TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÀNG HẢI VIỆT NAM
KHOA CƠ SỞ - CƠ BẢN
BỘ MÔN TOÁN
——ooOoo——

TÀI LIỆU HỌC TẬP

ĐẠI SỐ

TÊN HỌC PHẦN	:	**ĐẠI SỐ**
MÃ HỌC PHẦN	:	**18141**
TRÌNH ĐỘ ĐÀO TẠO	:	**ĐẠI HỌC CHÍNH QUY**

Hải Phòng - 6/2023

Mục lục

Chương 1
Ma trận - Định thức - Hệ phương trình tuyến tính

1.1. Ma trận và các phép toán trên ma trận

1.1.1. Khái niệm ma trận.

□ **Định nghĩa 1.1.** Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Một ma trận thực cỡ $m \times n$ là một bảng chữ nhật gồm $m \times n$ số thực xếp thành m hàng, n cột. Số thực đứng ở hàng i cột j gọi là phần tử ij. Nếu ký hiệu phần tử này là a_{ij} thì một ma trận cỡ $m \times n$ có thể được biểu diễn bởi:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ta dùng ký hiệu thu gọn $[a_{ij}]_{m\times n}$ để chỉ một ma trận m hàng, n cột.

• **Ví dụ 1.1.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{bmatrix}$. Đây là ma trận cỡ 2×3 có:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 5, a_{21} = 7, a_{22} = 9, a_{23} = 11.$$

1.1.2. Một số dạng đặc biệt của ma trận

a) **Ma trận cột** là ma trận có một cột cỡ $m \times 1$, ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ là ma trận cột cỡ } 4 \times 1.$$

b) **Ma trận hàng** là ma trận có một hàng cỡ $1 \times n$, ví d:ụ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ là ma trận hàng cỡ } 3 \times 1.$$

c) **Ma trận không** là ma trận mà tất cả các phần tử đều bằng không. Ma trận không được ký hiệu là Θ, ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận không cỡ 2×4.

d) **Ma trận vuông cấp** n là ma trận có n hàng và n cột, ký hiệu $A = [a_{ij}]_n$ hoặc $A = (a_{ij})_n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ được gọi là các *phần tử chéo*. Chúng tạo thành *đường chéo chính* của ma trận vuông.

e) **Ma trận tam giác trên** là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i > j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

f) **Ma trận tam giác dưới** là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận tam giác trên hoặc ma trận tam giác dưới được gọi chung là ma trận tam giác.

g) **Ma trận đường chéo** là ma trận vuông cấp n trong đó $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

h) **Ma trận đơn vị** là ma trận đường chéo với tất cả các phần tử chéo đều bằng 1. Ký hiệu I_n hoặc E.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hay} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

i) **Ma trận chuyển vị của ma trận** A ký hiệu là A^t, nhận được từ ma trận A bằng cách chuyển hàng thành cột hoặc cột thành hàng. Như vậy:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1.1.3. Các phép toán trên ma trận

Hai ma trận bằng nhau

□ **Định nghĩa 1.2.** Hai ma trận A và B gọi là bằng nhau nếu chúng cùng cỡ, nghĩa là $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ và các phần tử ở các vị trí tương ứng bằng nhau, cụ thể $a_{ij} = b_{ij}$ với mọi $i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n$, ký hiệu $A = B$.

Phép cộng hai ma trận

□ **Định nghĩa 1.3.** Cho hai ma trận cùng cỡ $A = [a_{ij}]_{m\times n}, B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Tổng của A và B là một ma trận cùng cỡ $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, ký hiệu là $C = A + B$, trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Như vậy muốn cộng hai ma trận cùng cỡ, ta cộng các phần tử cùng vị trí với nhau.

• **Ví dụ 1.2.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó: $A + B = C = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 2 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Tính chất. Các phép tính cộng trên các ma trận cùng cỡ có tính chất giống như các tính chất của phép cộng các số thực:

- Tính giao hoán $A + B = B + A$
- Tính kết hợp $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + \Theta = A$
- $\forall A = [a_{ij}]_{m\times n}, \exists$ ma trận đối của ma ma trận A là $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$ thỏa mãn
$$A + (-A) = \Theta.$$

Nhân ma trận với một số thực

□ **Định nghĩa 1.4.** Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ và số thực k. Tích của A với số thực k là một ma trận cùng cỡ với ma trận A, ký hiệu là kA, xác định bởi công thức

$$kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

• **Ví dụ 1.3.**

$$2\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -4 & 14 & 6 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tính chất. Giả sử $k, h \in \mathbb{R}$ và A, B là các ma trận, ta có các tính chất sau:

- $k(A + B) = kA + kB$
- $k(hA) = khA$
- $(k + h)A = kA + hA$
- $1.A = A$

Nhân ma trận với ma trận

□ **Định nghĩa 1.5.** Cho hai ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ và $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. Tích của ma trận A với ma trận B là một ma trận cỡ $m \times n$, ký hiệu là AB, xác định như sau:

$$AB = [c_{ij}]_{m\times n}, \text{ với } c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + \cdots + a_{ip}.b_{pj}.$$

• **Ví dụ 1.4.** Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Khi đó

$$AB = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.3 & 1.0 + 2.1 \\ 0.2 - 1.3 & 0.0 - 1.1 \\ 3.2 + 1.3 & 3.0 + 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ -3 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 1.5.** Tính AB và BA nếu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ta có

$$AB = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ -48 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -23 \\ -4 & 30 & -58 \\ 10 & 11 & -27 \end{bmatrix}$$

Tính chất. Giả sử A, B, C là các ma trận và k là một số thực. Nếu phép tính ở vế trái của các đẳng thức dưới đây có nghĩa thì vế phải cũng có nghĩa và 2 vế bằng nhau

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $IA = AI = A$
- $\Theta A = A\Theta = \Theta$.

Luỹ thừa ma trận

□ **Định nghĩa 1.6.** Cho A là ma trận vuông cấp n, $k \in \mathbb{N}^*$. Lũy thừa bậc k của ma trận A là ma trận vuông cùng cấp được xác định như sau:

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k \text{ ma trận } A}$$

⊕ **Nhận xét**: Do tính chất kết hợp của phép nhân ma trận nên:

$$A^k = (A^{k-1}).A = A.(A^{k-1})$$

• **Ví dụ 1.6.** Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Lời giải. Ta có:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dự đoán công thức:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta chứng minh công thức trên bằng quy nạp:

- Công thức đã đúng trong trường hợp $n = 1, n = 2$.
- Giả sử công thức đúng với $n = k$, $k \geq 3$, tức là: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Khi đó:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  tức là công thức đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức dự đoán đã được chứng minh xong.

1.2. Định thức

1.2.1. Định nghĩa định thức

Các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Các phép biến đổi sau đây được thực hiện trên các hàng của A là các phép biến đổi sơ cấp trên hàng:

- Hoán vị 2 hàng của A.
- Nhân tất cả các phần tử của một hàng nào đó của A với cùng một số khác 0.
- Nhân tất cả các phần tử của một hàng nào đó của A với cùng một số rồi cộng vào các phần tử tương ứng của một hàng khác.

∗ **Chú ý:** Các phép biến đổi sơ cấp trên cột cũng được định nghĩa tương tự.

• **Ví dụ 1.7.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hãy dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hàng của A để đưa A về dạng tam giác trên.

Lời giải. Ta thực hiện dãy các phép biến đổi sơ cấp trên hàng để biến đổi dần ma trận A thành ma trận có dạng tam giác trên như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2h_1+h_2\to h_2]{-3h_1+h_3\to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5h_2+h_3\to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Ma trận con A_{ij} của ma trận A

□ **Định nghĩa 1.7.** Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Ma trận con A_{ij} của A là ma trận thu được từ ma trận A bằng cách bỏ đi các phần tử nằm ở trên hàng i và các phần tử nằm trên cột j, cỡ của A_{ij} là $(m-1)\times(n-1)$.

• **Ví dụ 1.8.** Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Các ma trận con A_{ij} của A gồm:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa

□ **Định nghĩa 1.8.** Cho ma trận vuông cấp n, $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Định thức của ma trận A là một số được ký hiệu là: $\det(A)$, $|A|$ hoặc

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

được xác định bằng phương pháp quy nạp như sau:

- Với $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$,
- Với $n > 1$, định thức của ma trận A được định nghĩa thông qua định thức của các ma trận con A_{ij} cấp $n-1$ của nó bằng công thức:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}).$$

∗ **Chú ý:**

- Định thức của ma trận vuông cấp n gọi là định thức cấp n.
- Biểu thức định thức cấp 2, định thức cấp 3 và quy tắc Sarius

+) Định thức cấp 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

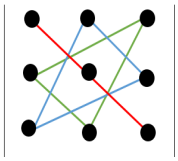
+) Định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

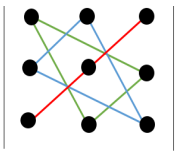
+) Quy tắc Sarius cho định thức cấp 3

- Các số hạng mang dấu cộng: các số hạng là tích các phần tử nằm trên đường chéo chính hoặc tích các phần tử nằm trên các đỉnh của tam giác có một cạnh song song với đường chéo chính.



Hình 1.1 Quy tăc Sarius - các số hạng mang dấu cộng

- Các số hạng mang dấu trừ: các số hạng là tích các phần tử nằm trên đường chéo phụ hoặc tích các phần tử nằm trên các đỉnh của tam giác có một cạnh song song với đường chéo phụ.



Hình 1.2 Quy tắc Sarius - các số hạng mang dấu trừ

• **Ví dụ 1.9.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.3.2 + 2.1.3 + 2.1.3 - 3.3.3 - 2.2.2 - 1.1.1 = -18$$

1.2.2. Tính chất

Cho $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n. Các hàng và cột của A ta cũng sẽ gọi là các hàng và các cột của $\det(A)$. Một hàng hoặc cột gồm toàn số 0 sẽ được gọi là một hàng không (tương ứng: cột không). Định thức có các tính chất dưới đây:

- **Tính chất 1:** Hoán vị 2 hàng (tương ứng 2 cột) của A thì $\det(A)$ đổi dấu.
- **Tính chất 2:** Nếu tất cả các phần tử của hàng i (tương ứng cột j) của định thức được nhân với cùng một số k thì giá trị của định thức mới nhận được bằng giá trị của định thức cũ nhân với k.
- **Tính chất 3:** Thêm vào một hàng (hoặc một cột) k lần một hàng (hoặc k lần một cột) khác thì định thức không đổi.
- **Tính chất 4:** Định thức của ma trận tam giác trên hoặc dưới bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.
- **Tính chất 5:** $\det(A) = \det(A^t)$.
- **Tính chất 6:** Có thể tính định thức của ma trận bằng cách khai triển theo một hàng hoặc một cột tùy ý bởi các công thức sau :
  $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$ (Công thức khai triển theo hàng thứ i),
  $\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{j+i}a_{ij}\det(A_{ij})$ (Công thức khai triển theo cột thứ j).
- **Tính chất 7:** Giả sử A, B là hai ma trận vuông cùng cấp thì
  $$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
- **Tính chất 8:** Giả sử hàng i của A biểu diễn dưới dạng:
  $$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}.$$
  Gọi B là ma trận nhận được từ A bằng cách thay a_{ij} bằng b_{ij}, C là ma trận nhận được từ A bằng cách thay a_{ij} bằng c_{ij}. Khi đó
  $$\det(A) = \det(B) + \det(C).$$
  Phát biểu tương tự cũng đúng đối với cột.
- **Tính chất 9:** Nếu định thức có một trong các tính chất sau thì định thức bằng không:
  + Có một hàng (hoặc một cột) bằng không;
  + Có hai hàng (hoặc hai cột) tỷ lệ;
  + Có một hàng (hoặc một cột) là tổ hợp tuyến tính của các hàng (hoặc của các cột) khác.

Các ví dụ tính định thức nhờ các tính chất

- **Ví dụ 1.10.** Tính định thức
$$D = \begin{vmatrix} a & x & x & x \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix}$$

Lời giải. Cộng tất cả các cột 2, 3, 4 vào cột 1 , rút nhân tử chung của cột đầu trong định thức nhận được ta có :

$$D = \begin{vmatrix} a+3x & x & x & x \\ 3x+a & a & x & x \\ 3x+a & x & a & x \\ 3x+a & x & x & a \end{vmatrix} = (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & x & x \\ 1 & x & a & x \\ 1 & x & x & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -h_1+h_2 \to h_2 \\ -h_1+h_3 \to h_3 \\ -h_1+h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

Nhân hàng 1 với (-1) rồi cộng lần lượt vào các hàng còn lại, ta được

$$D = (3x+a)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & a-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-x \end{vmatrix}$$

Áp dụng tính chất thứ 4: $D = (3x+a)(a-x)^3$.

• **Ví dụ 1.11.** Giải phương trình sau:

$$\begin{vmatrix} 2x & -1 & -x & -x^2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Lời giải. Khai triển định thức trên theo hàng 1, ta được:

$$2x\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -4 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} - (-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 21x + 14 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -2.$$

• **Ví dụ 1.12.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 7 & -8 & 15 \\ -4 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3h_1 + h_2 \to h_2 \\ -2h_1 + h_3 \to h_3 \\ 4h_1 + h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ h_2 \leftrightarrow h_3 \\ h_3 : 3 \to h_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -2h_2 + h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ h_3 \leftrightarrow h_4 \\ -2h_3 + h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix} = 3.1.1.5.(-19) = -285.$$

• **Ví dụ 1.13.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

Lời giải.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -h_1 + h_2 \to h_2 \\ -h_2 + h_3 \to h_3 \\ -h_3 + h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \\ 7 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -h_2 + h_3 \to h_3 \\ -h_3 + h_4 \to h_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

• **Ví dụ 1.14.** Tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & x \\ 4 & 9 & 16 & x^2 \\ 8 & 27 & 64 & x^3 \end{vmatrix}$$

Lời giải. Khai triển định thức D theo cột 4, ta thu được đa thức bậc 3của x với hệ số cao nhất là

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = 2.$$

Cho x lần lượt nhận các giá trị $x = 2, x = 3, x = 4$ ta thấy D có 2 cột giống nhau, do đó $D = 0$ khi $x = 2, x = 3, x = 4$. Theo định lý Bezout ta phải có:

$$D = 2(x-2)(x-3)(x-4).$$

• **Ví dụ 1.15.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $\det(A^{2024})$

Lời giải.

$$\begin{aligned} A.A^t &= \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\det(A.A^t) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Mà $\det(A) = \det(A^t)$ nên $\det(AA^t) = \det(A).\det(A^t) = [\det(A)]^2$.

Do đó

$$[det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$

Vậy:

$$\begin{aligned} \det(A^{2024}) &= [\det(A)]^{2024} = \left\{[\det(A)]^2\right\}^{1012} \\ &= \left\{(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\right\}^{1012} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^{4048} \end{aligned}$$

1.3. Ma trận nghịch đảo

1.3.1. Định nghĩa

□ **Định nghĩa 1.9.** Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu có ma trận B vuông cùng cấp sao cho:

$$AB = BA = I_n$$

thì ta nói A khả đảo và B được gọi là ma trận nghịch đảo của của ma trận A. Ký hiệu ma trận nghịch đảo của ma trận A là A^{-1}.

Như vậy $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
Khi A khả đảo ta nói A là ma trận *không suy biến.*

• **Ví dụ 1.16.** Xét $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{1} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Ta có $AB = BA = I_2$ nên theo định nghĩa $B = A^{-1}$.

1.3.2. Tính chất

△ **Định lý 1.1.** *Ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A nếu tồn tại thì duy nhất.*

Chứng minh. Giải sử B và $B^{'}$ là hai ma trận cùng thỏa mãn định nghĩa ma trận nghịch đảo của ma trận A. Khi đó:

$$AB = BA = I, AB^{'} = B^{'}A = I.$$

Vậy

$$B^{'} = IB^{'} = (BA)B^{'} = B(AB^{'}) = BI = B.$$

□

△ **Định lý 1.2.** *Nếu ma trận vuông A khả đảo thì* $\det(A) \neq 0$.

Chứng minh. Vì A khả đảo nên tồn tại A^{-1} và $AA^{-1} = I_n$. Áp dụng công thức tính định thức của tích hai ma trận ta có:

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1.$$

Vậy $\det(A) \neq 0$ và hơn nữa $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. □

△ **Định lý 1.3.** *Nếu ma trận vuông A cấp n có* $\det(A) \neq 0$ *thì A khả đảo và*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^t,$$

ở đó $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ là ma trận phụ hợp của ma trận A với $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Chứng minh. Áp dụng công thức khai triển định thức theo hàng thứ i ta có

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

$$\Rightarrow a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \det(A).$$

Hơn nữa, do định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không nên suy ra

$$a_{k1}c_{i1} + a_{k2}c_{i2} + \cdots + a_{kn}c_{in} = \begin{cases} \det(A) & \text{nếu } k = i \\ 0 & \text{nếu } k \neq i \end{cases}.$$

Do đó $AC^t = \det(A)I$.
Áp dụng công thức khai triển định thức theo cột và lập luận tương tự ta cũng có:

$$C^tA = \det(A).I$$

Như vậy

$$A(\frac{1}{\det(A)}C^t) = (\frac{1}{\det(A)}C^t)A = I$$

suy ra điều phải chứng minh. □

△ **Định lý 1.4.** *Giả sử các ma trận vuông A, B là các ma trận khả đảo. Khi đó:*

a) A^{-1} *cũng khả đảo và* $(A^{-1})^{-1} = A$,

b) $\forall m \in \mathbb{N}$, A^m *cũng khả đảo và* $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$,

c) $\forall k \neq 0$ *ta có* kA *cũng khả đảo và* $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$,

d) AB *cũng khả đảo và* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Chứng minh. Bằng việc kiểm tra trực tiếp định nghĩa ma trận nghịch đảo, ta dễ dàng thu được các tính chất trên. □

1.3.3. Các ví dụ tính ma trận nghịch đảo bằng ma trận phụ hợp

• **Ví dụ 1.17.** Công thức ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2 khả đảo:
Giả sử $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ có $\det(A) = ad - bc \neq 0$, áp dụng công thức ta có

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Chẳng hạn:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1.7-3.5}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/8 & 3/8 \\ 5/8 & -1/8 \end{bmatrix}.$$

• **Ví dụ 1.18.** Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận sau (nếu có):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Ta có $\det(A) = -3 \neq 0$ nên A khả đảo. Áp dụng công thức ta có:

$$\begin{array}{lll} c_{11} = -7, & c_{12} = -2, & c_{13} = 6 \\ c_{21} = 2, & c_{22} = 1, & c_{23} = -3 \\ c_{31} = 1, & c_{32} = -1, & c_{33} = 0 \end{array}.$$

Do đó

$$C = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận A là

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

• **Ví dụ 1.19.** Tìm ma trận X, biết

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Đặt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Ta có $\det(A) = 5 \neq 0$ nên A khả đảo và

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình ma trận trở thành

$$AX = B$$

Nhân A^{-1} vào bên trái cả hai vế, ta được:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

Ngược lại, giả sử $X = A^{-1}B$. Nhân A vào bên trái của 2 vế ta được $AX = A(A^{-1}B)$. Từ đó suy ra $AX = B$. Vậy ma trận X cần tìm là

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & -1 & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}.$$

1.4. Hạng của ma trận

1.4.1. Định nghĩa

□ **Định nghĩa 1.10.** Cho A là ma trận cỡ $m \times n$. Ma trận con cấp $p\,(1 \leq p \leq min(m,n))$của A là ma trận có được từ A sau khi bỏ đi $m-p$ hàng và $n-p$ cột. Định thức của ma trận đó được gọi là định thức con cấp p của A.

□ **Định nghĩa 1.11.** Hạng của ma trận A là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A, ký hiệu là $r(A)$, rank (A) hoặc $\rho(A)$. Hạng của ma trận không bằng 0.

• **Ví dụ 1.20.** Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Các định thức con cấp 3 của ma trận A là:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

nên $r(A) < 3$. Hơn nữa, có ít nhất một định thức con cấp 2 của A

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$$

nên ta có $r(A) = 2$.

□ **Định nghĩa 1.12.** Ma trận bậc thang là ma trận có các đặc điểm sau:

- Các hàng bằng không ở dưới các hàng khác không.
- Đối với hai hàng khác không liên tiếp, phần tử khác 0 đầu tiên (kể từ trái sang) của hàng trên nằm bên trái phần tử khác 0 đầu tiên của hàng dưới.

• **Ví dụ 1.21.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận bậc thang có 3 hàng khác 0.

1.4.2. Tính chất của hạng ma trận A

- **Tính chất 1:** $r(A) = r(A^t)$.
- **Tính chất 2:** Hạng của ma trận không đổi khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp.
- **Tính chất 3:** Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác không của ma trận đó.

Quy tắc thực hành tìm hạng của ma trận A: Để tìm hạng của ma trận A ta sử dụng 3 phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận A về ma trận bậc thang B. Khi đó $r(A) = r(B) =$ số hàng khác không của B.

1.4.3. Các ví dụ tính hạng của ma trận

• **Ví dụ 1.22.** Tính hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3+h_1\to h_3]{h_2-2h_1\to h_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{5h_3+3h_2\to h_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng là ma trận bậc thang với 2 hàng khác 0. Vậy $r(A) = 2$.

• **Ví dụ 1.23.** Biện luận theo m hạng của ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Thực hiện lần lượt các phép hoán vị các cột

$$C_2 \leftrightarrow C_3, C_3 \leftrightarrow C_4, C_4 \leftrightarrow C_5, C_1 \leftrightarrow C_2, C_2 \leftrightarrow C_3, C_3 \leftrightarrow C_4$$

ta đưa A về dạng

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & m & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Biến đổi sơ cấp trên hàng đối với A'

$$A' \xrightarrow[h_2-h_1\to h_2]{h_4-2h_1\to h_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & m+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4-h_3\to h_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & m+1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2-m \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -2 & m+1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2-m \end{bmatrix} \xrightarrow{h_4-h_3\to h_4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & -2 & m+1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-m & 1-m \end{bmatrix} = A_{ht}.$$

Biện luận:

- Nếu $1-m=0 \Leftrightarrow m=1$ ma trận A_{ht} có 3 hàng khác 0, do đó $r(A)=r(A_{bt})=3$.
- Nếu $1-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$ ma trận A_{ht} có 4 hàng khác 0, do đó $r(A)=r(A_{ht})=4$.

• **Ví dụ 1.24.** Tìm m để ma trận sau có hạng bé nhất trong các giá trị mà nó có thể nhận:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Với giá trị đó của m hạng của B bằng bao nhiêu?

Lời giải.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m^2+m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & 8 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1\to C_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 17 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 10 & 1 & m^2+m & m+5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-7h_1+h_3\to h_3 \\ -4h_1+h_4\to h_4}]{-2h_1+h_2\to h_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & -25 & -20 & 15 \\ 0 & 6 & -15 & m^2+m-12 & m+9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5h_2+h_3\to h_4]{-3h_2+h_4\to h_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & m^2+m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy hạng(B) nhận giá trị nhỏ nhất nếu $m=0$. Khi đó $r(B)=2$.

1.5. Hệ phương trình tuyến tính

1.5.1. Định nghĩa

□ **Định nghĩa 1.13.** Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

trong đó

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn,
- a_{ij} là hệ số của ẩn x_j trong phương trình thứ i,
- b_i là vế phải của phương trình thứ i.

Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính
Đặt:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix},$$

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn là hệ phương trình có dạng ma trận:

$$Ax = b$$

trong đó A là ma trận hệ số; x là ma trận ẩn; b là ma trận vế phải.

