TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
BỘ MÔN TOÁN

BÀI GIẢNG

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

TÊN HỌC PHẦN:	**PHƯƠNG PHÁP TÍNH**
MÃ HỌC PHẦN:	**18146**
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO:	**ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**

Hải Phòng - 2023

Mục lục

1 Số gần đúng và Sai số **1**

1.1 Khái niệm về số gần đúng 1

1.1.1 Sai số tuyệt đối, sai số tương đối 1

1.1.2 Sự làm tròn số, sai số làm tròn 2

1.2 Cách viết số xấp xỉ 3

1.2.1 Chữ số có nghĩa 3

1.2.2 Chữ số chắc 3

1.2.3 Cách viết số xấp xỉ 4

1.3 Sai số tính toán 4

1.3.1 Sai số các phép tính cộng trừ 5

1.3.2 Sai số các phép tính nhân chia 5

1.3.3 Sai số của phép lũy thừa, khai căn, nghịch đảo 6

1.3.4 Bài toán ngược của lý thuyết sai số 7

1.4 Sai số phương pháp và sai số tính toán 7

Bài tập 8

2 Phép nội suy **10**

2.1 Nội suy bằng đa thức đại số 10

2.1.1 Bài toán nội suy 10

2.1.2 Sai số phương pháp của phép nội suy 11

2.1.3 Sai số tính toán của phép nội suy 12

2.2 Đa thức nội suy Lagrange 13

2.3 Công thức nội suy Newton mốc cách đều 15

2.3.1 Sai phân và các tính chất 15

2.3.2 Bảng sai phân 15

2.3.3 Đa thức nội suy Newton tiến 16

2.3.4 Đa thức nội suy Newton lùi 17

2.3.5 Một số ví dụ áp dụng sai phân và nội suy 19

2.4 Phương pháp bình phương bé nhất 20

2.4.1 Nội dung phương pháp 20

2.4.2 Một số trường hợp áp dụng 21
Bài tập 24

3 Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình **26**
3.1 Nghiệm và khoảng phân li nghiệm 27
3.2 Phương pháp chia đôi 28
3.2.1 Mô tả phương pháp 28
3.2.2 Thuật toán của phương pháp chia đôi 28
3.3 Phương pháp Newton 30
3.3.1 Mô tả phương pháp 30
3.3.2 Sai số phương pháp 31
3.3.3 Thuật toán của phương pháp Newton 32
Bài tập 32

4 Tính gần đúng đạo hàm và tích phân **34**
4.1 Tính gần đúng đạo hàm 34
4.1.1 Sử dụng đa thức nội suy Lagrange 34
4.1.2 Sử dụng công thức nội suy Newton 35
4.2 Tính gần đúng tích phân 36
4.2.1 Phương pháp đa thức nội suy 36
4.2.2 Phương pháp hình thang 37
4.2.3 Công thức parabol (Simpson) 40
Bài tập 42

Chương 1

Số gần đúng và Sai số

1.1 Khái niệm về số gần đúng

1.1.1 Sai số tuyệt đối, sai số tương đối

Trong tính toán ta thường phải làm việc với các giá trị gần đúng của các đại lượng. Ta nói a là số gần đúng A, nếu a không sai khác A nhiều. Đại lượng $\Delta := |a - A|$ gọi là *sai số thực sự* của a. Do không biết A nên cũng không biết Δ. Tuy nhiên ta có thể tìm được số dương Δa thỏa mãn điều kiện:

$$|a - A| \leq \Delta a \tag{1.1}$$

hay $a - \Delta a \leq A \leq a + \Delta a$. Số dương Δa này gọi là sai số tuyệt đối của a. Rõ ràng nếu Δa đã là sai số tuyệt đối của a thì mọi số $\Delta' > \Delta a$ đều có thể xem là sai số tuyệt đối của a. Vì vậy trong những điều kiện cụ thể người ta chọn Δa là số dương bé nhất có thể được thỏa mãn (1.1).

Nếu a là số gần đúng của A có sai số tuyệt đối là Δa thì ta quy ước viết:

$$A = a \pm \Delta a \tag{1.2}$$

Tỷ số $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$ được gọi là sai số tương đối của a. Ta suy ra $\Delta a = |a|\delta a$, do đó (1.2) cũng có thể viết

$$A = |a|(1 \pm \delta a) \tag{1.3}$$

$\oplus$ **Nhận xét** Δa có cùng thứ nguyên với a, còn δa là số không có thứ nguyên và được biểu diễn bằng %.

• **Ví dụ 1.1.** Giả sử $A = \pi$; $a = 3,14$. Do $3,14 < A < 3,15 = 3,14 + 0,01$ nên ta có thể lấy $\Delta a = 0,01$. Mặt khác, $3,14 < A < 3,142 = 3,14 + 0,002$ do đó có thể lấy $\Delta a = 0,002$.

• **Ví dụ 1.2.** Đo độ dài hai đoạn thẳng AB, CD ta được $a = 10cm$ và $b = 1cm$ với $\Delta a = \Delta b = 0,01cm$. Khi đó ta có $\delta a = \dfrac{0,01}{10} = 0,1\%$ còn $\delta b = \dfrac{0,01}{1} = 1\%$ hay $\delta b = 10\delta a$.

Hiển nhiên phép đo a chính xác hơn hẳn phép đo b mặc dù $\Delta a = \Delta b$. Như vậy độ chính xác của một phép đo được phản ánh qua sai số tương đối.

1.1.2 Sự làm tròn số, sai số làm tròn

Một số thập phân a đều biểu diễn được dưới dạng:

$$a = \pm(\beta_p 10^p + \beta_{p-1}10^{p-1} + \cdots + \beta_{p-s}10^{p-s})$$

trong đó β_i $(i = p, p-1, \ldots, p-s)$ là các số nguyên dương từ 0 đến 9. Chẳng hạn $a = 572,96 = 5.10^2 + 7.10^1 + 2.10^0 + 9.10^{-1} + 6.10^{-2}$, ở đây $\beta_2 = 5, \beta_1 = 7, \beta_0 = 2, \beta_{-1} = 9, \beta_{-2} = 6$.

Làm tròn a là bỏ đi một số các chữ số bên phải a để được một số $\overline{a}$ ngắn gọn hơn và gần đúng nhất với a.

⊙ **Qui tắc thu gọn:** Giả sử

$$a = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_j 10^j + \cdots + \beta_{p-s}10^{p-s}$$

và ta giữ lại đến số hạng thứ j. Gọi phần vứt bỏ là μ, ta đặt

$$\overline{a} = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_{j+1}10^{j+1} + \widetilde{\beta}_j 10^j,$$

trong đó:

$$\widetilde{\beta}_j := \begin{cases} \beta_j + 1 & \text{nếu} \quad 0,5.10^j < \mu < 10^j \\ \beta_j & \text{nếu} \quad 0 < \mu < 0,5.10^j \end{cases}$$

Trường hợp $\mu = 0,5.10^j$ thì $\overline{\beta}_j = \beta_j$ nếu β_j là chẵn và $\overline{\beta}_j = \beta_j + 1$ nếu β_j là lẻ vì tính toán với số chẵn thuận tiện hơn.

• **Ví dụ 1.3.** Thu gọn đến 2 chữ số sau dấu phẩy các số sau:

$a = 572,96573 \quad \overline{a} = 572,97;$ $\qquad b = 45,75346 \quad \overline{b} = 45,75$

$c = 301,38500 \quad \overline{c} = 301,38;$ $\qquad d = 432,23500 \quad \overline{d} = 432,24$

⊙ **Sai số làm tròn:** Sai số làm tròn là số $\theta a \geq 0$ thỏa mãn điều kiện:

$$|\overline{a} - a| \leq \theta a$$

Vì $a = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_j 10^j + \mu$, còn $\overline{a} = \beta_p 10^p + \cdots + \beta_{j+1} 10^{j+1} + \widetilde{\beta}_j 10^j$ nên

$$|a - \overline{a}| = |(\beta_j - \widetilde{\beta}_j)10^j + \mu| < 0,5.10^j.$$

⊙ **Sai số của số đã thu gọn:** Ta có

$$\overline{a} - A = \overline{a} - a + a - A$$

do đó $|\overline{a} - A| \leq |\overline{a} - a| + |a - A| \leq \Delta a + \theta a$

Vậy có thể lấy: $\Delta\overline{a} = \Delta a + \theta a$, tức là sau khi thu gọn, sai số tuyệt đối tăng lên.

⊙ **Ảnh hưởng của sai số thu gọn:** Ta xét một ví dụ. Áp dụng công thức nhị thức Niutơn ta có công thức đúng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \tag{1.4}$$

với $\sqrt{2} = 1,41421356...$

Bây giờ ta tính hai vế của (1.4) bằng cách thay $\sqrt{2}$ bởi các số quy tròn:

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,000147912	0,508
1,41421	0,0001866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Sự khác biệt giữa các giá trị tính ra của hai vế chứng tỏ rằng sai số quy tròn có thể gây ra những kết quả không mong muốn trong quá trình tính toán.

1.2 Cách viết số xấp xỉ

1.2.1 Chữ số có nghĩa

Chữ số có nghĩa là mọi chữ số khác "0" và cả "0" nếu nó kẹp giữa hai chữ số có nghĩa hoặc nó đại diện cho hàng được giữ lại.

• **Ví dụ 1.4.** $a = 0,0030140$. Ba chữ số "0" đầu không có nghĩa.

1.2.2 Chữ số chắc

Giả sử a là giá trị gần đúng của A với sai số tuyệt đối Δa. Ta biết rằng mọi số thập phân a đều viết được dưới dạng: $a = \pm \sum \beta_i 10^i$, trong đó β_i là những số nguyên từ

0 đến 9. Chữ số có nghĩa β_i của a gọi là chữ số chắc, nếu $\Delta a \leq \omega \times 10^i$, trong đó ω là tham số cho trước. Tham số ω được chọn để một chữ số vốn đã chắc sau khi thu gọn vẫn là chữ số chắc. Giả sử chữ số chắc cuối cùng của a trước khi thu gọn là β_i. Để β_{i+1} và các chữ số trước nó vẫn chắc, phải có:

$$\Delta a + \theta a \leq \omega \times 10^{i+1} \Rightarrow \omega \times 10^i + 0,5 \times 10^{i+1} \leq \omega \times 10^{i+1}$$

hay $\omega \geq 5/9$. Đặc biệt β_i gọi là chữ số chắc theo nghĩa hẹp (nghĩa rộng) nếu $\omega = 0,5$ ($\omega = 1$).

