau đó tính tổng của chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

ĐÁP SỐ BÀI TẬP CÁC CHƯƠNG

1. ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 1

Bài 1.

a) $A = -12 + 34i$.

b) $B = \frac{35}{13} - \frac{20}{13}i$.

Bài 2.

a) Dạng đại số: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

Dạng lượng giác: $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\ z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$;

Dạng mũ: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) Sinh viên tự chứng minh.

Bài 3.

a) $z_1 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right],\ z_2 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$;

$z_3 = \cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$;

b) Kết hợp dạng lượng giác và dạng đại số của z_3 ta được:

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4};\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Bài 4.

a) $A = 256$.

b) $B = -2^6\left(\sqrt{3} + i\right)$.

c) $C = -\frac{1}{16}$.

d) $D=2^9\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

e) $E=-64$.

Bài 5.

a) $z_k=\sqrt[3]{3}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\right)\right],\ k\in\{0;1;2\}$;

b) $z_k=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\right)\right],\ k\in\{0;1;2\}$.

Bài 6.

a) $n=3k,\ k\in\mathbb{N}^*$.

b) Không tồn tại *n* thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7. Sinh viên tự chứng minh.

Bài 8.

a) $f(z)=-1984\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n\ \left(|z-1|<1\right),\ f^{(2023)}(1)=-2023!1984$.

b) $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(2-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-3)^n\ \left(|z-3|<1\right),\ f^{(2023)}(3)=\left(\frac{1}{2^{2024}}-2\right)2023!$.

c) $f(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\cos\frac{(n+1)\pi}{4}(z-1)^n\ \left(|z-1|<\sqrt{2}\right),\ f^{(2023)}(1)=-\frac{2023!}{2^{1012}}$.

Bài 9.

a) $I=-6+3i$.

b) $I=\frac{69}{2}-51i$.

Bài 10.

a) $f(z)=(z-2)^{-2023}+(1+i)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(z-2)^{n-2023}$.

b) Sinh viên tự giải.

Bài 11.

a) $I = -\pi + 2\pi i$.

b) $I = \pi$.

c) $I = 2\pi i$.

Bài 12.

a) $I = -2\pi i$.

b) $I = -\dfrac{5\pi i}{8}$.

Bài 13.

a) $\underset{0}{res} f(z) = -\dfrac{1}{2},\ \underset{2i}{res} f(z) = -\dfrac{1}{2} + 2i.$

b) $\underset{0}{res} f(z) = -\dfrac{4}{9}i,\ \underset{-3i}{res} f(z) = \dfrac{4}{9}i.$

c) $\underset{1}{res} f(z) = -\dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i,\ \underset{-2i}{res} f(z) = \dfrac{3}{25} + \dfrac{4}{25}i.$

Bài 14.

a) $\underset{\infty}{res} f(z) = 1 - 2i$.

b) $\underset{\infty}{res} f(z) = 0$.

c) $\underset{\infty}{res} f(z) = 0$.

Bài 15.

a) $\underset{0}{res} f(z) = 1,\ \underset{1}{res} f(z) = -\dfrac{1}{2},\ \underset{-1}{res} f(z) = \dfrac{1}{2}.$

b) $\underset{i}{res} f(z) = -\dfrac{i}{4},\ \underset{\infty}{res} f(z) = 0.$

c) $\underset{\infty}{res} f(z) = 0.$

2. ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 2

Bài 1.

a) $F(p)=\frac{3}{p-2}-\frac{4}{p-5}+\frac{10}{p^2+4}-\frac{7}{p^2+1}$.

b) $F(p)=\frac{2}{p-3}-\frac{3}{p+2}+\frac{2}{p^2+4}-\frac{p}{p^2+9}+\frac{1}{p}$.

c) $F(p)=\frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}$.

d) $F(p)=-\frac{6(p-2)}{((p-2)^2+1)^2}+\frac{8(p-2)^3}{((p-2)^2+1)^3}$.

e) $F(p)=\frac{\ln 2}{p}-\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+\frac{p^2}{4}\right)}{p}+\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1+\frac{p^2}{16}\right)}{p}$.

f) $F(p)=\frac{A}{p}+\frac{Ae^{-pT}}{p}-\frac{2Ae^{-2pT}}{p}$.

g) $F(p)=\frac{1}{p^3}+\frac{p^3-48p}{(p^2+16)^3}$.