1.5.2. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Cramer

△ **Định lý 1.5.** *(Định lý Cramer) Hệ phương trình tuyến tính $Ax = b$, với A là ma trận vuông không suy biến, có nghiệm duy nhất :*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, j = 1, 2, \ldots, n$$

trong đó A_j là ma trận có được từ A sau khi thay cột thứ j bởi cột vế phải b.

Chứng minh. Vì A không suy biến, $\det(A) \neq 0$ nên A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Từ phương trình $Ax = b$, nhân vào bên trái hai vế với A^{-1} ta có

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ix = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Ngược lại, giả sử $x = A^{-1}b$. Nhân A vào bên trái của 2 vế ta được: $Ax = A(A^{-1}b)$, suy ra $Ax = b$. Vậy $x = A^{-1}b$ là nghiệm của hệ phương trình.
Sử dụng biểu thức của ma trận A^{-1} ta suy ra

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

nghĩa là

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \dots + c_{nj}b_n}{\det(A)} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

với $j = 1, 2, \dots, n$ và ta có điều phải chứng minh. □

• **Ví dụ 1.25.** Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18; \det(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -19$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 29; \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -31.$$

Do $\det(A) = -18 \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất và

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{19}{18} \\ x_2 = \dfrac{-29}{18} \\ x_3 = \dfrac{31}{18} \end{cases}.$$

1.5.3. Giải hệ phương trình bằng ma trận nghịch đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n không suy biến. Khi đó hệ phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất: $x = A^{-1}b$

• **Ví dụ 1.26.** Giải hệ: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 4x_1 - x_2 = 7 \end{cases}$

Lời giải.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận nghịch đảo của A:

$$\det(A) = -14 \neq 0; \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

suy ra:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -26 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$x_1 = \frac{13}{7}; \quad x_2 = \frac{3}{7}$$

1.5.4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

□ **Định nghĩa 1.14.** Xét hệ phương trình $Ax = b$, ma trận bổ sung của A được ký hiệu $\overline{A}$, là ma trận thu được bằng cách bổ sung thêm cột b vào bên phải ma trận A:

$$\overline{A} = [A|b].$$

□ **Định nghĩa 1.15.** Hệ m phương trình, n ẩn

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

được gọi là hệ phương trình bậc thang nếu ma trận bổ sung $\overline{A}$ của nó có dạng bậc thang.

• **Ví dụ 1.27.** Hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{cases}$$

là hệ phương trình bậc thang vì ma trận bổ sung của nó

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

có dạng bậc thang.

∗ **Nhận xét:**

- Rõ ràng việc giải hệ phương trình bậc thang dễ hơn việc giải hệ phương trình chữ nhật. Để giải hệ phương trình dạng này ta sẽ giải ngược từ phương trình cuối, dùng phương pháp thế ta có nghiệm cần tìm.
- Tập nghiệm của hệ phương trình không thay đổi nếu ta thực hiện các phép biến đổi sau:
  + Hoán vị hai phương trình của hệ;
  + Nhân hai vế của một phương trình với một số k khác 0;
  + Nhân hai vế của một phương trình nào đó với một số k rồi cộng vào các vế tương ứng của một phương trình khác.

Các phép biến đổi nói trên tương ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung.

Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính:

- **Bước 1:** Lập ma trận bổ sung $\overline{A}$ của hệ.
- **Bước 2:** Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận bổ sung, đưa $\overline{A}$ về ma trận bậc thang.
- **Bước 3:** Giải hệ phương trình bậc thang: Giải ngược từ phương trình cuối, sử dụng phương pháp thế ta có nghiệm cần tìm.

• **Ví dụ 1.28.** Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_3 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{ccc|c|c}
2 & 1 & 1 & 2 & \\
1 & 3 & 1 & 5 & \\
1 & 1 & 5 & -7 & \\
2 & 3 & -3 & 14 & \\
\hline
1 & 1 & 5 & -7 & \\
1 & 3 & 1 & 5 & \\
2 & 1 & 1 & 2 & h_1 \leftrightarrow h_3 \\
2 & 3 & -3 & 14 & \\
\hline
1 & 1 & 5 & -7 & \\
0 & 2 & -4 & 12 & h_2 - h_1 \to h_2 \\
0 & -1 & -9 & 16 & h_3 - 2h_1 \to h_3 \\
0 & 1 & -13 & 28 & H_4 - 2h_1 \to h_4 \\
\hline
1 & 1 & 5 & -7 & \\
0 & 1 & -2 & 6 & h_2 : 2 \to h_2 \\
0 & -1 & -9 & 16 & \\
0 & 1 & -13 & 28 & \\
\hline
1 & 1 & 5 & -7 & \\
0 & 1 & -2 & 6 & \\
0 & 0 & -11 & 22 & h_3 + h_2 \to h_3 \\
0 & 0 & -11 & 22 & h_4 - h_2 \\
\hline
1 & 1 & 5 & -7 & \\
0 & 1 & -2 & 6 & \\
0 & 0 & -11 & 22 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & h_4 - h_3 \to h_4
\end{array}$$

Từ ma trận bậc thang cuối cùng ta nhận được hệ phương trình bậc thang tương đương

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ x_2 - 2x_3 = 6 \\ -11x_3 = 22 \end{cases}$$

Giải hệ bậc thang trên ta có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -2 \end{cases}.$$

1.5.5. Giải và biện luận hệ phương trình bằng định lý Kronecker-Capelli

△ **Định lý 1.6.** ***(Định lý Kronecker-Capelli)*** *Xét hệ phương trình tuyến tính*

$$Ax = b$$

với A là ma trận hệ số, $\overline{A}$ là ma trận bổ sung tương ứng. Khi đó:

- *Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $r(A) \neq r(\overline{A})$;*
- *Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$ = số ẩn;*
- *Hệ phương trình vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$ < số ẩn.*

• **Ví dụ 1.29.** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{array}{ccc|c|l}
2 & 4 & 3 & 4 & \\
3 & 1 & -2 & -2 & \\
4 & 11 & 7 & 7 & \\
\hline
2 & 4 & 3 & 4 & \\
0 & 10 & 13 & 16 & -2h_2 + 3h_1 \to h_2 \\
0 & 3 & 1 & -1 & h_3 - 2h_1 \to h_3 \\
\hline
2 & 4 & 3 & 4 & \\
0 & 3 & 1 & -1 & h_3 \leftrightarrow h_2 \\
0 & 0 & -29 & -58 & 10h_3 - 3h_2 \to h_3
\end{array}$$

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ \quad\quad 3x_2 + x_3 = -1 \\ \quad\quad\quad - 29x_3 = -58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

• **Ví dụ 1.30.** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & 2 & -3 & 2 & \\
-2 & 1 & 4 & 1 & \\
-1 & 3 & 1 & -4 & \\
\hline
1 & 2 & -3 & 2 & \\
0 & 5 & -2 & 5 & h_2 + 2h_1 \to h_2 \\
0 & 5 & -2 & -2 & h_3 + h_1 \to h_3 \\
\hline
1 & 2 & -3 & 2 & \\
0 & 5 & -2 & 5 & \\
0 & 0 & 0 & -7 & h_3 - h_2 \to h_3
\end{array}$$

Vì $r(A) = 2 \neq r(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

• **Ví dụ 1.31.** Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}
x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\
-2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -2 \\
-2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \\
3x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = 3
\end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{cccc|cl}
1 & -1 & 2 & -2 & 1 & \\
-2 & -3 & 1 & 4 & -2 & \\
-2 & 2 & -4 & 4 & -2 & \\
3 & 2 & 1 & -6 & 3 & \\
\hline
1 & -1 & 2 & -2 & 1 & \\
0 & -5 & 5 & 0 & 0 & h_2 + 2h_1 \to h_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 + 2h_1 \to h_3 \\
0 & 5 & -5 & 0 & 0 & h_4 - 3h_1 \to h_4 \\
\hline
1 & -1 & 2 & -2 & 1 & \\
0 & -5 & 5 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_4 + h_2 \to h_4
\end{array}$$

Do $r(A) = r(\overline{A}) = 2 <$ số ẩn nên hệ phương trình đã cho vô số nghiệm. Chọn x_4 và x_2 là hai ẩn tự do, ta có hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases}
x_1 + 2x_3 = 1 + x_2 + 2x_4 \\
x_3 = x_2
\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}
x_1 = 1 - x_2 + 2x_4 \\
x_3 = x_2 \\
x_2, \ x_4 \in \mathbb{R}
\end{cases}.$$

• **Ví dụ 1.32.** Biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}
x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1 \\
x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 = 2 \\
-x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\
-2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 = m
\end{cases}$$

Lời giải. Xét ma trận bổ sung

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -5 & -1 & 7 & 2 \\
-1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
-2 & 5 & -4 & 9 & 7 & m
\end{array}\right]$$

Dùng các phép biến đổi sơ cấp về hàng đưa $\overline{A}$ về ma trận bậc thang

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m+1 \end{array}\right]$$

Biện luận:
+Nếu $2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-1}{2}$ thì $r(A)=r(\overline{A})=3<5$ (số ẩn) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô số nghiệm.
+Nếu $2m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\dfrac{-1}{2}$ thì $r(A)\neq r(\overline{A})\Leftrightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

1.5.6. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

□ **Định nghĩa 1.16.** Hệ phương trình tuyến tính dạng

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

được gọi là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

∗ **Nhận xét:**

- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất luôn nhận $\theta=(0,0,\ldots,0)$ làm nghiệm. Nghiệm này được gọi là nghiệm tầm thường của hệ.
- Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax=0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $r(A)<$ số ẩn. Đặc biệt, hệ phương trình thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn (hay A vuông) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A)=0$.

• **Ví dụ 1.33.** Tìm m để hệ phương trình thuần nhất dưới đây có nghiệm không tầm thường

$$\left\{\begin{array}{l} mx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+mx_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+mx_3=0 \end{array}\right.$$

Lời giải. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn nên hệ phương trình có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\det(A)=0$. Ta có

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2.$$

Ta có $\det(A)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} m & =-2 \\ m & =1 \end{array}\right.$.

Vậy hệ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $m=-2$ hoặc $m=1$.

Bài tập chương 1

1. Hãy nhân các ma trận

$a)\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}3 & 5\\6 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$d)\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ $e)\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

ĐS: $a)\begin{bmatrix}3 & -1\\5 & -1\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}-9 & 13\\15 & 4\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}6 & 2 & -1\\6 & 1 & 1\\8 & -1 & 4\end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix}9 & 3\\10 & 3\end{bmatrix}$ $e)\begin{bmatrix}10\\8\end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\1 & 2 & 3\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}$

2. Hãy thực hiện các phép tính sau:

$a)\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$ $b)\begin{bmatrix}3 & 2\\-4 & -2\end{bmatrix}^3$ $c)\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n$

ĐS: $a)\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\9 & 4 & 3\\3 & 3 & 4\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}-5 & -2\\4 & 0\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\\sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}$

3. Hãy tìm tất cả các ma trận giao hoán với ma trận A dưới đây:

$a)\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & 1 & 2\end{bmatrix}$

ĐS: $a)\begin{bmatrix}x & 2y\\-y & x-2y\end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix}x & y\\0 & x\end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix}x & y & 0\\u & v & 0\\3t-3x-u & t-3y-v & t\end{bmatrix}$

4. a) Hãy tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận không;

   b) Hãy tìm tất cả các ma trận vuông cấp hai có bình phương bằng ma trận đơn vị.

   ĐS: $a)\begin{bmatrix}a & b\\c & -a\end{bmatrix}$ với $a^2+bc=0$ $b)\pm I_2;\begin{bmatrix}a & b\\c & -a\end{bmatrix}$ với $a^2+bc=1$

5. Cho ma trận:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\m & m\end{bmatrix}$$

   Đặt $B=A.A^t$. Tính $det(B^{2016})$
   ĐS: $det(B^{2024})=(4m^2)^{1012}$

6. Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

Tính $A.A^t$ và $det(A^{2016})$
ĐS: $det(A^{2016}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^{4032}$

7. Tính các định thức sau:

$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

$d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ $e)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $f)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

ĐS: a) 1; b) 2; c) 1; d) 1; e) 160; f) 12.

8. Chứng minh rằng:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

HD: Lấy hàng $i+1$ trừ hàng i, đưa nhân tử chung của mỗi hàng ra ngoài, sau đó sử dụng công thức truy hồi.

9. Tính định thức của ma trận:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & m^4 \\ 4 & 9 & 16 & m^3 \\ 9 & 16 & 25 & m^2 \\ 16 & 25 & 49 & m \end{vmatrix}$$

ĐS: $229m^4 - 284m^3 + 115m^2 - 8m$

10. Giải phương trình:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x & x+1 & -x \\ x & 2 & x-1 & x+1 \\ 2 & 2+x & 2x & 1 \\ 3 & -x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

ĐS: $x = 0; x = 1; x = -2; x = -3$

11. Giải phương trình:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & x & x & x \\ 2 & 0 & x & x \\ 2 & 2 & 0 & x \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (x+1)^2 + 3$$

ĐS: $x = \frac{-1}{2}$

12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau nếu có:

$a)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ĐS:

$a)\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 7 & -4 & -5 \\ 4 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{33}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ \frac{5}{2} & 2 & 7 & -\frac{25}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 & -4 & \frac{15}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

13. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình:

$a)\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b) X\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$c) AX = B$ với $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

ĐS: $a)\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; $b)\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; $c)\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

14. Tìm ma trận X thỏa mãn phương trình:

$a)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & m \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & m \end{bmatrix}$

ĐS: $a)\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & m \\ -7 & -6 & -4 & -3m \\ 19 & 17 & 10 & 8m+1 \end{bmatrix}$; $b)\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & m \\ -7 & -12 & -6 & -3m+2 \\ 19 & 33 & 17 & 8m-6 \end{bmatrix}$;

15. Tìm m để ma trận A sau khả đảo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ĐS: $m \neq -1; m \neq \frac{5}{2}$

16. Tìm $x \in \mathbb{R}$ nếu biết ma trận A được cho dưới đây khả đảo:

$$A = \begin{bmatrix} 2014 & x & x \\ 0 & 1 & x \\ x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

và $det(A^{2015}) = -2det(A.A^t)^{1007}$

ĐS: $x = -1$

17. Tìm hạng của các ma trận sau:

$a)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

ĐS: a) 2; b) 3; c) 2.

18. Tùy theo giá trị của tham số $\lambda \in \mathbb{R}$ hãy xác định hạng của các ma trận sau:

$a)\begin{bmatrix} 3 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 10 & 17 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ĐS: a) $\rho(A) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } \lambda = 0 \\ 3 & \text{nếu } \lambda \neq 0 \end{cases}$ b) $\rho(A) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } \lambda = 1 \\ 4 & \text{nếu } \lambda \neq 1 \end{cases}$

19. Tìm m để hạng của ma trận sau là bé nhất:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ m & 4 & 10 & 1 & m+5 \\ 1 & 7 & 17 & 3 & m+5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ĐS: $r(A)_{min} = 2$ khi $m = 0$

20. Biện luận theo m hạng của ma trận A, biết:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & m+21 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & m+23 & -1 \end{bmatrix}$$

ĐS: Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì $r(A) = 3$; Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì $r(A) = 4$

21. Hãy giải các hệ phương trình sau bằng cách tính ma trận nghịch đảo:

$a)\begin{cases} 3x+4y &= 2 \\ 4x+5y &= 3 \end{cases}$ $b)\begin{cases} -3x+2y &= 1 \\ 2x+4y &= -6 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 3x+4y &= 3 \\ 4x+5y &= 2 \end{cases}$

ĐS: a) $(2,-1)$; b) $(-1,-1)$; c) $(-7,6)$.

22. Áp dụng định lý Cramer giải các hệ phương trình sau:

$a)\begin{cases} 2x+5y &= 1 \\ 4x+5y &= -5 \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x-2y-z &= -1 \\ y+z &= 1 \\ -x+y+z &= -1 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3 &= 5 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 1 \\ 2x_1+x_2+3x_3 &= 11 \end{cases}$

ĐS: a) $(-3,\frac{7}{5})$; b) $(2,4,-3)$; c) $(2,-2,3)$.

23. Áp dụng phương pháp Gauss giải các hệ phương trình sau:

$a)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= -1 \\ x+4y+9z &= -9 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{cases}$

$c)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 6 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_4 + x_5 &= -3 \\ -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 &= -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 7x_4 - x_5 &= 9 \end{cases}$

ĐS: a) $(1,2,-2)$; b) $(2,1,0,-1)$; c) $(-3,0,2,1,0)$.

24. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss:

$a)\begin{cases} x-2y+z &= 2 \\ -x+3y-4z &= -5 \\ 2x-7y+10z &= 12 \\ 2x-3y-z &= 1 \end{cases}$ $b)\begin{cases} x+2y-3z &= 1 \\ 2x-y+2z &= -2 \\ -x+3y+z &= -1 \\ 4x+3y-4z &= 0 \end{cases}$

$c)\begin{cases} x+y-2z &= 1 \\ 2x+y &= 6 \\ 5x+3y-2z &= 14 \\ 3x+2y+z &= 11 \end{cases}$ $d)\begin{cases} x+2y-4t &= -3 \\ 2x-3y+z+5t &= -3 \\ 3x-2y-5z+t &= 3 \\ x-y-4z+9t &= 22 \end{cases}$

$e)\begin{cases} 2x+2y-z+t &= 4 \\ 4x+3y-z+2t &= 6 \\ 8x+5y-3z+4t &= 12 \\ 3x+3y-2z+2t &= 6 \end{cases}$ $f)\begin{cases} x+2y+3z-2t &= 6 \\ 2x+y+2z+3t &= -4 \\ 3x+2y-z+2t &= 4 \\ 2x-3y+2z+t &= -8 \end{cases}$

ĐS: a) $(1;0;1)$; b) $(\frac{-7}{15};\frac{-4}{15};\frac{-2}{3})$; c) Hệ vô nghiệm
d) $(-1;3;-2;2)$; e) $(1;1;-1;-1)$; f)$(1;2;-1;-2)$

25. Giải các hệ phương trình sau:

$$a)\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4 &= 0\\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4 &= 0\\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4 &= 0\\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4 &= 0\end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 7\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &= -2\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &= 23\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &= 12\end{cases}$$

ĐS:a)$x_1=\frac{3x_3-13x_4}{17}, x_2=\frac{19x_3-20x_4}{17}$; b) $x_1=-16+x_3+x_4+5x_5, x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5$

26. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$a)\begin{cases} x-y+z &= 4\\ x+4y+2z &= 1\\ x-y+az &= 2(a+1)\end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y+2z &= 6\\ 2x+5y-2z &= 6-3m\\ 2x+y+4mz &= -3\end{cases}$$

ĐS: a) $a=1$: hệ vô số nghiệm; $a\neq 1$: hệ có nghiệm duy nhất ;
b) $m=\frac{5}{2}$: hệ vô nghiệm; $m\neq\frac{5}{2}$: hệ có nghiệm duy nhất;

27. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+2y+3z &= m\\ x+my+z &= m+1\\ x+y+mz &= 2\end{cases}$$

Tìm các giá trị thực của m để hệ có nghiệm duy nhất.

ĐS: $m\neq\{1;4\}$

28. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$a)\begin{cases} x+2y+3z-t &= 1\\ 2x+3y+z+3t &= 2\\ 3x+y+2z+4t &= m\\ 7x+8y+9z+5t &= 3m+1\end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+2y+3z-t &= 1\\ 2x+3y+z+3t &= 2\\ 3x+y+2z+4t &= m\\ 4x+7y+7z+t &= 2m+1\end{cases}$$

ĐS: a)$m=\frac{69}{41}$;b)$m=\frac{3}{2}$

29. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+3y+2z &= 6\\ 2x+7y+2z &= 8\\ 4x+13y+7z &= 22\\ 3x+9y+7z &= m+16\end{cases}$$

Tìm m để hệ vô nghiệm.

ĐS: $m\neq 4$

30. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

$$a)\begin{cases} (2m+1)x-my+(m+1)z &= m-1\\ m-2x+(m-1)y+(m-2)z &= m\\ (2m-1)x+(m-1)y+(2m-1)z &= m\end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1-x_2+mx_3+x_4 &= m\\ x_1+mx_2-x_3+x_4 &= -1\\ mx_1+mx_2-x_3-x_4 &= -1\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= -m\end{cases}$$

ĐS: a) $m \in \{0, 1\}$: hệ vô nghiệm; $m = -1$: hệ có vô số nghiệm; $m \notin \{0, \pm 1\}$: hệ có nghiệm duy nhất;
b) $m = 3$: hệ vô nghiệm; $m = -1$: hệ vô số nghiệm; $m \notin \{3, -1\}$: hệ có nghiệm duy nhất.

31. Tìm m để hệ phương trình thuần nhất sau có nghiệm không tầm thường:

$$a)\begin{cases} 2x + 3y + z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 0 \\ mx + 3y + (1 - 5m)z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x + 2y + mz &= 0 \\ 3x + 5y + (m + 2)z &= 0 \\ x + 3y + (2m - 1)z &= 0 \end{cases}$$

ĐS: a)$m = -8$;b)$m = 1$

32. Tìm giá trị thực của m để hệ phương trình thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$a)\begin{cases} -mx + 2y + +3z + 4t &= 0 \\ 2x - my + 3z + 4t &= 0 \\ 2x + 3y + -mz + 4t &= 0 \\ 2x + 3y + 4z - mt &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x - my + z - (m + 3)t &= 0 \\ 2x + y - 4z + 7t &= 0 \\ mx + 4y + 2z - mt &= 0 \\ x - y - mz - 2(m^2 + 1)t &= 0 \end{cases}$$

ĐS: a)$m \neq \{-2; -3; -4; 9\}$;b)$m = 0$ hoặc $m = 1$

33. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm không tầm thường:

$$a)\begin{cases} mx - 3y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + (m + 1)x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + (m + 4)x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + (3m - 2)x_4 &= 0 \\ -2x_2 + 3x_3 + (3m - 6)x_4 &= 0 \end{cases}$$

ĐS: a) $m = -5$, b) $m = -1$

Chương 2
Không gian véc tơ

Đối tượng ban đầu của môn Đại số tuyến tính là việc giải và biện luận các hệ phương trình tuyến tính. Tuy vậy, để có thể hiểu thấu đáo điều kiện đảm bảo cho một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm và cấu trúc nghiệm của nó, người ta đã đưa ra khái niệm không gian véc tơ và khái niệm này đã trở thành một trong những trụ cột của môn Đại số tuyến tính.

2.1. Khái niệm không gian véc tơ

Giả sử $\mathbb{K}$ là một trường.

□ **Định nghĩa 2.1.** Tập hợp $V \neq \emptyset$ được gọi là một *không gian véc tơ* trên $\mathbb{K}$ nếu nó được trang bị hai phép toán, gồm

(a) Phép cộng véc tơ:

$$+ : V \times V \to V,\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$$

(b) Phép nhân véc tơ với vô hướng:

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V,\ (k, \alpha) \mapsto k\alpha$$

Các phép toán này thỏa mãn những tiên đề sau đây:

(V1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\ \forall \alpha, \beta\gamma \in V,$

(V2) $\exists \theta \in V : \theta + \alpha = \alpha + \theta = \alpha,\ \forall \alpha \in V,$

(V3) $\forall \alpha \in V, \exists \alpha' \in V : \alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = \theta,$

(V4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha,\ \forall \alpha, \beta \in V,$

(V5) $(k + h)\alpha = k\alpha + h\alpha,\ \forall k, h \in \mathbb{K}, \forall \alpha \in V,$

(V6) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta,\ \forall k \in \mathbb{K}, \forall \alpha, \beta \in V,$

(V7) $k(h\alpha) = (kh)\alpha,\ \forall k, h \in \mathbb{K}, \alpha \in V,$

(V8) $1\alpha = \alpha,\ \forall \alpha \in V.$

Các phần tử của V được gọi là các *véc tơ*, các phần tử của $\mathbb{K}$ được gọi là các *vô hướng*, θ được gọi là *phần tử trung hòa*, α' được gọi là *phần tử đối* của α.