• **Ví dụ 1.5.** Cho $a = 65,8274$ với $\Delta a = 0,0043$ thì các chữ số 6, 5, 8, 2 là chắc, còn các chữ số 7,4 là không chắc. Nếu $\Delta a = 0,0067$ thì các chữ số 6, 5, 8 là chắc còn các chữ số 2,7,4 là không chắc.

Như vậy, sai số tuyệt đối Δa tách số gần đúng a thành 2 phần: phần ở bên trái gồm các chữ số chắc, phần còn lại ở bên phải gồm các chữ số không chắc. Độ chính xác của một số gần đúng được đánh giá không phải ở chỗ số ấy có nhiều chữ số mà ở chỗ số ấy có nhiều chữ số chắc.

⊙ **Chú ý:** Khi viết số gần đúng, chỉ nên giữ lại một hai chữ số không chắc để khi tính toán sai số chỉ tác động đến các chữ số không chắc mà thôi.

1.2.3 Cách viết số xấp xỉ

Cho a là số gần đúng của A với sai số tuyệt đối là Δa. Có hai cách viết số A:

i. Viết kèm theo sai số như ở công thức (1.1) hoặc (1.2).

ii. Viết theo quy ước: mọi chữ số có nghĩa đều là chữ số chắc. Như vậy hai số gần đúng $a = 9$ và $b = 9,00$ khác xa nhau về độ chính xác, số a có thể sai số đến 1 đơn vị, còn số b chỉ có thể sai đến 0,01 đơn vị.

1.3 Sai số tính toán

Giả sử cần tính giá trị đại lượng $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ trong đó chỉ biết các giá trị gần đúng của đối số là $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với các sai số tương ứng là Δx_i (hay δx_i). Sai số của $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là sai số tính toán.

Nếu f là một hàm khả vi, liên tục theo các biến x_i thì

$$y - y^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\overline{x})(x_i - x_i^*)$$

trong đó $\overline{x}$ là điểm trung gian nằm giữa các điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Do f'_{x_i} liên tục và Δx_i khá bé nên ta có thể viết

$$|y - y^*| \approx |\sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_i - x_i^*)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}|\Delta x_i =: \Delta y \tag{1.5}$$

Khi đó

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f'_{x_i}|}{|f|}\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\Delta x_i \tag{1.6}$$

1.3.1 Sai số các phép tính cộng trừ

Nếu $y = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_n$ thì $y'_{x_i} = \pm 1, \forall i = 1, 2, \ldots, n$ nên theo (1.5) ta có:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i,$$

tức là sai số tuyệt đối của tổng bằng tổng sai số tuyệt đối của các số hạng.

Giả sử $\Delta x_m = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ và chữ số chắc cuối cùng của x_m ở hàng thứ k, nghĩa là $\Delta x_m = 10^k$. Ta có $\Delta y \geq \Delta x_m$, vì vậy khi làm phép cộng đại số, nên qui tròn các x_i đến mức giữ lại 1 hoặc 2 chữ số bên phải hàng thứ k.

⊙ **Chú ý** Trường hợp tổng đại số rất nhỏ, nghĩa là $|y| << 1$ thì sai số tương đối $\delta y = \dfrac{\Delta y}{|y|}$ trở nên rất lớn, do đó kết quả không chính xác. Vì vậy trong tính toán cần phải tránh các công thức có hiệu của hai số gần nhau.

1.3.2 Sai số các phép tính nhân chia

Giả sử

$$y = \frac{x_1 \ldots x_p}{x_{p+1} \ldots x_n}$$

Khi đó

$$\ln y = \sum_{i=1}^{p} \ln x_i - \sum_{j=p+1}^{n} \ln x_j \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \ln y = \pm 1$$

Theo (1.6) suy ra

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i,$$

tức là sai số tương đối của phép toán nhân chia bằng tổng sai số tương đối các số hạng.

Gọi $\delta x_m = \max\limits_{1\le i\le n} \delta x_i$ và chữ số chắc cuối cùng của x_m ở hàng thứ k, ta thấy $\delta y \ge \delta x_m$ nên khi làm các phép tính trung gian để tính y chỉ cần lấy $k+1$, $k+2$ chữ số là đủ.

1.3.3 Sai số của phép lũy thừa, khai căn, nghịch đảo

Cho $y = x^\alpha$, khi đó $\delta y = |\frac{d}{dx}\ln y|\Delta x = |\alpha|\delta x$

- Nếu $\alpha > 1$ (phép luỹ thừa) thì $\delta y > \delta x$, do đó độ chính xác giảm.
- Nếu $0 < \alpha < 1$ (phép khai căn) thì $\delta y < \delta x$ hay độ chính xác tăng.
- Nếu $\alpha = -1$ ta có phép nghịch đảo, $\delta y = \delta x$ nghĩa là độ chính xác không đổi.

• **Ví dụ 1.6.** Một sân nhỏ hình chữ nhật có các kích thước đo được là: $x = 2,56m \pm 0,01m$, $y = 4,2m \pm 0,02m$. Tính chu vi và diện tích của sân?

Giải

Chu vi của sân là $P = 2(x+y) \approx 2(2,56+4,2) = 13,52m$. Sai số tuyệt đối $\Delta P = 2(\Delta x + \Delta y) = 0,06$. Vì $0,01 < 0,06 < 0,1$ nên P chỉ có 3 chữ số chắc và có thể viết $P \approx 13,5m$.

Diện tích của sân: $S = xy \approx 2,56.4,2 = 10,752$. Sai số tương đối $\delta S = \delta x + \delta y = \frac{1}{256} + \frac{1}{210}$, do đó $\Delta S = |S|.\delta S = 0,093 < 0,1$. Như vậy S có 3 chữ số chắc và có thể viết $S \approx 10,8m^2$.

• **Ví dụ 1.7.** Cho diện tích hình vuông $S = 12,34$, $\Delta S = 0,01$. Tính cạnh $a =$?

Ta có $a = \sqrt{S} \approx 3,5128$. Vì $\delta S = \Delta S/|S| \approx 0,01/12,34 \approx 0,0008$ nên $\Delta a \approx 3,5128 \times 0,0004 \approx 1,4 \times 10^{-3}$. Như vậy a có 4 chữ số chắc và $a \approx 3,513$.

• **Ví dụ 1.8.** Tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của thể tích hình cầu: $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, biết $d = 3,7 \pm 0,05$ và $\pi = 3,14$.

Giải

Xem π và d là đối số của V thì theo (1.5) và (1.6) ta có: $\delta V = \delta\pi + 3\delta d$ trong đó $\delta d = 0,0016/3,14 = 0,0005$ và $\delta d = 0,05/3,7 = 0,0135$. Suy ra $\delta V = 0,0005 + 3 \times 0,0135 \approx 0,04$. Mặt khác $V = \frac{1}{6}\pi d^3 \approx 26,5$ nên $\Delta V = |V|\delta V = 26,5.0,04 \approx 1,1$. Vậy $V = 26,5 \pm 1,1cm^3$.

1.3.4 Bài toán ngược của lý thuyết sai số

Giả sử đại lượng y tính theo công thức $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Hỏi phải lấy Δx_i bằng bao nhiêu để $\Delta y \leq const$ cho trước?

⊙ **Nguyên lý ảnh hưởng đều:** Ta coi $|f'_{x_i}|\Delta x_i = c(i = \overline{1,n})$, khi đó

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} |f'_{x_i}|\Delta x_i = nc \Rightarrow \Delta x_i = \frac{c}{|f'_{x_i}|} = \frac{\Delta y}{n|f'_{x_i}|}$$

• **Ví dụ 1.9.** Một hình trụ có bán kính đáy $R = 2m$, chiều cao $h = 3m$. Hỏi ΔR, Δh phải bằng bao nhiêu để thể tích V được tính chính xác tới $0,1m^3$.

Giải

Ta có $V = \pi R^2 h$, suy ra $\dfrac{\partial V}{\partial \pi} = R^2 h = 12$ nên $\Delta\pi = \dfrac{0,1}{3 \times 12} < 0,003$.

Tương tự:

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 2\pi R h = 37,7 \Rightarrow \Delta R = \frac{0,1}{3 \times 37,7} < 0,001;$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi R^2 = 12,6 \Rightarrow \Delta h = \frac{0,1}{3 \times 12,6} < 0,003.$$

1.4 Sai số phương pháp và sai số tính toán

Trong thực tế khi giải một bài toán phức tạp ta thường phải thay bài toán đó bằng bài toán đơn giản hơn để có thể tính toán bằng tay hoặc bằng máy. Phương pháp thay thế như trên được gọi là **phương pháp gần đúng**.

Sai số do phương pháp gần đúng tạo ra gọi là **sai số phương pháp**. Mặc dù bài toán đã ở dạng đơn giản, có thể tính toán bằng tay hoặc trên máy tính nhưng trong quá trình tính toán ta thường xuyên phải làm tròn các kết quả trung gian. Sai số tạo bởi tất cả các lần quy tròn như vậy được gọi là **sai số tính toán**. Để hiểu rõ hơn bản chất của sai số phương pháp và sai số tính toán ta xét ví dụ sau:

• **Ví dụ 1.10.** Theo khai triển Maclaurin của hàm e^x ta có:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Với $x = 1$ công thức này có thể dùng để tính giá trị của số e. Tuy nhiên đây là tổng vô hạn, còn trong thực tế ta chỉ tính được tổng

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

nghĩa là ta đã sử dụng phương pháp gần đúng. Chẳng hạn với $n = 8$ thì sai số phương pháp tìm được dựa trên đánh giá

$$|e - S_n| \leq \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} \leq \frac{3}{9!} < 10^{-5}.$$

Khi đó $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \frac{1n}{8!} \approx 2,71828$.