Bài 2. Sinh viên tự chứng minh.

Bài 3.

a) $-\frac{1}{2}e^t+\frac{9}{10}\cos t+\frac{3}{10}\sin t+\frac{3}{5}e^{2t}$.

b) $2t\sin t$.

c) $t^2\cos t$.

d) $t^3\cos t$.

Bài 4. Sinh viên tự giải.

Bài 5.

a) $y(t)=-\frac{1}{80}\cos 2t-\frac{3}{80}\sin 2t+\frac{1}{80}e^{-4t}-\frac{1}{16}e^{-2t}+\frac{1}{16}$.

b) $y(t) = -\frac{1}{40}\cos 2t + \frac{1}{80}\sin 2t + \frac{19}{960}e^{-6t} + \frac{3}{64}e^{2t} - \frac{1}{24}$.

Bài 6. Sinh viên tự giải.

3. ĐÁP SỐ CÁC BÀI TẬP CHƯƠNG 3

Bài 1.

a) Phân kỳ.

b) Phân kỳ.

c) Phân kỳ.

d) Phân kỳ.

e) Hội tụ.

f) Hội tụ.

g) Hội tụ.

Bài 2.

a) Hội tụ, $S = \frac{1}{2}$.

b) Hội tụ, $S = 1$.

c) Hội tụ, $S = 1$.

Bài 3.

a) $(-1;1]$.

b) $\mathbb{R}$.

c) $[-1;1)$.

d) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right) \cup (1;+\infty)$.

e) $(-2;1)$.

f) $(-\infty;-8] \cup (-2;+\infty)$.

g) $\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Bài 4.

a) Với $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}: f(x) = 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$,

Với $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}:\ S(x) = 0$.

b) $f(x) = \frac{\pi}{2} + 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Với $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}: f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{2n}\sin nx$,

Với $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}:\ S(x) = 0$.

d) Với $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}: f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$,

Với $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}:\ S(x) = \frac{\pi}{2}$.

e) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{(2n-1)^2}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 5. $f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2},\ S = \frac{\pi^2}{8}$.

Bài 6. Với $x \neq k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}: f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$,

Với $x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}:\ S(x) = \pi$.

Bài 7. $f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3} + \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$.

Bài 8.

a) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

b) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Bài 9. $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{sh(2\pi)}{\pi\left(n^2+4\right)}(2+in)e^{inx} \ \forall x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Bài 10. $f(x) = 1 - 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\pi x}{n\pi} \ \forall x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z};\ S = \dfrac{\pi}{4}.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hoàng Văn Hùng (2009), *Bài giảng Toán chuyên đề khoa Điện.*

[2] Nguyễn Đình Trí (chủ biên), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2006), *Toán học cao cấp (tập 2) – Phép tính giải tích một biến số*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[3] Đặng Đình Áng (chủ biên), Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Nguyễn Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân (2009), *Biến đổi tích phân*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[4] Trần Bình (2009), *Giải tích II và III (Phép tính vi phân và tích phân của hàm nhiều biến)*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

[5] Nguyễn Thủy Thanh (2006), *Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[6] Tô Bá Đức (chủ biên), Đào Lê Thu Thảo, Nguyễn Hữu Phát (2008), *Giáo trình Toán kỹ thuật*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

[7] Phạm Ngọc Thao (chủ biên), Lê Mậu Hải, Nguyễn Văn Khuê, Nguyễn Đình Sang, Bùi Đắc Tắc (1998), *Giáo trình Toán đại cương – Phần II: Giải tích (tập 2)*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[8] M.R. Spiegel (2005), *Laplace Transform,* McGraw Hill.