Một không gian véc tơ trên $\mathbb{K}$ còn được gọi là một $\mathbb{K}$-không gian véc tơ, hay đơn giản: một không gian véc tơ, nếu $\mathbb{K}$ đã rõ.

Khi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V được gọi là một không gian véc tơ thực. Khi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, V được gọi là một không gian véc tơ phức. Ở giáo trình này ta chỉ quan tâm đến các không gian véc tơ trên trường số thực.

• **Ví dụ 2.1.** Các véc tơ tự do trong hình học sơ cấp với các phép toán cộng véc tơ và nhân véc tơ với số thực lập nên một không gian véc tơ thực.

• **Ví dụ 2.2.** Xét $\mathbb{R}^n$ là tập hợp mà mỗi phần tử là một bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, còn gọi là một véc tơ n thành phần. Nó lập nên một không gian véc tơ với hai phép toán sau đây:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\ k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n), k \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

trong đó phần tử trung hòa là $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, phần tử đối của véc tơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ là $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

• **Ví dụ 2.3.** Tập hợp $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$ (tập hợp các điểm thuộc góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng Oxy) cùng với hai phép toán định nghĩa như trong ví dụ trên không phải là một không gian véc tơ.

• **Ví dụ 2.4.** Tập hợp $C[a, b]$ các hàm thực liên tục trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$ là một không gian véc tơ với các phép toán thông thường

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x),\\ (kf)(x) &= kf(x),\end{aligned}$$

trong đó phần tử trung hòa là hàm số đồng nhất không, tức là bằng 0, $\forall x \in [a, b]$, phần tử đối của hàm f là $-f$: $(-f)(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

• **Ví dụ 2.5.** Xét tập hợp $P_n[x]$ (n nguyên dương, $x \in \mathbb{R}$) các đa thức với hệ số thực của một biến x có bậc không vượt quá n:

$$P_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Khi đó $P_n[x]$ cùng với phép cộng hai đa thức và phép nhân đa thức với một số thực thông thường là một không gian véc tơ. Phần tử trung hòa chính là đa thức không; phần tử đối của đa thức $p(x)$ chính là đa thức đối $-p(x)$.

Tính chất. Giả sử V là một không gian véc tơ.

(1) Phần tử trung hòa $\theta \in V$ là duy nhất. Nó được gọi là *véc tơ không.*
Thật vậy, giả sử θ_1 cũng là một phần tử trung hòa của phép cộng trong V. Khi đó

$$\begin{aligned}\theta + \theta_1 &= \theta_1 \quad (\text{vì } \theta \text{ là trung hòa}),\\ \theta + \theta_1 &= \theta \quad (\text{vì } \theta_1 \text{ là trung hòa}).\end{aligned}$$

Vậy $\theta = \theta_1$.

(2) Với mọi véc tơ $\alpha \in V$, phần tử đối α' là duy nhất. Nó sẽ được ký hiệu là $(-\alpha)$.
Thật vậy, giả sử α'_1 cũng là một phần tử đối của α. Khi đó

$$(\alpha' + \alpha) + \alpha'_1 = \theta + \alpha'_1 = \alpha'_1 = \alpha' + (\alpha + \alpha'_1) = \alpha' + \theta = \alpha'.$$

Như vậy $\alpha' = \alpha'_1$.
Ta định nghĩa: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

(3) Ta có các quy tắc giản ước và chuyển vế: $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$

$$\begin{array}{rcll} \alpha + \gamma & = & \beta + \gamma & \Rightarrow \quad \alpha = \beta, \\ \alpha + \beta & = & \gamma & \Rightarrow \quad \alpha = \gamma - \beta. \end{array}.$$

(4) $0\alpha = \theta$ và $k\theta = \theta$, $\forall \alpha \in V, \forall k \in \mathbb{R}$.
Thật vậy,

$$0\alpha + \theta = 0\alpha = (0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha.$$

Từ đó theo luật giản ước, $0\alpha = \theta$. Tương tự,

$$k\theta + \theta = k\theta = k(\theta + \theta) = k\theta + k\theta.$$

Cũng theo luật giản ước, ta có $k\theta = \theta$.

(5) Nếu $k\alpha = \theta$ (với $k \in \mathbb{K}, \alpha \in V$), thì hoặc $k = 0$ hoặc $\alpha = \theta$.
Thật vậy, giả sử $k \neq 0$, nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $k^{-1} \in \mathbb{K}$ ta có

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta.$$

(6) $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$, $\forall k \in \mathbb{K}, \alpha \in V$.
Thật vậy,

$$k\alpha + (-k)\alpha = (k + (-k))\alpha = 0\alpha = \theta.$$

Từ đó, $(-k)\alpha = -(k\alpha)$. Tương tự,

$$k\alpha + k(-\alpha) = k(\alpha + (-\alpha)) = k\theta = \theta.$$

Do đó, $k(-\alpha) = -(k\alpha)$.

2.2. Độc lập tuyến tính và Phụ thuộc tuyến tính

□ **Định nghĩa 2.2.** (a) Một **tổ hợp tuyến tính** của các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ là một biểu thức dạng

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n,$$

trong đó $c_i \in \mathbb{R}$, c_i là hàng .

(b) Giả sử $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n \in V$. Đẳng thức đó được gọi là một **biểu diễn tuyến tính** của α qua các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Khi có đẳng thức đó, ta nói α biểu diễn tuyến tính được qua $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

⊕ **Nhận xét**:

- Một véc tơ có thể có nhiều biểu diễn tuyến tính khác nhau qua một hệ véc tơ.
- Ta nói hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ nếu mỗi véc tơ $\alpha_i,\ 1 \le i \le n$, biểu diễn tuyến tính được qua $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$.

  Giả sử hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$, và hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$. Khi đó, rõ ràng $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ cũng biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_k\}$.

• **Ví dụ 2.6.** (a) Trong $\mathbb{R}^3$ xét các véc tơ $\alpha = (2, -1, 3), \alpha_1 = (1, -1, 2), \alpha_2 = (1, -2, 3)$. Hãy biểu diễn α thành tổ hợp tuyến tính của các véc tơ α_1, α_2.

Ta xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \alpha$, $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$. Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 2 \\ -c_1 - 2c_2 &= -1 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 3 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $c_1 = 3, c_2 = -1$. Vậy $\alpha = 3\alpha_1 - \alpha_3$.

(b) Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $S = \{\alpha_1 = (1, 1, 1); \alpha_2 = (2, 1, 3); \alpha_3 = (1, 2, 0)\}$. Véc tơ $\alpha = (2, -1, 3)$ có là một tổ hợp tuyến tính của S không?

Xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \alpha$ với $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= -1 \\ c_1 + 3c_2 &= 3 \end{cases}$$

Hệ này có $r(A) \neq r(\overline{A})$ nên vô nghiệm. Vậy α không biểu diễn tuyến tính được qua hệ S.

(c) Trong không gian $P_1[x]$ xét hệ $S = \{p_1 = 2; p_2 = 1 + 3x; p_3 = -5 + x\}$. Hỏi đa thức $p = 4 + 2x$ có biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ của hệ S không?

Xét hệ thức $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = p$ với $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Phương trình véc tơ này tương đương với $c_1.2 + c_2(1 + 3x) + c_3(-5 + x) = 4 + 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 - 5c_3 &= 4 \\ 3c_2 + c_3 &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 &= -8c_2 + 7 \\ c_3 &= -3c_2 + 2 \end{cases}$$

Hệ này có vô số nghiệm nên p có thể biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ của hệ S, chẳng hạn có thể biểu diễn $p = -p_1 + p_2 - p_3$ hoặc $p = 15p_1 - p_2 + 5p_3$.

□ **Định nghĩa 2.3.** (a) Hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu hệ thức

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \theta$$

chỉ xảy ra khi $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

(b) Hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ được gọi là **phụ thuộc tuyến tính** nếu nó không độc lập tuyến tính.

Nếu hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính, ta cũng nói các véc tơ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ độc lập (hoặc phụ thuộc) tuyến tính.

• **Ví dụ 2.7.** (a) Trong không gian các véc tơ tự do của hình học sơ cấp, hệ 2 véc tơ là độc lập tuyến tính nếu và chỉ nếu chúng không đồng phương, hệ 3 véc tơ là độc lập tuyến tính khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng, hệ 4 véc tơ bất kỳ luôn luôn phụ thuộc tuyến tính.

(b) Trong không gian $\mathbb{R}^2$, hệ các véc tơ $\{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, hệ thức

$$c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1, c_2) = (0,0)$$

xảy ra khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = 0$.
Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}^2$, hệ các véc tơ $\{e_1, e_2, \alpha\}$ phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, nếu $\alpha = (a,b)$ thì

$$\alpha - ae_1 - be_2 = \theta.$$

(c) Xét xem hệ các véc tơ sau đây độc lập hay tuyến tính phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$: $\{\alpha_1 = (5,3,4); \alpha_2 = (3,2,3); \alpha_3 = (8,3,1)\}$.
Ta xét hệ thức $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = \theta$.
Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} 5c_1 + 3c_2 + 8c_3 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm không tầm thường, chẳng hạn $c_1 = 7, c_2 = -9, c_3 = -1$.
Như vậy, ba véc tơ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

(d) Xét sự độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của hệ $S = \{p_1 = 1 + x + x^2; p_2 = 2 + 3x + 2x^2, p_3 = 1 + 2x\}$ trong $P_2[x]$.
Ta xét hệ thức $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = \theta \Leftrightarrow c_1(1 + x + x^2) + c_2(2 + 3x + 2x^2) + c_3(1 + 2x) = \theta$.
Phương trình véc tơ đó tương đương với hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \end{cases}$$

Hệ này có $\det A = 1 \neq 0$ nên chỉ có nghiệm tầm thường $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.
Như vậy, hệ S đã cho độc lập tuyến tính.

⊕ **Nhận xét**: Từ ví dụ trên ta thấy rằng việc xét xem một hệ véc tơ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Tương tự, việc xét xem một véc tơ có biểu diễn tuyến tính được hay không qua một hệ véc tơ được đưa về việc giải một hệ phương trình tuyến tính.

Tính chất.

(1) Hệ gồm chỉ một véc tơ $\{\alpha\}$ trong không gian véc tơ V là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu $\alpha = \theta$.
Thật vậy vì $1\theta = \theta$ nên hệ $\{\theta\}$ phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, giả sử $\{\alpha\}$ phụ thuộc tuyến tính, tức là có $k \neq 0$ sao cho $k\alpha = \theta$. Nhân hai vế với k^{-1} ta có

$$\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha) = k^{-1}\theta = \theta.$$

(2) Hệ gồm n véc tơ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $(n > 1)$ của một không gian véc tơ V là hệ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu một véc tơ nào đó của hệ biểu diễn tuyến tính được qua các véc tơ còn lại của hệ.
Thật vậy, giả sử có ít nhất một $c_i \neq 0, i = 1, \ldots n$ thỏa mãn hệ thức

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \theta.$$

Nhân hai vế với c_i^{-1} ta thu được

$$\alpha_i = -\sum_{j \neq i} (c_i^{-1}c_j)\alpha_j.$$

Ngược lại, nếu α_i biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\}$, tức là có các d_j sao cho

$$\alpha_i = d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + d_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + d_n\alpha_n,$$

thì ta có

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_{i-1}\alpha_{i-1} + (-1)\alpha_i + d_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + d_n\alpha_n = \theta.$$

Do đó hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ phụ thuộc tuyến tính.

$\bigtriangledown$ **Hệ quả 2.1.** *Mọi hệ véc tơ có chứa véc tơ không θ là hệ phụ thuộc tuyến tính.*

(3) Giả sử hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính nếu và chỉ nếu β biểu diễn tuyến tính được qua $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Trong trường hợp đó, biểu diễn tuyến tính này là duy nhất.
Thật vậy, nếu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại bộ $(c_1, \ldots, c_n, d)$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n + d\beta = \theta.$$

Rõ ràng, $d \neq 0$ vì nếu trái lại thì hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ phụ thuộc tuyến tính. Vì $d \neq 0$ nên ta có thể viết

$$\beta = -\sum_{i=1}^{n} (d^{-1}c_i)\alpha_i.$$

Ngược lại, mỗi biểu diễn tuyến tính $\beta = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + (-1)\beta = \theta$, do đó hệ véc tơ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính.
Giả sử có hai biểu diễn tuyến tính của β qua hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$:

$$\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n.$$

Khi đó $\theta = (c_1 - d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_n - d_n)\alpha_n$. Do $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính nên hệ thức trên kéo theo

$$c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n.$$

• **Ví dụ 2.8.** Trong không gian véc tơ V cho hệ $S = \{x, y, z\}$ và $S_1 = \{x + y + z, 2x + 3y - z, 3x + 4y + z\}$. Chứng minh rằng nếu S độc lập tuyến tính thì S_1 độc lập tuyến tính.

Lời giải. Xét hệ thức $c_1(x+y+z)+c_2(2x+3y-z)+c_3(3x+4y+z)=\theta \Leftrightarrow (c_1+2c_2+3c_3)x+(c_1+3c_2+4c_3)y+(c_1-c_2+c_3)z=\theta$.
Do S độc lập tuyến tính nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c_1+2c_2+3c_3 &= 0 \\ c_1+3c_2+4c_3 &= 0 \\ c_1-c_2+c_3 &= 0 \end{cases}$$

Hệ này chỉ có nghiệm tầm thường $c_1=c_2=c_3=0$ nên S_1 độc lập tuyến tính.

2.3. Cơ sở và số chiều của không gian véc tơ

□ **Định nghĩa 2.4.** (a) Một hệ véc tơ của V được gọi là **một hệ sinh** của V nếu mọi véc tơ của V đều biểu diễn tuyến tính được qua hệ đó.

(b) Một hệ véc tơ của V được gọi là **một cơ sở** của V nếu mọi véc tơ của V đều biểu diễn tuyến tính duy nhất qua hệ đó.

Như vậy mỗi cơ sở đều là một hệ sinh.

• **Ví dụ 2.9.** (a) Hệ $S=\{(1,0),(0,1)\}$ là một hệ sinh của $\mathbb{R}^2$ vì $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ta đều có $x=x_1(1,0)+x_2(0,1)$.

(b) Trong không gian $P_2[x]$ hệ $S=\{1,x,x^2\}$ là một hệ sinh vì ta có $p=c+bx+ax^2, \forall p\in P_2[x]$.

(c) Trong không gian $P_2[x]$ cho hệ $S_1=\{x^2+x+1, 2x^2+3x+1, x^2+2x\}$. Hỏi S_1 có là hệ sinh của $P_2[x]$ hay không?
Với $\forall p=ax^2+bx+c\in P_2[x]$ xét hệ thức $p=c_1(x^2+x+1)+c_2(2x^2+3x+1)+c_3(x^2+2x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1+2c_2+c_3 &= a \\ c_1+3c_2+2c_3 &= b \\ c_1+c_2 &= c \end{cases}$$

Tồn tại p để hệ trên vô nghiệm, ví dụ $p=2x^2+x$, do đó S_1 không là hệ sinh của $P_2[x]$.

Một hệ véc tơ của không gian V được gọi là **độc lập tuyến tính cực đại** nếu nó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của V vào hệ đó thì hệ mới thu được trở thành phụ thuộc tuyến tính.

△ **Định lý 2.1.** *Cho hệ hữu hạn các véc tơ $S=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ của V. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương:*

(i) S là một cơ sở của V.

(ii) S là một hệ sinh độc lập tuyến tính của V.

(iii) S là một hệ véc tơ độc lập tuyến tính cực đại của V.

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii): S là một cơ sở của V nên nó là một hệ sinh của V. Hơn nữa, véctơ θ có biểu diễn tuyến tính duy nhất qua $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$:

$$\theta = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_n.$$

Nói cách khác, hệ thức $c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \theta$ tương đương với $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Điều này có nghĩa là hệ S độc lập tuyến tính.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Mọi véc tơ $\beta \in V$ đều biểu diễn tuyến tính được qua S cho nên hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta\}$ phụ thuộc tuyến tính.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Vì hệ S độc lập tuyến tính cực đại nên mỗi véc tơ $\beta \in V$ đều biểu diễn tuyến tính qua S. Nói cách khác, hệ này sinh ra V. Biểu diễn tuyến tính của mỗi véc tơ $\beta \in V$ qua hệ độc lập tuyến tính $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là duy nhất, do đó S là cơ sở.

□ **Định nghĩa 2.5.** Không gian véc tơ V được gọi là *hữu hạn sinh* nếu nó có một hệ sinh gồm hữu hạn phần tử.

□ **Định nghĩa 2.6.** (a) Số phần tử của mỗi cơ sở của không gian véc tơ hữu hạn sinh $V \neq \{\theta\}$ được gọi là số chiều của V và được ký hiệu là $\dim V$. Nếu $V = \{\theta\}$ ta quy ước $\dim V = 0$.

(b) Nếu V không có một cơ sở nào gồm hữu hạn phần tử thì nó được gọi là một không gian véc tơ *vô hạn chiều*.

Trong tài liệu này ta chỉ xét các không gian hữu hạn chiều.

Bổ đề 2.1. *Trong không gian véc tơ V, giả sử hệ véc tơ $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ độc lập tuyến tính, $T = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ là một hệ sinh. Khi đó $r \leq s$.*

Chứng minh. Vì T là hệ sinh của V nên

$$\begin{cases} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{s1}\beta_s \\ \alpha_2 &= a_{12}\beta_1 + \cdots + a_{s2}\beta_s \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_r &= a_{1r}\beta_1 + \cdots + a_{sr}\beta_s \end{cases}$$

Xét hệ phương trình tuyến tính mà ẩn là c_i:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \cdots + a_{1r}c_r &= 0 \\ a_{21}c_1 + \cdots + a_{2r}c_r &= 0 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\ a_{s1}c_1 + \cdots + a_{sr}c_r &= 0 \end{cases}$$

Nếu $r \geq s$ thì hệ thuần nhất này có số phương trình ít hơn số ẩn, do đó nó có nghiệm không tầm thường, nghĩa là tồn tại r số thực c_i không đồng thời bằng 0 thỏa mãn s đẳng thức trên. Nhân đẳng thức thứ nhất với β_1, đẳng thức thứ hai với β_2, ..., đẳng thức thứ s với β_s rồi cộng lại ta được

$$(a_{11}c_1 + \cdots + a_{1r}c_r)\beta_1 + \cdots + (a_{s1}c_1 + \cdots + a_{sr}c_r)\beta_s = \theta$$

hay là

$$c_1(a_{11}\beta_1 + \cdots + a_{s1}\beta_s) + \cdots + c_r(a_{1r}\beta_1 + \cdots + a_{sr}\beta_s) = \theta$$

nghĩa là có

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = \theta,$$

Điều này trái với giả thiết rằng $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ độc lập tuyến tính. Vậy $r \leq s$. □

△ **Định lý 2.2.** *Giả sử $V \neq \{\theta\}$ là một không gian hữu hạn sinh. Khi đó V có một cơ sở gồm hữu hạn phần tử. Hơn nữa mọi cơ sở của V đều có số phần tử bằng nhau.*

Chứng minh. Giả sử $T = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ là một hệ sinh hữu hạn của V. Vì $V \neq \{\theta\}$, nên có véc tơ $\alpha_1 \neq \theta$ trong V. Hệ gồm một véc tơ khác không $\{\alpha_1\}$ độc lập tuyến tính. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại, thì có hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ độc lập tuyến tính.

Giả sử $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V. Hệ này biểu diễn tuyến tính qua T. Theo bổ đề trên, ta có $r \leq s$. Như thế quá trình chọn các véc tơ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ để thu được một hệ độc lập tuyến tính phải dừng lại sau một số hữu hạn bước. Ta có một hệ véc tơ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại trong V, với $n \leq s$. Theo định lý (2.1), hệ này là một cơ sở của V.

Giả sử $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ cũng là một cơ sở của V. Vì $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính và biểu diễn tuyến tính được qua $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ nên theo Bổ đề trên, ta có $n \leq m$. Đổi vai trò của hai cơ sở trên, ta cũng có $m \leq n$. Như vậy, $m = n$.

• **Ví dụ 2.10.** Trong $\mathbb{R}^n$ xét hệ véc tơ

$$B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Hệ B độc lập tuyến tính vì hệ thức

$$c_1e_1 + \cdots + c_ne_n = (0, \ldots, 0)$$

xảy ra khi và chỉ khi $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Hệ B sinh ra $\mathbb{R}^n$ vì mọi véc tơ $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ đều có biểu thị tuyến tính

$$x = x_1e_1 + \cdots + c_ne_n.$$

Vậy $\dim \mathbb{R}^n = n$ và B là một cơ sở. B được gọi là **cơ sở chính tắc** của không gian $\mathbb{R}^n$.

• **Ví dụ 2.11.** Trong $P_n[x]$ xét hệ véc tơ

$$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

Hệ này sinh ra $P_n[x]$ vì mọi đa thức $p(x)$ có bậc $\leq n$ đều viết được dưới dạng

$$p(x) = a_0.1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}.$$

Hệ B độc lập tuyến tính vì hệ thức

$$c_0.1 + c_1x + \cdots + c_nx^n = 0, \forall x$$

chứng tỏ phương trình này có vô số nghiệm, điều đó chỉ xảy ra khi $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$. Vậy $\dim P_n[x] = n+1$ và B là một cơ sở. B được gọi là **cơ sở chính tắc** của không gian $P_n[x]$.

△ **Định lý 2.3.** *Giả sử V là một không gian véc tơ hữu hạn sinh. Mọi hệ độc lập tuyến tính trong V đều có thể bổ sung để trở thành một cơ sở của V. Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n véc tơ của V đều là một cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\}$ là một hệ độc lập tuyến tính trong V. Nếu hệ này không độc lập tuyến tính cực đại thì có thể bổ sung các véc tơ $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots$ để hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Quá trình này phải dừng lại sau một số hữu hạn bước, bởi vì theo định lý (2.2), $\dim V < \infty$. Ta thu được hệ $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ độc lập tuyến tính cực đại trong V, tức là một cơ sở của V.

Nếu $\dim V = n$, thì mọi hệ độc lập tuyến tính gồm n véc tơ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ đều cực đại. Thật vậy, giả sử phản chứng có thể thêm vào hệ đó một véc tơ β_{n+1} nào đó của V sao cho hệ thu được vẫn độc lập tuyến tính. Khi đó hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}\}$ biểu thị tuyến tính qua một cơ sở $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ nào đó nên theo Bổ đề, ta có $n + 1 \leq n$. Điều này vô lý. Vậy theo định lý (2.1) hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ là một cơ sở của V.