Bài tập

1. Cho $a = 12345$ với $\delta a = 0,1\%$, $b = 34,56$ với $\delta b = 0,8\%$. Xác định sai số tuyệt đối và các chữ số chắc của a và b.
2. Tìm số các chữ số chắc và làm tròn chỉ giữ lại 2 số không chắc:

   a) $a = 57,4365$ với $\delta a = 0,5\%$.

   b) $a = 1,40805$ với $\delta a = 0,6\%$.
3. Biết rằng $a = 12,3057$ là một số gần đúng có hai chữ số không chắc. Hãy tính sai số tuyệt đối và sai số tương đối của a.
4. Cho a = 23,35781 là số gần đúng với sai số tương đối là $\delta a = 1,25\%$. Hãy làm tròn a với 2 chữ số không chắc và đánh giá sai số của kết quả thu được.
5. Cho các số gần đúng $a = 4,7658$ và $b = 3,456$ với $\Delta a = 5.10^{-4}$ và $\Delta b = 10^{-3}$; còn $u = a.b$. Hãy tìm sai số tương đối của a và b; tính u và ước lượng sai số Δu và δu.
6. Tính diện tích hình chữ nhật có chiều dài $d = 40,0cm$ và chiều rộng $r = 24,0cm$. Ước lượng sai số tuyệt đối và tương đối của S nếu các chữ số biểu diễn d và r đều chắc.
7. Cho hình hộp chữ nhật có các cạnh d, r, h tương ứng xấp xỉ bằng 10m, 5m và 3,5m.

   a) Tính thể tích V và ước lượng sai số nếu $\Delta d = \Delta r = \Delta h = 0,005m$.

   b) Cần tính các cạnh với sai số như thế nào để sai số $\Delta V \leq 0,1$.
8. Hình trụ tròn xoay có bán kính $R = 10cm$ chiều cao $h = 20cm$;

   a) Tính V nếu $\Delta R = \Delta h = 0,5cm$; $p = 3,1416$ với $\Delta p = 0,5.10^{-4}$.

   b) Với p như trên, cần tính R và h như thế nào để $\Delta V \leq 1$.

9. Cho $u = a - b$ với $a = 55,23$ và $b = 55,20$; $\Delta a = \Delta b = 0,005$.

   a) Tính $u, \Delta u$ và δu.

   b) Giải thích vì sao người ta thường tránh trừ 2 số gần bằng nhau.

10. Cho $u = a/b + c$ với $a = 125, b = 0,5, c = 5$; $\Delta a = \Delta b = 0,1$; $\Delta c = 1$.

    a) tính u và δu.

    b) Giải thích vì sao người ta tránh chia cho số bé ở các bước trung gian.

11. Tính $u = a^2b + c$ nếu $a = 4,0; b = 5,5; c = 25,48; \Delta a = \Delta b = 0,001; \Delta c = 0,01$ và thu gọn u chỉ giữ lại một chữ số không chắc.

12. Hãy xác định giá trị của các hàm số dưới đây cùng với sai số tuyệt đối, sai số tương đối ứng với những giá trị của các đối số cho với mọi chữ số có nghĩa đều chắc.

    a) $u = \ln(x + y^2); \quad x = 0,97; y = 1,132.$

    b) $u = \dfrac{x + y^2}{z}; \quad x = 3,28; y = 0,932; z = 1,132.$

Chương 2

Phép nội suy

Trong thực tế, nhiều khi ta phải sử dụng hàm $y = f(x)$ mà không biết biểu thức giải tích, chỉ biết giá trị $y_i = f(x_i)$ tại các điểm $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Các giá trị đó có thể nhận được qua đo đạc, thực nghiệm hoặc tính toán từ những số liệu đã cho. Cũng có trường hợp biểu thức giải tích $f(x)$ đã cho nhưng quá cồng kềnh. Khi đó dùng phép nội suy ta có thể dễ dàng tính được f tại bất kỳ $x \in [a, b]$ mà độ chính xác không kém bao nhiêu.

Mục tiêu của phép nội suy khá nhiều, nhưng chủ yếu là tìm thuật toán đơn giản tính giá trị $f(x)$ cho những x không nằm trong bảng x_i, y_i $(i = \overline{0, n})$. Một bộ số liệu x_i, y_i $(i = \overline{0, n})$ và một chương trình ngắn gọn có thể thay một bảng rất dài các giá trị $\{x_i, f(x_i)\}$. Ngoài ra sử dụng kết quả của phép nội suy, có thể tìm đạo hàm $f'(x)$ hoặc tích phân của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$.

2.1 Nội suy bằng đa thức đại số

2.1.1 Bài toán nội suy

Ngoài ý nghĩa lịch sử ra, đa thức đại số thường được dùng trong phép nội suy vì lý do đơn giản sau: các phép toán cộng, trừ, nhân, đạo hàm, tích phân dễ dàng được thực hiện trên đa thức. Hơn nữa nếu $P(x)$ là đa thức, còn c là hằng số thì $P(cx)$ và $P(x + c)$ cũng là đa thức.

⊙ **Bài toán nội suy** đặt ra như sau: Cho hàm số $y = f(x)$ dưới dạng bảng giá trị

x_i	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y_i	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

trong đó $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$ gọi là các mốc nội suy và $y_i := f(x_i)$.

Hãy tìm đa thức bậc m : $P_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ sao cho $P_m(x_i) = y_i \quad (i = \overline{0,n})$.

⊙ **Ý nghĩa hình học của bài toán nội suy** : hãy xây dựng đường cong đại số $y = P_m(x)$ đi qua các điểm cho trước (x_i, y_i) $(i = \overline{0,n})$ từ hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j = y_i \quad (i = \overline{0,n}). \tag{2.1}$$

Dễ thấy nếu $m < n (m > n)$ hệ nói chung vô nghiệm (vô định). Khi $m = n$ hệ (2.1) có định thức Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Suy ra hệ phương trình (2.1) là hệ Crammer, do đó nó có nghiệm duy nhất.

⊙ **Chú ý** Bài toán nội suy còn được nêu dưới dạng tổng quát hơn, không những yêu cầu $P(x)$ trùng với $f(x)$ tại các mốc nội suy mà còn yêu cầu các đạo hàm cấp 1 hoặc các đạo hàm cấp cao hơn của chúng cũng trùng nhau.

2.1.2 Sai số phương pháp của phép nội suy

Giả sử $P(x)$ là đa thức nội suy bậc n của hàm $f(x)$, tức là $P(x_i) = f(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$. Ta cố định giá trị $x \in [a,b]$ tùy ý và tìm cách ước lượng sai số $R(x) = f(x) - P(x)$. Dĩ nhiên chỉ cần xét $x \neq x_i$ $(i = \overline{0,n})$ vì $R(x_i) = 0$ $(i = \overline{0,n})$.

Xét hàm bổ trợ

$$F(x) := R(z) - kw(z),$$

trong đó $\omega(z) = \prod_{i=0}^{n}(z - x_i)$. Hằng số k chọn từ điều kiện $F(x) = 0$, nghĩa là $k = \dfrac{f(x) - P(x)}{\omega(x)}$. Mặt khác $F(x_i) = 0$ $(i = \overline{0,n})$ do đó $F(z)$ có $n+2$ nghiệm phân biệt $x, x_0, x_1, \dots, x_n$. Theo định lý Rolle $F'(z)$ có (n+1) nghiệm, ..., $F^{(n+1)}(z)$ có nghiệm $\xi \in [a,b]$:

$$0 = F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! \text{ hay } \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = k$$

So sánh hai cách viết của k ta có:

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x) \tag{2.2}$$

Gọi $M = \sup\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|$, từ (2.2) suy ra:

$$|f(x) - P(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|(x - x_0)\dots(x - x_n)| \tag{2.3}$$

• **Ví dụ 2.1.** Ước lượng sai số phép nội suy bằng đa thức bậc 3 tính $\sin 6^\circ$ với các mốc nội suy

$$x_0 = \frac{\pi}{36}, \quad x_1 = \frac{7\pi}{180}, \quad x_2 = \frac{\pi}{20}, \quad x_3 = \frac{11\pi}{180}.$$

Giải

Ta có $f(x) = \sin x; n = 3; a = \dfrac{\pi}{36} = 5^\circ; b = \dfrac{11\pi}{180} = 11^\circ; x = \dfrac{\pi}{30} = 6^\circ; f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow M = \sup\limits_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| = \sin 11^\circ = 0.190809.$

Vậy theo công thức (2.3) ta có:

$$\begin{aligned} |\sin 6^\circ - P(6^\circ)| &\le \frac{0.190809}{4!}\left|\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{36}\right)\left(\frac{\pi}{30} - \frac{7\pi}{180}\right)\left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{20}\right)\left(\frac{\pi}{30} - \frac{11\pi}{180}\right)\right| \\ &\le 1.106 \times 10^{-9}. \end{aligned}$$

⊙ **Chú ý** Từ công thức đánh giá sai số (2.3) suy ra:

1. Phần dư $R(x)$ rất lớn ngoài đoạn $[x_0, x_n]$, do đó dùng công thức nội suy để thực hiện phép ngoại suy sẽ mắc phải sai số lớn.
2. Phép nội suy có độ chính xác cao đối với các đoạn $[x_i, x_{i+1}]$ ở trung tâm và độ chính xác thấp đối với các đoạn ngoài rìa.

2.1.3 Sai số tính toán của phép nội suy

Giả sử thay vì biết các giá trị đúng $\widetilde{y}_i = f(x_i)$ ta chỉ biết các giá trị gần đúng y_i. Khi đó thay vì đa thức nội suy

$$\widetilde{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{y}_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)},$$

ta có

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$$

Giả sử $|y_i - \widetilde{y}_i| \le \Delta y_i$, khi đó sai số tính toán

$$|\Delta P| = |P - \widetilde{P}| \le \sum_{i=0}^{n} \Delta y_i \left|\frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}\right|.$$

Nếu các mốc nội suy cách đều và $\Delta y_i \le \rho$ $(i = \overline{0, n})$ thì

$$|\Delta P| \le \rho \frac{|t(t-1)\dots(t-n)|}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i}{|t - i|}$$

2.2 Đa thức nội suy Lagrange

Sau đây ta sẽ trình bày cách xây dựng đa thức nội suy mà không cần giải hệ (2.1).

Trước hết, ta tìm đa thức $l_i(x)$ có bậc n, sao cho

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad i = j \\ 0 & \text{nếu} \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = \overline{0, n})$$

Dễ thấy

$$l_i(x) = A_i(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n).$$

Vì

$$1 = l_i(x_i) = A_i(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n).$$

nên

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

và gọi nó là *đa thức Lagrange cơ bản*

Đặt

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x), \tag{2.4}$$

Rõ ràng $P(x)$ là một đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng n và ta có

$$P(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x_j) = y_j \quad (j = \overline{0, n}).$$

Như vậy $P(x)$ là đa thức nội suy cần tìm.

- **Nội suy bậc nhất**

  Với $n = 1$ ta có bảng

x_i	x_0	x_1
y_i	y_0	y_1

  Đa thức nội suy (2.4) sẽ là: $P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x)$ trong đó

  $$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

- **Nội suy bậc hai**

  Với $n = 2$ ta có bảng

x_i	x_0	x_1	x_2
y_i	y_0	y_1	y_2

  Đa thức nội suy (2.4) sẽ là: $P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$ trong đó

  $$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

  và $l_2(x) = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$.