• **Ví dụ 2.12.** (a) Trong $\mathbb{R}^3$ cho hệ $S = \{(1,1,1), (1,0,1), (1,1,0)\}$. Chứng minh S là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

Xét hệ thức $c_1(1,1,1) + c_2(1,0,1) + c_3(1,1,0) = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này chỉ có nghiệm tầm thường nên S độc lập tuyến tính. Hơn nữa $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, do đó S là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

(b) Cho hệ $S = \{x^2 + x + 1, 2x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 2\}$. Hỏi S có là một cơ sở của không gian $P_2[x]$.

Lời giải. Xét hệ thức $c_1(x^2 + x + 1) + c_2(2x^2 + x + 1) + c_3(x^2 + 2x + 2) = \theta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \end{cases}$$

Dễ thấy S phụ thuộc tuyến tính do đó S không là cơ sở của $P_2[x]$.

2.4. Toạ độ và bài toán đổi cơ sở

2.4.1. Toạ độ của vector

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở của không gian véc tơ V. Mỗi véc tơ $\alpha \in V$ có biểu diễn tuyến tính duy nhất

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n = \sum c_i\alpha_i, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

□ **Định nghĩa 2.7.** [Tọa độ] Bộ giá trị $(c_1, \ldots, c_n)$ xác định bởi điều kiện $\alpha = \sum c_i\alpha_i$ được gọi là **tọa độ của véc tơ** α trong cơ sở S, c_i được gọi là tọa độ thứ i của α trong cơ sở đó.

Véc tơ $(\alpha)_S = (c_1, \ldots, c_n)$ là một véc tơ trong $\mathbb{R}^n$ và được gọi là **véc tơ tọa độ** của α đối với cơ sở S. Véc tơ $(\alpha)_S$ viết ở dạng cột dẫn đến ma trận $[\alpha]_S = (c_1, \ldots, c_n)^t$ là một ma trận cỡ $n \times 1$ và được gọi là **ma trận tọa độ** của α đối với cơ sở S.

Giả sử α, β có tọa độ trong cơ sở $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ tương ứng là $(c_1, \ldots, c_n)$ và $(d_1, \ldots, d_n)$. Khi đó từ tính độc lập tuyến tính của $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ suy ra rằng $\alpha = \beta$ nếu và chỉ nếu $(c_1, \ldots, c_n) = (d_1, \ldots, d_n)$. Thật vậy, $\alpha = \beta$ khi và chỉ khi

$$\alpha - \beta = (c_1 - d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_n - d_n)\alpha_n = \theta.$$

Điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$.
Hơn nữa $\alpha + \beta$ có tọa độ là $(c_1 + d_1, \ldots, c_n + d_n)$ và $k\alpha$ có tọa độ là $(kc_1, \ldots, kc_n)$ trong hệ cơ sở $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

• **Ví dụ 2.13.** Cho $S = \{x^2 + x + 1, x^2 + 2x + 1, x^2 + x + 2\}$ là cơ sở của không gian $P_2[x]$. Tìm véc tơ $p(x)$ biết $[p(x)]_S = (3, -5, 2)^t$.

Lời giải. $[p(x)]_S = (3, -5, 2)^t \Leftrightarrow p(x) = 3(x^2+x+1)-5(x^2+2x+1)+2(x^2+x+2) = -5x+2$.

• **Ví dụ 2.14.** Cho $S = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 1, 0)\}$ là cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và $x = (3, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$. Tìm tọa độ của x trong cơ sở S.

Lời giải. Giả sử $(x)_S = (x_1, x_2, x_3) \Leftrightarrow (3, 1, -2) = x_1(1, 1, 1) + x_2(1, 0, 1) + x_3(1, 1, 0)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & -4 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x)_S = (-4, 2, 5).$$

• **Ví dụ 2.15.** Cho $S = \{x^2 + x + 1, x + 1, 2x + 1\}$ là cơ sở của $P_2[x]$. Tìm tọa độ của véc tơ $p(x) = 3x^2 + 4x - 1$ trong cơ sở S.

Lời giải. Giả sử $(p(x))_S = (a, b, c) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = a(x^2 + x + 1) + b(x + 1) + c(2x + 1)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & & & & & = & 3 \\ a & + & b & + & 2c & = & 4 \\ a & + & b & + & c & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 3 \\ b & = & -9 \\ c & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow (p(x))_S = (3, -9, 5).$$

2.4.2. Bài toán đổi cơ sở

Bây giờ ta xét xem tọa độ của một véc tơ trong những cơ sở khác nhau có liên hệ với nhau như thế nào?

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ và $T = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ là hai cơ sở của không gian véc tơ V. Mỗi véc tơ β_j biểu diễn tuyến tính được qua cơ sở S, tức là có các p_{ij} để cho:

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 & = & p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 & = & p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n & = & p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{array}$$

Giả sử $\alpha \in V$ có tọa độ $(c_1, \ldots, c_n)$ và $(d_1, \ldots, d_n)$ tương ứng trong các cơ sở S và T. Khi đó ta có:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & d_1\beta_1 + \cdots + d_n\beta_n = d_1(p_{11}\alpha_1 + \cdots + p_{n1}\alpha_n) + \cdots + d_n(p_{1n}\alpha_1 + \cdots + p_{nn}) \\ & = & (p_{11}d_1 + \cdots + p_{1n}d_n)\alpha_1 + \cdots + (p_{n1}d_1 + \cdots + p_{nn}d_n)\alpha_n. \end{array}$$

Do tính duy nhất của tọa độ của α trong cơ sở S, ta nhận được

$$\begin{cases} c_1 &= p_{11}d_1 + p_{12}d_2 + \cdots + p_{1n}d_n \\ c_2 &= p_{21}d_1 + p_{22}d_2 + \cdots + p_{2n}d_n \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ c_n &= p_{n1}d_1 + p_{n2}d_2 + \cdots + p_{nn}d_n \end{cases} \tag{2.1}$$

Đặt $P = (p_{ij})_{n\times n} = \big([\beta_1]_S[\beta_2]_S \ldots [\beta_n]_S\big)$. Khi đó (2.1) có thể viết

$$[\alpha]_S = P\ [\alpha]_T \tag{2.2}$$

Ma trận P thỏa mãn (2.2) được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** từ S sang T, thường ký hiệu là $P_{S\to T}$.

Ma trận chuyển cơ sở P có tính chất sau:

△ **Định lý 2.4.** *Nếu P là ma trận chuyển cơ sở từ S sang T thì*

(a) P khả đảo, tức là $\det P \neq 0$.

(b) P^{-1} là ma trận chuyển cơ sở từ T sang S, tức là:

$$[\alpha]_T = P^{-1}[\alpha]_S$$

• **Ví dụ 2.16.** Trong $\mathbb{R}^2$ cho các cơ sở $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $T = \{\beta_1, \beta_2\}$, trong đó $\alpha_1 = (1, 0), \alpha_2 = (0, 1), \beta_1 = (1, 1), \beta_2 = (2, 1)$.

(a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ S sang T.

(b) Tìm $[\alpha]_T$ biết $\alpha = (7, 2)$.

Lời giải.

(a) Ta có biểu diễn $\{\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2\}$, do đó $[\beta_1]_S = (1, 1)^t, [\beta_2]_S = (2, 1)^t$.

Vậy ma trận chuyển cơ sở từ S sang T là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Ma trận chuyển cơ sở từ T sang S là

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vì $\alpha = (7, 2) = 7\alpha_1 + 2\alpha_2$ nên $[\alpha]_S = (7, 2)^t$.

Do đó

$$[\alpha]_T = P^{-1}[\alpha]_S = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.5. Không gian con - Hạng của một hệ véc tơ

Giả sử V là một không gian véc tơ. Ta quan tâm đến những tập con của V có tính chất là chúng cũng lập nên những không gian véc tơ đối với các phép toán là thu hẹp của những phép toán tương ứng trên V. Ta có định nghĩa sau đây:

□ **Định nghĩa 2.8.** Tập con khác rỗng $W \subset V$ được gọi là một *không gian véc tơ con* của V nếu W đóng kín đối với hai phép toán trên V, nghĩa là

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \in W, &\qquad \forall \alpha, \beta \in W, \\ k\alpha \in W, &\qquad \forall k \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in W. \end{aligned}$$

⊕ **Nhận xét**: Khi đó W cũng là một không gian véc tơ. Thật vậy các tiên đề (V1), (V4), (V5), (V6), (V7), (V8) nghiệm đúng với mọi phần tử của V nên cũng nghiệm đúng với mọi phần tử của W. Ta chỉ cần kiểm tra lại các tiên đề (V2), (V3) nói về sự tồn tại của phần tử θ và phần tử đối.

Vì $W \neq \emptyset$ nên có ít nhất một phần tử $\alpha \in W$. Khi đó $\theta = 0\alpha \in W$. Phần tử $\theta \in V$ đóng vai trò phần tử $\theta \in W$. Mặt khác, với mọi $\alpha \in W$ ta có $(-\alpha) = (-1)\alpha \in W$. Đó cũng chính là phần tử đối của α trong W.

• **Ví dụ 2.17.** (a) $\{\theta\}$ và V là hai không gian con của V.

(b) Không gian $C^1[a, b]$ các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$ là một không gian con của không gian các hàm liên tục $C[a, b]$.

(c) Gọi W là tập hợp các hàm $f(x) \in C[0, 1]$ mà $f(0) = 1$.Rõ ràng W không là một không gian con của $C[0, 1]$ vì $f_1(x) = x + 1 \in W$ và $f_1(x) = x^2 + x + 1 \in W$ nhưng $f_1(x) + f_2(x) = x^2 + x + 2 \notin W$.

• **Ví dụ 2.18.** Trong không gian $\mathbb{R}^4$,

(a) $U = \{(a, b, 0, 0), a, b \in \mathbb{R}\}$ là một không gian véc tơ con.

(b) $V = \{(a, 1, 2, 3), a \in R\}$ không là không gian vecto con vì $v_1 = (a_1, 1, 2, 3) \in V$ và $v_2 = (a_2, 1, 2, 3) \in V$ nhưng $v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, 2, 4, 6) \notin V$.

• **Ví dụ 2.19.** Cho ma trận A cỡ là $m \times n$, tập hợp nghiệm W của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $Ax = 0$ là một không gian véc tơ con của không gian $\mathbb{R}^n$.

△ **Định lý 2.5.** *Nếu W là một không gian con của V thì* $\dim W \leq \dim V$. *Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $W = V$.*

Chứng minh. Vì W là một không gian con của V nên mỗi hệ độc lập tuyến tính trong W thì cũng độc lập tuyến tính trong V. Do đó dim$W$ ≤dim$V$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi mỗi cơ sở của W cũng là một cơ sở của V. Điều này tương đương với $W = V$.

2.5.1. Tổng và Tổng trực tiếp

Giả sử $W_1, \ldots, W_m$ là các không gian con của V. Tập hợp

$$W_1 + \cdots + W_m = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m | \alpha_i \in W_i, i = 1, \ldots, m\}$$

lập nên một không gian véc tơ con của V.

□ **Định nghĩa 2.9.** Không gian véc tơ $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là *tổng* của các không gian $W_1, \ldots, W_m$, ký hiệu bởi $\sum\limits_{i=1}^{m} W_i$.

Mỗi véc tơ của $W_1 + \cdots + W_m$ có thể viết dưới dạng

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, \qquad \alpha_i \in W_i.$$

Cách viết này nói chung không duy nhất. Chẳng hạn nếu $W_1 \cap W_2 \neq \{\theta\}$, thì mỗi véc tơ $\alpha \in W_1 \cap W_2 \setminus \{\theta\}$ có hai biểu thị $\alpha = \alpha + \theta = \theta + \alpha$, trong đó véc tơ thứ nhất trong tổng thuộc W_1 còn véc tơ thứ hai trong tổng thuộc W_2.

□ **Định nghĩa 2.10.** Nếu mọi véc tơ trong tổng $W_1 + \cdots + W_m$ đều viết được duy nhất dưới dạng $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, với $\alpha_i \in W_i (i = 1, \ldots, m)$ thì $W_1 + \cdots + W_m$ được gọi là *tổng trực tiếp* của các không gian $W_1, \ldots, W_m$, và được ký hiệu là $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$.

△ **Định lý 2.6.** *Giả sử U và W là các không gian con của không gian véc tơ hữu hạn chiều V. Khi đó*

$$dimU + dimW = dim(U + W) + dim(U \cap W).$$

Chứng minh. Giả sử $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ là một cơ sở của $U \cap W$. (Nếu $U \cap W = \{\theta\}$ thì ta coi $r = 0$). Ta bổ sung hệ này để có một cơ sở $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ của U và một cơ sở $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ của W.

Ta sẽ chứng tỏ rằng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ là một cơ sở của $U + W$.

Rõ ràng $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ là một hệ sinh của $U + W$. Để chứng minh đó là hệ độc lập tuyến tính, ta xét hệ thức

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = \theta,$$

Véc tơ

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = -c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t$$

vừa thuộc U, vừa thuộc W nên nó thuộc $U \cap W$, và do đó biểu thị tuyến tính qua $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$:

$$-c_1\gamma_1 - \cdots - c_t\gamma_t = d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r.$$

Ta viết lại đẳng thức này như sau

$$d_1\alpha_1 + \cdots + d_r\alpha_r + c_1\gamma_1 + \cdots + c_t\gamma_t = \theta.$$

Vì hệ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, nên $c_1 = \ldots = c_t = d_1 = \cdots = d_r = 0$. Do đó

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_s\beta_s = \theta.$$

Hệ véc tơ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s)$ cũng độc lập tuyến tính, cho nên $a_1 = \cdots = a_r = b_1 = \cdots = b_s = 0$. Kết hợp điều này với các hệ thức $c_1 = \cdots = c_t = 0$ ta suy ra hệ véc tơ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ độc lập tuyến tính, và do đó nó là một cơ sở của $U + W$.

Đếm số véc tơ của các cơ sở đã xây dựng cho $U, W, U \cap W, U + W$, ta có:

$$dim(U + W) = r + s + t = (r + s) + (r + t) - r = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

▽ **Hệ quả 2.2.**

$$dim(U \oplus W) = dimU + dimW.$$

2.5.2. Hạng của hệ véc tơ

Trong không gian véc tơ V cho hệ $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Ta gọi một hệ con của S là **độc lập tuyến tính cực đại** trong S nếu hệ đó độc lập tuyến tính và nếu thêm bất kỳ véc tơ nào của S vào hệ đó thì ta thu được một hệ phụ thuộc tuyến tính.

♢ **Mệnh đề 2.1.** *Hai hệ con độc lập tuyến tính cực đại trong S có cùng số phần tử.*

Từ kết quả trên dẫn đến định nghĩa hạng của hệ véc tơ.

□ **Định nghĩa 2.11.** Hạng của hệ véc tơ S bằng số véc tơ của mỗi hệ con độc lập tuyến tính cực đại trong S và được ký hiệu là $r(S)$.

2.5.3. Cách tìm hạng của hệ véc tơ

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là cơ sở của không gian V, $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ là một hệ véc tơ của V. Mỗi véc tơ β_j biểu thị tuyến tính được qua cơ sở S, tức là có các a_{ij} để cho:

$$(\beta_1)_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}, (\beta_2)_S = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \end{pmatrix}, \ldots, (\beta_m)_S = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Đặt ma trận

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Khi đó A được gọi là ma trận của hệ $\{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ trong cơ sở S. Để đơn giản ta thường chọn S là cơ sở chính tắc của V.
Hiển nhiên ma trận của một hệ cơ sở S trên chính nó là một ma trận đơn vị cấp n. Ta có kết quả sau:

△ **Định lý 2.7.** *Hạng của hệ véc tơ bằng hạng ma trận của hệ đối với một cơ sở hữu hạn bất kỳ.*

Chứng minh. Giả sử hạng của hệ $S = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ là r và $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ là hệ con độc lập tuyến tính cực đại (vì bao giờ ta cũng có thể đánh số lại các véc tơ của S để có r véc tơ đầu là độc lập tuyến tính). Khi đó các véc tơ $\beta_{r+1}, \ldots, \beta_m$ đều là tổ hợp tuyến tính của $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$, tức là các hàng $r+1, \ldots, m$ của A đều là tổ hợp tuyến tính của r hàng đầu, do đó mọi định thức con cấp lớn hơn r của A đều bằng 0.

Mặt khác ma trận lập từ r hàng đầu của A phải có hạng bằng r vì nếu không sẽ có một hàng là tổ hợp tuyến tính của $r-1$ hàng còn lại. Điều này trái với giả thiết $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ là hệ độc lập tuyến tính.

Ngược lại nếu $r(A) = r$, không mất tính tổng quát ta có thể xem định thức con cấp r ở góc trên bên trái khác 0 và mọi định thức con cấp $r+1$ bằng 0. Khi đó các hàng $r+1, \ldots, m$ đều là tổ hợp tuyến tính của r hàng đầu. Vì hàng thứ j (j=r+1,...m) là tọa độ của véc tơ β_j nên β_j là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$.

Mặt khác $\{\beta_1, \ldots, \beta_r\}$ phải độc lập tuyến tính, vì nếu không sẽ có một véc tơ trong nó là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại. Như vậy sẽ có một trong r hàng đầu của A là tổ hợp

tuyến tính của $r-1$ hàng còn lại, trái với giả thiết A có định thức con cấp r khác 0. Vậy hạng của S bằng r.

$\oplus$ **Nhận xét**:

- Nếu $r(A) = m$ thì hệ S độc lập tuyến tính.
- Nếu $r(A) < m$ thì hệ S phụ thuộc tuyến tính.

• **Ví dụ 2.20.** Tìm hạng của hệ véc tơ: $\alpha_1 = (-1, 3, 4); \alpha_2 = (0, 2, 5); \alpha_3 = (-2, 4, 3); \alpha_4 = (1, -1, 1)$ trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Lời giải. $\odot$ **Cách 1.** Nhận thấy hệ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, từ $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \theta$ ta có

$$\begin{cases} -c_1 & & = & 0 \\ 3c_1 & + & 2c_2 & = & 0 \\ 4c_1 & + & 5c_2 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$$

Mặt khác $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$ và $\alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2$ nên α_1, α_2 là hệ con độc lập tuyến tính cực đại, do đó hạng của hệ bằng 2.

$\odot$ **Cách 2.** Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ. Sau đó tính hạng của ma trận A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận bậc thang có 2 hàng khác không, do đó $r(A) = 2$. Vậy $r(S) = 2$.

• **Ví dụ 2.21.** Tìm hạng của hệ véc tơ

$$S = \{(1, 1, 1, 1); (1, -1, 1, -1); (1, 3, 1, 3); (1, 2, 0, 2); (1, 2, 1, 2)\}$$

Lời giải. Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ. Sau đó tính hạng của ma trận A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận bậc thang có 3 hàng khác không, do đó $r(A) = 3$. Vậy $r(S) = 3$.

2.5.4. Không gian con sinh bởi hệ véc tơ

$\square$ **Định nghĩa 2.12.** Cho không gian véc tơ V và $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset V, S \neq \emptyset$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc tơ của S được gọi là bao tuyến tính của S, kí hiệu là span(S).

$$span(S) = \{c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_m | c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m\}.$$

$\diamondsuit$ **Mệnh đề 2.2.** *(i) $W = span(S)$ là một không gian con của V.*

(ii) W là không gian con nhỏ nhất của V chứa S.

Chứng minh. (i) Vì $\theta = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_m \in W$ nên $W \neq \emptyset$. Mặt khác lấy hai véc tơ tùy ý $\alpha, \beta \in W$, khi đó

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m, \quad \beta = d_1\alpha_1 + \cdots + d_m\alpha_m, \quad c_i, d_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m.$$

Suy ra $\alpha + \beta = (c_1 + d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_m + d_m)\alpha_m \in W$ và $k\alpha = kc_1\alpha_1 + \cdots + kc_m\alpha_m \in W$. Vậy W là không gian con của V.

(ii) Vì $\alpha = 1.\alpha, \forall\alpha \in S$ nên $\alpha \in W$, do đó $S \subset W$.

Giả sử W_1 là một không gian con bất kì của V chứa S. Khi đó $\forall\alpha \in W$ ta đều có thể viết

$$\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_m\alpha_m, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m.$$

Do $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in W_1$ nên $\alpha \in W_1$, tức là $W \subset W_1$. Vậy W chính là không gian con nhỏ nhất chứa S.

$W = span(S)$ được gọi là **không gian con của V sinh bởi hệ hệ véc tơ** S. Hệ véc tơ S được gọi là **hệ sinh** của W.

△ **Định lý 2.8.** *Số chiều của không gian $span(S)$ là $r(S)$ và mọi hệ gồm $r(S)$ véc tơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của $span(S)$.*

Chứng minh. Nếu hệ con S' độc lập tuyến tính cực đại trong S thì mọi phần tử của S biểu diễn tuyến tính qua S', do đó mọi phần tử của $span(S)$ cũng vậy. Nói cách khác S' cũng độc lập tuyến tính cực đại trong $span(S)$. Vậy số véc tơ của S' là số chiều của không gian $span(S)$, tức là $\dim span(S) = r(S)$. Hơn nữa theo định lý (2.3) mọi hệ gồm $r(S)$ véc tơ độc lập tuyến tính rút từ S là một cơ sở của $span(S)$.

• **Ví dụ 2.22.** Tìm cơ sở và số chiều không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi

$$S = \{(1, 0, 0, -1), (2, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}.$$

Lời giải. Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy

$$\dim(span(S)) = r(S) = 3$$

và một cơ sở của nó là

$$\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 1)\}.$$

• **Ví dụ 2.23.** Tìm một cơ sở và số chiều không gian con của $P_3[x]$ sinh bởi

$$S = \{x^3 - 2x^2 + 5x - 3, 2x^3 + 3x^2 - x + 1, x^3 + 12x^2 - 17x + 11\}.$$

Lời giải. Lập véc tơ toạ độ của các đa thức theo cơ sở $\{x^3, x^2, x, 1\}$, ta có

$$\{(1, -2, 5, -3), (2, 3, -1, 1), (1, 12, -17, 11)\}.$$

Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 12 & -17 & 11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 14 & -22 & 14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy

$$\dim(span(S)) = r(S) = 2$$

và một cơ sở của nó là

$$\{x^3 - 2x^2 + 5x - 3, 7x^2 - 11x + 7\}.$$

• **Ví dụ 2.24.** Biện luận theo m số chiều của không gian con sinh bởi hệ véctơ sau trong $\mathbb{R}^4$:

$$\{(1, -2, 3, 7), (4, 2, -5, m), (2, 6, -11, -14 + 2m, -3, -4, 8, 7 - m)\}$$

Lời giải. Lập ma trận A gồm các hàng là các véc tơ của hệ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & -5 & m \\ 2 & 6 & -11 & -14 + 2m \\ -3 & -4 & 8 & 7 - m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 & -28 + m \\ 0 & 10 & -17 & -28 + 2m \\ 0 & -10 & 17 & 28 - m \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 & -28 + m \\ 0 & 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Như vậy:

- nếu $m = 0$ thì $\dim(span(S)) = r(S) = 2$ và một cơ sở của nó là

$$\{(1, -2, 3, 7), (0, 10, -17, -28)\}$$

- nếu $m \neq 0$ thì $\dim(span(S)) = r(S) = 3$ và một cơ sở của nó là

$$\{(1, -2, 3, 7), (0, 10, -17, -28 + m), (0, 0, 0, m)\}$$

• **Ví dụ 2.25.** Tìm m sao cho véc tơ $x = (2, 0, 1, m)$ thuộc vào không gian con sinh hệ véctơ $S = \{u = (1, -1, 0, 1), v = (2, 0, 1, 0), w = (-1, -1, -1, m)\}$ trong $\mathbb{R}^4$. Biểu diễn x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w trong trường hợp đó.