• **Ví dụ 2.2.** Cho hàm số dưới dạng bảng

x	-1	0	1
$f(x)$	-7	0	7

Tìm đa thức nội suy dạng Lagrange.

Giải

Đa thức cần tìm có dạng:

$$P(x) = -7 \times \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 7 \times \frac{x(x+1)}{(1-0)(1+1)}$$

$$P(x) = -7 \times \frac{x(x-1)}{2} + 7 \times \frac{x(x+1)}{2} = 7x.$$

⊙ **Chú ý** Nếu các mốc nội suy cách đều, tức là

$$x_{i+1} - x_i = h \quad (i = \overline{0, n-1})$$

thì đặt $t := \dfrac{x - x_0}{h}$ hay $x = x_0 + th$ ta được

$$P_i(x) = P_i(x_0 + th) = \frac{(-1)^{n-1} C_n^i}{t-i} \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!}$$

Tóm lại

$$P(x_0 + th) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-1} C_n^i}{t-i} y_i \tag{2.5}$$

Trong công thức (2.5), các hệ số $(-1)^{n-1} C_n^i$ không phụ thuộc vào hàm số $f(x)$, mốc nội suy và bước h. Do đó chúng được tính sẵn, lập thành bảng để sử dụng nhiều lần.

Công thức nội suy Lagrange trình bày trên có ưu điểm đơn giản nhưng nếu thêm mốc nội suy phải tính lại toàn bộ. Nhược điểm này được khắc phục trong công thức nội suy Newton.

• **Ví dụ 2.3.** Tìm đa thức nội suy bậc hai của hàm $y = 3^x$ trên đoạn $[-1, 1]$ tại các mốc nội suy $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Từ đó tính $\sqrt{3}$.

Giải

Ta có $y_0 = 1/3, y_1 = 1, y_2 = 3$.

$$P_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 3 \cdot \frac{(x+1)x}{(1+1)1}$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \frac{2x^2}{3}$$

Cho $x = 1/2$ ta được

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \approx 1.8.$$

2.3 Công thức nội suy Newton mốc cách đều

2.3.1 Sai phân và các tính chất

Giả sử $f : R \to R$ là một hàm số cho trước và $h = \text{const} \neq 0$. Ta gọi sai phân cấp 1 của $f(x)$ là đại lượng $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Tỷ sai phân cấp 1 của $f(x)$ là $\dfrac{\Delta f(x)}{h}$. Một cách tổng quát $\Delta^n f(x) := \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$ $(n \geq 1), \Delta f^0 := f(x)$.

• **Ví dụ 2.4.** $\Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = [f(x+h+h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$.

$\Delta^3 f = \Delta(\Delta^2 f) = [f(x+2h+h) - 2f(x+h+h) + f(x+h)] - [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$.

◊ **Tính chất**

(1) Δ là toán tử tuyến tính, nghĩa là:
$\forall \alpha, \beta \in R;\ \forall f, g \Rightarrow \Delta(\alpha f + \beta g) = \alpha \Delta f + \beta \Delta g$.

(2) Nếu $c = \text{const}$ thì $\Delta c = 0$.

(3) $\Delta^n(x^n) = n! h^n;\ \Delta^m(x^n) = 0\ (m > n)$.

(4) Nếu $P(x)$ là đa thức bậc n thì theo công thức Taylor

$$\Delta P := P(x+h) - P(x) = \sum_{i=1} n \frac{h^i}{i!} P^{(i)}(x).$$

(5) Nếu $f \in C^n[a,b]$ thì khi h đủ nhỏ $f^{(n)}(x) \approx \dfrac{\Delta^n f(x)}{h^n}$.

2.3.2 Bảng sai phân

Giả sử hàm số $y = f(x)$ cho dưới dạng bảng $y_i = f(x_i)$ tại các mốc x_i cách đều: $x_{i+1} - x_i = h = \text{const}$ $(i \geq 0)$.

Khi đó sai phân của dãy y_i được xác định như sau:

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i \\
\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \ldots \\
\Delta^n y_i &= \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i
\end{aligned}$$

Ta lập bảng:

y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_{i-2}					
	Δy_{i-2}				
y_{i-1}		$\Delta^2 y_{i-2}$			
	Δy_{i-1}		$\Delta^3 y_{i-2}$		
y_i		$\Delta^2 y_{i-2}$		$\Delta^4 y_{i-2}$	$\dots$
	Δy_i		$\Delta^3 y_{i-1}$		
y_{i+1}		$\Delta^2 y_i$			
	Δy_{i+1}				
y_{i+2}					
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

2.3.3 Đa thức nội suy Newton tiến

Tìm đa thức nội suy dưới dạng

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

Mốc nội suy được sắp xếp theo thứ tự $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Cho $x = x_0$, ta được $a_0 = y_0$; $x = x_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$. Nói chung đặt $x = x_i$, ta có $a_i = \dfrac{\Delta^i y_0}{i! h^i}$. Khi đó ta có

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1}).$$

Đổi biến $t = \dfrac{x - x_0}{h}, x = x_0 + th$ ta được

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (2.6)$$

Khi đó công thức sai số (2.3) trở thành

$$|f(x_0 + th) - P(x_0 + th)| \le \frac{M}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)\dots(t-n).$$

Người ta gọi công thức (2.6) là đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0.

2.3.4 Đa thức nội suy Newton lùi

Mốc nội suy được sắp xếp theo thứ tự giảm dần $x_n > x_{n-1} > \cdots > x_0$.

Đặt $t = \dfrac{x - x_n}{h} \Rightarrow x = x_n + th$. Đa thức thức nội suy Newton lùi tìm dưới dạng

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + a_n(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

Cho $x = x_n \Rightarrow a_0 = y_n$; $x = x_{n-1} \Rightarrow a_0 + a_1(-h) = y_{n-1} \Rightarrow a_1 = \dfrac{\Delta y_{n-1}}{h}$.

Tổng quát, đặt $x = x_i$, ta được $a_i = \dfrac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}$ $(i = \overline{0, n})$.

Như vậy công thức Newton lùi sẽ có dạng

$$P(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!}\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \cdots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{2.7}$$

với sai số $\dfrac{M}{(n+1)!}h^{n+1}t(t+1)\ldots(t+n)$.

Công thức (2.7) được gọi là đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n.

⊙ **Chú ý**

a) Công thức nội suy Newton tiến (lùi) chỉ là một cách viết khác của công thức Lagrange.

b) Nếu cần tính $f(x)$ tại $x \approx x_0$ $(x \approx x_n)$ ta nên dùng công thức nội suy Newton tiến (lùi) thì độ chính xác cao hơn.

c) Dùng công thức nội suy Newton tiến (lùi) không phải tính lại từ đầu nếu thêm mốc nội suy mới.

• **Ví dụ 2.5.** Cho một số giá trị của hàm $\sin x$

x	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sin x$	0,09983	0,19867	0,29552	0,38942

Hãy tính gần đúng $\sin(0,14)$ và $\sin(0,46)$.

Giải

Vì các mốc cách đều nên ta xây dựng đa thức nội suy Newton của hàm số dựa vào bảng giá trị đã cho. Trước hết ta lập bảng sai phân:

x	$\sin x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,1	0,09983			
		0,09884		
0,2	0,19867		-0,00199	
		0,09685		-0,00096
0,3	0,29552		-0,00295	
		0,09390		
0,4	0,38942			

Sử dụng công thức nội suy Newton tiến (2.6) ta được:

$$P(0,1+th) = 0,09983 + \frac{0,09884}{h}t - \frac{0,00199}{h^2}t(t-1) - \frac{0,00096}{h^3}t(t-1)(t-2).$$

Với $x = 0,14$, $h = 0,1$ suy ra $t = 0,4$. Khi đó:

$$\sin(0,14) \approx P(0,1+0,1.0,4) = 0,13954$$

và sai số được đánh giá bởi

$$\begin{aligned} |\sin(0,14) - P(0,14)| &\leq \frac{1}{4!}|(0,14-0,1)(0,14-0,2)(0,14-0,3)(0,14-0,4)| \\ &\leq 4,2.10^{-6}. \end{aligned}$$

Tương tự, sử dụng đa thức nội suy Newton lùi (2.7) ta cũng tính được:

$$\sin(0,46) \approx P(0,46) = 0,44394$$

với sai số $|\sin(0,46) - P(0,46)| \leq 3,8.10^{-5}$.

• **Ví dụ 2.6.** Giả sử hàm $f(x)$ cho dưới dạng bảng sau:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0	0.1002	0.2013	0.8045	0.4108	0.5211

Tìm $f(0.14)$ theo công thức nội suy Newton tiến.

Kết quả tính toán cho thấy $f(0.14) \approx 0.1405$. Sai số mắc phải

$$|f(0.14) - P(0.14)| < \frac{0.0001}{4!}0.4 \times 0.6 \times 1.6 \times 2.6 < \frac{1}{2}10^{-6}.$$

(Ở đây ta sử dụng hệ thức $f^{(4)}(\xi) \approx \dfrac{\Delta^4 y_0}{h^4}$ và

$$|f(0.14) - P(0.14)| < \frac{\Delta^4 y_0}{4!h^4}h^4 \times 0.4 \times 0.6 \times 1.6 \times 2.6)$$

2.3.5 Một số ví dụ áp dụng sai phân và nội suy

a. Tính giá trị đa thức

Giả sử deg(P)= n. Nếu biết $P(x)$ tại $(n+1)$ điểm phân biệt, sử dụng tính chất $\Delta^m P = 0$ $(m > n)$ ta có thể tính $P(x)$ tại các điểm khác.

• **Ví dụ 2.7.** Tính $y = x^3$ với $x = 4, 5, 6 \ldots$.

Lập bảng

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Biết $6 = \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^2 y_2 - 12$ suy ra $\Delta^2 y_2 = 18 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta y_3 - 19$, hay $\Delta y_3 = 37 = y_4 - y_3 = y_4 - 27$. Vậy $y_4 = 64, \ldots$

b. Tính tổng

Giả sử cần tính $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ với $\forall n \geq 1$. Ta có: $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n = (n+1)^2$, $\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$, $\Delta^3 S_n = \Delta^2 S_{n+1} - \Delta^2 S_n = [2(n+1)+3] - [2n+3] = 2 = \text{const}$.

Lập bảng:

n	S_n	ΔS_n	$\Delta^2 S_n$	$\Delta^3 S_n$
1	1			
		4		
2	5		5	2
		9		
3	14			

Sử dụng công thức nội suy Newton tiến $t = \dfrac{n-1}{1} = n-1$ ta được

$$S_n = 1 + 4(n-1) + \frac{5}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{2}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n+1).$$

Hoàn toàn tương tự ta có thể tính tổng

$$\begin{aligned} S_n &= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = 1 + 8(n-1) + 19\frac{(n-1)(n-2)}{2} + \\ &+ 18\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + 6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} \\ S_n &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \end{aligned}$$

2.4 Phương pháp bình phương bé nhất

Đa thức nội suy xét ở các tiết trước gặp phải một số khó khăn trong trường hợp:

- Khi số mốc nội suy lớn thì bậc của đa thức nội suy cũng lớn, không thuận tiện khi tính toán.
- Các số liệu x_i, y_i thường thu được bằng đo đạc, thực nghiệm nên bao giờ cũng có sai số, do đó yêu cầu $y_i = P(x_i)$ có thể không hợp lý.

Phương pháp bình phương bé nhất do Lagrange và Gauss đề xướng trong khi biểu diễn gần đúng những hàm cho bằng bảng.

2.4.1 Nội dung phương pháp

Cho bảng số liệu

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Dựa vào nghiên cứu lý thuyết và số liệu trong bảng người ta chọn trước được hàm phụ thuộc $y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, trong đó $a_1, a_2, \ldots, a_k$ là các tham số. Các tham số này được xác định sao cho y_i và $f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ sai khác nhau nhỏ nhất . Một tiêu chuẩn để đánh giá sự sai khác đó là sử dụng hàm

$$S(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \sum_{i=}^{n} \Big(y_i - f(x_i, a_1, \ldots, a_k)\Big)^2 \longrightarrow \min.$$

Dễ thấy hàm S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm tới hạn, chính là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_1} & = & 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} & = & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_k} & = & 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Giải hệ (2.8) ta tìm được các tham số $a_i, i = \overline{1,k}$

2.4.2 Một số trường hợp áp dụng

a) y phụ thuộc x theo dạng bậc nhất $y = f(x,a,b) = a + bx$

Khi đó tổng bình phương các sai số:

$$S = \sum_{i=}^{n} \Big(y_i - f(x_i,a,b)\Big)^2 = \sum_{i=}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

Ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} & = & 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum x_i & = & \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 & = & \sum x_i y_i \end{cases} \tag{2.9}$$

Từ bảng số liệu $\{x_i, y_i\}$ ta tính được các tổng: $\sum x_i, \sum y_i, \sum x_i^2, \sum x_i y_i$. Hơn nữa, các x_i khác nhau nên định thức $D = n\sum x_i^2 - \Big(\sum x_i\Big)^2 \neq 0$, do đó hệ (2.9) có nghiệm duy nhất a và b.

• **Ví dụ 2.8.** Cho biết sự phụ thuộc giữa 2 đại lượng x và y có dạng $y = a + bx$ và cho bảng số liệu

x	$-1,1$	$2,1$	$3,2$	$4,4$	$5,2$
y	$0,78$	$7,3$	$9,2$	$11,9$	$13,3$

Hãy xác định a và b bằng phương pháp bình phương bé nhất.

Giải

Ta lập bảng số

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
$n=5$	$-1,1$	$0,78$	$1,21$	$-0,858$
	$2,1$	$7,3$	$4,41$	$15,33$
	$3,2$	$9,2$	$10,24$	$29,44$
	$4,4$	$11,9$	$19,36$	$52,36$
	$5,2$	$13,3$	$27,04$	$69,16$
$\sum$	$13,8$	$42,48$	$62,26$	$165,43$

Sau đó giải hệ

$$\begin{cases} 5a + 13,8b &= 42,48 \\ 13,8a + 62,26b &= 165,43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 2,994 \approx 3 \\ b &= 1,994 \approx 2 \end{cases} \Rightarrow y = 3 + 2x$$

So sánh các giá trị mới của y theo hàm tìm được với các giá trị cũ theo bảng sau cho thấy phương pháp bình phương bé nhất khá chính xác.

x	$-1,1$	$2,1$	$3,2$	$4,4$	$5,2$
y cũ	$0,78$	$7,3$	$9,2$	$11,9$	$13,3$
y mới	$0,8$	$7,2$	$9,4$	$11,8$	$13,4$

b) y phụ thuộc x theo dạng bậc hai $y = f(x,a,b,c) = a + bx + cx^2$

Khi đó tổng bình phương các sai số:

$$S = \sum_{i=}^{n} \Big(y_i - f(x_i,a,b,c)\Big)^2 = \sum_{i=}^{n} (y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2$$

Ta lập hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} &= 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} &= 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum x_i + c\sum x_i^2 &= \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 &= \sum x_iy_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 &= \sum x_i^2y_i \end{cases} \tag{2.10}$$

Từ bảng số liệu $\{x_i, y_i\}$ ta tính được các tổng:

$$\sum x_i, \quad \sum y_i, \quad \sum x_i^2, \quad \sum x_iy_i, \quad \sum x_i^3, \quad \sum x_i^4, \quad \sum x_i^2y_i,$$

sau đó thay vào hệ (2.10) rồi giải ta được a, b và c.

c) y phụ thuộc x theo dạng hàm mũ $y = f(x,a,b) = ae^{bx}$

Lấy logarit Naper 2 vế ta được: $\ln y = \ln ae^{bx} = bx + \ln a$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} Y &= \ln y \\ A &= \ln a \end{cases} \Rightarrow Y = A + bx \tag{2.11}$$

Như vậy sự phụ thuộc giữa Y vào x là dạng bậc nhất. Từ bảng số liệu $\{x_i, y_i\}$ tương ứng ta lập được bảng số liệu $\{x_i, Y_i\}$ trong đó $Y_i = \ln y_i,\ i = \overline{1,n}$

Hệ phương trình để xác định A, b là

$$\begin{cases} nA + b\sum x_i &= \sum Y_i \\ A\sum x_i + b\sum x_i^2 &= \sum x_i Y_i \end{cases} \tag{2.12}$$

• **Ví dụ 2.9.** Cho biết cặp giá trị của x và y theo bảng sau:

x	0,65	0,75	0,85	0,95	1,15
y	0,96	1,06	1,17	1,29	1,58

Lập công thức thực nghiệm của y dạng $y = ae^{bx}$.

Giải

Lấy logarit Naper 2 vế ta được: $\ln y = \ln ae^{bx} = bx + \ln a$

Đặt $Y = \ln y;\ A = \ln a \Rightarrow Y = A + bx$ Ta có bảng số liệu mới

x	0,65	0,75	0,85	0,95	1,15
$Y = \ln y$	−0,04	0,06	0,18	0,25	0,46

Lập bảng

	x_i	Y_i	x_i^2	x_iY_i
$n = 5$	0,65	−0,04		
	0,75	0,06		
	0,85	0,18		
	0,95	0,25		
	1,15	0,46		
$\sum$	4,35	0,89	3,93	0,92

Giải hệ

$$\begin{cases} nA + b\sum x_i &= \sum Y_i \\ A\sum x_i + b\sum x_i^2 &= \sum x_i Y_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A + 4,35b &= 0,89 \\ 4,35A + 3,93b &= 0,92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &\approx 0,5 \\ b &\approx 1 \end{cases}$$

Vậy $y = \dfrac{1}{2}e^x$. Tính lại các giá trị của y theo công thức này tại các giá trị của x rồi so sánh với các giá trị thực nghiệm

x	0,65	0,75	0,85	0,95	1,15
y cũ	0,96	1,06	1,17	1,29	1,58
y mới	1,00	3,85	6,50	9,35	12,05

d) y phụ thuộc x theo dạng hàm lũy thừa $y = f(x, a, b) = ax^b$

Lấy logarit Naper 2 vế ta được: $\ln y = \ln ax^b = b\ln x + \ln a$

Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} Y &= \ln y \\ X &= \ln x \quad \Rightarrow Y = A + bX \\ A &= \ln a \end{cases} \tag{2.13}$$

Như vậy sự phụ thuộc giữa Y vào X là dạng bậc nhất. Từ bảng số liệu $\{x_i, y_i\}$ tương ứng ta lập được bảng số liệu $\{X_i, Y_i\}$ trong đó $X_i = \ln x_i,\ Y_i = \ln y_i,\ i = \overline{1,n}$

Khi đó hệ phương trình để xác định A, b là

$$\begin{cases} nA + b\sum X_i &= \sum Y_i \\ A\sum X_i + b\sum X_i^2 &= \sum X_iY_i \end{cases} \tag{2.14}$$

Bài tập

1. Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[0;5]$ và được cho bởi bảng giá trị sau

x	0	1	3	5
$y = f(x)$	1	2	1	4

Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrange $P(x)$ của $f(x)$ và tính gần đúng giá trị $f(2)$ bằng cách lấy $f(2) \approx P(2)$.

2. Xây dựng đa thức Lagrange cho hàm $f(x) = x^3 + x^2 - 10$ tại các mốc $x = -4; -3; -1; 0$. Từ đó hãy xác định các hằng số A, B, C, D sao cho

$$\frac{x^3 + x^2 - 10}{x(x+1)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x+4}$$

3. Tính tổng

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

biết rằng S_n là một đa thức bậc 4.

4. Cho bảng giá trị của hàm số $y = f(x)$

x	-1	0	3	6	7
$y = f(x)$	3	-6	39	822	1611

Xây dựng đa thức nội suy Newton của hàm $f(x)$. Tính gần đúng $f(0,25)$ nhờ đa thức vừa tìm được.

5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi bảng giá trị sau

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = f(x)$	1,4	1,3	1,4	1,1	1,3	1,8	1,6	2,3

Tìm biểu thức của $f(x)$ bằng phương pháp bình phương tối thiểu biết rằng

(a) $f(x)$ là một đa thức bậc nhất.

(b) $f(x)$ là một đa thức bậc hai.

(c) $f(x) = ae^{bx}$.

(d) $f(x) = \ln(ax + b)$.

Chương 3

Tính gần đúng nghiệm thực của phương trình

Trong chương này, chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp giải phương trình một biến số:

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm số (đại số hay siêu việt).

Phương trình (3.1), trừ một số trường hợp đặc biệt có công thức giải đúng, nói chung rất phức tạp. Do đó ta phải tìm cách giải gần đúng. Ngoài ra, các hệ số của $f(x)$ trong thực tế chỉ biết gần đúng, vì thế việc giải đúng (3.1) chẳng những không thể thực hiện nổi mà nhiều khi không có ý nghĩa.