Lời giải. Ta có $x \in span(S) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3$ sao cho $x = c_1u + c_2v + c_3w$. Phương trình véc tơ trên tương đương với hệ

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 & = 2 \\ -c_1 \qquad - c_3 & = 0 \\ \qquad c_2 - c_3 & = 1 \\ c_1 \qquad + mc_3 & = m \end{cases}$$

Khi $m \neq 1$ hệ trên có nghiệm duy nhất: $\left\{c_1 = -\dfrac{m}{m-1}, c_2 = \dfrac{2m-1}{m-1}, c_3 = \dfrac{m}{m-1}\right\}$

• **Ví dụ 2.26.** Tìm một cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + z + 2t & = & 0 \\ 2x + y - 2z + t & = & 0 \\ -x - 2y + 3z + t & = & 0 \\ 2x - 5y + 6z + 7t & = & 0 \end{cases}$$

Lời giải. Lập ma trận bổ sung $\overline{A}$ rồi sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang:

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 6 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-2h_1+h_4\to h_4 \\ h_1+h_3\to h_3}]{-2h_1+h_2\to h_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[h_2+h_4\to h_4]{h_2+h_3\to h_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hệ ban đầu tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x - y + z + 2t &= 0 \\ \quad 3y - 4z - 3t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{1}{3}z - t \\ y &= \dfrac{4}{3}z + t \\ z, t \in \mathbb{R} & \end{cases}$$

Khi đó không gian nghiệm

$$W = \left\{(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}z - t, \frac{4}{3}z + t, z, t\right)\right\} = \left\{\left(\frac{1}{3}z, \frac{4}{3}z, z, 0 + (-t, t, 0, t)\right)\right\}$$
$$= \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right) z + (-1, 1, 0, 1)t | z, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Như vậy $W = span\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 1, 0\right), (-1, 1, 0, 1)\right\}$. Dễ thấy 2 véc tơ này độc lập tuyến tính nên nó là một cơ sở của W và $\dim W = 2$.

2.6. Không gian véc tơ Euclid

2.6.1. Không gian véc tơ Euclid

Nhắc lại rằng, trong hình học sơ cấp, tích vô hướng của hai véc tơ được định nghĩa bằng tích của độ dài hai véc tơ đó và côsin của góc xen giữa chúng. Dễ thấy rằng, ngược lại, độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ có thể biểu thị qua tích vô hướng. Người ta nhận thấy rằng, để đưa những khái niệm này vào các không gian véc tơ trừu tượng, việc trực tiếp trừu tượng hóa các khái niệm độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ khó hơn nhiều so với việc trừu tượng hóa khái niệm tích vô hướng. Vì thế trước hết chúng ta nghiên cứu khái niệm tích vô hướng, rồi sử dụng nó để định nghĩa độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ.

□ **Định nghĩa 2.13.** V là một không gian véc tơ thực, α, β là hai véc tơ của V. Tích vô hướng của α và β là một số thực, kí hiệu là $\langle\alpha, \beta\rangle$, thỏa mãn các tính chất sau đây được gọi là các tiên đề của tích vô hướng:

(i) Tính song tuyến tính:
$$\begin{aligned} \langle\alpha_1 + \alpha_2, \beta\rangle &= \langle\alpha_1, \beta\rangle + \langle\alpha_2, \beta\rangle, \\ \langle k\alpha, \beta\rangle &= k\langle\alpha, \beta\rangle, \\ \langle\alpha, \beta_1 + \beta_2\rangle &= \langle\alpha, \beta_1\rangle + \langle\alpha, \beta_2\rangle, \\ \langle\alpha, k\beta\rangle &= k\langle\alpha, \beta\rangle, \end{aligned}$$

(ii) Tính đối xứng: $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$,

(iii) Tính xác định dương: $\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0, \langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$.

□ **Định nghĩa 2.14.** Không gian véc tơ thực V có trang bị một tích vô hướng gọi là không gian có tích vô hướng. Không gian n chiều có tích vô hướng gọi là không gian Euclid.

• **Ví dụ 2.27.** (a) Không gian các véc tơ tự do đã học trong hình học sơ cấp là một không gian véc tơ Euclid với tích vô hướng thông thường

$$\langle \alpha, \beta \rangle = |\alpha||\beta| \cos \angle(\alpha, \beta).$$

(b) Giả sử V là không gian véc tơ thực n chiều và $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ là một cơ sở của nó. Có thể định nghĩa một tích vô hướng trên V như sau. Nếu $\alpha = \sum x_i e_i, \beta = \sum y_i e_i$, thì ta đặt

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nói riêng, nếu $V = \mathbb{R}^n$ và $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^n$, thì tích vô hướng của hai véc tơ $\alpha = (x_1, \ldots, x_n), \beta = (y_1, \ldots, y_n)$ được định nghĩa là

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Nó được gọi là tích vô hướng chính tắc trên $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét rằng theo cách này mỗi cơ sở của V cho phép xác định trên V một tích vô hướng. Hai tích vô hướng xác định bởi hai cơ sở khác nhau thì nói chung khác nhau.

(c) Giả sử $V = C[a, b]$ là không gian các hàm thực liên tục trên $[a, b]$. Công thức

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f, g \in C[a, b].$$

xác định một tích vô hướng trên không gian vô hạn chiều $C[a, b]$.

Bây giờ ta định nghĩa độ dài của véc tơ và góc xen giữa hai véc tơ trong một không gian véc tơ Euclid.

□ **Định nghĩa 2.15.** Giả sử V là một không gian véc tơ Euclid với tích vô hướng. Khi đó, *độ dài* (hay *chuẩn*) của véc tơ $\alpha \in V$ là số thực không âm $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$.

Nhận xét rằng, ngược lại, tích vô hướng cũng được hoàn toàn xác định bởi độ dài véc tơ. Thật vậy

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{1}{2}\big\{|\alpha + \beta|^2 - |\alpha|^2 - |\beta|^2\big\}.$$

Để định nghĩa được góc giữa hai véc tơ, ta cần mệnh đề sau đây.

⊙ **Mệnh đề** (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq |\alpha||\beta|, \qquad \forall \alpha, \beta \in V.$$

Chứng minh. Nếu $\alpha = \theta$ thì hiển nhiên bất đẳng thức đúng bởi vì hai vế của nó đều bằng 0.

Xét trường hợp $\alpha \neq \theta$. Ta có $\langle t\alpha + \beta, t\alpha + \beta\rangle \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó

$$t^2\langle\alpha,\alpha\rangle + 2t\langle\alpha,\beta\rangle + \langle\beta,\beta\rangle \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0$, nên vế trái là một tam thức bậc hai đối với t. Nó không âm với mọi giá trị của t nên

$$\Delta' = \langle\alpha,\beta\rangle^2 - \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle\alpha,\beta\rangle^2 \leq \langle\alpha,\alpha\rangle\langle\beta,\beta\rangle \Rightarrow |\langle\alpha,\beta\rangle| \leq |\alpha||\beta|.$$

Trong $\mathbb{R}^n$ với tích vô hướng chính tắc, bất đẳng thức trên có dạng

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}.$$

□ **Định nghĩa 2.16.** Góc giữa hai véc tơ khác không α và β được ký hiệu bởi $\angle(\alpha,\beta)$ và được xác định duy nhất bởi điều kiện sau

$$\begin{cases} \cos\angle(\alpha,\beta) = \dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}, \\ 0 \leq \angle(\alpha,\beta) \leq \pi. \end{cases}$$

Ta coi góc giữa véc tơ θ và một véc tơ khác là không xác định.

□ **Định nghĩa 2.17.** Hai véc tơ $\alpha, \beta \in V$ được gọi là *vuông góc* (hay *trực giao*) với nhau, và được ký hiệu là $\alpha \perp \beta$, nếu

$$\langle\alpha,\beta\rangle = 0.$$

Như vậy, $\langle\alpha,\beta\rangle = 0$ nếu và chỉ nếu hoặc là ít nhất một trong hai véc tơ α, β bằng θ, hoặc là $\angle(\alpha,\beta) = \dfrac{\pi}{2}$.

♢ **Mệnh đề 2.3.** *(i)* $|\alpha| \geq 0, \forall\alpha \in V, |\alpha| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \theta$.

(ii) $|k\alpha| = |k||\alpha|, \forall k \in \mathbb{R}, \forall\alpha \in V$.

(iii) (Bất đẳng thức tam giác)

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \forall\alpha,\beta \in V.$$

Khoảng cách từ véc tơ α đến véc tơ β được định nghĩa như sau:

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha - \beta|.$$

Từ mệnh đề (2.3) ta suy ra hàm khoảng cách có những tính chất cơ bản sau đây:

(i) $d(\alpha,\beta) \geq 0, \forall\alpha,\beta \in V, \quad d(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

(ii) $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha), \forall\alpha,\beta \in V$.

(iii) $d(\alpha,\gamma) \leq d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma), \forall\alpha,\beta,\gamma \in V$.

2.6.2. Cơ sở trong không gian Euclid

□ **Định nghĩa 2.18.** (a) Hệ véc tơ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ của không gian véc tơ Euclid V được gọi là *hệ trực giao* nếu các véc tơ của hệ đôi một vuông góc với nhau, tức là $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ nếu $i \neq j$.

(b) Hệ véc tơ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ được gọi là một *hệ trực chuẩn* nếu nó là một hệ trực giao và mỗi véc tơ của hệ đều có độ dài bằng 1, tức là

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

◇ **Mệnh đề 2.4.** *(i) Mỗi hệ trực giao không chứa véc tơ θ đều độc lập tuyến tính.*

(ii) Nếu hệ véc tơ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ là trực giao và không chứa véc tơ θ thì hệ $\{\frac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \frac{e_k}{|e_k|}\}$ là trực chuẩn.

Chứng minh. (i) Giả sử $\{e_1, \ldots, e_k\}$ là một hệ trực giao và không chứa véc tơ θ. Xét hệ thức

$$c_1e_1 + \cdots + c_ke_k = \theta.$$

Nhân vô hướng hai vế với e_k và sử dụng giả thiết $e_i \perp e_j$ với $i \neq j$, ta có:

$$\theta = \langle c_1e_1 + \cdots + c_ke_k, e_k\rangle = c_1\langle e_1, e_k\rangle + \cdots + c_k\langle e_k, e_k\rangle = c_k\langle e_k, e_k\rangle.$$

Vì $e_k \neq \theta$, nên $\langle e_k, e_k\rangle > 0$, do đó $c_k = 0$. Từ đó ta thu được:

$$c_1e_1 + \cdots + c_{k-1}e_{k-1} = \theta.$$

Lặp lại lập luận trên với k được thay bởi $k-1, \ldots, 1$ ta thu được

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Vậy hệ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ độc lập tuyến tính.

(ii) Ta có

$$\langle \frac{e_i}{|e_i|}, \frac{e_j}{|e_j|}\rangle = \frac{1}{|e_i||e_j|}\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{nếu } i \neq j, \\ 1, & \text{nếu } i = j. \end{cases}$$

▽ **Hệ quả 2.3.** *Trong là không gian Euclid n chiều V, mỗi hệ trực giao gồm n véc tơ khác θ đều là một cơ sở của V.*

Một cơ sở của V đồng thời là một hệ trực chuẩn được gọi là một *cơ sở trực chuẩn*. Định lý sau đây nói lên tính phổ biến của cơ sở trực chuẩn.

△ **Định lý 2.9.** *Mọi không gian véc tơ Euclid hữu hạn chiều đều có cơ sở trực chuẩn.*

Chứng minh. Định lý được chứng minh bằng *phép trực chuẩn hóa Gram-Schmidt.*

Giả sử $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở bất kỳ của không gian véc tơ Euclid V. Trực chuẩn hóa Gram-Schmidt là phép dựng một cơ sở trực chuẩn $\{e_1, \ldots, e_n\}$ của V với tính chất sau:

$$span\{e_1, \ldots, e_k\} = span\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

- $k = 1$: Vì S độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 \neq \theta$. Đặt $e_1 = \dfrac{\alpha_1}{||\alpha_1||}$. Hiển nhiên $||e_1|| = 1$ và $span\{e_1\} = span\{\alpha_1\}$.

- $k = 2$: Xét $\overline{e}_2 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, e_1 \rangle e_1$. Ta có $\overline{e}_2 \neq \theta$ (vì nếu $\overline{e}_2 = \theta$ thì $\alpha_2 = k\alpha_1$, điều này trái với giả thiết S độc lập tuyến tính.)

  Đặt $e_2 = \dfrac{\overline{e}_2}{||\overline{e}_2||}$. Khi đó hệ $\{e_1, e_2\}$ trực chuẩn và $span\{e_1, e_2\} = span\{e_1, \overline{e_2}\} = span\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

- Giả sử đã xây dựng được hệ trực chuẩn $\{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ sao cho

$$span\{e_1, \ldots, e_i\} = span\{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

  Tiếp theo ta tìm $\overline{e_k}$ dưới dạng

$$\overline{e_k} = \alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i.$$

  Ta cũng có $\overline{e_k} \neq \theta$ (vì nếu $\overline{e_k} = \theta$ thì α_k là tổ hợp tuyến tính của $e_1, \ldots, e_{k-1}$, do đó là tổ hợp tuyến tính của $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, điều này mâu thuẫn với giả thiết S độc lập). Hơn nữa $\overline{e_k} \perp e_i, \forall i = 1, \ldots, k-1$.

  Đặt $e_k = \dfrac{\overline{e_k}}{||\overline{e_k}||} = \dfrac{\alpha_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i}{||\alpha_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \langle \alpha_k, e_i \rangle e_i||}$.

  Khi đó hệ $\{e_1, \ldots, e_k\}$ trực chuẩn và $span\{e_1, \ldots, e_k\} = span\{e_1, \ldots, \overline{e_k}\} = span\{\alpha_1, , \ldots, \alpha_k\}$.

- **Ví dụ 2.28.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ

$$\{\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (-1, 1, 1), \alpha_3 = (1, 2, 1).$$

Hãy trực chuẩn hóa Gram-Schmidt hệ véc tơ trên.

Lời giải.

- Bước 1: Đặt $e_1 = \dfrac{\alpha_1}{||\alpha_1||} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

- Bước 2: $\overline{e_2} = \alpha_2 - \langle \alpha_2, e_1 \rangle e_1 = (-1, 1, 1) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

  Vậy $e_2 = \dfrac{\overline{e_2}}{||\overline{e_2}||} = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

- Bước 3: $\overline{e_3} = \alpha_3 - \langle \alpha_3, e_1 \rangle e_1 - \langle \alpha_3, e_2 \rangle e_2 = (1, 2, 1) - \dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

  Vậy $e_3 = \dfrac{\overline{e_3}}{||\overline{e_3}||} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Khi đó $\{e_1, e_2, e_3\}$ là hệ trực chuẩn hóa của hệ $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

△ **Định lý 2.10.** *Cho V là không gian Euclid n chiều. Nếu $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn thì với mọi $\beta \in V$ ta có*

$$\beta = \langle \beta, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \langle \beta, \alpha_2 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle \beta, \alpha_n \rangle \alpha_n.$$

• **Ví dụ 2.29.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho hệ

$$S = \left\{ \alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = \big(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \big), \alpha_3 = \big(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \big) \right\}.$$

Hãy biểu thị tuyến tính véc tơ $\beta = (1, 1, 1)$ qua S.

Lời giải. Dễ thấy rằng S là một hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$ nên nó là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$. Vậy theo định lý trên thì

$$\beta = \langle \beta, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \langle \beta, \alpha_2 \rangle \alpha_2 + \langle \beta, \alpha_3 \rangle \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{7}{5}\alpha_3.$$

2.6.3. Hình chiếu của một véc tơ lên một không gian con

Trước hết ta chứng minh định lý sau

△ **Định lý 2.11.** *Giả sử V là một không gian véc tơ có tích vô hướng, $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ là một hệ trực chuẩn trong V, W là không gian con sinh bởi S và $\alpha \in V$. Đặt*

$$\beta_1 = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \langle \alpha, \alpha_2 \rangle \alpha_2 + \cdots + \langle \alpha, \alpha_m \rangle \alpha_m; \quad \beta_2 = \alpha - \beta_1.$$

Khi đó

(i) $\beta_1 \in W = span(S)$.

(ii) β_2 trực giao với W, tức là $\beta_2 \perp \alpha_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$.

Chứng minh. (i) hiển nhiên do biểu thức của β_1. Ta chỉ cần chứng minh (ii).

Dễ thấy $\langle \beta_2, \alpha_i \rangle = \langle \alpha - \beta_1, \alpha_i \rangle = \langle \alpha, \alpha_i \rangle - \langle \beta_1, \alpha_i \rangle = \langle \alpha, \alpha_i \rangle - \langle \alpha, \alpha_i \rangle = \theta$, do đó $\beta_2 \perp \alpha_i$, $\forall i = 1, \ldots, m$

□ **Định nghĩa 2.19.** Ta gọi β_1 là hình chiếu trực giao của α lên W, ký hiệu là $hch_w\alpha$, còn β_2 là thành phần của α trực giao với W.

• **Ví dụ 2.30.** Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ cho W là không gian con sinh bởi hệ

$$S = \left\{ \alpha_1 = (0, 1, 0), \alpha_2 = \big(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \big) \right\}.$$

Tìm hình chiếu trực giao của $\alpha = (1, 1, 1)$ lên W.

Lời giải. Dễ thấy S là hệ trực chuẩn trong $\mathbb{R}^3$, do đó hình chiếu trực giao của α lên W là

$$hch_w\alpha = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \langle \alpha, \alpha_2 \rangle \alpha_2 = \big(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25} \big).$$

Thành phần của α trực giao với W là

$$\alpha - hch_w\alpha = (1, 1, 1) - \big(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25} \big) = \big(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25} \big).$$

Bài tập chương 2

1. Ký hiệu $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các ma trận m hàng, n cột với các phần tử thực. Chứng tỏ rằng tập hợp $\mathcal{M}(m \times n, \mathbb{R})$ cùng với hai phép toán cộng ma trận và phép nhân ma trận với một số thực lập nên một không gian véc tơ.

2. Xét tập hợp $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 0\}$ (tập hợp các điểm thuộc góc phần tư thứ nhất và thứ ba trong mặt phẳng Oxy) cùng với hai phép toán định nghĩa như trong Ví dụ 3.2. Hãy chỉ ra rằng W không phải là một không gian véc tơ.

3. Hãy biểu diễn véc tơ x thành tổ hợp tuyến tính của u, v, w với

   (a) $x = (7, -2, 15)$; $u = (2, 3, 5)$; $v = (3, 7, 8)$;$w = (1, -6, 1)$.

   (b) $x = (1, 4, -7, 7)$; $u = (4, 1, 3, -2)$;$v = (1, 2, -3, 2)$;$w = (16, 9, 1, -3)$.

   (**ĐS:** (a) $x = (11 - 5t)u - (5 - 3t)v + tw, t \in \mathbb{R}$; (b) $x = 3u + 5v - w$).

4. Hãy xác định λ sao cho x là tổ hợp tuyến tính của u, v, w

   (a) $u = (2, 3, 5)$;$v = (3, 7, 8)$;$w = (1, -6, 1)$;$x = (7, -2, \lambda)$.

   (b) $u = (4, 4, 3)$;$v = (7, 2, 1)$;$w = (4, 1, 6)$;$x = (5, 9, \lambda)$.

   (c) $u = (3, 4, 2)$;$v = (6, 8, 7)$;$x = (9, 12, \lambda)$.

   (d) $u = (3, 2, 5)$;$v = (2, 4, 7)$;$w = (5, 6, \lambda)$; $x = (1, 3, 5)$.

   (**ĐS:** (a) $\lambda = 15$; (b) λ bất kì; (c) λ bất kì; (d) $\lambda \neq 12$).

5. Hãy biểu diễn các đa thức sau thành tổ hợp tuyến tính của $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x - 3x^2$, $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$:

   (a) $5 + 9x + 5x^2$,

   (b) $2 + 6x^2$,

   (c) 0,

   (d) $2 + 2x + 3x^3$.

   (ĐS: (a) $-12p_1 - p_2 + 1 - p_3$, (b) $4p_1 - 2p_3$, (c) $0p_1 + 0p_2 + 0p_3$, (d) $-\dfrac{11}{8}p_1 - \dfrac{1}{8}p_2 + \dfrac{13}{8}p_3$).

6. Mỗi họ véc tơ dưới đây có sinh ra $\mathbb{R}^3$ không?

   (a) $v_1 = (1, 1, 1)$; $v_2 = (2, 2, 0)$; $v_3 = (3, 0, 0)$.

   (b) $v_1 = (2, -1, 3)$; $v_2 = (4, 1, 2)$; $v_3 = (8, -1, 8)$.

   (c) $v_1 = (3, 1, 4)$; $v_2 = (2, -3, 5)$; $v_3 = (5, -2, 9)$; $v_4 = (1, 4, -1)$.

   (d) $v_1 = (1, 3, 3)$; $v_2 = (1, 3, 4)$; $v_3 = (1, 4, 3)$; $v_4 = (6, 2, 1)$.

   (ĐS: (a) có; (b) không; (c) không; (d) có)

7. Hỏi họ các đa thức dưới đây có sinh ra $P_3[x]$ không?

$$p_1(x) = 1 + 2x - x^2, \ p_2(x) = 3 + x^2, \ p_3(x) = 5 + 4x - x^2, \ p_4(x) = -2 + 2x - 2x^2.$$

   (ĐS: không).

8. Các tập hợp sau đây là họ véc tơ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

   (a) $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (-3, -6)$ trong $\mathbb{R}^2$.

   (b) $u_1 = (2, 3)$, $u_2 = (-5, 8)$, $u_3 = (6, 1)$ trong $\mathbb{R}^2$.

   (c) $p_1(x) = 2 + 3x - x^2$, $p_2(x) = 6 + 9x - 3x^2$ trong $P_2[x]$.

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ trong $\mathcal{M}_2$.

   (ĐS: (a) $u_2 = -3u_1$; (b) phụ thuộc; (c) $p_2 = -3p_1$; (d) $B = -A$).

9. Các tập hợp dưới đây là họ véc tơ độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính?

   (a) $(1, 2, 3)$; $(3, 6, 7)$ trong $\mathbb{R}^3$.

   (b) $(4, -2, 6)$; $(6, -3, 9)$ trong $\mathbb{R}^3$.

   (c) $(2, -3, 1)$; $(3, -1, 5)$; $(1, -4, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

   (d) $(5, 4, 3)$; $(3, 3, 2)$; $(8, 1, 3)$ trong $\mathbb{R}^3$.

   (e) $(4, -5, 2, 6)$; $(2, -2, 1, 3)$; $(6, -3, 3, 9)$; $(4, -1, 5, 6)$ trong $\mathbb{R}^4$.

   (g) $(1, 0, 0, 2, 5)$; $(0, 1, 0, 3, 4)$; $(0, 0, 1, 4, 7)$; $(2, -3, 4, 11, 12)$ trong $\mathbb{R}^5$.

   (ĐS: (a) độc lập; (b) phụ thuộc; (c) độc lập; (d) phụ thuộc; (e) phụ thuộc; (g) độc lập).

10. Hệ nào trong $P_2[x]$ dưới đây là hệ phụ thuộc tuyến tính?

    (a) $2 - x + 4x^2$; $3 + 6x + 2x^2$; $1 + 10x - 4x^2$.

    (b) $3 + x + x^2$; $2 - x + 5x^2$; $4 - 3x^2$.