Thông thường, quá trình giải phương tình (3.1) bao gồm hai bước:

1. Bước giải sơ bộ: Tìm một khoảng đủ bé chứa nghiệm của (3.1).
2. Bước giải kiện toàn: Tìm nghiệm với độ chính xác cần thiết.

Cũng như các phương pháp gần đúng nói chung, để tìm nghiệm gần đúng của (3.1) ta thường tìm cách xây dựng dãy số x_n sao cho $x_n \to \alpha$ khi $n \to \infty$, trong đó α là nghiệm đúng của (3.1). Khi đó với giả thiết hàm $f(x)$ liên tục ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha) = 0$$

Điều đó có nghĩa là khi x_n khá gần α thì $f(x_n)$ khá gần $f(\alpha)$ và có thể xem $f(x_n) \approx 0$, hay x_n thực sự có thể xem là nghiệm gần đúng của (3.1).

3.1 Nghiệm và khoảng phân li nghiệm

□ **Định nghĩa 3.1.** Số thực α gọi là nghiệm của (3.1) nếu $f(\alpha) = 0$ hay α chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với trục hoành.

Hiển nhiên trước khi tìm nghiệm ta cần kiểm tra xem liệu phương trình (3.1) có tồn tại nghiệm hay không? Định lý dưới đây giúp ta làm việc đó:

△ **Định lý 3.1.** Giả sử 2 số thực a, b $(a < b)$ thỏa mãn $f(a)f(b) < 0$ và $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì trong $[a, b]$ chứa ít nhất một nghiệm của (3.1).

□ **Định nghĩa 3.2.** $[a, b]$ được gọi là khoảng phân li nghiệm nếu nó chứa duy nhất một nghiệm của (3.1).

Dễ thấy nếu a, b thỏa mãn:

i) $f(a)f(b) < 0$

ii) f khả vi và không đổi dấu trong $[a, b]$

thì $[a, b]$ là khoảng phân li nghiệm của (3.1).

• **Ví dụ 3.1.** Tìm các khoảng phân li nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$$

Giải

Ta thấy $f(x)$ xác định với $\forall x \in R$, $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

trong đó $M = f\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0.$

Vậy đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất, do đó phương trình có một nghiệm thực duy nhất.

Ngoài ra ta có $f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0$ nên nghiệm trên phân li ở trong $[1, 2]$.

3.2 Phương pháp chia đôi

3.2.1 Mô tả phương pháp

Xét phương trình sau trên khoảng phân li nghiệm $[a, b]$:

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Gọi $\Delta_0 := [a, b]$, ta chia đôi Δ_0 và chọn $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ là một trong hai nửa của Δ_0 sao cho $f(a_1)f(b_1) \leq 0$. Nói chung ở bước thứ n, ta có: $\Delta_n = [a_n, b_n] \subset \Delta_{n-1} \subset \cdots \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$, trong đó $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ và $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Dễ thấy dãy $\{a_n\}$ đơn điệu tăng, bị chặn trên bởi b còn dãy $\{b_n\}$ đơn điệu giảm, bị chặn dưới bởi a. Hơn nữa, do $b_n - a_n \to 0$ suy ra $a_n, b_n \to \alpha (n \to \infty)$.

Vì $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ nên cho $n \to \infty$, ta có $[f(\alpha)]^2 \leq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$. Ngoài ra ta có ước lượng sai số sau:

$$0 \leq \alpha - a_n \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}. \tag{3.2}$$

3.2.2 Thuật toán của phương pháp chia đôi

Bước khởi tạo. Xác định khoảng phân li $[a, b]$ và sai số ε.
Gán $n := 1$; $a_0 := a$; $b_0 := b$.

Bước lặp.

Bước 1. Tính $x_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$. Tính (xét dấu) $f(x_n)$.

Bước 2. Nếu $f(a_{n-1})f(x_n) > 0$ thì gán $a_n := x_n; b_n = b_{n-1}$;
Nếu $f(b_{n-1})f(x_n) > 0$ thì gán $a_n := a_{n-1}; b_n = x_n$.

Bước 3. Nếu $b_n - a_n < \varepsilon$ thì kết luận x_n ở Bước 1 là nghiệm cần tìm. Kết thúc.
Nếu $b_n - a_n > \varepsilon$ thì gán $n := n + 1$ và lặp lại từ Bước 1.

$\oplus$ **Nhận xét**

- Thuật toán của phương pháp chia đôi rất đơn giản, do đó dễ lập trình.
- Tốc độ hội tụ của phương pháp chia đôi khá chậm.
- Trong quá trình lặp có thể xảy ra $f(x_n) = 0$. Khi đó ta nhận được nghiệm đúng của phương trình là x_n.

- Nếu ấn định trước sai số cho phép ε thì số bước lặp cần thiết để tìm nghiệm gần đúng trong khoảng phân li (a, b) là $n \in \mathbb{N}$ thoả mãn $\dfrac{b-a}{2^n} < \varepsilon$.

• **Ví dụ 3.2.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

với sai số không quá 0.032.

Giải

Từ ví dụ 3.1 ta biết phương trình

$$x^3 - x - 1 = 0 \tag{3.3}$$

có duy nhất nghiệm trong $(1, 2)$ với $f(1) = -1 < 0, f(2) = 5 > 0$. Do đó ta thực hiện thuật toán chia đôi như sau:

Bước khởi tạo. Chọn khoảng phân li $(1, 2)$, $a = 1, b = 2, f(a) < 0, f(b) > 0$. Sai số $\varepsilon = 0.032$. Số bước lặp cần thực hiện là n thoả mãn

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^n} < 0.032 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln 0.032}{\ln 0.5} \approx 4.966.$$

Vậy $n = 5$.

Bước lặp.

n	a_{n-1}	b_{n-1}	x_n	$f(x_n)$
1	1	2	$\frac{3}{2}$	$+$
2	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-$
3	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{8}$	$+$
4	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{21}{16}$	$-$
5	$\frac{21}{16}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{43}{32}$	

Ta dừng quá trình chia đôi tại đây và lấy nghiệm gần đúng là $x_5 = \dfrac{43}{32} = 1.34375$ với sai số không quá

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{2-1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0.03125 < 0.032.$$

3.3 Phương pháp Newton

3.3.1 Mô tả phương pháp

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{3.1}$$

Ta luôn giả thiết các điều kiện sau thỏa mãn:

1) Phương trình (3.1) có nghiệm α duy nhất trên $[a, b]$.

2) $f \in C^2[a, b]$ và $f(x), f'(x)$ không đổi dấu trên $[a, b]$.

□ **Định nghĩa 3.3.** Điểm $x \in [a, b]$ được gọi là điểm Fourier, nếu $f''(x)f(x) > 0$.

Không giảm tổng quát, hàm $f(x)$ trong phương trình (3.1) có thể coi có đạo hàm $f''(x) > 0$, nếu không ta xét phương trình $g(x) = 0$ với $g := -f$.

Chọn xấp xỉ ban đầu x_0 là điểm Fourier: $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$ có dạng

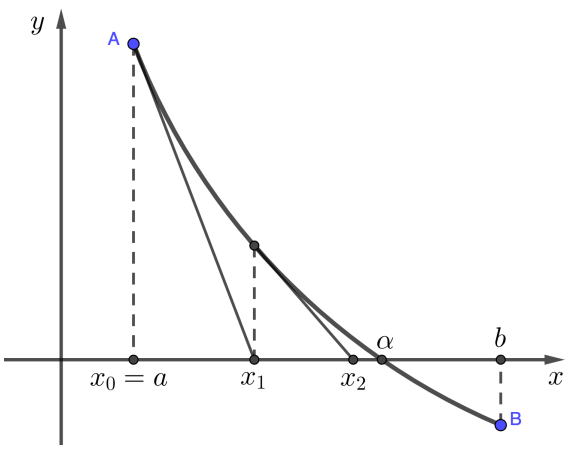
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Hoành độ của giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành là:

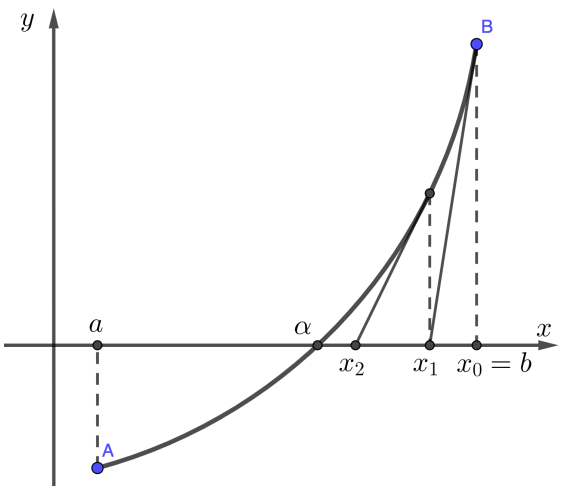
$$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \text{ hay } x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Nói chung:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



(a) Trường hợp $f'(x) < 0$



(b) Trường hợp $f'(x) > 0$

Ta luôn có thể coi $f''(x) > 0$. Sau đây ta chỉ xét trường hợp $f'(x) < 0$.Trường hợp $f'(x) > 0$ hoàn toàn tương tự. Khai triển $f(x_n)$ tại điểm x_{n-1} theo công thức Taylor, ta có:

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{f''(\alpha_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Từ đó suy ra

$$f(x_n) = \frac{f''(\alpha_{n-1})}{2}(x_n - x_{n-1})^2 \geq 0.$$

Mặt khác

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -\frac{f''(\alpha_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2}{2f'(x_n)} \geq 0,$$

do đó dãy $\{x_n\}$ đơn điệu không giảm. Nếu có $x_n > \alpha$ thì do $f'(x) < 0$ nên

$$f(x_n) < f(\alpha) = 0$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $f(x_n) \geq 0$. Như vậy

$$x_n \leq x_{n-1} \leq \cdots \leq \alpha,$$

suy ra tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \zeta.$$

Ta có

$$|f(x_n)| = |f'(x_n)||x_{n+1} - x_n| \leq M|x_{n+1} - x_n|,$$

trong đó $M = \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$. Cho $n \to \infty$ ta được $f(\zeta) = 0$ suy ra $\zeta = \alpha$.