    (c) $6 - x^2$; $1 + x + 4x^2$.

    (d) $1 + 3x + 3x^2$; $x + 4x^2$; $5 + 6x + 3x^2$; $7 + 2x - x^2$.

    (ĐS: (a) độc lập; (b) độc lập; (c) độc lập; (d) phụ thuộc).

11. Tìm $\lambda \in \mathbb{R}$ làm cho các véc tơ sau đây phụ thuộc tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}); v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}); v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda).$$

    (ĐS: $\lambda = -\frac{1}{2}; \lambda = 1$).

12. Hãy giải thích tại sao các hệ véc tơ sau không phải là cơ sở của không gian tương ứng:

    (a) $u_1 = (1, 2)$; $u_2 = (0, 3)$; $u_3 = (2, 7)$ trong $\mathbb{R}^2$.

    (b) $u_1 = (-1, 3, 2)$; $u_2 = (6, 1, 1)$ trong $\mathbb{R}^3$.

    (c) $p_1(x) = 1 + x + x^2$; $p_2(x) = x - 1$ trong $P_2[x]$.

    (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$;$D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$;$E = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ trong $\mathcal{M}_2$.

13. Hệ véc tơ nào dưới đây là một cơ sở trong $\mathbb{R}^3$?

    (a) $(1,0,0)$; $(2,2,0)$; $(3,3,3)$.
    (b) $(3,1,-4)$; $(2,5,6)$; $(1,4,8)$.
    (c) $(2,-3,1)$; $(4,1,1)$; $(0,-7,1)$.
    (d) $(1,6,4)$; $(2,4,-1)$; $(-1,2,5)$.

    (ĐS: (a) và (b)).

14. Hệ véc tơ nào dưới đây là một cơ sở trong $P_2[x]$?

    (a) $1-3x+2x^2$; $1+x+4x^2$; $1-7x$.
    (b) $4+6x+x^2$; $-1+4x+2x^2$; $5+2x-x^2$.
    (c) $1+x+x^2$; $x+x^2$; x^2.
    (d) $-4+x+3x^2$; $6+5x+2x^2$; $8+4x+x^2$.

    (ĐS: (c) và (d)).

15. Hãy tìm ma trận tọa độ và véc tơ tọa độ của w đối với cơ sở $S=\{u_1,u_2,u_3\}$ trong đó

    (a) $w=(2,-1,3)$, $u_1=(1,0,0)$, $u_2=(2,2,0)$, $u_3=(3,3,3)$.

    (b) $w=(5,-12,3)$, $u_1=(1,2,3)$, $u_2=(-4,5,6)$, $u_3=(7,-8,9)$.

    ĐS: (a) $(w)_S=(3,-2,1)$; (b) $(w)_S=(-2,0,1)$.

16. Trong $\mathbb{R}^2$ cho hai cơ sở $B=\{u_1,u_2\}$ và $B'=\{v_1,v_2\}$ trong đó $u_1=(2,2)$, $u_2=(4,-1)$, $v_1=(1,3)$, $v_2=(-1,-1)$.

    (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

    (b) Tính ma trận tọa độ $[w]_{B'}$ trong đó $w=(3,-5)$ rồi tính $[w]_B$.

    (c) Tính trực tiếp $[w]_B$ và kiểm tra lại kết quả trên.

    (ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 13/10 & -1/2 \\ -2/5 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $[w]_B=(-17/5,8/5)^t$, $[w]_{B'}=(-4,-7)^t$.)

17. Trong $\mathbb{R}^3$ cho hai cơ sở $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ và $B'=\{v_1,v_2,v_3\}$ trong đó $u_1=(-3,0,-3)$, $u_2=(-3,2,1)$,$u_3=(1,6,-1)$, $v_1=(-6,-6,0)$, $v_2=(-2,-6,4)$, $v_3=(-2,-3,7)$.

    (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

    (b) Tính ma trận tọa độ $[w]_B$ trong đó $w=(-5,8,-5)$ rồi tính $[w]_{B'}$.

    (c) Tính trực tiếp $[w]_{B'}$ và kiểm tra lại kết quả trên.

    ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 3/4 & 2/3 & 1/12 \\ -3/4 & -3/2 & -17/12 \\ 0 & 1 & 2/3 \end{bmatrix}$;
    (b) $[w]_B=(32/21,4/7,8/7)^t$, $[w]_{B'}=(19/12,-43/12,4/3)^t$.

18. Trong $P_1[x]$ cho hai cơ sở $B=\{p_1,p_2\}$ và $B'=\{q_1,q_2\}$ với $p_1=6+3x, p_2=10+2x$, $q_1=2, q_2=3+2x$.

    (a) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B' sang B.

    (b) Tính ma trận tọa độ $[p]_B$ với $p=-4+x$ rồi suy ra $[p]_{B'}$.

    (c) Tính trực tiếp $[p]_{B'}$ và kiểm tra lại kết quả trên.

(d) Tìm ma trận chuyển cơ sở từ B sang B'.

ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 3/4 & -7/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $[p]_B = (1, -1)^t$, $[p]_{B'} = (-11/4, 1/2)^t$; (d) $\begin{bmatrix} -2/9 & 7/9 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$

19. Hỏi tập nào dưới đây là không gian con của $\mathbb{R}^3$:

(a) Các véc tơ dạng $(a, 0, 0)$.

(b) Các véc tơ có dạng $(a, 1, 1)$.

(c) Các véc tơ có dạng (a, b, c) với $b = a + c$.

(d) Các véc tơ có dạng (a, b, c) với $b = a + c + 1$.

(ĐS: (a) và (b)).

20. Gọi $\mathcal{M}_2$ là tập các ma trận vuông cấp hai với phép cộng ma trận và nhân ma trận với một số thực thông thường. Hỏi tập nào dưới đây là không gian con của $\mathcal{M}_2$:

(a) Các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong đó a, b, c là nguyên.

(b) Các ma trận có dạng $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ trong đó $a + d = 0$.

(c) Các ma trận cấp hai sao cho $A^t = A$.

(d) Các ma trận cấp hai sao cho $\det(A) = 0$.

(ĐS: (b) và (c)).

21. Hỏi tập nào dưới đây là không gian con của $C[0, 1]$:

(a) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1]$.

(b) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(0) = 0$.

(c) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(0) = 2$.

(d) Các $f \in C[0, 1]$ sao cho $f(x) = const$.

(e) Các $f \in C[0, 1]$ có dạng $k_1 + k_2 \sin x$, trong đó k_1, k_2 là các số thực.

(ĐS: (b), (d) và (e)).

22. Hỏi tập nào dưới đây phải là không gian con của $P_3[x]$:

(a) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 = 0$.

(b) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(c) Các đa thức $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ trong đó a_0, a_1, a_3 là các số nguyên.

(ĐS: (a) và (b)).

23. Xác định số chiều và cơ sở của không gian nghiệm của các hệ sau:

(a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ 4x + 8y - 3z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

ĐS: (a) $W = \{0\}$; (b) $W = t(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1, 0) + s(0, -1, 0, 1)$; (c) $W = \{0\}$; (d) $W = t(3, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$; (e) $W = \{0\}$; (g) $W = \{0\}$)

24. Tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của $\mathbb{R}^4$ sinh bởi các véc tơ sau:

(a) $(1, 1, -4, -3)$; $(2, 0, 2, -2)$; $(2, -1, 3, 2)$.

(b) $(-1, 1, -2, 0)$; $(3, 3, 6, 0)$; $(9, 0, 0, 3)$.

(c) $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(-2, 0, 2, 2)$; $(0, -3, 0, 3)$.

(d) $(1, 0, 1, -2)$; $(1, 1, 3, -2)$; $(2, 1, 5, -1)$; $(1, -1, 1, 4)$.

ĐS: (a) Số chiều bằng 3 và $(1, 1, -4, -3)$; $(0, 1, -5, -2)$; $(0, 0, 1, -\frac{1}{2})$ là một cơ sở.

(b) Số chiều bằng 3 và $(1, -1, 2, 0)$; $(0, 1, 0, 0)$; $(0, 0, 1, -\frac{1}{6})$ là một cơ sở.

(c) Số chiều bằng 4 và $(1, 1, 0, 0)$; $(0, 1, 1, 1)$; $(0, 0, 1, 1)$; $(0, 0, 0, 1)$ là một cơ sở.

(d) Số chiều bằng 3 và $(1, 0, 1, -2)$; $(0, 1, 2, 0)$; $(0, 0, 1, 3)$ là một cơ sở.

25. Tìm cơ sở và số chiều không gian con của $P_3[x]$ sinh bởi

(a) $-x^3 + 2x^2 - 5x + 3$; $2x^3 + 3x^2 - x + 1$; $3x^3 + 15x^2 - 18x + 12$;

(b) $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; $2x^3 - 3x^2 + 9x - 1$; $x^3 + 6x - 5$; $2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$

ĐS:

(a) Số chiều bằng 2 và $-x^3 + 2x^2 - 5x + 3$; $7x^2 - 11x + 7$;

(b) Số chiều bằng 2 và $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$; $x^2 + x - 3$.

26. Cho $p(x), q(x) \in P_2[x]$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

(a) Chứng minh rằng biểu thức $\langle p, q\rangle := a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ là một tích vô hướng trong $P_2[x]$.

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của $p(x) = -1 + 2x + x^2, q(x) = 2 - 4x^2$.

(c) Kiểm tra lại bất đẳng thức C-S.

27. Cho $f = f(x), g = g(x) \in P_2[x]$: (a) Chứng minh rằng biểu thức là một tích vô hướng trong $P_2[x]$.

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của $f = 1-x+x^2+5x^3, g = x-3x^2$ và $f = x-5x^3, g = 2+8x^2$.

(ĐS: (b) $-28/15$; $-68/3$)

28. Cho hai ma trận trong $\mathcal{M}_2$:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Chứng minh rằng biểu thức $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ là một tích vô hướng.

(b) Áp dụng để tính tích vô hướng của

$$u = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Kiểm tra lại bất đẳng thức C-S.

29. Xét $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Hỏi biểu thức nào dưới đây có thể là một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^3$, nếu không được thì nêu lí do:

(a) $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_3v_3$,

(b) $\langle u, v\rangle := u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$,

(c) $\langle u, v\rangle := 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$,

(d) $\langle u, v\rangle := u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$,

(ĐS: (a) Không vì tiên đề 5 không thỏa mãn; (b) Không vì tiên đề 3 không thỏa mãn; (c) Có; (d) Không vì tiên đề 5 không thỏa mãn).

30. Với tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^3$, hãy xác định k để u, v trực giao

(a) $u = (2, 1, 3)$; $v = (1, 7, k)$, (b) $u = (k, k, 1)$; v=(k,5,6).

(ĐS: (a) $k = -3$; (b) $k = -2, k = -3$).

31. Với tích vô hướng trong $P_2[x]$ ở bài tập (26) chứng minh rằng $p = 1-x+2x^2$ và $q = 2x+x^2$ trực giao.

32. Với tích vô hướng Euclid trong $\mathbb{R}^4$, hãy tìm hai véc tơ có chuẩn bằng 1 và trực giao với các véc tơ sau

$$u = (2, 1, -4, 0); \quad v = (-1, -1, 2, 2); \quad w = (3, 2, 5, 4).$$

(ĐS: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3249}}(-34, 44, -6, 11)$).

33. Cho $x = (\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}})$ và $y = (\dfrac{2}{\sqrt{30}}, \dfrac{3}{\sqrt{30}})$.

Chứng minh rằng x và y trực chuẩn trong $\mathbb{R}^2$ theo tích vô hướng $\langle u, v\rangle := 3u_1v_1 + 2u_2v_2$, nhưng không trực chuẩn theo tích vô hướng Euclid $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + u_2v_2$.

34. Chứng minh rằng:

$$u_1 = (1,0,0,1); u_2 = (-1,0,2,1); u_3 = (2,3,2,-2); u_3 = (-1,2,-1,1).$$

là một họ trực giao trong $\mathbb{R}^4$ đối với tích vô hướng Euclid.

35. Trong $\mathbb{R}^2$ có tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2\}$ dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

(a) $u_1 = (1,-3)$; $v = (2,2)$ (b) $u_1 = (1,0)$; $u_2 = (3,-5)$.

ĐS: (a) $\big(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\big)$; $\big(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\big)$; (b) $(1,0)$;$(0,1)$.

36. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ dưới đây thành cơ sở trực chuẩn

(a) $u_1 = (1,1,1)$; $u_2 = (-1,1,0)$; $u_3 = (1,2,1)$.

(b) $u = (1,0,0)$; $u_2 = (3,7,-2)$; $u_3 = (0,4,1)$.

ĐS:(a) $\big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$; $\big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\big)$;$\big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\big)$;

(b) $(1,0,0)$; $\big(0, \frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\big)$; $\big(0, 30\sqrt{11925}, \frac{105}{\sqrt{11925}}\big)$

37. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid. Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn trong không gian con sinh bởi hệ véc tơ $\{(0,1,2); (-1,0,1)\}$.

ĐS: $\big(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\big)$; $\big(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\big)$.

38. Trong $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng $\langle u, v\rangle := u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$. Hãy áp dụng quá trình Gram - Schmidt để biến hệ véc tơ:

$$u_1 = (1,1,1); \quad u_2 = (1,1,0); \quad u_3 = (1,0,0)$$

thành một hệ trực chuẩn.

ĐS: $\big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\big)$; $\big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$; $\big(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0\big)$.

39. Trong $P_2[x]$ xét tích vô hướng

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

Hãy áp dụng quá trình Gram-Schmidt để biến cơ sở chính tắc $\{1, x, x^2\}$ thành một cơ sở trực chuẩn.

ĐS: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}} - 3\sqrt{\frac{5}{8}}x^2\right\}$

40. Hãy tìm ma trận tọa độ và véc tơ tọa độ của w đối với cơ sở $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ trong đó

(a) $w = (2, -1, 3)$, $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (2, 2, 0)$, $u_3 = (3, 3, 3)$.

(b) $w = (5, -12, 3)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-4, 5, 6)$, $u_3 = (7, -8, 9)$.

ĐS: (a) $(w)_S = (3, -2, 1)$; (b) $(w)_S = (-2, 0, 1)$.

41. Trong $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ xét tích vô hướng Euclid và một cơ sở trực chuẩn. Hãy tìm véc tơ tọa độ và ma trận tọa độ của w.

(a) $w = (3, 7)$, $u_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $u_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

(b) $w = (-1, 0, 2)$, $u_1 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $u_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $u_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

ĐS: (a) $(w)_S = (-2\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$; (b) $(w)_S = (0, -2, 1)$.

42. Trong $\mathbb{R}^2$ xét tích vô hướng Euclid và hệ $S = \{w_1, w_2\}$ với $w_1 = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $w_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

(a) Chứng minh S là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^2$.

(b) Cho u và v là các véc tơ của $\mathbb{R}^2$ với $(u)_s = (1, 1)$, $(v)_s = (-1, 4)$. Tính $||u||$, $d(u, v)$ và $\langle u, v\rangle$.

(c) Tìm u, v rồi tính $||u||$, $d(u, v)$ và $\langle u, v\rangle$ một cách trực tiếp.

ĐS: $||u|| = \sqrt{2}$, $d(u, v) = \sqrt{13}$, $\langle u, v\rangle = 3$.

Chương 3
Ánh xạ tuyến tính

3.1. Các khái niệm cơ bản

3.1.1. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính

□ **Định nghĩa 3.1.** Cho V, W là các không gian véc tơ. Ánh xạ $f : V \to W$ được gọi là một ánh xạ tuyến tính nếu với $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta) &= f(\alpha) + f(\beta), \\ f(k\alpha) &= kf(\alpha). \end{aligned}$$

Ánh xạ tuyến tính cũng được gọi là đồng cấu tuyến tính. Trường hợp $V = W$, ánh xạ f được gọi là toán tử tuyến tính.

Tập hợp các ánh xạ tuyến tính từ không gian V vào không gian W được ký hiệu là $L(V, W)$.

⊕ **Nhận xét**: Hai điều kiện trong định nghĩa ánh xạ tuyến tính tương đương với điều kiện sau:

$$f(k\alpha + h\beta) = kf(\alpha) + hf(\beta) \quad \text{với } \forall \alpha, \beta \in V, \forall k, h \in \mathbb{R}.$$

• **Ví dụ 3.1.** Giả sử V và W là hai không gian véc tơ. Ánh xạ $T : V \to W$ xác định bởi

$$T(\alpha) = \theta, \quad \forall \alpha \in V,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

• **Ví dụ 3.2.** V là một không gian véc tơ, W là không gian con của V. Ánh xạ $f : W \to V$ xác định bởi

$$T(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in W,$$

là một ánh xạ tuyến tính.

• **Ví dụ 3.3.** Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 3x_1, 2x_2 - x_3).$$

Khi đó f là ánh xạ tuyến tính.

□ **Định nghĩa 3.2.** Cho $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính. Nếu f là đơn ánh, toàn ánh, song ánh thì f tương ứng được gọi là đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu.

3.1.2. Tính chất

Giả sử $f : V \to W$ là một ánh xạ tuyến tính. Khi đó các tính chất sau đây của ánh xạ tuyến tính được suy ngay từ định nghĩa.

1. $f(\theta) = \theta$.
   Thật vậy, $f(\theta) = f(\theta + \theta) = f(\theta) + f(\theta)$. Theo luật giản ước, $f(\theta) = \theta$.

2. $f(-\alpha) = -f(\alpha), \forall \alpha \in V$.
   Thật vậy, $f(\alpha) + f(-\alpha) = f(\alpha + (-\alpha)) = f(\theta) = \theta$. Do đó, $f(-\alpha) = -f(\alpha)$.

3. $f(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n) = a_1 f(\alpha_1) + \cdots + a_n f(\alpha_n), \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$.
   (đẳng thức này có thể được chứng minh bằng quy nạp)

△ **Định lý 3.1.** *[Cách xác định ánh xạ tuyến tính] Giả sử $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ là một cơ sở của V, còn $\beta_1, \ldots, \beta_n$ là các véc tơ bất kỳ của W. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ sao cho $f(\alpha_i) = \beta_i$, $(i = 1, \ldots, n)$.*

Chứng minh.

⊙ **Sự tồn tại:** Nếu $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$, thì ta đặt

$$f(\alpha) = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n.$$

Dễ dàng chứng minh $f : V \to W$ là ánh xạ tuyến tính và rõ ràng $f(\alpha_i) = \beta_i, \forall i = 1, \ldots, n$.

⊙ **Sự duy nhất:** Nếu f và g là các ánh xạ tuyến tính từ V vào W với $f(\alpha_i) = g(\alpha_i) = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, thì với mọi $\alpha = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n$, ta có

$$f(\alpha) = f(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i g(\alpha_i) = g(\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i) = g(\alpha).$$

Như vậy ánh xạ tuyến tính từ V vào W được xác định hoàn toàn nếu biết được **ảnh của một cơ sở** của V.

• **Ví dụ 3.4.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, biết $f(1, 1, 0) = (2, -1)$, $f(1, 1, 1) = (1, 2)$, $f(1, 0, 1) = (-1, 1)$.

(a) Tìm $f(3, 5, 1)$.

(b) Tìm $f(x)$.

Lời giải. (a) Giả sử $(3, 5, 1) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 3 \\ c_1 & + & c_2 & & & = & 5 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} c_1 & = & 2 \\ c_2 & = & 3 \\ c_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$f(3, 5, 1) = c_1 f(1, 1, 0) + c_2 f(1, 1, 1) + c_3 f(1, 0, 1) = 2(2, -1) + 3(1, 2) - 2(-1, 1) = (9, 2).$$

(b) Giả sử $x = (x_1, x_2, x_3) = c_1(1, 1, 0) + c_2(1, 1, 1) + c_3(1, 0, 1)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & x_1 \\ c_1 & + & c_2 & & & = & x_2 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} c_1 & = & x_1 - x_3 \\ c_2 & = & -x_1 + x_2 + x_3 \\ c_3 & = & x_1 - x_2 \end{array}\right.$$

Suy ra

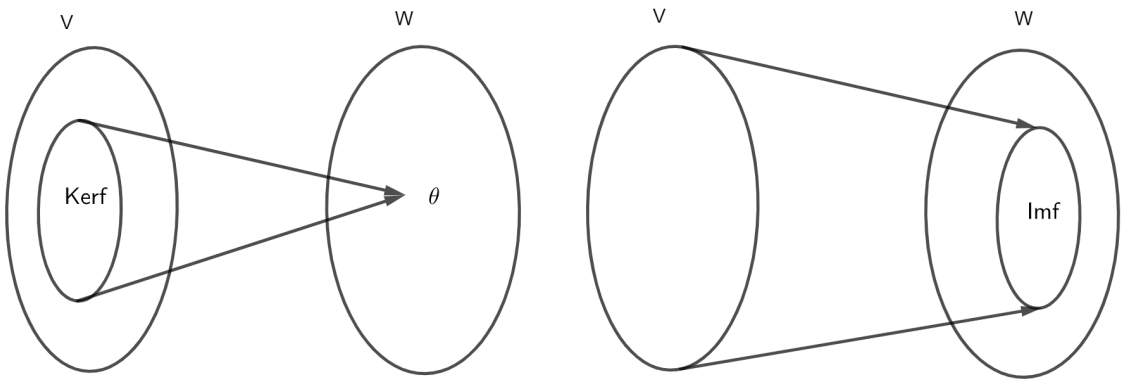
$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = c_1 f(1, 1, 0) + c_2 f(1, 1, 1) + c_3 f(1, 0, 1) = (2x_2 - x_3, -2x_1 + x_2 + 3x_3).$$

3.2. Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$.

- **Nhân của ánh xạ** f là tập hợp tất cả các véc tơ $x \in V$ sao cho $f(x) = \theta$ và được ký hiệu bởi $Kerf$.
$$Kerf = \{x \in V | f(x) = \theta\}.$$

- **Ảnh của ánh xạ** f là tập hợp tất cả các véc tơ $y \in W$ sao cho tồn tại véc tơ $x \in V$ để $y = f(x)$ và được ký hiệu bởi Imf.
$$Imf = \{y \in W | \exists x \in V : y = f(x)\}.$$



Hình 3.1 Ảnh và Nhân của ánh xạ tuyến tính

△ **Định lý 3.2.** *Cho ánh xạ tuyến tính* $f : V \to W$

(a) $Kerf$ *là không gian con của* V.

(b) Imf *là không gian con của* W.

(c) $\dim Kerf + \dim Imf = dimV$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh (c)
Giả sử $\dim Kerf = m$. Khi đó tồn tại cơ sở $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ của $Kerf$. Bổ sung vào E để được một cơ sở của V là $E_1 = \{e_1, \ldots, e_m, v_1, \ldots, v_n\}$. Ta sẽ chứng tỏ cơ sở của Imf là $E_2 = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.
Trước hết E_2 là tập sinh của Imf. Thật vậy $y \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in V : y = f(x) \Leftrightarrow y = f(c_1e_1 + \cdots + c_me_m + d_1v_1 + \cdots + d_nv_n) = c_1f(e_1) + \cdots + c_mf(e_m) + d_1f(v_1) + \cdots + d_nf(v_n) = d_1f(v_1) + \cdots + d_nf(v_n)$.
Xét hệ thức $c_1f(v_1)+c_2f(v_2)+\cdots+c_nf(v_n) = \theta \Leftrightarrow f(c_1v_1+\cdots+c_nv_n) = \theta \Leftrightarrow c_1v_1+\cdots+c_nv_n \in Kerf$.
Do E là cơ sở của $Kerf$ nên $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = d_1e_1 + \cdots + d_me_m \Leftrightarrow c_1v_1 + \cdots + c_nv_n - d_1e_1 - \cdots - d_me_m = \theta \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ (do E_1 là cơ sở). Suy ra E_2 độc lập tuyến tính.
Vậy E_2 là cơ sở của Imf.
Dễ thấy $\dim Imf = n, \dim Kerf = m \Rightarrow \dim Imf + \dim Kerf = m + n = \dim V$.

□ **Định nghĩa 3.3.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$. Số chiều của Imf được gọi là hạng của f, ký hiệu bởi $r(f)$.

Mệnh đề dưới đây giúp ta dễ dàng tìm được số chiều và cơ sở của không gian Imf.

♢ **Mệnh đề 3.1.** *Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh ra bởi ảnh của một tập sinh của V.*

Chứng minh. Giả sử tập sinh của V là $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Khi đó

$$y \in Imf \Leftrightarrow \exists x \in V : y = f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n).$$

Vậy $Imf = span\{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$.

⊕ **Nhận xét**: Từ mệnh đề trên ta có thuật toán tìm ảnh của ánh xạ tuyến tính f.

(1) Chọn một cơ sở của V là $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

(2) Tìm $f(e_1), \ldots, f(e_n)$.

(3) $Imf = span\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$.

⊙ **Chú ý:**

- Còn có nhiều cách giải khác.
- Tùy theo đề bài mà ta chọn cơ sở phù hợp để việc tìm ảnh của cơ sở đó được nhanh.

• **Ví dụ 3.5.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3).$$

(1) Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$.

(2) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Lời giải.

(1) $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = \theta$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, 3x_1 + 5x_2 - x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = x_3(2, -1, 1).$$

Vậy $E = \{(2, -1, 1)\}$ là tập sinh và cũng là cơ sở của $Kerf$, $\dim Kerf = 1$.

(2) Chọn cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ là $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Ảnh của ánh xạ tuyến tính là không gian con được sinh bởi ảnh của một cơ sở (tập sinh) của $\mathbb{R}^3$, tức là:

$$Imf = span\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\} = span\{(1, 2, 3), (1, 3, 5), (-1, -1, -1)\}.$$

Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kết luận: $\dim Imf = 2$, cơ sở $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$.

• **Ví dụ 3.6.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, biết

$$f(1,1,1) = (1,2,1), f(1,1,2) = (2,1,-1), f(1,2,1) = (5,4,-1).$$

(1) Tìm cơ sở và số chiều của $Kerf$.

(2) Tìm cơ sở và số chiều của Imf.

Lời giải.

(1) **Cách 1:** $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x = c_1(1,1,1) + c_2(1,1,2) + c_3(1,2,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = x_1 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = x_2 \\ c_1 + 2x_2 + c_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 \\ c_2 = x_3 - x_1 \\ c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = (-4x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, 5x_1 - 2x_2 - 2x_3).$$

$$\forall x \in Kerf \Leftrightarrow f(x) = \theta \Leftrightarrow x = (2x_2, x_2, 4x_2) = x_2(2,1,4).$$

Cơ sở của $Kerf$ là $\{(2,1,4)\}$, $\dim Kerf = 1$.

Cách 2: Chọn cơ sở $E = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)\}$. Giả sử $(x)_E = (x_1, x_2, x_3)$.

Khi đó $x = x_1(1,1,1) + x_2(1,1,2) + x_3(1,2,1)$ Suy ra

$$f(x) = x_1 f(1,1,1) + x_2 f(1,1,2) + x_3 f(1,2,1) = (x_1 + 2x_2 + 5x_3, 2x_1 + x_2 + 4x_3, x_1 - x_2 - x_3).$$

Giải hệ thuần nhất $f(x) = \theta$ ta được $x_1 = -t, x_2 = -2t, x_3 = t$. Suy ra $x = -t(1,1,1) - 2t(1,1,2) + t(1,2,1) = -t(2,1,4)$. Vậy cơ sở của $Kerf$ là $\{(2,1,4)\}$, $\dim Kerf = 1$.

(2) Chọn cơ sở của $\mathbb{R}^3$ là $E = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1)\}$. Khi đó

$$Imf = span\{f(1,1,1), f(1,1,2), f(1,2,1)\} = span\{(1,2,1),(2,1,-1),(5,4,-1)\}.$$

Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang, kết luận: $\dim Imf = 2$, cơ sở $\{(1,2,1),(0,1,1)\}$.

3.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

3.3.1. Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính f từ không gian V vào không gian W. Theo định lý (3.4) f hoàn toàn xác định bởi ảnh của một cơ sở của V. Giả sử $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ là một cơ sở của V thì f hoàn toàn được xác định bởi hệ véc tơ $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$. Mặt khác nếu $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ là một cơ sở của W thì hệ $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ lại biểu diễn được duy nhất qua tổ hợp tuyến tính của B':

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i, \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3.1}$$

trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Như vậy, ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ được xác định duy nhất bởi hệ thống các số thực $\{a_{ij} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$, chúng được xếp thành ma trận sau đây:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Dễ thấy A có n cột là các ma trận tọa độ của $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ trong cơ sở B'.

□ **Định nghĩa 3.4.** Ma trận A xác định bởi (3.1) được gọi là ma trận của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở B của V và cơ sở B' của W.

- Nếu $V = W$ và $e_i = e'_i,\ i = 1, \ldots, n$ thì A được gọi là ma trận của f đối với cơ sở E.
- Nếu B và B' lần lượt là hai cơ sở chính tắc của V và W thì A được gọi là ma trận chính tắc của f.

3.3.2. Tính chất

Giả sử $x \in V$ và $[x]_B = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $[f(x)]_{B'} = (y_1, \ldots, y_m)^t$. Ta có

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \Rightarrow f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n).$$

Thay $f(e_j)$ bởi (3.1) ta được:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1(a_{11}e'_1 + \cdots + a_{m1}e'_m) + \cdots + x_n(a_{1n}e'_1 + \cdots + a_{mn}e'_m) \\ \Leftrightarrow f(x) & = & (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)e'_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)e'_m \\ \Leftrightarrow [f(x)]_{B'} & = & (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 & = & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots & & \\ y_m & = & a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right. \Leftrightarrow [f(x)]_{B'} = A[x]_B \tag{3.2}$$

Biểu thức (3.2) được gọi là biểu thức tọa độ của ánh xạ tuyến tính f đối với cặp cơ sở B, B'.

△ **Định lý 3.3.** *Ánh xạ đặt tương ứng ánh xạ tuyến tính $f : V \longrightarrow W$ với ma trận A của nó trong một cặp cơ sở cố định của V và W xác định bởi* (3.1) *là một đẳng cấu tuyến tính từ $L(V, W)$ lên $\mathcal{M}_{m\times n}$. Hơn nữa $r(A) = r(f)$.*

Chứng minh.

Giả sử V, W là hai không gian véc tơ với hai cơ sở lần lượt là $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ và $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$. Với ánh xạ tuyến tính $f : V \to W$ thì có ma trận tương ứng $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ xác định bởi (3.1).

Ngược lại, cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, biểu thức tọa độ (3.2) xác định ánh xạ $f : V \to W$ có ma trận là A. Vậy có tương ứng 1 - 1 giữa $L(V, W)$ và $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Hạng của ma trận A là hạng của hệ các véc tơ cột $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$, do đó $r(A) = r\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\} = \dim Imf = r(f)$.

⊕ **Nhận xét**: Ta dễ dàng chứng minh được rằng nếu A, B là ma trận của f, g thì

- $A + B$ là ma trận của $f + g$,
- kA là ma trận của kf, với $\forall k \in \mathbb{R}$.

• **Ví dụ 3.7.** Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, xác định bởi

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + x_3)$$

Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính trong cặp cơ sở $B = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$ và $B' = \{(1,1,),(1,2)\}$. ***Lời giải.*** Ta có

$$\begin{array}{rclclcl} f(1,1,1) & = & (1+2-3,2+1) & = & (0,3) & = & -3(1,1)+3(1,2) \\ f(1,0,1) & = & (1+0-3,2+1) & = & (-2,3) & = & -7(1,1)+5(1,2) \\ f(1,1,0) & = & (1+2-0,2+0) & = & (3,2) & = & 4(1,1)-(1,2) \end{array}$$

Vậy ma trận của f trong cơ sở B của $\mathbb{R}^3$ và B' của $\mathbb{R}^2$ là

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 3.8.** Trong không gian $V = P_2$ gồm các đa thức bậc không quá 2 với hệ số thực cho ánh xạ $f : V \longrightarrow V$ xác định bởi

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x.$$

Ta có thể kiểm tra được f là một ánh xạ tuyến tính. Ngoài ra tại cơ sở chính tắc $B = \{1, x, x^2\}$ ta có:

$$f(1) = 0,\ f(x) = 1,\ f(x^2) = 2x.$$

Như vậy ma trận chính tắc của f là

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

• **Ví dụ 3.9.** Cho f là toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào chính nó, biết:

$$f(1,2,3) = (9,0,9); f(2,3,0) = (9,9,0); f(3,0,0) = (0,9,-9)$$

(a) Tìm ma trận chính tắc của f.

(b) Tìm một cơ sở của Imf và $\dim Kerf$.

Lời giải. (a) Ta đi tìm $f(1,0,0); f(0,1,0); f(0,0,1)$ bằng cách giải hệ:

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(1,0,0)+2f(0,1,0)+3f(0,0,1) & = & (9,0,9) \\ 2f(1,0,0)+3f(0,1,0) & = & (9,9,0) \\ 3f(1,0,0) & = & (0,9,-9) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} f(1,0,0) & = & (0,3,-3) \\ f(0,1,0) & = & (3,1,2) \\ f(0,0,1) & = & (1,-5/3,8/3) \end{array}\right.$$

Vậy ma trận chính tắc của f là $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -5/3 \\ -3 & 2 & 8/3 \end{bmatrix}$.

(b) Dễ thấy $Imf = span\{(0,3,-3),(3,1,2),(1,-5/3,8/3)\}$. Lập ma trận, dùng biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa về dạng bậc thang, kết luận: $\dim Imf = 1$, một cơ sở là $\{(0,3,-3),(3,1,2)\}$. Khi đó $\dim Kerf = 3 - 2 = 1$.

3.3.3. Ma trận của ánh xạ tuyến tính trong các cơ sở khác nhau

Cho $f : V \longrightarrow W$ là ánh xạ tuyến tính và $B_1 = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $B'_1 = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ là hai cơ sở của V, $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$, $B'_2 = \{w'_1, \ldots, w'_m\}$ là hai cơ sở của W.

△ **Định lý 3.4.** *Giả sử A là ma trận của f trong cặp cơ sở B_1, B_2, A' là ma trận của f trong cặp cơ sở B'_1, B'_2, và T là ma trận chuyển cơ sở từ B_1 sang B'_1, P là ma trận chuyển cơ sở từ B_2 sang B'_2. Khi đó*

$$A' = P^{-1}AT \tag{3.3}$$

Chứng minh. Giả sử $A = [a_{ki}]_{m\times n}$, $A' = [a'_{ki}]_{m\times n}$, $P = [p_{ki}]_{m\times m}$, $T = [t_{ij}]_{n\times n}$, tức là ta có:

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k,\ f(e'_j) = \sum_{i=1}^{m} a'_{ij}w'_i,\ w'_i = \sum_{k=1}^{m} p_{ki}w_k,\ e'_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$$

Khi đó $f(e'_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}w'_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a'_{ij}\big(\sum\limits_{k=1}^{m} p_{ki}w_k\big) = \sum\limits_{k=1}^{m}\big(\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij}\big)w_k$. Mặt khác

$$f(e'_j) = f\big(\sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\big(\sum_{k=1}^{m} a_{ki}w_k\big) = \sum_{k=1}^{m}\big(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}t_{ij}\big)w_k.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ki}a'_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}t_{ij}, \quad \forall j = 1,\dots,n\,; k = 1,\dots,m \Leftrightarrow PA' = AT.$$

Vậy $A' = P^{-1}AT$.

Đặc biệt nếu f là tự đồng cấu của không gian véc tơ V và A, A' lần lượt là ma trận của f trong cơ sở B, B', T là ma trận chuyển cơ sở B sang B' thì:

$$A' = T^{-1}AT.$$

□ **Định nghĩa 3.5.** Giả sử A và B là hai ma trận vuông cấp n. Ta nói B đồng dạng với A nếu tồn tại ma trận không suy biến T cấp n sao cho $B = T^{-1}AT$. Kí hiệu $B \sim A$.

⊕ **Nhận xét**: Đẳng thức $B = T^{-1}AT$ có thể viết

$$A = TBT^{-1} = \big(T^{-1}\big)^{-1}BT^{-1}$$

Đặt $T^{-1} = S$ ta có $\det S \neq 0$ và $A = S^{-1}BS$. Vậy nếu B đồng dạng với A thì A đồng dạng với B.

• **Ví dụ 3.10.** Giả sử ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi:

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -2x_1 + 4x_2).$$

Hãy tìm ma trận chính tắc của T rồi sử dụng định lý (3.4) để biến ma trận đó thành ma trận của T đối với cơ sở $B' = \{u_1, u_2\}$: $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, 2)$.

Lời giải. Gọi $B = \{e_1, e_2\}$ là cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Từ định nghĩa ánh xạ ta có $T(e_1) = T(1, 0) = (1, -2)$, $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 4)$, do đó ma trận chính tắc của T là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Bây giờ ta lập ma trận chuyển cơ sở P từ B sang B'. Dễ dàng kiểm tra được: $u_1 = e_1 + e_2, u_2 = e_1 + 2e_2$. Vậy

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta suy ra: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, do đó theo định lý (3.4), ma trận của T đối với cơ sở B' là

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bài tập chương 3

1. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dưới đây có phải là tuyến tính không:

   (a) $f(x, y, z) = (x, x + y + z)$ (b) $f(x, y, z) = (0, 0)$

   (c) $f(x, y, z) = (1, 1)$ (d) $f(x, y, z) = (2x + y, 3y - 4z)$

   ĐS: (a) có (b) có (c) không (d) có

2. Ánh xạ $f : P_2 \to P_2$ dưới đây có phải là tuyến tính không:

   (a) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + (a_1 + a_2)x + (2a_0 - 3a_1)x^2$

   (b) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)^2$

   (c) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 0$

   (d) $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + 1 + a_1x + a_2x^2$

   ĐS: (a) có (b) có (c) có (d) không

3. Gọi $\mathcal{M}_{m\times n}$ là tập các ma trận cỡ $m \times n$. Cho B là một ma trận cỡ 2×3 hoàn toàn xác định. Chứng minh rằng ánh xạ $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ định nghĩa bởi $T(A) = AB$ là ánh xạ tuyến tính.

4. Cho $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là ánh xạ nhân với ma trận

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc ImT: (i) $(1, -4)$ (ii) $(5, 0)$ (iii) $(-3, 12)$

   (b) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc $KerT$: (i) $(5, 10)$ (ii) $(3, 2)$ (iii) $(1, 1)$

   ĐS: (a) (i), (iii); (b) (i)

5. Cho ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_3$ xác định bởi $T(p(x)) = xp(x)$.

   (a) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc $KerT$: (i) x^2 (ii) 0 (iii) $1 + x$

   (b) Hỏi véc tơ nào dưới đây thuộc ImT: (i) $x + x^2$ (ii) $1 + x$ (iii) $3 - x^2$

   ĐS: (a) (ii); (b) (i)

6. Xét cơ sở $S = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ trong đó $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 5, 3)$, $v_3 = (1, 0, 10)$. Tìm biểu diễn ánh xạ tuyến tính $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $T(v_1) = (1, 0)$, $T(v_2) = (1, 0)$, $T(v_3) = (0, 1)$. Tính $T(1, 1, 1)$ trong các cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$.

   ĐS: $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$; $T(1, 1, 1) = (17, -5)$.

7. Tìm ánh xạ tuyến tính $T : P_2 \to P_2$ xác định bởi $T(1) = 1 + x$, $T(x) = 3 - x^2$, $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$. Tính $T(2 - 2x + 3x^2)$.

   ĐS: $T(2 - 2x + 3x^2) = 8 + 8x - 7x^2$.

8. Cho T là một ánh xạ nhân ma trận xác định như dưới đây. Hãy tìm

   (a) số chiều và một cơ sở của ImT.

   (b) số chiều và một cơ sở của $KerT$.

$$(i)\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 5 & 6 & -4\\ 7 & 4 & 2\end{bmatrix}\quad (ii)\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad (iii)\begin{bmatrix}4 & 1 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad (iv)\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & 0 & 9\\ 3 & -2 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

   ĐS: (i) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,5,7),(0,1,1)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-14/11, 19/11, 1)\}$.

   (ii) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,2,0)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(1/2,0,1),(0,1,0)\}$.

   (iii) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,1/4),(1,2)\}$,

   (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-1,-1,1,0),(-4/7,2/7,0,1)\}$.

   (iv) (a) một cơ sở của ImT: $\{(1,3,-1,2),(0,1,-2/7,5/14),(0,0,0,1)\}$, (b) một cơ sở của $KerT$: $\{(-1,-1,1,0,0),(-1,-2,0,0,1)\}$.

9. Tìm ma trận chính tắc của mỗi ánh xạ tuyến tính sau:

   (a) $T(x_1,x_2) = (x_2, -x_1, x_1+3x_2, x_1-x_2)$.

   (b) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (7x_1-2x_2-x_3+x_4, x_2+x_3, -x_1)$.

   ĐS: (a) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 3 & -1\end{bmatrix}^t$ (b) $\begin{bmatrix}7 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

10. Tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính $T: P_2 \to P_1$ xác định bởi

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2) = (a_0+a_1)-(2a_1+3a_2)x$$

   đối với các cơ sở chính tắc trong P_2 và P_1.

   ĐS: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}$

11. Cho $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1,x_2) = (x_1+2x_2, -x_1, 0)$$

   (a) Tìm ma trận của T đối với các cơ sở $B = \{u_1,u_2\}$ trong $\mathbb{R}^2$ và $B' = \{v_1,v_2,v_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (-2,4)$, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (2,2,0)$, $v_3 = (3,0,0)$.

   (b) Dùng ma trận thu được ở (a) tính $T(8,3)$.

   ĐS: (a) $\begin{bmatrix}0 & -1/2 & 8/3\\ 0 & 1 & 4/3\end{bmatrix}^t$; (b) $(14,-8,0)$

12. Cho $T: P_2 \to P_4$ là ánh xạ tuyến tính xác định bởi $T(p(x)) = x^2p(x)$.

   (a) Tìm ma trận của T đối với các cơ sở $B = \{p_1,p_2,p_3\}$ trong P_2 và cơ sở chính tắc B' trong P_4:

$$p_1 = 1+x^2; \qquad p_2 = 1+2x+3x^2; \qquad p_3 = 4+5x+x^2$$

(b) Dùng ma trận thu được ở (a) hãy tính $T(-3+5x-2x^2)$.

ĐS: (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}^t$; (b) $-3x^2+5x^3-2x^4$

13. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ đối với các cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4)\}$ trong $\mathbb{R}^4$ và $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ trong $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (0,1,1,1), v_2 = (2,1,-1,-1), v_3 = (1,4,-1,2), v_4 = (6,9,4,2)$, $w_1 = (0,8,8), w_2 = (-7,8,1), w_3 = (-6,9,1)$.

(a) Tìm $[T(v_1)]_{B'}$, $[T(v_2)]_{B'}$, $[T(v_3)]_{B'}$, $[T(v_4)]_{B'}$.

(b) Tìm $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$, $T(v_4)$.

(c) Tìm $T(2,2,0,0)$.

ĐS: (a) $[T(v_1)]_{B'} = (3,1,-3)^t$, $[T(v_2)]_{B'} = (-2,6,0)^t$, $[T(v_3)]_{B'} = (1,2,7)^t$, $[T(v_4)]_{B'} = (0,1,1)^t$.

(b) $T(v_1) = (11,5,22)$, $T(v_2) = (-42,32,-10)$, $T(v_3) = (-56,87,17)$, $T(v_4) = (-13,17,2)$.

(c) $T(2,2,0,0) = (-31,37,12)$.

14. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ $T : P_2 \to P_2$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ với $v_1 = 3x+3x^2$, $v_2 = -1+3x+2x^2$, $v_3 = 3+7x+2x^2$.

(a) Tìm Tìm $[T(v_1)]_B$, $[T(v_2)]_B$, $[T(v_3)]_B$.

(b) Tìm $T(v_1)$, $T(v_2)$, $T(v_3)$.

(c) Tìm $T(1+x^2)$.

ĐS: (a) $[T(v_1)]_B = (1,2,6)^t$, $[T(v_2)]_B = (3,0,-2)^t$, $[T(v_3)]_B = (-1,5,4)^t$

(b) $T(v_1) = 16+51x+19x^2$, $T(v_2) = -6-5x+5x^2$, $T(v_3) = 7+40x+15x^2$.

(c) $T(1+x^2) = 22+56x+14x^2$.

15. Hãy tìm ma trận của ánh xạ tuyến tính T đối với cơ sở B rồi suy ra ma trận của T đối với cơ sở B'

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi: $T(x_1,x_2) = (x_1+7x_2, 3x_1-4x_2)$,
$B = \{(2,3),(4.-1)\}$, $B' = \{(1,3),(-1,-1)\}$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2-x_3, -x_2, x_1+7x_3)$,
B là cơ sở chính tắc trong $\mathbb{R}^3$, $B' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

(c) $T : P_1 \to P_1$ xác định bởi: $T(a_0+a_1x) = a_0+a_1(x+1)$,
$B = \{6+3x, 10+2x\}$, $B' = \{2, 3+2x\}$.

ĐS: (a) $[T]_B = \dfrac{1}{14}\begin{bmatrix} -1 & 61 \\ 81 & -41 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -31 & 9 \\ -75 & 25 \end{bmatrix}$.

(b) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

(c) $[T]_B = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix}$, $[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Chương 4
Trị riêng - Véctơ riêng - Dạng toàn phương

4.1. Trị riêng và véctơ riêng của ma trận

4.1.1. Các định nghĩa

□ **Định nghĩa 4.1.** Cho A là ma trận vuông cấp n. Nếu tồn tại véctơ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \theta$ trong $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn:

$$Ax = \lambda x \tag{4.1}$$

thì số λ được gọi là trị riêng của A, véctơ x được gọi là véctơ riêng ứng với trị riêng λ.

Trong phương trình (4.1), véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ được đồng nhất với ma trận cột tọa độ của x đối với cơ sở chính tắc.

□ **Định nghĩa 4.2.** Cho A là ma trận vuông cấp n. Phương trình đặc trưng của ma trận A là:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là đa thức (ẩn λ):

$$f(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

□ **Định nghĩa 4.3.** Cho A là ma trận vuông cấp n có trị riêng λ. Ta gọi không gian nghiệm của phương trình:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

là không gian riêng của A ứng với trị riêng λ, ký hiệu J_λ.

• **Ví dụ 4.1.** Cho $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Xét $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3x$$

nghĩa là $x = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ là véctơ riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Phương trình đặc trưng của A là:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{rcr} \lambda & = & -1 \\ \lambda & = & 3 \end{array} \right.$$

Không gian riêng của A ứng với trị riêng $\lambda = 3$ là không gian nghiệm của hệ phương trình:

$$(A - 3I)x = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 0x_1 & + & 0x_2 & = & 0 \\ 8x_1 & - & 4x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_2 & = & 2x_1 \\ x_1 & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Vậy $J_3 = \{x = (x_1, 2x_1), x_1 \in \mathbb{R}\} = span\{(1, 2)\}$.