3.3.2 Sai số phương pháp

Để đánh giá sai số phương pháp Newton, ta giả thiết rằng $|f''(x)| \leq M_1$ và $|f'(x)| \geq M_2$ với mọi $x \in [a, b]$. Ta có

$$f(x_{n+1}) = f(x_{n+1} - f(\alpha) = f'(\overline{x_{n+1}})(x_{n+1} - \alpha).$$

Từ đây suy ra

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{|f(x_{n+1})|}{M_2} \tag{3.4}$$

Mặt khác

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(\alpha_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 = \frac{f''(\alpha_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2.$$

Từ bất đẳng thức cuối suy ra $|f(x_{n+1})| \leq \frac{M_1}{2}|x_{n+1} - x_n|^2$. Áp dụng (3.4) ta được:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M_1}{2M_2}|x_{n+1} - x_n|^2 \tag{3.5}$$

Khi n lớn độ lệch $|x_{n+1} - x_n|$ khá bé. Từ công thức (3.5) suy ra x_{n+1} rất gần α vì $|x_{n+1} - \alpha| = O(|x_{n+1} - x_n|^2)$.

3.3.3 Thuật toán của phương pháp Newton

Bước khởi tạo. Xác định các giá trị M_1, M_2, điểm Fourier x_0 và sai số ε. Gán $n := 1$.

Bước lặp.

Bước 1. Gán $x_n := x_{n-1}\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. Tính $\varepsilon_n := \dfrac{M_1(x_n - x_{n-1})^2}{2M_2}$

Bước 2. Nếu $\varepsilon_n < \varepsilon$ thì kết luận x_n ở Bước 1 là nghiệm cần tìm. Kết thúc.
Nếu $\varepsilon_n > \varepsilon$ thì gán $n := n + 1$ và lặp lại từ Bước 1.

• **Ví dụ 3.3.** Tìm nghiệm gần đúng của phương trình

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0$$

bằng phương pháp Newton.

Giải

Từ ví dụ 3.1 ta biết phương trình $x^3 - x - 1 = 0$ có duy nhất nghiệm trong $[1, 2]$. Trong khoảng đó:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 > 0;$$
$$f''(x) = 6x > 0.$$

Vì vậy có thể áp dụng công thức Newton. Để tìm điểm Fourier ta tính $f(2) = 5 > 0$ cùng dấu với $f''(x)$. Vậy chọn $x_0 = 2$. Hơn nữa với mọi x trong khoảng phân li $[1, 2]$ ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow M_2 = 2;$$
$$f''(x) = 6x \leq 6.2 = 12 \quad \Rightarrow M_1 = 12.$$

Do đó có công thức tính

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 - x_{n-1} - 1}{3x_{n-1}^2 - 1}$$

với sai số không quá

$$\varepsilon_n = \frac{12(x_n - x_{n-1})^2}{2.2} = 3(x_n - x_{n-1})^2.$$

Bảng dưới đây cho thấy kết quả tính nghiệm gần đúng x_n kèm theo sai số

n	x_n	Sai số ε_n
0	2	
1	1.545454545	0.6198348
2	1.359614916	0.1036092
3	1.325801345	0.0034301
4	1.324719049	0.0000036
5	1.324717950	10^{-11}

Bài tập

1. Dùng phương pháp chia đôi, hãy tìm nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ với sai số 10^{-3} trong khoảng phân li nghiệm $(-3; -2)$.
2. Giải phương trình $ax + b = 0$ với $a \in (0.1; 1)$ không sử dụng phép chia.
3. Phương trình $x^4 - 3x^2 + 75x - 10000 = 0$ có một nghiệm $\alpha \in (-11; -10)$. Sử dụng phương pháp Newton hãy tìm gần đúng α với
   (a) hai bước lặp và đánh giá sai số.
   (b) 4 chữ số chắc.
   (c) sai số không quá 10^{-4}.
4. Phương trình $x^2 - 2\sin x - \dfrac{1}{2} = 0$ có nghiệm $\alpha \in (1; 2)$. Sử dụng phương pháp Newton tính gần đúng α với sai số 10^{-3}.

Chương 4

Tính gần đúng đạo hàm và tích phân

4.1 Tính gần đúng đạo hàm

Trong thực tế, nhiều khi người ta phải tìm đạo hàm một hàm số cho dưới dạng bảng, hoặc hàm cho dưới dạng giải tích nhưng phức tạp. Trong những trường hợp đó, ta thường dùng phương pháp tính gần đúng đạo hàm. Ta thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy của nó:$f(x) = P(x) + R(x)$, trong đó phần dư

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),\ \xi = \xi(x) \in (x_0, x_n).$$

Khi đó $f'(x) = P'(x) + r(x)$ với $r(x) = R'(x)$. Dễ thấy phép tính gần đúng đạo hàm như trên không chính xác bằng phép nội suy vì từ hệ thức $f(x_i) = P(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$ không suy ra $f'(x_i) \approx P'(x_i)$ $(i = \overline{0,n})$.

4.1.1 Sử dụng đa thức nội suy Lagrange

Ta có $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k P_k(x)$, trong đó $P_k(x) = \dfrac{\prod\limits_{i\neq k}(x - x_i)}{\prod\limits_{i\neq k}(x_k - x_i)}$ Vì

$$r(x) = R'(x) = \frac{d}{dx}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

nên $r(x_k) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod\limits_{i\neq k}(x_k - x_i)$.

Xét trường hợp $n = 1$, ta có

$$P(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0},\ R(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

Suy ra $P'(x_0) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ và $r(x_0) = R'(x_0) = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)$.

Như vậy

$$f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0).$$

Từ đây ta lại nhận được khai triển Taylor:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_1 - x_0)^2.$$

• **Ví dụ 4.1.** Xét hàm số $f(x) = 3^x$. Từ ví dụ 2.3 ta biết đa thức nội suy Lagrange của hàm số tại các mốc nội suy $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ là

$$P_2(x) = 1 + \frac{4x}{3} + \frac{2x^2}{3}$$

Khi đó đạo hàm được tính gần đúng bởi công thức

$$f'(x) \approx P_2'(x) = \frac{4}{3} + \frac{4x}{3}.$$

4.1.2 Sử dụng công thức nội suy Newton

Trong trường hợp các mốc nội suy cách đều ta có thể sử dụng các công thức nội suy Newton tiến, lùi để tính gần đúng đạo hàm. Ví dụ để tính $f'(x), f''(x)$ cho $x = x_0$, ta dùng đa thức nội suy Newton tiến

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1)$$

trong đó $t = (x - x_0)/h$.

Dễ thấy

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dP}{dt} &= \frac{1}{h}\{\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!}\Delta^3 y_0 \\ &+ \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h}\frac{d}{dt}\left(\frac{dP}{dx}\right) = \frac{1}{h^2}\{\Delta^2 y_0 + (t-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2 - 18t + 11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\}$$

Nói riêng

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{1}{h}\left\{\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \cdots\right\} \\ f''(x_0) &\approx \frac{1}{h^2}\left\{\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right\}\end{aligned}$$

• **Ví dụ 4.2.** Tìm $f'(50)$ của hàm $f(x)$ cho dưới dạng bảng sau:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1.6990			
		414		
55	1.7404		-36	
		378		5
60	1.7782		-31	
		347		
65	1.8129			

Ta có

$$h = 5;\ f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\Big(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \cdots\Big)$$

Suy ra

$$f'(50) \approx \frac{1}{5}(0.0414 - 0.0018 + 0.0002) = 0.0087.$$

So sánh với giá trị đúng của đạo hàm

$$f'(x) = (\lg x)' = \Big(\frac{\ln x}{\ln 10}\Big)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln 10} \approx \frac{0.43429}{50} \approx 0.0087.$$

4.2 Tính gần đúng tích phân

Trong thực tế, nhiều khi ta phải tính tích phân xác định của hàm số mà không biết nguyên hàm của nó. Nếu dùng định nghĩa tích phân

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

thì tổng Darboux hội tụ rất chậm, do đó để đạt được độ chính xác không cao, ta vẫn phải thực hiện một khối lượng tính toán rất lớn. Ngoài ta, trong nhiều trường hợp, hàm $f(x)$ chỉ được cho dưới dạng bảng, vì vậy khái niệm nguyên hàm trở nên vô nghĩa.

4.2.1 Phương pháp đa thức nội suy

Phương pháp đơn giản nhất để tính gần đúng tích phân xác định là thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy $P(x)$, sau đó đặt:

$$I := \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx.$$

• **Ví dụ 4.3.** Cho hàm số $f(x)$ dưới dạng bảng

x	-1	0	1
$f(x)$	-7	0	7

Tìm tích phân $I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng đa thức nội suy Lagrange .

Giải

Từ ví dụ 2.2 ta biết đa thức nội suy Lagrange của hàm số $f(x)$ tại các mốc nội suy $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ là $P(x) = 7x$. Khi đó tích phân được tính gần đúng bởi công thức

$$I \approx \int\limits_{-1}^{1} P(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} 7xdx = 0.$$

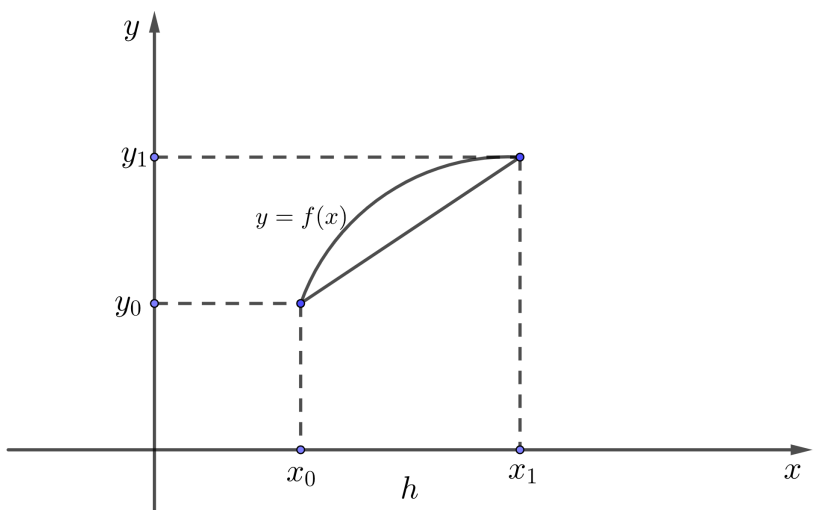
4.2.2 Phương pháp hình thang

a. Công thức

Ta chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau với các điểm chia $x_i = a + ih$ $(i = \overline{0, n})$ trong đó $h = (b - a)/n$. Khi đó theo tính chất của tích phân ta có thể viết

$$I = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

Xét tích phân $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.



Về mặt hình học đó chính là diện tích hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = x_0, x = x_1$ (Hình vẽ)

Với giả thiết $f(x)$ liên tục, h khá bé ta có thể xấp xỉ diện tích hình thang cong bằng diện tích hình thang vuông, tức là

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}h, \qquad y_i = f(x_i).$$

Tương tự, ta có

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h\frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

Như vậy

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + \cdots + 2y_{n-1})]. \tag{4.1}$$

b. Sai số phương pháp

Sai số địa phương. Thực chất của việc thay $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}h$ là xấp xỉ hàm $f(x)$ trên đoạn $[x_0, x_1]$ bằng đa thức nội suy bậc nhất:

$$f(x) \approx P_1(x) = \frac{y_0(x - x_1)}{x_0 - x_1} + \frac{y_1(x - x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Sai số của phép nội suy tuyến tính là:

$$|R_1(x)| = \left|\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)(x - x_1)\right| \le \frac{M}{2}(x - x_0)(x_1 - x)$$

trong đó $M = \max\limits_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|$.

Dễ thấy

$$r_1 := |\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - \frac{y_0 + y_1}{2}h| \le \int_{x_0}^{x_1} |R_1(x)|dx \le \frac{M}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x_1 - x)dx = \frac{Mh^3}{12}$$

Sai số toàn phần. $r = n.\frac{Mh^3}{12} = \frac{M(b-a)}{12}h^2$.

c. Thuật toán của công thức hình thang

⊙ **Thuật toán của công thức hình thang khi cho trước số khoảng chia *n***

- Chia đoạn lấy tích phân $[a, b]$ thành n phần bằng nhau. Tính

$$h = \frac{b - a}{n};$$
$$x_i = a + ih; \quad y_i = f(x_i); \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n.$$

- Kết quả
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+(y_1+\cdots+y_{n-1})\right].$$

- Sai số toàn phần
$$r=\frac{M(b-a)}{12}h^2; \qquad \text{với } M=\max_{[a,b]}|f''(x)|.$$

⊙ **Thuật toán của công thức hình thang khi ấn định trước sai số ε**

- Sử dụng công thức sai số
$$\frac{M(b-a)^3}{12n^2}\le\varepsilon; \qquad \text{với } M=\max_{[a,b]}|f''(x)|$$
để suy ra số khoảng chia $n\in\mathbb{N}$.

- Chia đoạn lấy tích phân $[a,b]$ thành n phần bằng nhau. Tính
$$h=\frac{b-a}{n};$$
$$x_i=a+ih; \quad y_i=f(x_i); \quad \forall i=0,1,\ldots,n.$$

- Kết quả
$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+(y_1+\cdots+y_{n-1})\right].$$

• **Ví dụ 4.4.** Tính $I=\int_1^5\frac{dx}{x}$ bằng cách chia $[1,5]$ thành 4 đoạn bằng nhau

Giải

Ở đây $a=1, b=5, n=4, h=\dfrac{b-a}{n}=1, f(x)=\dfrac{1}{x}$. Ta lập bảng giá trị

i	x_i	$y_i=f(x_i)$
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	3	$\frac{1}{3}$
3	4	$\frac{1}{4}$
4	5	$\frac{1}{5}$

Khi đó kết quả tính gần đúng là: $I\approx 1\left[\dfrac{1+\frac{1}{5}}{2}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4})\right]=\dfrac{101}{60}$.

Vì $f''(x)=2x^{-3}$ nên $|f''(x)|\le 2$ $(\forall x\in[1,5])$ và như vậy sai số toàn phần
$$r=\frac{2\times 4}{12}\times 1^2=\frac{2}{3}\approx 0.66.$$

4.2.3 Công thức parabol (Simpson)

a. Công thức

Chia đoạn $[a, b]$ thành $2n$ phần bằng nhau với bước $h = (b-a)/2n$. Trên mỗi đoạn $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = \overline{1,n})$ ta thay $f(x)$ bằng đa thức nội suy bậc hai (parabol) với các mốc nội suy $x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}$.

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & P_2(x) = y_{2i-2}\frac{(x-x_{2i-1})(x-x_{2i})}{(x_{2i-2}-x_{2i-1})(x_{2i-2}-x_{2i})} \\ & + y_{2i-1}\frac{(x-x_{2i-2})(x-x_{2i})}{(x_{2i-1}-x_{2i-2})(x_{2i-1}-x_{2i})} + y_{2i}\frac{(x-x_{2i-2})(x-x_{2i-1})}{(x_{2i}-x_{2i-2})(x_{2i}-x_{2i-1})} \end{aligned}$$

Khi đó $\int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_2(x)dx = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$.

Vì $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$ nên ta có công thức sau:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})] \tag{4.2}$$

b. Sai số phương pháp

Sai số địa phương. Xét hàm $F(t) := \Phi(t) - (\frac{t}{h})^5\Phi(h)$ $(0 \le t \le h)$, trong đó

$$\Phi(t) = \int\limits_{x_i-t}^{x_i+t} f(x)dx - \frac{t}{3}\big[f(x_i-t) + 4f(x_i) + f(x_i+t)\big].$$

Dễ thấy $F(0) = F(h) = 0; F'(0) = F''(0) = 0$, còn

$$F^{(3)}(t) = -\frac{t}{3}\big[f^{(3)}(x_i+t) - f^{(3)}(x_i-t)\big] - \frac{60t^2}{h^5}\Phi(h),$$

hay

$$F^{(3)}(t) = -\frac{2t^2}{3}\big[f^{(4)}(\xi) + \frac{90}{h^5}\Phi(h)\big], \tag{4.3}$$

trong đó $\xi \in (x_i - t, x_i + t)$. Áp dụng định lý Rolle ta có: do $F(0) = F(h) = 0$ nên tìm được $t_1 \in (0, h)$ để $F'(t_1) = 0$. Tiếp theo $F'(0) = F'(t_1) = 0$, ta tìm được $t_2 \in (0, t_1)$ để $F''(t_2) = 0$. Cuối cùng, do $F''(0) = F''(t_2) = 0$, tồn tại $t_3 \in (0, t_2)$ sao cho $F^{(3)}(t_3) = 0$. Từ (4.3) ta suy ra:

$$\Phi(h) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \text{ trong đó } x_i - t_3 < \xi < x_i + t_3.$$

Như vậy:

$$\int_{x_i-h}^{x_i+h} f(x)dx = \frac{h}{3}\big[f(x_i-h)+4f(x_i)+f(x_i+h)\big] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi). \tag{4.4}$$

Đặt $M = \max\big\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b]\big\}$, ta có ước lượng sai số địa phương sau:

$$|r_i| \le \frac{Mh^5}{90}.$$

Sai số toàn phần.

$$|r| \le n\frac{Mh^5}{90} = \frac{b-a}{180}Mh^4. \tag{4.5}$$

c. Thuật toán của công thức Simpson

⊙ **Thuật toán của công thức Simpson khi cho trước số khoảng chia $2n$**

- Chia đoạn lấy tích phân $[a,b]$ thành $2n$ phần bằng nhau. Tính

$$h = \frac{b-a}{2n};$$
$$x_i = a + ih; \quad y_i = f(x_i); \quad \forall i = 0,1,\dots,n.$$

- Kết quả

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_{2n} + 4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}) + 2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})\Big].$$

- Sai số toàn phần

$$r = \frac{Mh^4(b-a)}{180}; \qquad \text{với } M = \max_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

⊙ **Thuật toán của công thức Simpson khi ấn định trước sai số ε**

- Sử dụng công thức sai số

$$\frac{M(b-a)^5}{2880n^4} \le \varepsilon; \qquad \text{với } M = \max_{[a,b]}|f^{(4)}(x)|$$

để suy ra số $n \in \mathbb{N}$.

- Chia đoạn lấy tích phân $[a,b]$ thành $2n$ phần bằng nhau. Tính

$$h = \frac{b-a}{2n};$$
$$x_i = a + ih; \quad y_i = f(x_i); \quad \forall i = 0,1,\dots,n.$$

- Kết quả

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2})\Big].$$

• **Ví dụ 4.5.** Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ theo công thức parabol với $n = 2$.

Giải

Ở đây $a = 0, b = 1, h = 0.25, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ta lập bảng giá trị

i	x_i	$y_i = f(x_i)$
0	0.00	1.000000
1	0.25	0.941176
2	0.50	0.800000
3	0.75	0.640000
4	1.00	0.500000

$$I \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 1 + 3.76471 + 1.6 + 2.56000 + 0.5 \approx 0.785399$$

Để ý rằng $\pi = 4I$, ta được biểu thức gần đúng $\pi \approx 3.141596$.

Bài tập

1. Cho hàm số $y = f(x)$ và bảng giá trị sau

x	0	1	2	3
$y = f(x)$	-6	2	-2	6

   a) Tìm đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$.

   b) Dùng đa thức nội suy Lagrange tính gần đúng đạo hàm $f'(1)$ và $f''(2,5)$.

2. Xét tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$

   a) Tính gần đúng I bằng công thức hình thang với 10 đoạn chia và đánh giá sai số.

   b) Tính gần đúng I bằng công thức hình thang với sai số không quá 10^{-4}.

   c) Để tính I với 10 chữ số chắc thì số đoạn chia tối thiểu là bao nhiêu?

3. Cho tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

   a) Phải chia đoạn $[0, 1]$ thành mấy đoạn con bằng nhau để khi tính I bằng công thức hình thang có sai số không quá 3.10^{-4}.

   b) Với n ở câu a thì sai số là bao nhiêu khi tính I theo công thức Simson.

   c) Hãy tính I với n đã chọn ở trên bằng công thức hình thang và công thức Simson đến 6 chữ số lẻ thập phân.

4. Lập chương trình tính tích phân $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ theo công thức Simson. Số liệu vào $h_0 = 0,05; \varepsilon = 10^{-4}$. Bước lưới giảm đi một nửa ($h_1 := h_0/2$) nếu kết quả bước trước so với bước sau chưa thỏa mãn điều kiện $16 \times (I_1 - I_0)/15 < \varepsilon$. Sử dụng đẳng thức $4I = \pi$ để kiểm tra kết quả tính toán.

5. Trong lý thuyết số học người ta đã chứng minh rằng số các số nguyên tố trong khoảng (a, b) xấp xỉ bằng $\int\limits_a^b \frac{dx}{\ln x}$.

   a) Lập chương trình tính số các số nguyên tố trong khoảng $(100, 200)$.

   b) Tính tích phân $I = \int\limits_{100}^{200} \frac{dx}{\ln x}$ theo công thức Simson với $n = 100$. So sánh kết quả với phần a).

Tài liệu tham khảo

[1] Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính*, NXBGD, 1993

[2] Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số*, NXBĐHQG, 2000.

[3] Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, William H. Press, 2000.