4.1.2. Tính chất

Tính chất. 1. Nếu x là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ thì cx, trong đó c là hằng số khác 0 tùy ý, cũng là véctơ riêng của A ứng với trị riêng λ.

Thật vậy, ta có:

$$A(cx) = c(Ax) = c(\lambda x) = \lambda(cx).$$

Vì vậy sau khi đã có một véctơ riêng, ta có thể chọn c để được véctơ riêng có độ dài bằng 1. Véctơ riêng có độ dài bằng 1 được gọi là *véctơ riêng đã chuẩn hóa.*

Tính chất. 2. Trị riêng của ma trận A là các nghiệm của phương trình đặc trưng của ma trận đó.

Thật vậy, λ là trị riêng của ma trận A khi hệ phương trình $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ có nghiệm $x \neq 0$, tức là có nghiệm không tầm thường. Điều kiện này trở thành $det(A - \lambda I) = 0$.

Tính chất. 3. Véctơ riêng của ma trận A ứng với trị riêng λ là các vectơ khác không của không gian riêng tương ứng.

Thật vậy, nếu λ là trị riêng của A thì các véctơ riêng của A ứng với λ là các nghiệm khác không của hệ $Ax = \lambda x \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0$ tức là $x \in J_\lambda \setminus \{0\}$.

Tính chất. 4. [1] Giả sử λ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng của ma trận A. Khi đó không gian riêng tương ứng là không gian véctơ con của $\mathbb{R}^n$ có số chiều bằng $n - \rho(A - \lambda I)$, hơn nữa:

$$1 \leq dim(J_\lambda) \leq k$$

số k được gọi là *số bội đại số* của λ, số chiều của không gian riêng J_λ được gọi là *số bội hình học* của λ.

[1] Chứng minh cụ thể của tính chất này có thể được tìm đọc ở [4], trang 46

4.1.3. Tìm trị riêng và véctơ riêng của ma trận

• **Ví dụ 4.2.** Hãy tìm các cơ sở của không gian riêng của:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Lời giải. Ta có:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của A là:

$$det(A - \lambda I) = (5-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 - 4\right] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5)$$

Phương trình đặc trưng của A là:

$$(5-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} \lambda & = & 5 \quad \text{(bội 2)} \\ \lambda & = & 1 \end{array} \right.$$

Vậy ma trận A có hai trị riêng là $\lambda = 1$ và $\lambda = 5$.

Với $\lambda = 1$, không gian riêng J_1 là không gian nghiệm của phương trình $(A - I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 & \in & \mathbb{R} \\ x_2 & = & x_1 \\ x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Do đó:

$$J_1 = \big\{x = (x_1, x_1, 0); x_1 \in \mathbb{R}\big\} = \big\{x = x_1(1,1,0); x_1 \in \mathbb{R}\big\} = span\big\{(1,1,0)\big\}$$

Vậy J_1 là không gian véctơ một chiều, có cơ sở là $\big\{(1,1,0)\big\}$

Với $\lambda = 5$, không gian riêng J_5 là không gian nghiệm của phương trình $(A - 5I)x = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Nghiệm của hệ là:

$$\begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & \in & \mathbb{R} \\ x_3 & \in & \mathbb{R} \end{cases}$$

Do đó:

$$x \in J_5 \Leftrightarrow x = (-x_2, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0) + x_3(0,0,1); x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow J_5 = span\big\{(-1,1,0), (0,0,1)\big\}$$

Dễ thấy $\big\{(-1,1,0), (0,0,1)\big\}$ độc lập tuyến tính, vậy J_5 là không gian véctơ hai chiều, có cơ sở là $\big\{(-1,1,0), (0,0,1)\big\}$

4.2. Dạng toàn phương trên không gian $\mathbb{R}^n$

4.2.1. Khái niệm

□ **Định nghĩa 4.4.** Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ là hàm bậc hai đẳng cấp đối với các tọa độ $(x_1, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Ma trận đối xứng $A = [a_{ij}]_n$ được gọi là ma trận của dạng toàn phương (trong cơ sở chính tắc).

• **Ví dụ 4.3.** Trong $\mathbb{R}^3$

$$f = 2x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_2x_3 + 8x_1x_3$$

là dạng toàn phương với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

⊕ **Nhận xét**: Từ biểu thức của dạng toàn phương:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right)$$

$$\Rightarrow f = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x^tAx$$

Do đó dạng toàn phương f trên $\mathbb{R}^n$ còn được viết *dạng ma trận*:

$$f = x^tAx; \quad A^t = A$$

Nếu đặt $x = Qy$, với Q là ma trận vuông cấp n, $y \in \mathbb{R}^n$ thì dạng toàn phương f trở thành:

$$f = (Qy)^tA(Qy) = y^t(Q^tAQ)y$$

với ma trận $B = Q^tAQ$ là ma trận đối xứng, do đó f trở thành dạng toàn phương đối với y.

□ **Định nghĩa 4.5.** Cho dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \quad a_{ij} = a_{ji}$$

Đổi biến dạng toàn phương là thực hiện phép đổi biến tuyến tính $x = Qy$ để nhận được dạng toàn phương theo biến mới:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j; \quad b_{ij} = b_{ji}$$

Ma trận vuông Q được gọi là ma trận của phép đổi biến. Phép đổi biến được gọi là không suy biến nếu ma trận đổi biến Q không suy biến.

• **Ví dụ 4.4.** Trong $\mathbb{R}^2$ xét dạng toàn phương:

$$f = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 3x_1x_2$$

Đổi biến:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \end{cases} \quad \text{ma trận đổi biến là: } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ta được:

$$f = 2(y_1 + y_2)^2 - 4(y_1 - y_2)^2 + 3(y_1^2 - y_2^2) = y_1^2 - 5y_2^2 + 12y_1y_2$$

Phép đổi biến trên là không suy biến vì $det(Q) = -2 \neq 0$

4.2.2. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

□ **Định nghĩa 4.6.** Dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^n$:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

có dạng chính tắc nếu $a_{ij} = a_{ji} = 0$ với mọi $i \neq j$.

Như vậy f có dạng chính tắc nếu

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

khi đó ma trận của dạng toàn phương f là ma trận chéo.

□ **Định nghĩa 4.7.** Đưa dạng toàn phương $f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ về chính tắc là dùng phép đổi biến không suy biến $x = Qy$, $det(Q) \neq 0$ để f có dạng chính tắc đối với các biến $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

4.2.3. Thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về chính tắc

Xét dạng toàn phương của n biến:

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j; \quad a_{ij} = a_{ji}; \quad f \not\equiv 0$$

Thuật toán sau đây chỉ ra rằng mọi dạng toàn phương đều có thể đưa về dạng chính tắc, hơn nữa có thể viết cụ thể dạng chính tắc đó cùng phép đổi biến tương ứng.

• **Trường hợp 1.** $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$

Do $f \not\equiv 0$ nên tồn tại hệ số $a_{ij} \neq 0$. Thực hiện phép đổi biến (không suy biến):

$$\begin{cases} x_i = z_i + z_j \\ x_j = z_i - z_j \\ x_k = z_k \ (\forall k \notin \{i, j\}) \end{cases}$$

ta đưa được f về dạng:

$$f = 2a_{ij}(z_i^2 - z_j^2) + \cdots$$

nghĩa là trong biểu thức của dạng toàn phương đã xuất hiện các số hạng bình phương. Khi đó bài toán được đưa về trường hợp 2 dưới đây:

• **Trường hợp 2.** Trong f tồn tại hệ số $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$:

Ta nhóm các số hạng chứa x_1, thêm bớt để xuất hiện bình phương của một tổng như sau:

$$\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + \cdots \\ &= a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1\left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right) + \left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2\right] \\ &\qquad - \left(\frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right)^2 + \cdots \\ &= a_{11}\left[x_1 + \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}}\right]^2 + f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Đặt:

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + \dfrac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ z_k &= x_k \ \forall k = 2, 3, \ldots, n \end{cases}$$

thì có:

$$f = a_{11}y_1^2 + f_2(z_2, z_3, \ldots, z_n) \tag{4.2}$$

Ở đó $f_2(z_2, z_3, \ldots, z_n)$ trong công thức (4.2) là dạng toàn phương của $n-1$ biến $(z_2, z_3, \ldots, z_n)$

Tiếp tục thực hiện đổi biến đối với f_2 theo trường hợp 1 hoặc trường hợp 2 cho đến khi nhận được dạng chính tắc của f:

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}y_i^2$$

Để tìm ma trận đổi biến Q mà phép đổi biến $x = Qy$ đưa f về dạng chính tắc, ta phải giải ngược các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ theo các biến $y_1, y_2, \ldots, y_n$; hoặc từ biểu diễn của y theo x suy ra $y = Px$ và tính $Q = P^{-1}$.

⊕ **Nhận xét**: Thuật toán Lagrange có thể dẫn đến các dạng chính tắc khác nhau của cùng một dạng toàn phương.

Định luật quán tính. Khi một dạng toàn phương được đưa về dạng chính tắc bằng các cách khác nhau thì số các hệ số dương bằng nhau và số các hệ số âm bằng nhau.

Trong dạng chính tắc của dạng toàn phương, số p các hệ số dương được gọi là *chỉ số dương quán tính*, số q các hệ số âm được gọi là *chỉ số âm quán tính*, cặp (p, q) được gọi là *cặp chỉ số quán tính*.

• **Ví dụ 4.5.** Đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc:

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3)\\
&= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + (x_2 + 2x_3)^2\right] - (x_2 + 2x_3)^2 + (4x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3)\\
&= \left[x_1 + (x_2 + 2x_3)\right]^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3\\
&= \left[x_1 + x_2 + 2x_3\right]^2 + 3\left[x_2^2 - \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{x_3^2}{9}\right] - \frac{x_3^2}{3} + 2x_3^2\\
&= \left[x_1 + x_2 + 2x_3\right]^2 + 3\left[x_2 - \frac{x_3}{3}\right]^2 + \frac{5}{3}x_3^2
\end{aligned}$$

Đặt:

$$\begin{cases} y_1 = & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = & x_2 - \dfrac{x_3}{3} \\ y_3 = & x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = & y_1 - & y_2 - & \dfrac{7}{3}y_3 \\ x_2 = & & y_2 + & \dfrac{1}{3}y_3 \\ x_3 = & & & y_3 \end{cases} \tag{4.3}$$

thì dạng toàn phương f có dạng chính tắc:

$$f = y_1^2 + 3y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2$$

Từ phép đổi biến (4.3) có ma trận đổi biến là:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad det(Q) = 1 \neq 0$$

• **Ví dụ 4.6.** Đưa dạng toàn phương trong $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc:

$$f = 2x_1x_2 - 7x_2x_3 + 4x_1x_3$$

Lời giải. Đặt:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2 \\ x_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ z_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ z_3 = x_3 \end{cases} \tag{4.4}$$

ta có:

$$\begin{aligned}
f &= 2(z_1^2 - z_2^2) - 7(z_1 - z_2)z_3 + 4(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 3z_1z_3 + 11z_2z_3\\
&= 2\left[z_1^2 - \frac{3}{2}z_1z_3 + \frac{9z_3^2}{16}\right] - \frac{9z_3^2}{8} - 2z_2^2 + 11z_2z_3\\
&= 2\left[z_1 - \frac{3}{4}z_3\right]^2 - 2\left[z_2^2 - \frac{11}{2}z_2z_3 + \frac{121z_3^2}{16}\right] + \frac{121z_3^2}{8} - \frac{9z_3^2}{8}\\
&= 2\left[z_1 - \frac{3}{4}z_3\right]^2 - 2\left[z_2 - \frac{11z_3}{4}\right]^2 + 14z_3^2
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - \dfrac{3}{4}z_3 \\ y_2 = z_2 - \dfrac{11z_3}{4} \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \quad y_1 \quad + \quad \dfrac{3}{4}y_3 \\ z_2 = \qquad y_2 + \quad \dfrac{11}{4}y_3 \\ z_3 = \qquad\qquad y_3 \end{cases} \tag{4.5}$$

thì dạng toàn phương f có dạng chính tắc:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 14y_3^2$$

Từ các phép đổi biến (4.4) và (4.5) suy ra:

$$\begin{cases} x_1 = \quad y_1 + \quad y_2 + \quad \dfrac{7}{2}y_3 \\ x_2 = \quad y_1 - \quad y_2 - \quad 2y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\qquad y_3 \end{cases} \quad \text{Ma trận đổi biến là: } Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{7}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad det(Q) = -2 \neq 0$$

• **Ví dụ 4.7.** Tìm cặp chỉ số quán tính của dạng toàn phương sau trong $\mathbb{R}^4$:

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 - 3x_1x_4 + 4x_2x_4 + 3x_3x_4$$

Lời giải. Đưa dạng toàn phương về chính tắc:

$$\begin{aligned} f &= \left[x_2^2 + 2x_2(-x_1 + 2x_4) + (-x_1 + 2x_4)^2\right] - (2x_4 - x_1)^2 + x_1^2 + 4x_4^2 - x_1x_3 - 3x_1x_4 + 3x_3x_4 \\ &= (x_2 - x_1 + 2x_4)^2 + x_1x_4 - x_1x_3 + 3x_3x_4 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_4 \\ x_2 = z_1 - z_4 \\ x_3 = z_3; \qquad x_2 = z_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + z_1^2 - z_4^2 - (z_1z_3 + z_3z_4) + 3(z_1z_3 - z_3z_4) \\ &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + (z_1^2 + 2z_1z_3 + z_3^2) - (z_4^2 + 4z_4z_3 + 4z_3^2) + 3z_3^2 \\ &= (z_2 + z_1 - 3z_4)^2 + (z_1 + z_3)^2 - (z_4 + 2z_3)^2 + 3z_3^2 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_1 + z_2 - 3z_4 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = z_4 + 2z_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = -y_1 + y_2 - 5y_3 + 3y_4 \\ z_3 = y_3 \\ z_4 = -2y_3 + y_4 \end{cases}$$

thì f có dạng chính tắc:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + 3y_3^2 - y_4^2$$

với phép đổi biến

$$\begin{cases} x_1 = \quad y_1 \qquad\quad +3y_3 + y_4 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \quad -5y_3 + 3y_4 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad y_3 \\ x_4 = \quad y_1 \qquad\quad +y_3 - y_4 \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad det(Q) = -2 \neq 0$$

Do đó từ dạng chính tắc của f suy ra cặp chỉ số quán tính là $(p, q) = (3, 1)$

4.2.4. Dạng toàn phương xác định dương

□ **Định nghĩa 4.8.** Cho f là một dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

- f là dạng toàn phương xác định dương nếu $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- f là dạng toàn phương xác định âm nếu $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

⊕ **Nhận xét**: $f(x)$ xác định âm $\Leftrightarrow -f(x)$ xác định dương.

• **Ví dụ 4.8.** Xét các dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$:

a) $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2$ là dạng toàn phương xác định dương;
b) $g = -x_1^2 - 4x_2^2 - 7x_3^2$ là dạng toàn phương xác định âm;
c) $h = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2$ không xác định dương cũng không xác định âm;
d) $l = 3x_1^2 + 5x_3^2$ không xác định dương cũng không xác định âm;
e) $\phi = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$ xác định dương, vì:

$$\begin{aligned}
\phi &= \left[x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2\right] - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 - 8x_2x_3 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 + 3x_3 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \ > \ 0\ \forall x \neq \theta
\end{aligned}$$

⊕ **Nhận xét**: Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^n$ là xác định dương nếu cặp chỉ số quán tính của nó là $(n, 0)$, là xác định âm nếu cặp chỉ số quán tính của nó là $(0, n)$.

• **Ví dụ 4.9.** Đưa dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau về dạng chính tắc, tìm m để dạng toàn phương là xác định âm:

$$f = -12mx_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4mx_1x_3$$

Lời giải. Sử dụng thuật toán Lagrange đưa dạng toàn phương về chính tắc:

$$\begin{aligned}
f &= -\left[x_2^2 + 2x_2(4x_1 - 2x_3) + (4x_1 - 2x_3)^2\right] + (4x_1 - 2x_3)^2 - 12mx_1^2 - 6x_3^2 + 4mx_1x_3 \\
&= -(x_2 + 4x_1 - 2x_3)^2 + (16 - 12m)x_1^2 - 2x_3^2 + (4m - 16)x_1x_3 \\
&= -(x_2 + 4x_1 - 2x_3)^2 - 2\left[x_3^2 - 2(m-4)x_3x_1 + (m-4)^2x_1^2\right] + 2(m-4)^2x_1^2 + (16 - 12m)x_1^2 \\
&= -\left[x_2 + 4x_1 - 2x_3\right]^2 - 2\left[x_3 - (m-4)x_1\right]^2 + 2(m^2 - 14m + 24)x_1^2
\end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 + 4x_1 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 - (m-4)x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = & y_1 \\ x_2 = & (2m-12)y_1 + y_2 \quad +2y_3 \\ x_3 = & (m-4)y_1 \qquad\qquad +y_3 \end{cases}$$

Ma trận đổi biến là:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2m-12 & 1 & 2 \\ m-4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad det(Q) = 1 \neq 0$$

Khi đó f có dạng chính tắc:

$$f = -y_2^2 - 2y_3^2 + 2(m^2 - 14m + 24)y_1^2$$

Để f xác định âm thì trong dạng chính tắc của f phải có 3 hệ số âm, do đó:

$$m^2 - 14m + 24 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 12$$

△ **Định lý 4.1.** *[Sylvester] Cho dạng toàn phương f trên $\mathbb{R}^n$ với ma trận là A. Gọi D_i là các định thức con của A tạo bởi i hàng và i cột góc trên bên trái của A (D_i còn được gọi là định thức con chính cấp i của A). Khi đó:*

a. *f là xác định dương khi và chỉ khi $D_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$*

b. *f là xác định âm khi và chỉ khi $(-1)^i D_i > 0\ \forall i = 1, 2, \ldots, n$*

• **Ví dụ 4.10.** Xét dạng toàn phương sau trên $\mathbb{R}^3$:

$$\phi = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^3 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$$

Ta có ma trận của ϕ là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính là:

$$D_1 = |1| = 1 > 0; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vậy dạng toàn phương ϕ là xác định dương trên $\mathbb{R}^3$.

• **Ví dụ 4.11.** Tìm m để dạng toàn phương sau là xác định dương trên $\mathbb{R}^3$:

$$g = mx_1^2 + (m+5)x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Lời giải. Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} m & 6 & 2 \\ 6 & m+5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính của A là:

$$D_1 = |m| = m; \quad D_2 = \begin{vmatrix} m & 6 \\ 6 & m+5 \end{vmatrix} = m^2 + 5m - 36$$

$$D_3 = det(A) = m\begin{vmatrix} m+5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & m+5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = m(m-4) + 2(8-2m) = (m-4)^2$$

$$g \text{ xác định dương } \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m & > 0 \\ m^2 + 5m - 36 & > 0 \\ (m-4)^2 & > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -9; m > 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

Vậy với $m > 4$ thì dạng toàn phương g đã cho là xác định dương.

• **Ví dụ 4.12.** Tìm m để dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau xác định âm:

$$f = -12mx_1^2 - x_2^2 - 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4mx_1x_3$$

Lời giải. Ma trận của dạng toàn phương là:

$$A = \begin{bmatrix} -12m & -4 & 2m \\ -4 & -1 & 2 \\ 2m & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Các định thức con chính của A là:

$$D_1 = |-12m| = -12m; \quad D_2 = \begin{vmatrix} -12m & -4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 12m - 16$$

$$\begin{aligned} D_3 = det(A) &= -12m\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2m & -6 \end{vmatrix} + 2m\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2m & 2 \end{vmatrix} \\ &= -12m(2) + 4(24-4m) + 2m(2m-8) = 4m^2 - 56m + 96 = 4(m^2 - 14m + 24) \end{aligned}$$

$$f \text{ xác định âm } \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \\ D_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m & < 0 \\ 12m - 16 & > 0 \\ m^2 - 14m + 24 & < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > \dfrac{4}{3} \\ 2 < m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 12$$

Vậy với $2 < m < 12$ thì dạng toàn phương f đã cho là xác định âm.

Bài tập chương 4

1. Tìm các trị riêng và cơ sở của không gian riêng của các ma trận sau:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 18 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} -7 & 5 & -3 \\ -12 & 9 & -6 \\ -6 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 7) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 8) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$ 10) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ 11) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ 12) $\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$

13) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 14) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 16) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ĐS: 1) $\lambda = 3, (1, 2); \lambda = -1, (0, 1)$ 2) $\lambda = 1, (1, 1)$

3) $\lambda = 0, (1, 1, -3); \lambda = 1, (1, 0, -6), (0, 1, 2)$

4) $\lambda = -1, (-1, -1, 1)$ 5) $\lambda = 0, (1, 2, 1);\ \lambda = -1, (5, 6, 0), (-1, 0, 2)$

6) $\lambda = -2, (-1, 1, -4), \lambda = 2, (-1, 0, 1), \lambda = 3, (-1, 1, 1)$

7) $\lambda = -1, (0, 1, -1)$ 8) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, (1, 2, 0), (0, 0, 1)$

9) $\lambda_1 = 1, (1, 1, 1); \lambda_2 = \lambda_3 = 0, (1, 2, 3)$

10) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, (3, 1, 1)$ 11) $\lambda_1 = 3, (1, 2, 2); \lambda_2 = \lambda_3 = -1, (1, 2, 1)$

12) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (2, 1, 0), (-1, 0, 1); \lambda_3 = -1, (3, 5, 6)$ 13) $\lambda = 1, (1, 2, 1)$

14) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, (0, 1, -1, 1); \lambda_3 = \lambda_4 = 3, (0, 0, 0, 1)$

15) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1); \lambda_3 = \lambda_4 = 0, (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$

16) $\lambda = 2, (1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, 1)$

2. Tìm phép biến đổi tuyến tính để đưa mỗi dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau đây về chính tắc và cho biết dạng chính tắc đó:

(a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$; (b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 3x_2x_3 + 4x_1x_3$;
(c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$; (d) $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 - 27x_2x_3 + 8x_1x_3$;
(e) $2x_1x_2 - 3x_2x_3 - 5x_1x_3$; (f) $-12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 - 24x_1x_3$.

ĐS: (a) $f = y_1^2 + y_2^2 - 9y_3^2, Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $f = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $f = 2y_1^2 - 3y_2^2 + 3y_3^2, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - \dfrac{15}{2}y_3^2, Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $f = -3y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Tìm m để mỗi dạng toàn phương sau đây là xác định dương trên không gian tương ứng:

(a) $5x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$; (b) $2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 2x_1x_3$;
(c) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2mx_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3$; (d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2mx_1x_2 + 6x_2x_3 + 10x_1x_3$.

ĐS: (a) $m > 2$; (b) $-\frac{\sqrt{15}}{3} < m < \frac{\sqrt{15}}{3}$; (c) $-\frac{4}{5} < m < 0$; (d) Vô nghiệm

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí - Tạ Văn Đĩnh - Nguyễn Hồ Quỳnh (2021), *Toán học cao cấp (Tập 1) - Đại số và hình học giải tích*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Hoàng Xuân Sính (2000), *Đại số đại cương*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[3] Lê Tuấn Hoa (2005), *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[4] Jean-Marie Monier (2003), *Giáo trình Toán - Đại số 2*, Nhà xuất bản giáo dục.

[5] Nguyễn Hữu Việt Hưng (2001), *Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.